Оглавление

Предисловие редактора (*Г. И. Синкевич*) 5

Жизненный путь и наследие Г. Ф. Вороного (*Н. В. Локоть*) 8

Курс теории вероятностей, читанный профессором Вороным на 1902/3 год 51

Лекция 1. Введение 52

Лекция 2. Сложение вероятностей. I основной принцип 69

Лекция 3. II основной принцип. Умножение вероятностей 77

Лекция 4. Повторение испытаний 90

Лекция 5. Разыскание наивероятнейшего события при повторении испытаний 107

Лекция 6. О суммировании рядов 112

Лекция 7. Приближенное вычисление вероятности P_{mn} 141

Лекция 8. Теорема Бернулли 154

Лекция 9. О математическом ожидании величин 161

Лекция 10. Закон больших чисел 179

Лекция 11. Теория безобидности игр 187

Лекция 12. Петербургская задача 201

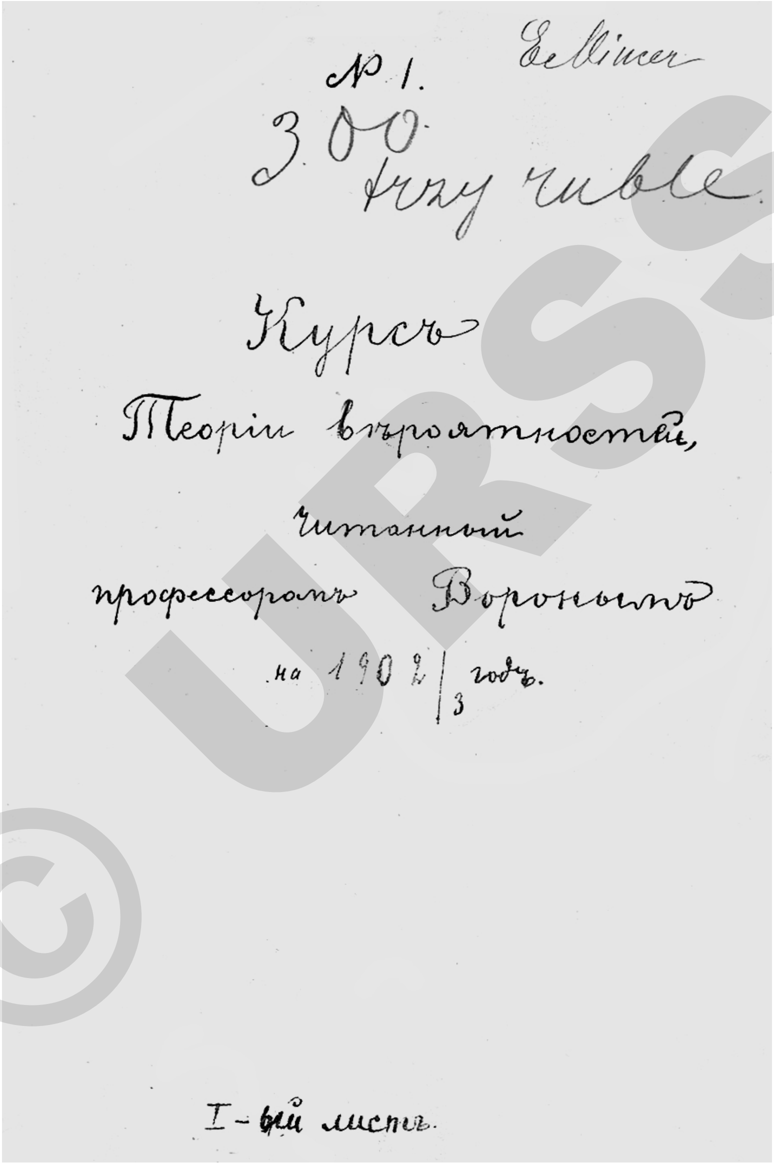
Г. Ф. Вороной (1868–1908)

Предисловие редактора

Фотокопия рукописного конспекта лекций по теории вероятностей известного математика Г. Ф. Вороного (1868–1908), читанных им в Варшавском университете и позже в Варшавском политехническом институте в 1902–1903 учебном году, была любезно передана нам польским математиком и историком математики В. Венсловом (W. Więsław). Конспект состоял из 240 рукописных листов. В те времена студенты записывали лекции за своим профессором, затем лучший конспект проверялся и заверялся профессором на каждой десятой странице, а затем студенты издавали литографированный курс, распространяемый за плату (данный конспект продавался за три рубля). Фамилия этого студента написана на титульной странице конспекта и читается как Bellimer или Bellincer.

Петербургский историк математики к. ф.-м. н. Наталья Васильевна Локоть, многие работы которой посвящены творчеству Г. Ф. Вороного, взяла на себя огромный труд по редактированию и публикации этого конспекта лекций, ею были исправлены ошибки, сделанные студентом при конспектировании и не замеченные Вороным при проверке. Примечания Н. В. Локоть находятся в подстрочных сносках. В некоторых случаях мы постарались сохранить выделения лектора: подчеркивания и выборочную нумерацию. Большую помощь в редактировании этого издания оказал нам д. ф.-м. н. А. Н. Кириллов, внимательно прочитавший как вступительную статью, так и лекции Вороного, и сделавший ценные замечания.

Г. И. Синкевич


№ 1.
300

Курсъ
Теоріи вѣроятностей,
читанный
профессоромъ Вороным
на 1902/3 годъ.

I-ый листъ.

Фото первых двух страниц конспекта

Главная задача теоріи вѣроятностей или точнѣе сказать исчисленія вѣроятностей состоитъ въ разсматриваніи вопроса о вѣроятности различныхъ событій, которыя могутъ встрѣтиться при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ. Во всѣхъ случаяхъ, когда рѣчь идетъ о появленіи какого-нибудь событія, можно сдѣлать слѣдующія три предположенія: первое, что данное событіе А произойдетъ непремѣнно, второе, данное событіе навѣрно не произойдетъ, и наконецъ третье, данное событіе можетъ произойти или не произойти. Въ первомъ случаѣ разсматриваемое событіе достовѣрное, во второмъ невозможное, въ третьемъ

Жизненный путь и наследие Г. Ф. Вороного

Эта книга предназначена математикам и естественникам, преподавателям, студентам и тем, кто интересуется историей науки. В ней мы публикуем расшифровку студенческого конспекта лекций по теории вероятностей Г. Ф. Вороного, читанных им на русском языке в Варшавском университете и позже в Варшавском политехническом институте в 1902–1903 учебном году. Данная книга появилась благодаря польскому исследователю истории математики Витольду Венслову (Witold Więsław), передавшему в Санкт-Петербург профессору Г. И. Синкевич фотокопию конспектов лекций, сохранившихся в университетских архивах Варшавы.

Эти лекции, вводившие слушателей в новый тогда и непривычный раздел математики, не потерявшие своего обучающего назначения, настолько отличаются от лекций его учителя Андрея Андреевича Маркова (старшего) по манере изложения, обилию примеров и по содержанию, что даже по прошествии более ста лет заслуживают публикации.

Оставляя в стороне обзор научного наследия Георгия Феодосьевича Вороного, мы обратились к анализу его педагогической деятельности в Варшаве и вклада в становление математического и политехнического образования в Царстве Польском в период с 1894 по 1908 гг.

В апреле 2018 г. отмечалась одна из знаменательных дат — 150-летие со дня рождения Георгия Феодосьевича Вороного (1868–1908). На родине математика к юбилею Верховная Рада приняла Постановление о введении этого события в перечень памятных дат и юбилеев страны, отмечающихся на государственном уровне, а университет им. М. П. Драгоманова и Институт математики НАН в сентябре 2018 г. провели международную конференцию

«VI International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations». Кроме того, появилось несколько новых публикаций, посвященных Г. Ф. Вороному, среди которых хотелось бы обратить внимание на работы [1] и [2]. Обе носят обзорный характер, но наряду с ранее известными сведениями содержат новые (например, сведения о матери Георгия Вороного — Клеопатре Михайловне Личковой — преподавательнице Киевской женской гимназии на Подоле и Подольской женской воскресной школы, и редкую фотографию семьи Вороного с пояснениями).

