3

> Решение задач является наиболее характерной и специфической разновидностью свободного мышления
>
> У. ДЖЕЙМС

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

А. М. ВЕРШИК, д-р физ.-мат. наук
А. А. ЛОДКИН, канд. физ.-мат. наук

СТУДЕНЧЕСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНКУРС В ЛЕНИНГРАДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Конкурсы решения задач для студентов, проводимые на математико-механическом факультете Ленинградского госуниверситета, включали обычно два десятка трудных задач и несколько оригинальных проблем, предложенных сотрудниками университета. Отдельно подбирались менее сложные задачи для студентов первого курса.

В 1987 г. конкурс проводился Ленинградским математическим обществом, выделившим премиальный фонд. Членам общества было предложено подавать задачи на конкурс. Поступило более сорока задач, большая часть которых была включена в конкурс.

По цели и характеру задач конкурс принципиально отличается от студенческих олимпиад. Организаторы считают важным приобщать студентов к небольшим самостоятельным исследованиям, а не к поискам одного эффектного приема, с помощью которого решается задача. Поэтому составителям задач предлагалось делить их на вводную (более простую) и исследовательскую части. Во многих случаях задачи являются результатом адаптации недавних серьезных математических результатов, допускались также и проблемы. Особенностью конкурса явилось включение задач по программированию.

По условиям конкурса, рассчитанного примерно на учебный год, решения должны были подаваться в письменном виде. Участниками могли быть студенты всех курсов всех факультетов (в первую очередь, математических и физического). В жюри входили *А. М. Вершик* (председатель), *А. А. Лодкин* (секретарь), *С. С. Валландер*, *С. А. Виноградов*, *С. В. Востоков*, *В. Ф. Лазуткин*, *А. С. Меркурьев*, *А. В. Осипов*, *Г. С. Цейтин* (преподаватели ЛГУ), *Н. В. Иванов* (ЛОМИ), *А. И. Барвинок* (аспирант ЛГУ).

Весной 1988 г. были рассмотрены результаты конкурса и объявлены победители, ими стали студенты III курса *И. Асеев* и *А. Шульман*.

Ниже приведены задачи конкурса 1987—1988 гг., в скобках указаны авторы оригинальных задач. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой, а проблемы — двумя звездочками.

Задачу № 8, решение которой автору было не известно, решил студент III курса *А. Тепляев*.

1. (В. Ф. Л е в). Пусть

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \text{н. о. д. } (i, j),$$

$$g_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \text{н. о. д. } (i, j) \right)^{1/n^2}.$$

Найдите асимптотику чисел a_n и g_n $(n \to \infty)$.

2. (А. С. М е р к у р ь е в). Даны n целых чисел.

1) При каких n неупорядоченное множество из C_n^2 попарных сумм этих чисел однозначно их определяет?

2) * Что можно сказать, если заменить попарные суммы суммами троек?

3. (С. В. В о с т о к о в). Пусть p — простое число, $f(x) = x + c_2x^2 + \ldots$ — ряд с рациональными коэффициентами, удовлетворяющий условию: $f(x) = \frac{f(x^p)}{p}$ имеет p-целые, т. е. не содержащие множителя p в знаменателе, коэффициенты. Докажите, что ряд $F(x) = f^{-1}(af(x))$, где a — целое число (здесь f^{-1} — ряд, обратный к f относительно суперпозиции), тоже имеет p-целые коэффициенты.

Докажите аналогичное утверждение для ряда F, если удовлетворяет условию: ряд

$$f(x)+\frac{s_1}{p}f(x^p)+\dots+\frac{s_m}{p}f(x^{p^m}),$$

$$s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_m\in\mathbf{Z},$$

имеет p-целые коэффициенты.

4. (С. В. Востоков). Пусть $\mathbf{Z}_p[[x]]$ — множество степенных рядов с p-адическими коэффициентами (см.: Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М. : Наука.— 1972).

1) Докажите, что существует

$$\lim_n \frac{(1+x)^{p^n}-1}{p^n},$$

и найдите его (предел определителя покоэффициентно).

2) Докажите, что для многочлена $f(x)=px+x^p$ существует

$$\lim_n \frac{f^{(n)}(x)}{p^n},$$

где $f^{(n)}$ — n-я итерация ряда f, т. е.

$$f^{(2)}(x)=f(f(x)),\ \dots,\ f^{(n)}(x)=f(f^{(n-1)}(x)).$$

3) Докажите, что для ряда $f(x)=pg(x)+h(x^p)$, где $g(x)=x+\dots,\ h(x)=x+\dots\in\mathbf{Z}_p[[x]]$, существует $\lim\limits_n \dfrac{f^{(n)}(x)}{p^n}$.