Вклад Г. Ф. Вороного в науку начали серьезно исследовать еще в конце 40-х гг. XX века. Борис Николаевич Делоне (1890–1980), когда работал над своей книгой «*Петербургская школа теории чисел*» [3], посвятил разбору работ Вороного, наряду с трудами П. Л. Чебышева, А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева, А. А. Маркова и И. М. Виноградова,

Варшавский университет

самый большой раздел (с. 202–320). Интересна его оценка магистерской и докторской диссертаций Георгия Вороного:

«*Магистерская диссертация Вороного хотя и не содержит никаких важных общетеоретических результатов, но зато представляет подробнейшее исследование основных алгорифмических вопросов теории общего кубического поля, исключая алгорифм для вычисления его автоморфизмов. <...> В 1896 г., через два года после магистерской диссертации Вороной защищает докторскую диссертацию „Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей“. Это — первоклассная работа. В ней Вороной дает алгорифмы для вычисления основных единиц общего кубического поля как для случая отрицательного, так и положительного дискриминанта, глубоко входя в геометрию вопроса. Только сейчас, спустя 50 лет после написания этой диссертации, немецкими математиками, не знающими в подробностях ее содержания* (*она была напечатана только по-русски*), *передоказываются некоторые ее теоремы, как важные новые достижения*» [3, с. 208–209].

Дело в том, что Делоне, как и все представители Петербургской математической школы, чрезвычайно высоко (что совершенно оправданно) ценил «*качество алгорифма*», отмечая заслуги Вороного и Минковского по созданию таких замечательных алгоритмов. Кроме того, интересны его высказывания о способе нахождения Вороным своих результатов: «*Заметим, прежде всего, что Вороной, несомненно, уже в этой диссертации мыслил и находил свои результаты геометрически. Но в то время геометрия была в Петербурге, особенно в вопросах теории чисел, не в фаворе. Марков, который был главным оппонентом Вороного, не пропустил бы в то время диссертации по теории чисел, пользующейся геометрическим методом <...>. Вороному приходилось поэтому думать геометрически, а затем переписывать все на чисто арифметический язык, не оставляя никаких следов геометрии*» [3, с. 213].

И это «первый штрих к портрету» Георгия Вороного — умение видеть новые способы исследования проблемы и применять их вопреки мнению маститых ученых. Кстати, еще о выборе методов... Это еще один штрих к портрету...

Известно, что в Санкт-Петербургском университете курс теории функций комплексной переменной (ТФКП) регулярно не читался, т. к. отношение профессоров к нему было весьма неоднозначным. Но Вороному, после того как он увлекся проблемами аналитической теории чисел, методы ТФКП стали просто необходимы. И он освоил их самостоятельно по трудам западных авторов, так как свободно владел основными европейскими языками.

Вторая волна интереса к творчеству Г. Ф. Вороного относится к 50-м гг., когда шла интенсивная работа по изданию его трехтомного «*Собрания сочинений*» [4]. Так, изучены и прокомментированы его труды по следующим направлениям:

- аналитическая теория чисел (Ю. В. Линник и Н. Г. Чудаков),
- арифметическая теория квадратичных форм (Б. А. Венков),
- теория алгебраических чисел (И. Р. Шафаревич).

Обширные комментарии, помещенные в 3 томе «Сочинений», посвящены:

- обзору писем Вороного к В. А. Стеклову (А. А. Киселев),
- характеристике его некоторых сообщений, рукописей и работ (И. Р. Шафаревич, И. Б. Погребысский, Ю. В. Линник, Н. Г. Чудаков, Б. А. Венков),
- описанию архивных материалов о Г. Вороном, его рукописного фонда и биографии ученого (И. Б. Погребысский и И. З. Штокало).

Отметим, что научное биобиблиографическое наследие Георгия Вороного подробно изучалось украинскими исследователями (Н. В. Працевитый, Г. Н. Сита, Н. Г. Швец-Вороная, Н. В. Гришко, Т. Г. Симонова и др.); много материалов помещено также на сайте «*Благодійний фонд Георгія Вороного*».

В 2019 г. польский историк математики В. Венслов передал профессору Г. И. Синкевич (Санкт-Петербург) курс лекций по теории вероятностей, читавшихся Георгием Вороным в Варшавском университете. Именно это событие и дало возможность получить еще несколько важных «штрихов к портрету», более подробно осветив его педагогическую деятельность, а также гражданскую позицию ученого в непростые времена его работы в Варшаве.

В коротком жизненном пути Георгия Вороного можно выделить (с указанием некоторых биографических сведений) следующие периоды:

Детство на Черниговщине (1868–1885)

- 15(28) апреля 1868 г. — в семье профессора Нежинского лицея кн. Безбородко Вороного Феодосия Яковлевича и жены его Клеопатры Михайловны родился сын Георгий;
- 1877–1882 гг. — обучение в Бердянской гимназии;
- 1885 г. — окончание Прилукской гимназии (причем педагоги уже тогда отмечали его выдающиеся математические способности и бесконечное стремление заниматься математикой).

Петербургский период (1885–1894)

- 1885 г. — первая публикация Г. Вороного в «Журнале элементарной математики» В. Ермакова («*Разложение многочленов на множители, основанное на свойстве корней квадратного уравнения*»);
- 1885–1889 гг. — годы учебы на математическом отделении физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета;
- 2 декабря 1888 г. — доклад о доказательстве одного из свойств чисел Бернулли собственным способом на математическом кружке А. А. Маркова;
- 1889 г. — доказательство теоремы *Адамса* и теоремы *Штаудта*;
- 1890 г. — публикация статьи «*О числах Бернулли*» в «Сообщениях ХМО»;

- 1894 г. — защита магистерской диссертации «*О целых числах, зависящих от корня уравнения третьей степени*» (оппоненты А. А. Марков и Ю. В. Сохоцкий).

Варшавский (I) период (1894–1906)

- 1894 г. — избрание профессором Варшавского университета, переезд в Варшаву;
- 1897 г. — защита докторской диссертации *«Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей»* (премия имени Буняковского);
- 1894–1906 гг. — преподавание на физико-математическом факультете Императорского Варшавского университета (разработка и чтение лекций по основным математическим курсам);
- 1898–1906 гг. — преподавание на механическом и инженерно-строительном факультетах Варшавского политехнического института (ВПИ) Императора Николая II;
- 1903 г. — назначение деканом механического факультета ВПИ (с 1 сентября).

Новочеркасский период (1907)

- 1907 г. — командировка в Новочеркасск (перевод ВПИ), преподавание в Донском политехническом институте[*)] (ДПИ);
- 10 октября 1907 г. — начало занятий в ДПИ (ВПИ) (первую лекцию читал профессор, декан механического факультета Вар-

[*)] В 1904 г. в Царстве Польском усилились националистические выступления: протестующие требовали улучшения жизни рабочих, политических свобод, национализации образования. К февралю студенты польских университетов присоединились к демонстрациям, протестуя против русификации и требуя права учиться на польском языке. В связи с обострившейся политической обстановкой и студенческими беспорядками в 1905 г. Варшавский политехнический институт пришлось закрыть. После долгих согласований Советом министров Российской империи было принято решение передислоцировать институт в Новочеркасск «*использовав для сей цели денежные средства и личный состав Варшавского политехникума*». Поэтому в 1907 г. большая группа варшавских ученых отправилась в Новочеркасск для преподавания в только что открытом Донском политехническом институте.

шавского политехнического института, член-корреспондент Петербургской АН Г. Ф. Вороной).

Варшавский (II) период (1908)

- 1908 г. — возвращение в Варшаву (начало занятий в университете и Политехническом институте);
- лето 1908 г. — прием студентов на первые курсы четырех отделений ВПИ;
- сентябрь 1908 г. — участие Вороного в выборах на должность директора ВПИ;
- 7 (20) ноября 1908 г. — кончина Г. Ф. Вороного (Варшава).

Итак, педагогическая деятельность Георгия Вороного началась еще в годы учебы в Петербургском университете, когда он зарабатывал себе на жизнь частными уроками и работой (1889–1894 гг.) в качестве внештатного преподавателя Петергофской прогимназии Императора Александра II. К сожалению, никаких подробностей об этом не сохранилось, единственное, что хочется отметить, — участие в судьбе талантливого студента одного из его педагогов, профессора И. Л. Пташицкого, преподававшего в этой гимназии и поспособствовавшего назначению Г. Вороного на учительскую должность. Именно из Петергофа Вороной с женой Ольгой Крицкой и уехал в Варшаву [5].

С 1869 г. Императорский Варшавский университет, преобразованный из Главной школы, имел четыре факультета (юридический, историко-филологический, медицинский и физико-математический).