4) Найдите вид произвольного ряда $f(x)$ из $\mathbf{Z}_p[[x]]$, для которого существует предел

$$\lim_n \frac{f^{(n)}(x)}{p^n}.$$

5)* Докажите, что найдется ряд $f(x)$ типа 3), для которого

$$\lim_n \frac{f^{(n)}(x)}{p^n}=x+\frac{x^p}{p}+\frac{x^{p^2}}{p^2}+\dots,$$

и найдите этот ряд.

5. (Г. И. Натансон). Докажите, что для $p\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{[np]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}(k-np)^2\leqslant\frac{1}{2}np(1-p).$$

6. (А. Л. Вольберг). Пусть $\overline{\mathcal{D}}=\{z:|z|\leqslant 1\}$, а (p_1, p_2) и (q_1, q_2) — две пары полиномов, причем полиномы каждой из пар не имеют общих нулей в $\mathcal{D}$.

1) Докажите, что найдутся такие полиномы x_1, x_2, что полиномы $p_1x_1+p_2x_2$ и $q_1x_1+q_2x_2$ не имеют нулей в $\overline{\mathcal{D}}$.

2) Докажите, что для трех пар полиномов утверждение, вообще говоря, не верно.

7. (Д. Ю. Григорьев). ***Определение.*** E — функция от n переменных $x_1, \dots, x_n$ определяется индуктивно:

а) константы 1, —1 являются E-функциями;

б) $x_1, \dots, x_n$ являются E-функциями;

в) если p, q есть E-функции, то и $p+q$, pq, p/q, $\exp(p)$ есть E-функции.

I. Пусть $n=1$.

1) Докажите, что нетривиальная E-функция имеет конечное число вещественных корней.

2) Оцените число этих корней через число C операций в построении E-функции.

3) Оцените модули этих корней через число C.

II*. Пусть n — произвольно.

1) Докажите, что множество вещественных нулей E-функции имеет конечное число компонент связности.

2) Оцените сверху число этих компонент через число операций, как при $n=1$.

3) Для каждой неограниченной компоненты множества нулей оцените сверху радиус шара с центром в O, который ее пересекает.

4) Для каждой ограниченной компоненты оцените сверху радиус шара с центром в O, который ее содержит.

8.** (Б. М. Макаров). Пусть X — пространство с мерой μ, $A_k\subset X$ — измеримые множества, $k\in\mathbf{N}$. Докажите, что:

1) если $\mu A_k>\frac{1}{2}$, $k\in\mathbf{N}$, $\mu(A_k\cap A_l)\leqslant\frac{1}{4}$ при $k\neq l$, то $\mu=\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)>1$;

2) если $\mu A_k>\frac{1}{2}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, $\mu(A_k\cap A_l)\leqslant\frac{1}{4}$ $(k\neq l)$, то найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N}A_k\right)>1+\delta$ для любого достаточно большого N.

9. (А. Л. Вольберг). Докажите, что

1) для всякого компакта $K \subset \mathbf{R}$ найдется вероятностная мера μ на K, для которой при всех $x \in K$ и $r > 0$ выполняется неравенство

$$\mu B(x, 2r) \leqslant A\mu B(x, r),$$

где A — абсолютная (не зависящая от K) постоянная, $B(x, r)$ — шар с центром в x и радиусом r;

2) утверждение задачи 1) эквивалентно следующему: для любого набора интервалов (не обязательно различных) $\{I_j\}_{j=1}^N$ в $\mathbf{R}$ с центрами в точках x_j и интервалов $\{\tilde{I}_j\}_{j=1}^N$ с теми же центрами, но вдвое большей длиной, для каждого $i = 1, \ldots, N$ обозначим через m_i (соответственно $\tilde{m}_i$) число интервалов I_j (соответственно $\tilde{I}_j$), содержащих x_i. Тогда найдется такое i_0, что

$$\frac{\tilde{m}_{i_0}}{m_{i_0}} \leqslant A,$$

где A — абсолютная постоянная.

10. (Е. Д. Глускин). В $\mathbf{R}^n$ задана некоторая сферически инвариантная мера. Среди всех параллелепипедов с центром в начале координат и заданными высотами требуется найти параллелепипед наименьшей меры. Рассмотрите случаи, когда мера является 1) мерой Лебега; 2) гауссовой мерой (т. е. мерой с плотностью $(2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/2}$; 3) * общий случай.

11. (Б. М. Макаров). Пусть $\{a_k\}_{k=1}^N$ — произвольная последовательность положительных чисел,

$$J(a_1, \ldots, a_N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^N a_k e^{-a_k t^2} \right)^{1/2} dt.$$

Докажите, что:

1) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant J(a_1, \ldots, a_N) \leqslant \sqrt{\frac{\pi N}{2}}$;

2) $J(1, 2, \ldots, N) \leqslant C_1$;

3) $J(1, 2, \ldots, 2^{N-1}) \geqslant C_2\sqrt{N}$;

4) $J(a_1, \ldots, a_N) \leqslant C_3\sqrt{\ln(M+1)}$, где $M = \frac{\max a_k}{\min a_k}$;

5) если $1 \leqslant M \leqslant e^N$, то

$$\max_{1 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_N \leqslant Ma_1} J(a_1, \ldots, a_N) \geqslant C_4\sqrt{\ln(M+1)}$$

(C_1, C_2, C_3, C_4 — положительные абсолютные постоянные).

12. (А. М. Вершик). Пусть Φ — функция, заданная на $(0, +\infty)$ следующими соотношениями:

$$\Phi(x) = 1 \text{ при } x > 1;$$

$$\Phi(x) = \int_0^x \Phi\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{t} \text{ при } x \leqslant 1.$$

1) Является ли эта функция бесконечно дифференцируемой и если нет, то в каких точках?

2) Найдите асимптотику $\Phi(x)$ при $x \to 0$.

3) * Пусть S_n — симметричная группа, $n_1(g)$ — длина максимального цикла подстановки $g \in S_n$. Докажите, что

$$\Phi(\alpha) = \lim_n \frac{1}{n!} \# \{g \in S_n \; : \; n_1(g) \leqslant \alpha n\}$$

($\#$ — число элементов в множестве).

13. (Обработка А. М. Вершика). Пусть $\boldsymbol{n}$ — множество из n элементов, а $\Lambda = \{\lambda \; : \; 2^{\boldsymbol{n}} \to \mathbf{R}_+\}$ — конус всех неотрицательных функций, заданных на совокупности всех его подмножеств. Выделим в Λ выпуклое подмножество Λ_0 следующим образом:

$$\Lambda_0 = \left\{ \lambda \in \Lambda \;:\; \forall\, i \in \boldsymbol{n} \sum_{S \ni i} \lambda(S) = 1, \quad \lambda(\varnothing) = 0 \right\}.$$

1) Докажите, что Λ_0 — выпуклый многогранник с не более чем $C_{2^n}^n$ вершинами.

2) Найдите лучшую по порядку оценку числа вершин.

3) ** Дайте оценку снизу минимального ненулевого значения, которое может иметь вершина λ как функция на подмножествах $\boldsymbol{n}$.

14. (A. Connes, U. Haagerup, E. Størmer) [1].

Пусть $0 < a < b$, $K_{a,b}$ — множество таких неотрицательных невозрастающих функций, заданных на $[a, b]$, что $\int_a^b f = 1$ и $af(a) = bf(b)$. Докажите, что

$$\sup_{f, g \in K_{a,b}} \int_a^b f \vee g = 2\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

$$(f \vee g(x) = \max(f(x), g(x))).$$

[1] См. Lecture Notes in Mathematics.— 1985.— Vol. 1132.— P. 93, 94.

15. (А. В. О с и п о в). Пусть Γ_1 — двухзвенная ломаная с концами в точках $(0, 1)$ и $(1, 0)$ и вершиной в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Пусть $\delta_1 = \frac{1}{4}$. Определим Γ_2 как трехзвенную ломаную с теми же концами и вершинами, лежащими на звеньях Γ_1 на расстоянии, составляющем δ_1-ю часть от длины звеньев Γ_1 от вершины ломаной Γ_1. Если определена Γ_{n-1}, имеющая k звеньев, то положим $\delta_{n-1} = (\delta_{n-2})^2$, а Γ_n определим как $(2k-1)$-звенную ломаную с вершинами, лежащими на звеньях Γ_{n-1} на расстоянии, составляющем δ_{n-1}-ю часть их длины, от их вершин. Пусть Γ_n является графиком функции f_n. Докажите, что

1) последовательность $(f_n)_1^\infty$ равномерно сходится (обозначим через f ее предел).