Вороной был зачислен на кафедру чистой математики ФМФ, где, кроме него, числились два ординарных профессора чистой математики (1894):

- Николай Николаевич Зинин (1854–1910) — воспитанник Санкт-Петербургского университета, русский ученый-математик, профессор, первый директор Донского политехнического института

(1907–1910). С 1880 г. работал на кафедре чистой математики в Варшавском университете. После защиты докторской диссертации «*Различные приемы приведения кратных интегралов и главнейшие приложения этих приемов*» (Москва, 1893) — ординарный профессор Варшавского университета.

- Василий Афанасьевич Анисимов (1860–1907) — воспитанник Московского университета, работал в нем с 1882 по 1885, совершенствовал знания в Берлине и Париже (1885–1887). После защиты магистерской диссертации «*Основания теории линейных дифференциальных уравнений*» (1889, Москва) — экстраординарный, после защиты докторской диссертации «*Круг Фукса и его приложения*» — ординарный профессор чистой математики Варшавского университета (1892), профессор Варшавского политехнического института (1898–1906).

Кроме того, на кафедре механики работал сын Осипа (Иосифа) Ивановича Сомова, тоже профессор, Павел Осипович Сомов, (1852–1919) — выпускник Санкт-Петербургского университета (1873), ученик О. И. Сомова и П. Л. Чебышева, профессор кафедры механики Варшавского университета (1886–1906) и Варшавского политехнического института (1898–1906). Позднее он преподавал в Горном институте, в Николаевской военно-морской академии и на Высших женских курсах в Санкт-Петербурге.

О педагогической деятельности профессора Вороного в Варшавском университете и Варшавском политехническом институте писали И. Б. Погребысский и И. З. Штокало в биографическом очерке, поэтому, чтобы не повторяться, воспользуемся «нарезкой» из «*Сокращенных протоколов заседания Совета Императорского Варшавского университета*»; тех, что касаются Георгия Вороного.

Первое упоминание о назначении Вороного в Варшавский университет появилось в «*Отчете о состоянии и деятельности Императорского Варшавского университета за 1894/5 ак. г.*»: там он ошибочно представлен преподавателем Царскосельской, а не Петергофской Императора Александра II прогимназии. (Царскосельская гимназия была открыта в Царском Селе в 1870 г. и названа Николаевской.) Итак, в мае 1894 г. он назначен «*исправляющим обязанности доцента*», 27 июля того же года утвержден Советом университета как экстраординарный профессор, а с 1 августа 1897 г. (после защиты докторской диссертации) — как ординарный профессор Императорского Варшавского университета [6, 1895, № III].

Вороного сразу же обязали читать на математическом отделении аналитическую геометрию (1-й курс, 4 часа в неделю), теорию чисел (совместно на 2-м и 3-м курсе, 2 часа в неделю) и теорию вероятностей (совместно на 3-м и 4-м курсе, 2 часа в неделю в первом полугодии и 1 час в неделю — во втором). Позднее к этим дисциплинам прибавилась начертательная геометрия (1-й и 2-й курс совместно, 1 час в неделю в оба полугодия). Причем как теория чисел, так и теория вероятностей читались поочередно (через год). И здесь — опять «штрих к портрету»: очень скоро Г. Ф. Вороной попросил Совет добавить ему еще один час лекций по теории вероятностей. И это не единичный случай. Сохранилось несколько постановлений такого рода. Отмечу, что добавочные лекции были добровольными, читались профессором в дополнительные (часто вечерние) часы и не оплачивались.

Как гласят Протоколы от 16 янв. 1884 г., Вороной был утвержден кандидатом в члены Библиотечной Комиссии, которая занималась насущными делами для должной организации учебного процесса университета. У молодого профессора они отнимали, по-видимому, много времени и сил (изготовление и печать каталогов, устройство справочных отделов библиотеки, вопросы об увеличении денежного вознаграждения библиотекарей, режим работы студенческого и профессорского читальных залов, усовершенствование правил пользования библиотекой, пополнение учебной и научной литературой и другая текучка). Тем не менее, в 1898 г. Вороного снова избирают в Библиотечную комиссию. Тогда же он становится кандидатом в судьи профессорского дисциплинарного суда, что говорит о его высоком авторитете в университетской среде. После возобновления занятий в Варшавском университете (1908) профессор Вороной был избран в дисциплинарный суд уже в качестве судьи [6, 1911, № III].

Ежегодно Варшавский университет командировал своих профессоров в качестве «депутатов от окружного начальства» на выпускные экзамены в гимназии. На физико-математическом факультете это были неизменно Г. Ф. Вороной, В. А. Анисимов и Н. Н. Зинин, которые, работая в экзаменационных комиссиях, могли заранее оценить уровень математических знаний абитуриентов и продумать способы их коррекции при поступлении в университет. Таким образом, Георгий Вороной принимал активное участие в работе Варшавского учебного округа. Кроме того, он читал «*публичные лекции общеобразовательного характера для посторонней публики*»...

В «*Сокращенных протоколах заседаний Совета Императорского Варшавского университета*» все чаще мелькает его фамилия. Вот 30-летний Вороной: по натуре человек сугубо скромный, интеллигентный и мягкий в общении, но высказывает свое мнение даже тогда, когда оно не совпадает с мнением руководства. По мнению Попечителя *), для обеспечения набора в провинциальные университеты необходим указ о приеме выпускников гимназий только в университеты своего округа. Видя абсурдность данного предложения и понимая, что родители просто будут переводить своих детей в другие гимназии, Вороной аргументированно возражает начальству [6, 1896, № III].

Обращает на себя внимание еще один эпизод на Совете, о котором тоже упоминают в своей статье И. Б. Погребысский и И. З. Штокало [4, т. 3]. Мы позволим себе на нем остановиться. Как указывается в Протоколе заседания Совета ВУ (от 7 мая 1898 г.), присутствующие слушали рапорт профессоров ФМФ (В. А. Анисимова,

*) Попечитель учебного округа — должностное лицо, возглавлявшее в Российской империи учебный округ — территориальную единицу управления учебными заведениями, подведомственными Министерству народного просвещения, т. е. полномочный представитель Министерства просвещения в регионе. В 1879–1897 гг. должность Попечителя Варшавского учебного округа занимал генерал-майор А. Л. Апухтин.

Г. Ф. Вороного и Н. Н. Зинина) об учреждении еще двух преподавательских должностей по кафедре чистой математики. Поднятые ими проблемы обсуждались профессорско-преподавательским составом в течение нескольких заседаний (сентябрь–декабрь), а на последнем декабрьском заседании Совета (1898) авторы рапорта подробнейшим образом его обосновали. Другие кафедры факультета также приняли в этом живейшее участие, выработав свои предложения, и результатом стало Чрезвычайное заседание Совета ВУ (7 января 1899 г.), обсудившее детальный анализ недостатков преподавания математики на факультете, выполненный ведущими профессорами факультета (и Вороным в частности).

Но вернемся на несколько лет назад, в период после защиты докторской диссертации, работа над которой, несомненно, отнимала все время, свободное от лекций. Кафедра чистой математики примерно раз в два года (поочередно с кафедрой физики) объявляла тему для студенческих сочинений на медаль. В 1898 г. выбор такой темы был доверен профессору Вороному. Звучала она следующим образом: «*Плоскость покрыта равными параллелограммами, образованными пересечением параллельных прямых. Исследовать геометрическое место точек плоскости, расстояния которых от данной вершины какого-нибудь параллелограмма не больше расстояний от всех вершин рассматриваемых параллелограммов. Обобщить вопрос, рассматривая в пространстве подобную же сеть параллелепипедов*» [6, 1898, № VI]. Видим, что она напрямую соотносится с тем направлением исследований, которое впоследствии занимало Вороного в те годы, хотя основные его статьи по теории квадратичных форм появились позже (1907, 1909).

В рассматриваемых нами «Протоколах» имеются отзывы профессора Вороного на сочинения студентов В. Слюсарского и А. Москвина, получивших, соответственно, золотую и серебряную медали [6, 1899, № VI]. Резюмируя, можно отметить, что при анализе сочинений Вороной

- очень тактично отмечает недостатки, перемежая их с указаниями на достоинства сочинений, причем похвала всегда мотивированная и заслуженная;
- учит доскональному изучению тематики (рассмотрение всех способов, уже предложенных другими авторами);
- указывает на важность даже таких, казалось бы, второстепенных для изложения материала, моментов, как неудачное заглавие, отсутствие чертежа, неравномерность деления на части или возможность упрощения выкладок;
- показывает, насколько важно изучение объекта исследования со всех точек зрения (как у Слюсарского — с кристаллографической);
- обращает внимание на то, как важна не только правильная, но и удачная постановка задачи, от чего порой зависит простота получения решения;
- учит замечать при рассмотрении множества аналогичных частных случаев общие результаты.