2) f переводит рациональные точки в рациональные и иррациональные в иррациональные.

16. (А. В. О с и п о в). Пусть функция $u \in \mathbf{C}^2([0, 1])$ такова, что $u(0) = u(1) = 0$. Тогда

$$\int_0^1 \left| \frac{u''(t)}{u(t)} \right| dt > 4$$

(если интеграл расходится, неравенство считается выполненным). Покажите, что оценка точна, т. е. правую часть нельзя заменить на $4 + \varepsilon$.

У к а з а н и я. Воспользуйтесь формулой

$$u(t) = (1-t)\int_0^t sp(s)\,u(s)\,ds + t\int_t^1 (1-s)\,p(s)\,u(s)\,ds,$$

где через $p(s)$ обозначена величина $-\frac{u''(s)}{u(s)}$. Рассмотрите функцию $f(t) = t(1-t)$. После сжатия $f(kt)/k$ при больших k «вклейте» ее в «уголок» (рис. 1).

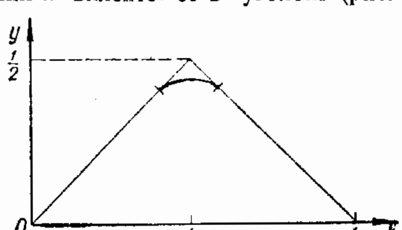

Рис. 1

17. (А. В. О с и п о в). Рассматривается уравнение

$$y' = y^2 + x.$$

1) Докажите, что существует единственное решение $y = y_1(x)$ такое, что $y_1(x)$ определено при всех $x < 0$ и, кроме того, $y_1(x) < 0$ при всех $x < 0$.

2) Пусть $y_0(x)$ — решение с начальными данными $y_0(0) = 0$. Пусть $[0, \alpha)$ — максимальный промежуток продолжимости вправо решения $y_0(x)$. Докажите, что $\alpha < +\infty$, и оцените α с точностью до 0,1.

18. (В. Е. Ч е р н ы ш е в). Рассматривается система

$$\dot x = \lambda x + f(x, y),$$

$$\dot y = -\mu x + g(x, y),$$

где $f, g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$, $f, g = O(x^2 + y^2)$ при $x^2 + y^2 \to 0$. Известно, что у системы есть две пары траекторий, примыкающих к началу и имеющих касательными в начале оси координат (см.: П е т р о в с к и й И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.— Гл. VII); Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— Гл. VII).

1) Докажите, что если n-струи для f, g нулевые, то касание имеет порядок $n - 1$;

2) если f, g — плоские функции, т. е. любая струя нулевая, то порядок касания бесконечный.

19. (О. И. И в а н о в). Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\dot x = u(x, y),$$

$$\dot y = v(x, y),$$

где u и v — это соответственно вещественная и мнимая части голоморфной в окрестности нуля функции f. Пусть $f(0) = 0$, а $f'(0)$ — чисто мнимое число (отличное от нуля). Докажите, что все траектории системы в некоторой окрестности нуля являются замкнутыми.

20. (В. Ф. Л а з у т к и н). Имеется пещера конечного объема с гладкими стенками и с отверстием наружу.

Докажите, что почти всякий луч, входящий извне в пещеру, после ряда отражений от стенок по закону геометрической оптики выйдет наружу.

Литература. Дж. Биркгоф. Динамические системы.— М.— Л. : Гостехиздат.— 1941.— 320 с.

21. (Б. С. Павлов). Пусть G — ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ с гладкой границей Γ. Определим оператор усреднения A в $C(G)$ формулой

$$Au(x) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\|y-x\|=r} u(y)\, d\sigma(y),$$

где $r = r(x) = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x, \Gamma)$, σ — мера Лебега на окружности, dist — расстояние.

1) Методом сжимающих отображений покажите, что если G выпукла, то для $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$, Au также принадлежит $\mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$, причем последовательность $A^n u$ сходится в этой области со скоростью геометрической прогрессии.

2) Проверьте, имеет ли место сходимость $A^n u$, если отказаться от условия выпуклости G. Если сходимости нет, то попробуйте добиться ее, определив усреднение иначе (например, варьируя $r(x)$).

3) * Дайте прямую проверку того, что при условии, когда фиксирована функция $f = \tilde{u}|_\Gamma$, $\tilde{u} \in \mathrm{Lip}_\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$, единственная устойчивая неподвижная точка u оператора A является решением задачи Дирихле.

Литература. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. 2. М. : Наука.