Таким образом, он планомерно и настойчиво, но без излишнего педантизма, прививает своим студентам навыки научного исследования. К великому сожалению, не удалось ничего обнаружить о дальнейшей судьбе этих учеников Вороного.

Еще несколько штрихов к портрету Георгия Феодосьевича: с 1902 г. он ежегодно являлся куратором 1-го и 4-го курса математического отделения. К 1902 г. относятся еще две протокольные записи о присвоении студентам (Яфра и Адамский) степени «кандидата математических наук» за их дипломные сочинения по темам, данным проф. Вороным, но отзывы Вороного в Протоколах почему-то отсутствуют...

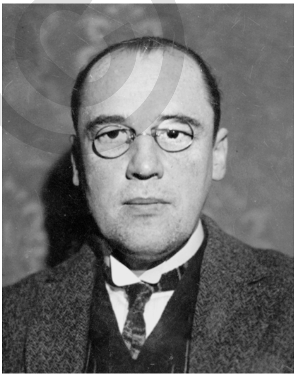
Следующая тема, объявленная Г. Ф. Вороным на 1903/4 г. для медального студенческого сочинения, помогла прийти в науку еще одному талантливому польскому студенту, имя которого сейчас известно каждому математику — это Вацлав Франциск Серпинский

(W. F. Sierpicski, 1882–1969), получивший за работу по этой теме золотую медаль. Проблема для исследования была сформулирована Вороным так: «*О суммировании ряда*

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau\left(n\right) f\left(n\right) \tag{1}$$

при условии, что $\tau(n)$ представляет число разложений n на сумму квадратов двух чисел целых» [6, 1903, № VI].

Как упоминают И. Б. Погребысский и И. З. Штокало, «...*с 1904–1907 гг. Г. Ф. Вороной был его официальным руководителем. Сохранился рапорт Г. Ф. Вороного с ходатайством об оставлении Серпинского при университете для подготовки к профессорскому званию по кафедре чистой математики*» [4, т. 3, с. 300]. Если, как утверждают многие исследователи, царское правительство России препятствовало воспитанию местных кадров при Варшавском университете, то Вороному польская общественность должна быть благодарна вдвойне... Хотя нужно отметить, что отношения между учителем и учеником после 1904 г. в связи с выступлениями студентов против русификации образования складывались иногда непросто. Как пишет Г. И. Синкевич, за участие в забастовке с требованием национализации образования Вацлава Серпинского лишили права преподавать в государственной школе. Более того, Серпинский



Вацлав Франциск Серпинский (1882–1969) — польский математик, специалист по теории множеств, аксиоме выбора, континуум-гипотезе, теории чисел, теории функций, топологии, ученик Г. Ф. Вороного отказался публиковать свою премированную работу в русскоязычных «Известиях Варшавского университета», защищался в Кракове, представив на польском языке работу «О суммировании ряда $\sum\limits_{m^2+n^2\leqslant x^2} f\left(m^2+n^2\right)$» и получив за нее степень доктора философии. Но, несмотря на все это, В. Серпинский посвятил Г. Ф. Вороному лекцию-некролог, прочитанную в связи с внезапной кончиной своего учителя, где говорил о той огромной роли, которую профессор Вороной сыграл в его жизни [7, с. 224].

Как утверждают И. Б. Погребысский и И. З. Штокало (3 том «Собрания сочинений» Г. Ф. Вороного), «*...другим учеником Г. Ф. Вороного был Банахевич, впоследствии известный главным образом своими работами по теоретической механике. Банахевич начинал свою научную деятельность под руководством профессора астрономии Краснова, а после его смерти стал учеником Вороного*» [4, т. 3, с. 300]. Отметим, что это утверждение ошибочно, так как Александр Васильевич Краснов (1866–1911) — профессор по кафедре астрономии и геодезии, скончался на три года позже Вороного.

Тадеуш Артурович Банахевич (1882–1954) — польский астроном, геодезист и математик, учился в Варшавском университете (1900–1904), т. е. в то время, когда там преподавал Г. Вороной. Понятно, что именно Вороной читал ему аналитическую и начертательную геометрию, так необходимую для будущего астронома.

Фаддей (Тадеуш) Юлиан Артурович Банахевич (1882–1954) — польский астроном, геодезист и математик, ученик Г. Ф. Вороного.

Из коллекции Джорджа М. Крейнера. Опубликовано в журнале Nasza Politechnika. 2015. N. 4. С. 21.

Тадеуш действительно был оставлен для приготовления к профессорскому званию, стажировался в Геттингене (К. Шварцшильд) и в Пулковской обсерватории (О. Баклунд), в 1908–1910 работал в обсерватории при Варшавском университете, в 1910–1915 — в обсерватории имени Энгельгардта под Казанью, затем — в Юрьевском университете. С 1918 г. преподавал геодезию в Варшавской высшей политехнической школе, через год уже заведовал кафедрой астрономии Ягеллонского университета (Краков) и был директором университетской обсерватории.

Остановимся на отзыве, данном Г. Ф. Вороным на работу В. Серпинского, помещенном в Варшавских университетских известиях [6, 1904, № VI]. Он интересен тем, что Вороной далеко не сразу начинает анализ, он как бы кратко вводит в суть проблемы, являющейся новой даже для специалистов, так как она относится к «сравнительно новому отделу математики: аналитической теории чисел». Дело в том, что Серпинский воспользовался для исследования одним из совсем недавних результатов своего руководителя — обобщенной Вороным суммарной формулой Эйлера—Маклорена, сообщаемой студентам на лекции. Об этом упоминают И. Б. Погребысский и И. З. Штокало, отмечая не только тщательность подготовки лектора, но и стремление приобщить слушателей к новейшим исследованиям по проблеме. Вороному явно импонирует, что Серпинским разобраны оба возможных способа вычисления суммы (1), ведь он считает, что при сравнении способов могут возникнуть полезные и интересные идеи.

Но это не просто похвальный отзыв талантливому студенту. Вороной четко видит недостатки некоторых методов, предложенных известными математиками. Он знает, что не всегда это вина автора, но хочет, чтобы это понимал и его юный ученик (речь идет о методе Римана для определения числа простых чисел, заключающихся в данном промежутке, с помощью определенных интегралов). Так он учит будущего исследователя не робеть перед авторитетами и искать возможности усовершенствования и продолжения их идей.

Пожалуй, 1903/4 акад. г. был последним относительно спокойным годом работы Вороного в Варшавском университете. Обстановка в Польше накалялась уже длительное время: еще в 1898 году профессор Д. М. Петрушевский (ВУ, историк) в письме к проф. И. В. Лучицкому (Киев) от 1 марта 1898 г. писал: «*Университетская жизнь очень мало* [*имеет*] *дело с принципами... Я поэтому стою вне всей этой грязи и подаю свой голос, руководствуясь совестью и разумом...*» [8, с. 252]. Кстати, мнения Д. М. Петрушевского и Г. Ф. Вороного по статьям, выслушиваемым на заседаниях Совета, очень часто совпадали...

Итак, университет был закрыт до 1908 г., занятия отменены, а научная деятельность состояла в командировках и ученолитературных трудах. После возобновления занятий в сентябре 1908 г. произошли некоторые изменения в распределении учебной нагрузки. Ранее курс анализа читали В. А. Анисимов и Н. Н. Зинин, теперь его поручили Г. Ф. Вороному. Василий Афанасьевич Анисимов скоропостижно скончался в 1907 г., а Николай Николаевич Зинин уже руководил Донским политехническим институтом (1907–1910). На кафедре чистой математики он был теперь единственным ординарным профессором, по его ходатайству в качестве экстраординарного профессора был утвержден магистр И. Р. Брайцев, а ведение практических занятий по чистой математике и чтение лекций по начертательной геометрии поручалось Д. Д. Мордухай-Болтовскому, которого еще в конце 1903 г. Вороной рекомендовал Совету университета: *«Д. Д. Мордухай-Болтовской мне известен как опытный преподаватель, в течение пяти лет ведущий под моим руководством практические занятия по высшей математике в Политехническом институте... Я могу рекомендовать Д. Д. Мордухай-Болтовского факультету так же и как талантливого молодого ученого, уже заявившего себя в науке»* [9, с. 47].

Помимо значительного вклада Георгия Феодосьевича Вороного в польское университетское образование, отметим его участие в становлении политехнической школы Варшавы.

Деятельность профессора Вороного в Варшавском политехническом институте меньше изучена и освещена в историко-математической литературе, но и она заслуживает внимания. После анализа протоколов заседаний Совета ВПИ создалось впечатление, что Вороному легче «дышалось в Варшавском политехнике». Там был несколько иной преподавательский коллектив — профессионалы-естественники, ученые-практики, обсуждающие на Советах сугубо специальные вопросы по подготовке кадров, минуя политические, юридические, философские и правовые проблемы. Конечно, у них могли быть различные мнения и отношение к «*польскому вопросу*», но это не делило Совет на враждующие группировки, а обсуждалось в кулуарах.

Итак, Варшавский политехнический институт открылся в 1898 г., а для работы в нем были приглашены преподаватели Варшавского университета (математики В. А. Анисимов и Н. Н. Зинин, механик П. О. Сомов, химик Е. Е. Вагнер и др.). Вороной сдружился там с Николаем Борисовичем Делоне [старшим], который с 1 июля 1900 г. служил ординарным профессором по кафедре практической

Варшавский политехнический институт Императора Николая II механики ВПИ (в Протоколах ВПИ утверждается, что он переведен с 1 июля 1899 г.). Хотя Г. Ф. Вороной никогда не был непосредственно руководителем научных изысканий его сына — Бориса Делоне, но многие биографы часто называют его учеником Г. Вороного (на самом деле официальным и непосредственным руководителем Бориса Николаевича являлся Дмитрий Александрович Граве (1863–1939)). Видимо, этим они хотели подчеркнуть то несомненное влияние на выбор будущей тематики исследований, которое оказало на юношу знакомство с этим одержимым математикой человеком, другом отца. Н. П. Долбилин, автор статьи «Многогранный Делоне» в «Кванте», пишет:

«Для будущей научной работы Бориса Николаевича оказалось важным, что в начале 1900-х годов его отец работал профессором Варшавского университета одновременно с выдающимся математиком Георгием Феодосьевичем Вороным. Г. Ф. Вороной... был одним из самых блестящих представителей знаменитой Петербургской школы теории чисел. Николай Борисович подружился с выдающимся математиком, и Вороной стал частым гостем в доме Делоне. Борис Николаевич вспоминал, что когда беседы между отцом и Вороным затягивались допоздна, то он, мальчик, уже „находясь в кровати в своей комнате, прислушивался к их разговору через полуприкрытую дверь, ведущую в залу“. <...> Хотя впоследствии работы Вороного оказали серьезное влияние на исследования Делоне, прямых научных контактов у Бориса-гимназиста с маститым ученым не было» [10, с. 4].

Из Протоколов Совета можно узнать о распределении нагрузки между преподавателями. Интересно, что В. А. Анисимов и Г. Ф. Вороной как бы поменялись читаемыми дисциплинами (по сравнению с университетом). И здесь появлялись их просьбы о добавлении часов лекций! Видно, что Вороной исправно посещал заседания Совета (отсутствующие указывались пофамильно в «*Протоколах...*»), принимая участие в повседневных делах. Поиск материалов иногда бывает вознагражден чем-то примечательным. Так на сайте

Нижегородского университета удалось обнаружить фотографию (Варшавский политехнический институт, 1902 год, фото из фонда ИПЦ Нижегородского государственного технического университета), где присутствуют Вороной, Анисимов и Брайцев [11].

Зимой 1902 г. в Политехническом институте появились первые признаки брожения умов студенческой аудитории. Семь зимних заседания Совета ВПИ (от 21 и 26 января, 9, 15, 25, 26 и 27 февраля) были посвящены обсуждению создавшегося положения. События развивались сначала довольно курьезно, но потом усилиями провокационно настроенных молодых революционных умов получили неожиданное продолжение, грозившее многим студентам серьезнейшими последствиями. Понятно, что от руководства института, его Совета, от гражданской позиции педагогов и их действий зависело очень многое.

Варшавский политехнический институт Императора Николая II. 1902 г. Вороной в первом ряду четвертый справа (фото из фонда ИПЦ Нижегородского государственного технического университета)

Суть такова: 26 янв. 1902 г. служитель Бессаженко «*...забрался в стеклянную галерею, служащую складом досок и разделяющую две большие чертежные, и заперся там. Кто-то из студентов, заметивши его, сообщил товарищам, что там сидит шпион, посланный инспектором и подслушивающий их разговоры. Сбежавшиеся сюда студенты, в количестве около 100 человек, потребовали Инспектора и и. о. Директора, декана химического отделения, проф. Е. Е. Вагнера. Инспектор, явившись, заявил, что он никого туда не посылал, и, приказав слесарю открыть дверь, впустил в помещение студентов, которые, обыскав этого служителя, нашли у него ключ от двери и бутылку водки, причем воздержались от насилия, грозя, однако выбросить его из окна. Несмотря на эти угрозы, служитель заявил студентам, что его туда никто не посылал, а что, выпивши, он зашел туда соснуть...*» (засед. 15 фев. 1902 г.) [12, 1907. В.1]. Служителю объявили об увольнении, студентов попросили разойтись.

В этот же период появились «*Временные правила студенческих организаций*», студенты ВПИ собрались их обсудить на сходке, считая, что она вполне законна. После разъяснений руководства о незаконности сходки и последствиях собравшиеся передумали и разошлись... (экстренное засед. 26 янв. 1902 г.) [12, 1907. В. 1]. На заседании Совета (9 фев. 1902 г.) тоже обсуждался эпизод с Бессаженко, но руководство института посчитало инцидент исчерпанным, не желая видеть его опасности. Вороной тоже сначала не придавал этому значения, что видно из его письма К. А. Стеклову от 8 февраля 1902 г.: «*У нас пока все спокойно, но ожидаются чисто местные волнения, связанные с историей в Седлецкой и Бельской гимназиях подобно немецкой* ... [неразборчиво]» [13]. Но уже на февральском заседании Совета (9 фев. 1902 г.) выступил с заявлением о том, что «*...между студентами распространилось мнение, что в Институте существует тайный надзор со стороны инспекции*» [12, 1907. В.1], а Совет не придал этому заявлению значения. И совершенно зря!

Еще в конце января у студентов ВПИ усилились революционные настроения, но забастовки не последовало, лишь 11 февраля была сходка, прошедшая мирно. Вороной предлагал Совету просить министра о том, чтобы Совет, исходя из реалий, сам решал вопросы о разрешении сходки и мерах против беспорядков. К нему присоединились Е. Е. Вагнер (декан химического отделения) и проф. П. О. Сомов. Чем это закончилось, неясно, но занятия возобновились 28 февраля 1902 г. и не было никаких сведений о применении карательных мер. Хотя это грозило студентам в случае кратковременного закрытия вуза переносом учебных занятий и экзаменов на летние вакации, а в случае срыва занятий на срок более трех недель студентам старших курсов (начиная со второго) — оставлением на второй год, а первокурсникам — увольнением и повторной сдачей вступительных экзаменов.

Весной 1902 г. Г. Ф. Вороной и В. А. Анисимов, обеспокоенные качеством получаемых выпускниками знаний, предприняли еще одну попытку усовершенствовать свои дисциплины. На заседании Совета от 10 мая 1902 г. по их представлению слушался вопрос «*О разделении читаемого на старших семестрах курса математики на механическом и инженерно-строительном отделениях на 2 части:*

1) приложение к анализу,
2) приложение к геометрии

с производством экзаменов по каждой части отдельно, причем одну часть предоставить профессору Анисимову, другую — профессору Вороному» [12, 1907. В. 1].

Еще один не совсем ясный момент: на заседании Совета (28 окт. 1902 г.) рассматривалось «*Отношение Правления о том, что Правление не встретило препятствий с финансовой стороны к удовлетворению проф. Вороного издать за счет Института лекции дифференциального и интегрального исчисления*» [12, 1907. В. 1]. Были ли напечатаны литографированные курсы лекций Вороного по дифференциальному и интегральному исчислению или нет? В списке литографированных изданий они указаны.

Кроме того, на том же Совете на время командировки Вороного поручили временно читать лекции по дифференциальному и интегральному исчислению на 1 курсе — преподавателю И. Р. Брайцеву, на старшем курсе — преподавателю Д. Д. Мордухай-Болтовскому. Ему же в декабре 1902 г. доверено было принять экзамены по второй части математики. По возвращении на заседании от 2 июня 1903 г. Вороной предложил Совету «*дать вознаграждение преподавателям, заменявшим его осенью во время командировки в Петербург*», что и было одобрено Советом [12, 1907. В. 1].