22. (А. М. Вершик)

1) В единичном квадрате имеется n точек. Докажите, что их можно перенумеровать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x_1 - x_2\|^2 + \|x_2 - x_3\|^2 + \cdots + \|x_{n-1} - x_n\|^2 + \\ + \|x_n - x_1\|^2 \leqslant 4$$

($\|\cdot\|$ — эвклидова норма). Сначала выведите оценку, равномерную по n.

2) Найдите многомерное обобщение этой задачи.

23. (В. А. Залгаллер). В пространстве даны две непересекающиеся прямые и две точки. Найдите длину кратчайшего пути, соединяющего эти две точки и проходящего через эти две прямые.

24. (Н. Ю. Нецветаев). 1) В квадрате с ребром 1 расположены два непересекающихся квадрата с ребрами a, b. Докажите, что $a + b \leqslant 1$.

2) Докажите это же утверждение для кубов.

3) * Докажите это же утверждение для n-мерного пространства.

25. (Н. Ю. Нецветаев). На плоскости фиксирован некоторый прямоугольник. Рассмотрим всевозможные конечные наборы евклидовых дисков, лежащих в этом прямоугольнике и имеющих попарно непересекающиеся внутренности. Набор назовем *плотным*, если любая компонента дополнения до этих дисков в прямоугольнике является криволинейным треугольником (стороны — дуги окружностей или стороны прямоугольника). Параметрами набора назовем координаты центров дисков и их радиусы.

1) Докажите, что сколь угодно малым изменением параметров данного набора можно получить такой набор, что его можно будет добавлением конечного числа дисков превратить в плотный.

2) Рассмотрите аналогичное утверждение для областей, отличных от прямоугольников.

в) * Рассмотрите аналогичное утверждение для трехмерного пространства.

26. (А. М. Вершик). Какими могут быть углы $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

1) для данного числа n в эвклидовом пространстве существует система из n прямых $l_1, \ldots, l_n$, причем

а) l_i, l_j ортогональны, если $|i - j| \geqslant 2$;

б) угол между прямыми l_i и l_{i+1} равен α, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$;

2) для любого натурального n можно найти систему прямых с условиями а) и б).

3) * Для любого натурального n можно указать такую систему подпространств $L_1, \ldots, L_n$ данной размерности (например, два), что ортогональные проекторы $P_1, \ldots, P_n$ (P_i — проектор на L_i) подчинены соотношениям:

а) $P_i P_j = P_j P_i$, $|i - j| \geqslant 2$, $P_i \neq P_j$, $i \neq j$;

б) $P_i P_{i+1} P_i - P_{i+1} P_i P_{i+1} = \cos^2\alpha\,(P_i - P_{i+1})$.

Примечание. Задача 3) переходит в задачу 2), если $\dim L_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

27. (Б. С. Цирельсон). Рассмотрим множество C всех тех матриц c размера 2×2, которые могут быть представлены в виде

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \langle x_2, y_2 \rangle \\ \langle x_2, y_1 \rangle & \langle x_2, y_2 \rangle \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 — векторы на плоскости, длина которых не превосходит единицы, а в остальном — произвольные; $\langle x, y \rangle$ обозначает скалярное произведение.

1) Докажите, что множество C выпукло.

2) Опишите множество C при помощи системы алгебраических неравенств четвертой и шестой степеней с четырьмя переменными: c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}.

3) * Исследуйте границу множества C. Сколько она содержит гладких трехмерных, двумерных, одномерных кусков, вершин? как они пересекаются? чем характерны соответствующие наборы из четырех векторов x_1, x_2, y_1, y_2?

4) ** Рассмотрите аналогичные вопросы для матриц произвольного размера $m \times n$ (не ограничиваясь векторами на плоскости).

28. (Н. В. Иванов). Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — действительные числа, линейно независимые над кольцом $\mathbf{Z}$ целых чисел. Пусть $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1 = \{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) : \theta_j \in \mathbf{R}\}$ и пусть $l\colon \mathbf{R} \to T^3$ — отображение $t \mapsto (e^{i\lambda_1 t}, e^{i\lambda_2 t}, e^{i\lambda_3 t})$. Как известно, l инъективно и $l(\mathbf{R})$ плотно в T^3. Очевидно, что $l(\mathbf{R})$ пересекается с $T^2 = S^1 \times S^1 \times 1 \subset T^3$.

1) Докажите, что для любого отображения $f\colon T^2 \to T^3$, гомотопного включению $i\colon T^2 \subset T^3$, образ $f(T^2)$ пересекается с $l(\mathbf{R})$.