Важное для Вороного событие произошло в сентябре 1903 г. — он был назначен деканом механического отделения ВПИ. Видимо, были учтены его разумные и активные действия во время беспорядков и возросший авторитет у студентов.

В 1904 г. в Варшаве снова начались беспорядки, но ВПИ еще держался, хотя уже на заседании Совета от 9 декабря слушали заявление Директора института о прекращении занятий с 1 декабря ввиду возбужденного состояния студентов и о выделении в январе 6 экзаменационных дней. Основой студенческих волнений было поддержание требований общественности о замене языка преподавания на польский. Совет решил, что нужно прояснить ситуацию, выяснить, кто хочет учиться, а кто готов заняться политической борьбой. Но 1 сентября 1905 г. занятия так и не начались, хотя к 13 сентября (к дате заседания Совета) выяснили, что, по словам Директора, 70 % хотят возобновить занятия, но 30 % этому препятствуют и требуют разрешить сходку, что невозможно ввиду военного положения.

Пытаясь как-то остановить студенческие волнения, 27 сентября 1905 г. Николай II подписал Указ «*О введении в действие Временных правил об управлении высшими учебными заведениями ведомства МНП*», дополнявший Устав 1884 г., которые давали университетам право:

1) выбирать ректора, деканов и их секретарей из профессоров и преподавателей факультетов с последующим утверждением избранных лиц министерством;
2) Совет университета вправе ходатайствовать о приостановлении занятий в случаях, когда нарушается их правильный ход;
3) ректор становится начальником над университетской инспекцией (ранее им был Попечитель учебного округа);
4) разбирательство по студенческим делам вверяется профессорскому дисциплинарному суду.

Таким образом, в ведении университета оказались все студенческие дела. Либеральная профессура и большинство студентов добивались таких изменений долгие годы, но ввиду революционной ситуации указ не возымел возложенного на него действия. Хотя в Варшавском политехническом институте срочно (на Совете от 22 декабря 1905 г.) переизбрали по новым правилам Директора (оставив проф. Лагорио) и успешно отчитались перед МНП (Министерство народного просвещения Российской империи). На следующем заседании Совета переизбранный А. Е. Лагорио выступил с обширной речью о тяжелом положении высшей школы и о предстоящей ее реформе. На двух следующих заседаниях (30 сентября и 3 октября) Совет обсуждал наиболее важные вопросы жизни вуза. Постановления этих заседаний были таковы:

1. Существующая организация института неправильна и требует реорганизации.
2. Инспекция студентов не нужна, она вредна, ее нужно упразднить.
3. Необходимо устранить из института судебные и карательные функции.
4. Необходимо оставить за преподавателями вузов только учебно-научную деятельность при полной самостоятельности в проведении учебных занятий.

5. Сравнять студентов в их правах со всеми гражданами.
6. Ходатайствовать о разрешении устройства студенческих организаций, корпораций и собраний вне стен института. Но при этом оказывать содействие научным кружкам и признать, что все помещения института должны служить единственно и исключительно для учебно-научных целей.
7. Ввести в Устав института пункт о равноправности вероисповедания и национальности при замещении всех должностей (для персонала) и при допущении к вступительным экзаменам и зачислении (для студентов).

Эти пункты постановления вызвали нешуточные прения, но в конце концов прошли голосование. У декана механического отделения Г. Ф. Вороного по этому поводу было свое особое мнение. В «Протоколах...» его выступление напечатано полностью (3,5 страницы). Основные его положения, как нам кажется, необходимо обсудить, так как именно это выступление, о котором никто из исследователей его научного наследия не упоминал, ярко отражает педагогические воззрения Георгия Вороного.

Вороной называет этот проект идеалистическим, так как он не считается с русской действительностью:

«*...я прихожу к заключению, что проект реорганизации высших учебных заведений должен быть основан на тщательном изучении истории и современного состояния русских высших учебных заведений. С этой точки зрения задача устройства высших учебных заведений распадается на две задачи, несравнимые между собой по своей трудности для решения: устройство учащих и устройство учащихся.*

Для решения первой задачи имеется обширный исторический опыт. В настоящее время все высшие учебные заведения сошлись в единодушном требовании автономии. Автономия высших учебных заведений не представляет для них чего-нибудь совершенно нового. До 1885 года университеты обладали автономией и потом двадцать лет были лишены ее. Результаты той и другой системы налицо и об них *не может быть двух мнений: высшие учебные заведения должны быть автономны в деле управления, самопополнения и ведения учебного дела.*

Иначе представляется задача устройства учащихся и установления отношений между учащими и учащимися. В этом отношении прошлое высших учебных заведений дает лишь отрицательные указания. До настоящего времени студенты официально считаются отдельными посетителями высшего учебного заведения. Такого своего положения в стенах учебного заведения студенты никогда не признавали, не имея возможности организовываться явно, распались на отдельные тайные корпорации.

Высшие учебные заведения принуждены в настоящее время считаться с несомненно установленным стремлением русского студенчества организовываться в стенах заведения, и высшим учебным заведениям необходимо разрешить дилемму: или 1) узаконить студенческие организации в стенах заведения, или 2) вывести эти организации из стен заведения, доставив им возможность существовать вне.

Совет Варшавского политехнического института принял второе решение. Следствием этого постановления явилось решение об уничтожении политическо-полицейского надзора за студентами, отметок за поведение, судебных и карательных функций учащей коллегии.

Я не согласен с принципиальным решением Совета о недопущении студенческих организаций в стенах заведения, так как полагаю, что априорное решение упомянутой дилеммы, принятое Советом, идет в разрез с требованиями, поставленными самой жизнью высших учебных заведений.

Я не знаю никаких точных данных, которые позволили бы надеяться, что студенты согласятся вывести свои организации за стены заведения. Мы обладаем лишь отрывочными сведениями о деятельности тайных студенческих организаций и предложение, что главная их задача и цели чисто политические, может оказаться впоследствии лишь заблуждением.

Я полагаю, что нельзя повторять при устройстве высших учебных заведений ошибок прошлого, и стремлению студентов организовываться в стенах заведения необходимо идти навстречу, но при этом ничего не навязывая студентам, а лишь установив законные нормы, в которых желания студентов могли бы осуществиться.

При таком решении упомянутой дилеммы учащей коллегии нельзя ограничиваться лишь одним преподаванием — жизнь учебного заведения поставит им и другие заботы.

По моему мнению, учащая коллегия не может отказаться совершенно от руководства и попечительства о студентах по причинам, заключающимся все в той же современной русской действительности. Затронутый вопрос весьма обширен и я не буду входить здесь в подробности, коснусь лишь одного пункта.

Совет Варшавского политехнического института отказался от судебных и карательных функций по отношению к студентам. Я полагаю, что такое постановление может создать Институту впоследствии тяжкие затруднения.

Известно, что в студенчестве установились понятия о студенческой чести, возник даже товарищеский суд за проступки против чести. Суд этот жесток и подвержен влиянию мимолетных настроений. Коррективом к нему, по моему мнению, может служить лишь гласный профессорский суд.

Другой пример: студент совершил уголовное преступление и, отбыв наказание по судебному приговору, возвращается в стены заведения. Я считаю, что учащая коллегия имеет право высказаться за или против приема такого лица в академическую корпорацию.

Отвлекаясь от частностей и возвращаясь снова к общим положениям, я не согласен с решением Совета Варшавского политехнического института еще на следующем основании.

Реформы, намеченные Советом, изменяют, по моему мнению, существующий тип учебного заведения. Пытаясь представить деятельность проектируемого высшего учебного заведения, я прихожу к заключению, что по существу проектируется правильная организация систематических публичных лекций.

Несомненно, что в настоящее время назрела потребность в такой организации публичных лекций, но переходить от старого испытанного типа высшего учебного заведения к совершенно новому или их смешивать из-за соображений социальных и политических, я считаю опасным для будущности высших учебных заведений.

Оба типа высших учебных заведений имеют право на одновременное и даже совместное существование. Примером может служить Франция, где рядом с Сорбонной в Париже существует Парижский университет» [12, 1907. В. 1, с. 28–31].

Это заявление Георгия Феодосьевича Вороного ярко свидетельствует о его стойкой убежденности в необыкновенной важности воспитывающей роли обучения. Кроме того, четко видна его гражданская позиция: если мнение большинства, с его точки зрения, неверно и может нанести непоправимый вред делу образования, то необходимо открыто и аргументированно высказывать свои доводы. Конечно, это было сложно: пойти не только против мнения коллег-профессоров, но и против прочно уже укоренившегося к началу XX столетия мнения, что «*воспитательный компонент университетского образования может исчерпываться „позитивными ценностями“ науки, духом исследовательской заинтересованности, научной добросовестностью, то есть, в конечном счете, может быть заменен обучением*» [14, с. 4].

На следующем заседании Совета (от 4 октября 1905 г.) продолжалось обсуждение реформы, в основном, вопросы о приват-доцентуре и о чтении публичных лекций в помещении института на польском языке. Это, конечно, были послабления, которых давно добивалось польское общество, но уже ничто не могло остановить захлестнувшие институт беспорядки. Слова Вороного о неправомерности отказа от допущения в стены института студенческих организаций подтвердились через несколько дней. Уже в конце сентября институт был взбудоражен чрезвычайным происшествием, которое обсуждалось на Советах от 6, 8 и 12 октября: слушали заявление группы русских студентов об их желании перевестись в другие русские университеты, и дискутировали вопрос о языке преподавания в высшей школе Варшавы.

Несмотря на все усилия Совета сохранить институт не удалось. Именно Г. Ф. Вороной на заседании 14 октября 1905 г. опять выступал с особым мнением, суть которого такова:

«...надо признать, что при настоящих обстоятельствах и национально-политических течениях, существующих в местном крае и в Институте, никакие правильные учебные занятия в высшей школе идти не могут. Поэтому нельзя оставаться в неопределенном положении, получая содержание и не имея возможности вести учебное дело, по обстоятельствам, от Совета совершенно не зависящим, а потому следует ходатайствовать перед министерством о необходимости расформирования всего Политехнического института, как преподавательского персонала, так и студентов» [12, 1907. B. 1]. При открытом голосовании его поддержали 15 членов Совета из 18.

Результатом, как мы знаем, стал перевод института в Новочеркасск: *«Согласно распоряжению министра торговли и промышленности от 17 сентября 1907 г.»* в составе внушительной делегации варшавских ученых (под руководством Н. Н. Зинина) Г. Ф. Вороной, И. Р. Брайцев, Д. Д. Мордухай-Болтовской и др. были откомандированы в Новочеркасск *«для налаживания учебной работы во вновь открытом Донском политехническом институте»* [9, с. 49].

Раз мы коснулись вопроса гражданской позиции Г. Ф. Вороного, то чуть возвращаясь назад, обратим особое внимание на одно из писем Г. Ф. Вороного академику В. А. Стеклову, находящееся в Архиве РАН [13]. Удивительно, но в 3 том «Сочинений» Вороного это письмо не вошло (по-видимому, из-за отсутствия математического содержания). Не упоминается оно и в анализе переписки, а, тем не менее, оно очень важно для более полного понимания гражданской ответственности профессора Вороного. Письмо приводится почти полностью (за исключением некоторых неразборчиво написанных слов).

Варшава 21 марта 1906 г.
Волчья ул., № 18, кв. 8

Многоуважаемый Владимир Андреевич!

После долгих колебаний я наконец решился ответить на Ваше письмо.

Положение русских в Варшаве очень тяжелое и ухудшается с каждым днем, поэтому каждый из нас, русских, здесь находящихся, я думаю, с радостью уедет в Россию.

Но вопрос: имеем ли мы право уходить со своих постов в то время, когда наш уход отсюда и есть собственно цель борьбы поляков против русских?

После долгих размышлений я решил не уходить из Варшавы, пока русский Университет или Политехнический институт не будут закрыты или преобразованы в польские.

Вопрос этот не будет решен правительством в виде ответной меры, а будет составлять лишь звено в программе русско-польских отношений, которая будет выработана Государственной Думой.

Как отнесется Государственная Дума к существованию русского Университета и Политехнического института в Варшаве — этого, конечно, никто не знает, и предвидеть не может в наше время всяких н…. [нападений?, неполадок? — неразборчиво].

Словом: уйти отсюда в Харьков я желал бы, но не имею права, пока нас Дума не отпустит, а это, наверное, решится не скоро.

Простите за замедление с ответом, но я откладывал его со дня на день, не имея возможности ответить иначе ч…[неразборчиво] *выше изложено и ясно сознавая, что этим ответом я отрезаю себе отступление в Россию.*

Примите уверения в искреннем уважении и преданности.

Г. Вороной

Итак, в национализме Георгия Вороного заподозрить уж точно нельзя. Хотя он украинец по рождению и нежно любит свою Журавку, но родиной своей считает Россию; он — русский по духу, он — представитель петербургской научной школы и оставлять свою работу и своих студентов (несмотря на сложнейшее положение) не намерен. Причем профессор Вороной мог бы преподавать и на польском, по свидетельству Г. Н. Ситы «*...в их варшавском доме звучала русская, украинская, польская, французская речь...*» [15].

Авторы биографической статьи в 3-м томе «Сочинений» (И. Б. Погребысский и И. З. Штокало) не писали об этом письме по очень простой причине: необходимо было подчеркнуть «благонадежность» ученого. А то ведь неизвестно, сумели бы тогда издать его сочинения или нет.... Под «благонадежностью» надо было понимать или то, что профессор Вороной имел революционные убеждения, или притеснялся царским режимом. Содержание письма шло вразрез с требуемыми аспектами. Наоборот, в статье, как бы мельком, пишется о его мировоззренческих «ошибках»: «*...и вот у Вороного-студента складывается ложное убеждение, что революционные методы борьбы с ужасным режимом ... не могут иметь успеха, и, не давая ответа на вопрос — как жить, как быть дальше — в масштабах общества он, не видя возможности сочетать политическую деятельность с исследовательской работой решает его для себя путем ухода в науку*» [4, т. 3, с. 277]. Итак, уход в науку несколько «извиняет» ученого...

Мы уже упоминали о командировке ученых Варшавы в Новочеркасск, куда был переведен Варшавский политехнический институт, ставший Донским. Как известно, в Новочеркасске Вороной пробыл около года и, будучи деканом механического факультета, помогал в организации нового вуза, первым директором которого стал его коллега доктор чистой математики, профессор Н. Н. Зинин. Делегация эта была отозвана в Варшаву уже в августе 1908 г., так как возобновлялись занятия в ВУ и ВПИ. Вороному оставалось жить 3 месяца. Тем не менее, как уже говорилось, он немедленно приступил к чтению дифференциального и интегрального исчисления на 1 курсе математического отделения физико-математического факультета Варшавского университета, а в Политехническом институте — к чтению лекций по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению на 1 курсе механического отделения. Профессорский состав за годы закрытия вузов поредел, нагрузка была большая, о чем свидетельствует пара строк из письма к академику А. Н. Крылову (4 сент. 1908 г.): «*Простите за отрывочное письмо, пишу в промежутке между лекциями в университете и политехникуме*...» [4, т. 3, с. 201].

В тот же день — 4 сентября можно было видеть профессора Вороного на заседании Совета Варшавской политехники, решающего обычные вопросы, возникающие при возобновлении занятий, и еще один важный — о выборах Директора. Вот тут и развернулись события, о которых упоминаний в изученных источниках мы не находили.

После закрытой подачи записок с кандидатурами на должность директора оказались выбранными «*...проф. Вороной 8 зап., проф. Дейч 7 зап., проф. Амалицкий 6 зап., проф. Бевад 2 зап. и проф. Солонина 1 зап. Проф. Бевад и Солонина отказались от баллотирования их*» (засед. 4 сент. 1908 г.) [12, 1910. В.1]. То есть Г. Ф. Вороной был тайным голосованием, в сущности, выбран на должность Директора, оставалось только пройти баллотировку шарами...