4) * Рассмотрите аналогичный вопрос для старших размерностей.

29. (Ю. В. Матиясевич). Рассмотрим триангуляцию сферы, состоящую из $2n$ треугольников. Пусть ребра триангуляции занумерованы числами $0, 1, \ldots, 3n-1$ и при этом ребра k-го треугольника имеют номера r_k, s_k, t_k при обходе треугольника по часовой стрелке: $k = 1, \ldots, 2n$.

Правильной раскраской ребер триангуляции назовем отображение множества всех ребер в какое-либо фиксированное трехэлементное множество, при котором разные ребра любого треугольника имеют разные образы. Обозначим через C количество правильных раскрасок

(например, если $n = 1$, то $C = 6$). Известно [1], что гипотеза (теорема [2]) о четырех красках эквивалентна утверждению: $C > 0$.

Рассмотрим формальный многочлен

$$\prod_{k=1}^{2n} (x_{r_k}^2 x_{s_k} + x_{s_k}^2 x_{t_k} + x_{t_k}^2 x_{r_k} - x_{r_k} x_{s_k}^2 - x_{s_k} x_{t_k}^2 - x_{t_k} x_{r_k}^2).$$

Раскрыв скобки, получим алгебраическую сумму 6^{2n} одночленов. Назовем два таких одночлена эквивалентными, если они имеют одинаковые знаки и для любого i степень, в которой переменная x_i входит в один из одночленов, сравнима по mod 3 со степенью этой же переменной в другом одночлене. Обозначим через α_j (соответственно через β_j) количество одночленов, эквивалентных одночлену

$$\sigma x_0^{j_0} x_1^{j_1} \ldots x_{3n-1}^{j_{3n-1}},$$

где $0 \leqslant j_i \leqslant 2$, $j = \sum_{i=0}^{3n-1} j_i 3^i$, а $\sigma = 1$ в определении α_j и $\sigma = -1$ в определении β_j.

Докажите, что:

1) $C = \alpha_0 - \beta_0$; 2) $C = \max\limits_j (\alpha_j - \beta_j)$;

3) $C = 2 \max\limits_j (\beta_j - \alpha_j)$; 4) $C = 3^{-3n} \sum\limits_{j=0}^{3^{3n}-1} (\alpha_j - \beta_j)^2$;

5) $C = 3^{-2n} \sum\limits_{j=0}^{3^{3n-1}} (\alpha_j^2 - \beta_j^2)$; 6) $\alpha_j \equiv \beta_j \pmod 3$;

7) для любого простого p, кроме $p = 3$, существует такое j, что $\alpha_j \not\equiv \beta_j \pmod p$. Предполагается, что $C > 0$;
8) * если $n \equiv 1 \pmod 2$, то $\alpha_j \equiv 0 \pmod 2$; если $n \equiv 0 \pmod 2$, то $\beta_j \equiv 0 \pmod 2$.

Последнее означает, что на множестве из 6^{2n} одночленов можно определить симметричное отношение сопряженности, обладающее следующими свойствами: а) для каждого одночлена существует только один, с ним сопряженный; б) сопряженные одночлены эквивалентны; е) если $n \equiv 1 \pmod 2$, то среди многочленов со знаком $+$ нет самосопряженных, а среди многочленов, эквивалентных данному отрицательному, есть не более одного самосопряженного; аналогично для $n \equiv \pmod 2$ с заменой $+$ на $-$ и наоборот.

Примечание. Даже при малых n рассматриваемый многочлен имеет очень много слагаемых, поэтому может оказаться целесообразным использование ЭВМ для построения примеров.

Литература. 1. Харари Ф. Теория графов. М. : Мир, 1973.— 300 с. 2. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. Ill. J. Math., 1977, 21, N 1, p. 429—567.

30. 1) Последовательность Морса $\omega = (\omega_k) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$ определяется равенствами $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_j = 1 - \omega_{j-2^n}$ при $2^n < j \leqslant 2^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Докажите, что:

а) каждое слово $B = (\omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+p})$ встречается в ней бесконечно много раз (свойство рекуррентности);

б) ни одно слово B не встречается в ω три раза подряд (т. е. в ω не входит слово BBB).

2)** (А. Н. Лившиц). Последовательность $(x_n)_1^\infty$ единиц и двоек строится следующим образом: она начинается с 22, ни одна цифра не встречается в ней три раза подряд, число цифр в n-й группе соседних одинаковых цифр (1 или 2) равно x_n:

$$\underbrace{22}_{2}\underbrace{11}_{2}\underbrace{2}_{1}\underbrace{1}_{1}\underbrace{22}_{2}\ldots$$

Справедливы ли следующие утверждения:

а) последовательность рекуррентна;

б) с каждым словом в последовательность входит слово, полученное из него инверсией всех цифр ($a \mapsto 3 - a$)?

31. (Н. К. Косовский). Запишите средствами исчисления предикатов условие, истинное тогда и только тогда, когда $x = 2^y$. Разрешается использовать предикат равенства и функции сложения, умножения, но не возведения в степень и численные константы.

32. (Г. С. Цейтин). Пусть имеются файлы, содержащие некоторый текст в двух вариантах, отличающихся друг от друга изменениями, объем которых достаточно мал по сравнению с объемом этого текста. Необходима программа, которая позволила бы в достаточно короткой и наглядной форме получать полный список различий между такими текстами, причем этот список должен позволять автоматически по одному из вариантов получать другой.

1) Дайте точную постановку задачи и приемлемый алгоритм ее решения.

Примечание. Известно корректное и достаточно удобное решение, реализованное в ОС UNIX, но при этом перестановка двух больших кусков текста не опознается как единичное изменение.

2) Обобщите задачу для более чем двух сравниваемых файлов.

3) Дайте точную постановку задачи и алгоритм ее решения при условии, что тексты рассматриваются как тексты на некотором алгоритмическом языке с рекурсивно определяемым синтаксисом, а изменения описываются в терминах дерева синтаксического разбора (изменения, связанные только с делением текста на строки, игнорируются).

33. (Обработка С. В. Фомина). Дана последовательность (файл) чисел $a_1, \ldots, a_N$. Имеется устройство, позволяющее за единичное время отсортировать n, $n \ll N$, подряд идущих членов файла (т. е. упорядочить их по возрастанию), начиная с любого номера m (если $m > N - n + 1$, то сортируется $a_m, \ldots, a_N$).

1) Постройте алгоритм (напишите программу), который, используя это устройство, реализует наименьшее (или возможно меньшее) время сортировки всего файла с точки зрения наихудшего расположения чисел, т. е. равномерно по всем файлам данной длины.

2) Найдите асимптотику времени работы построенного алгоритма по n, N (для начала при фиксированном небольшом n).

3) Сделайте то же самое для случая, когда устройство может сортировать за единичное время две различные подпоследовательности длины n подряд идущих членов файла.

Литература. 1. Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. М. : Мир, 1978. гл. 1, 2. 2. А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М. : Мир, 1979.

34. Некто K задумывает два натуральных числа, не превосходящих N, и сообщает C их сумму, а Π — их произведение. Затем между C и Π происходит следующий диалог:

Π: Я не могу отгадать эти числа.

C: И я не могу. Но я знал, что вы не можете.

П: А тогда я — могу.
С: А теперь и я могу.

Какие числа задумал *К*? При каких N задача имеет единственное решение? Об этой задаче Вы можете прочесть в журнале «Квант», № 3 за 1977 г.

Предположим, что диалог между *С* и *П* иной. Например, фразы «Я так и знал» и «Я все еще не могу» повторяются несколько раз. Разработать формальный язык и написать программу для решения подобных задач. Входом является число N и диалог произвольной длины; результатом должно быть перечисление возможных пар чисел или указание на несуществование решения.

Обобщить задачу, придав ей более абстрактный характер (вместо натуральных чисел суммы и произведения рассмотреть произвольное множество и два разбиения на нем).

Решение задачи 8.**

Докажем утверждение:

2) если $\mu A_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon,\ \varepsilon < \frac{1}{2},\ \mu A_1 = \mu A_2 = \cdots = \mu A_N = \frac{1}{2},\ \mu(A_k \cap A_l) \leqslant \frac{1}{4}$ при $k \neq l$, то $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{N} A_k\right) > 1 + \varepsilon^2$ при $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Очевидно, 2′) влечет 1) и 2).

Пусть для $i = 1, \ldots, N$

$B_i = \{x \mid x$ принадлежит ровно i множествам $A_1, \ldots, A_n\}$.

$b_i = \mu B_i$. Положим $C_i = A_0 \cap B_i,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ C_0 = A_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i$, $c_i = \mu C_i,\ c_0 = b_0 = \mu C_0$.

Тогда $b_i \leqslant \frac{1}{2}$ при $i \geqslant 1$, $c_i \leqslant b_i$ и выполняются соотношения:

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{N} A_i\right) = \sum_{i=0}^{N} b_i, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu A_i = \sum_{i=1}^{N} i\mu B_i = \sum_{i=1}^{N} ib_i = \frac{N}{2}, \tag{2}$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \mu(A_i \cap A_j) = \int_{\mathbf{R}} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \chi_{A_i}\chi_{A_j} d\mu = \sum_{k=1}^{N} \int_{B_k} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \chi_{A_i}\chi_{A_j} d\mu = \sum_{k=2}^{N} \frac{k(k-1)}{2} b_k$$

(χ_A — характеристическая функция множества A) и, следовательно,

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{k(k-1)}{2} b_k \leqslant \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{4}, \tag{3}$$

$$\mu A_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon = b_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(A_0 \cap A_i) = \sum_{i=1}^{N} ic_i \leqslant \frac{N}{4}. \tag{5}$$

Определим на $\mathbf{R}$ дискретные меры ν_1 с нагрузками c_i и ν_2 и $b_i - c_i$ в точках $i = 0, 1, 2, \ldots, N$. Положим $P = \nu_1(\mathbf{R}),\ Q = \nu_2(\mathbf{R})$ и заметим, что $Q > 0$, так как иначе все B_i, а с ними и все A_i, $i = 1, \ldots, N$, содержались бы в A_0.

Соотношения (1) — (5) можно представить в виде:

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{N} A_i\right) = P + Q, \tag{1′}$$

$$\int_{\mathbf{R}} xd(\nu_1 + \nu_2) = \frac{N}{2}, \tag{2′}$$

$$\int_{\mathbf{R}} x(x-1)\, d(\nu_1 + \nu_2) \leqslant \frac{N(N-1)}{4}, \tag{3′}$$

$$\int_{\mathbf{R}} d\nu_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon, \tag{4′}$$

$$\int_{\mathbf{R}} xd\nu_1 \leqslant \frac{N}{4}. \tag{5′}$$

Положим $y = \frac{1}{P}\int_{\mathbf{R}} xd\nu_1,\ z = \frac{1}{Q}\int_{\mathbf{R}} xd\nu_2$. Тогда из неравенства Гельдера получаем

$$y^2 P \leqslant \int_{\mathbf{R}} x^2 d\nu_1, \quad z^2 Q \leqslant \int_{\mathbf{R}} x^2 d\nu_2.$$

Поскольку

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 d(\nu_1 + \nu_2) \leqslant \frac{N(N-1)}{4} + \int_{\mathbf{R}} xd(\nu_1 + \nu_2) = \frac{N(N+1)}{4}, \tag{6}$$

то (2′) — (5′) и (6) можно записать таким образом:

$$Py + Qz = \frac{N}{2}, \tag{a}$$

$$Py^2 + Qz^2 \leqslant \frac{N(N+1)}{4}, \tag{б}$$

$$P = \frac{1}{2} + \varepsilon, \tag{в}$$

$$yP \leqslant \frac{N}{4}. \tag{г}$$

Пусть $\varphi(N) = \inf\limits_{y,z}(P+Q) = \frac{1}{2} + \varepsilon + \inf \dot{Q}$.

Исключая z из (а) и (б) и учитывая (г), находим

$$\omega(y) = \frac{\left(\frac{N}{2} - yP\right)^2}{\frac{N(N+1)}{4} - y^2P} \leqslant Q, \text{ где } 0 \leqslant y \leqslant \frac{N}{4p}.$$

Определим теперь $\min \omega(y)$. Поскольку производная

$$\omega'(y) = \frac{\left(\frac{N}{2} - yP\right)PN}{[\ldots]^2}\left(y - \frac{N+1}{2}\right)$$

отрицательна при $0 \leqslant \frac{N}{4P} < \frac{N}{2}$, то

$$\inf Q \geqslant \min \omega(y) = \omega\left(\frac{N}{4P}\right) = \frac{N(1+2\varepsilon)}{2(N+2+4\varepsilon(N+1))}.$$

Наконец,

$$\varphi(N) - (1+\varepsilon^2) \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon + \omega\left(\frac{N}{4P}\right) =$$

$$= \frac{3\varepsilon^2 N - 4\varepsilon^3 N - 1 + 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3}{N(1+4\varepsilon)+2+4\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2 N - 1 + 2\varepsilon^2(N+1)(1-2\varepsilon)}{N(1+4\varepsilon)+2+4\varepsilon} > 0$$

при $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

▲