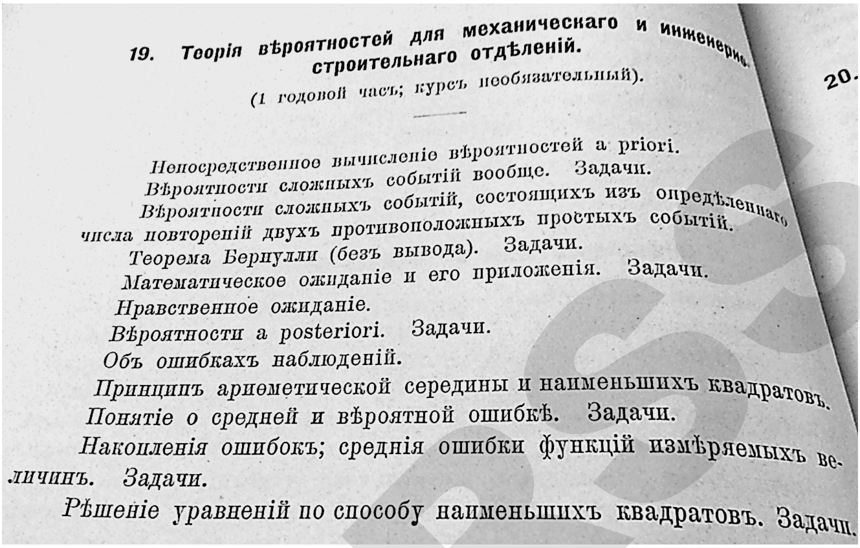
После этого проф. В. А. Солонина сделал заявление о правомочности допущения Вороного к баллотировке, так как ему сложно будет совмещать 2 должности, профессорскую в университете и директорскую в политехническом институте. Вороной возразил, что совместительство разрешено по закону, его поддержали 7 членов Совета (в т. ч. и непримиримые поляки — А. Л. Васютинский и Н. К. Толвинский!) против 4. После второй баллотировки, когда все получили одинаковое число записок «за» и «против», Вороной снял свою кандидатуру, но на следующий день (5 сентября 1908 г.) Совет продолжил баллотировку с прежним составом, в результате чего и. о. Директора стал профессор В. П. Амалицкий (7 за и 6 против). Г. Ф. Вороной получил 5 за и 9 против, В. И. Дейч — 4 за и

9 против [12, 1910. В.1]. Как бы то ни было, авторитет у профессора Вороного был в институте, несмотря на разногласия, разделившие Совет, видимо, нешуточный.

На следующих трех заседаниях Совета (19 сентября,13 и 20 октября 1908 г.) Вороной присутствовал (нужно отметить, что он очень аккуратно посещал их всегда), а на заседании 11 ноября 1908 г. было объявлено о кончине проф. Вороного. В ВПИ его нагрузка перешла к проф. И. Р. Брайцеву, в ВУ — его заменили И. Р. Брайцев, Д. Д. Мордухай-Болтовской, В. П. Вельмин, позднее В. И. Романовский. Некролог Вороному написан его другом, профессором И. Р. Брайцевым и опубликован в Варшавских университетских известиях [6, 1909. № II–III], «...*в Петербурге некролог был читан в заседании Физико-Математического Отделения АН А. А. Марковым 12 ноября 1908 г.*» [16, с. 1–15].

В педагогическом наследии профессора Вороного немалую долю занимают его учебники. Характеристика некоторых из них присутствует в 3-м томе его сочинений. До сих пор исследователи научного творчества Г. Ф. Вороного упоминали о двух курсах лекций: по аналитической геометрии и по дифференциальному и интегральному исчислению. В Протоколах Варшавского политехнического института указывается на то, что имелись литографированные курсы лекций Вороного по дифференциальному исчислению для 1-го курса и по математике (скорее всего — интегральное исчисление) для 2-го курса механического отделения (из Отчета о состоянии ВПИ на 1899–1900 гг.) [12, 1900. В.1].

Благодаря счастливому стечению обстоятельств мы располагаем литографированным курсом лекций профессора Вороного по теории вероятностей. Эту дисциплину Вороной читал как в университете, так и в политехническом институте. Более того, в «Известиях Варшавского политехнического института» за 1904 год напечатана его программа «Теория вероятностей для механического и строительного отделения» (годовой необязательный курс).


19. *Теорія вѣроятностей для механическаго и инженерно-строительнаго отдѣленій.*

(1 годовой часъ; курсъ необязательный).

20.

Непосредственное вычисленіе вѣроятностей a priori.

Вѣроятности сложныхъ событій вообще. Задачи.

Вѣроятности сложныхъ событій, состоящихъ изъ опредѣленнаго *числа повтореній двухъ* противоположныхъ простыхъ событій.

Теорема Бернулли (безъ вывода). Задачи.

Математическое ожиданіе и его приложенія. Задачи.

Нравственное ожиданіе.

Вѣроятности a posteriori. Задачи.

Объ ошибкахъ наблюденій.

Принципъ ариѳметической середины и наименьшихъ квадратовъ.

Понятіе о средней и вѣроятной ошибкѣ. Задачи.

Накопленія ошибокъ; среднія ошибки функцій измѣряемыхъ величинъ. *Задачи.*

Рѣшеніе уравненій по способу наименьшихъ квадратовъ. Задачи.

Программа курса по теории вероятностей Г. Ф. Вороного, читанного в Варшавском политехническом институте (Программы курсов Варшавского политехнического института Имп. Николая II. Варшава: Тип. акц. общ-ва С. Оргельбранда и Сыновей. 1904)

Думается, что неизвестный лекционный курс представляет интерес для аудитории. Особенно интересно сравнить его с литографированным курсом А. А. Маркова, читанным в Санкт-Петербургском университете. Марков, по словам его сына А. А. Маркова-младшего, очень любил этот курс и, даже выйдя в отставку (1905), оставил его за собой и продолжал его читать. В РНБ нашлись ссылки на 3 литографированных курса. Для сравнения нами были выбраны 2 из них — за 1884/5 и 1888 гг., как раз за время учебы Георгия Вороного в университете.

Прежде всего, после сравнения этих двух тетрадей стало понятно, что лекции почти не отличаются друг от друга, даже примеры идентичны. Единственное, что можно заметить, что излагаемые в первом пособии «пояснительные отступления и замечания» исчезли во втором, изложение, пожалуй, стало «суше»... Вспомним слова Д. Д. Мордухай-Болтовского о чтении Марковым лекций по принципу «*ничего лишнего*» и фразу Н. М. Гюнтера: «*Лекции А. А.* [Маркова] *всегда имели деловой характер; никаких отступлений в сторону, не имеющих отношения к предмету, никаких вводных фраз*...» [17, с. 39].

Отметим, что как у А. А. Маркова, так и у Г. Ф. Вороного имеются программы по теории вероятностей (А. А. Марков. Программа по теории вероятностей. 1893 г.) [18], (Г. Ф. Вороной. Программа по теории вероятностей. 1904 г.) [19]. К сожалению, ни у А. А. Маркова, ни у Г. Ф. Вороного нет ссылок на рекомендованную литературу (ни в программе, ни в литографированных курсах). Можно было бы предположить, что А. А. Марков рекомендовал материалы своих исследований, но, напомним, что его «Исчисление вероятностей» появилось позднее (СПб.: Тип. Имп. АН, 1900. 279 с.). Скорее всего, эти литографированные курсы ([18], [20] и [21]) А. А. Маркова — своеобразная «проба пера» для написания вышеупомянутого труда.

Судить о содержании по предложенной программе без текста лекций — задача неблагодарная. Интереснее сравнивать университетские курсы лекций, что стало возможным благодаря польским коллегам. Причем, как нам кажется, литографированные лекции интересны тем, что это не «причесанный» учебный текст, а — «живая речь» автора, раскрывающая манеру и характер общения со слушателями, порой даже воспитательное воздействие на них.

Результаты сравнения

1. Как уже упоминалось, стиль изложения Маркова — «ничего лишнего». У профессора Вороного совершенно иной стиль изложения. Если в лекциях А. А. Маркова введение основных понятий ТВ с примером (до параграфа «Основные теоремы») занимает с первой по шестую страницы текста, то у Вороного со второй по сорок девятую страницы! Но при этом — тоже «ничего лишнего»...

Вороной при этом использует массу примеров, включая и примеры, показывающие «*возможность математическую и невозмож-*

ность физическую» [пример с угадыванием задуманного числа, задача о конусе, иллюстрирующие условие совпадения понятия о математической достоверности с понятием о физической достоверности (только тогда, когда число всех возможных случаев конечно)]. Кроме того, он обращает внимание на то, что «*равновозможность событий не есть нечто абсолютное*», т. к. при определении равновозможности и неравновозможности человек руководствуется сознанием, которое «*небезупречно*» и приводит пример ошибки из истории теории вероятностей (Ж. Даламбер), указывая при этом, как вводили меру вероятности события П. Ферма и Б. Паскаль. Тут же среди примеров, он приводит исторические задачи: о разделении ставки Паскаля $\left(\frac{3}{4} \text{ и } \frac{1}{4}\right)$, об игре в кости (*passe-dix*) (решение Г. Галилея и еще одно, показывающее, что вероятность какого-либо события не зависит от способа ее определения).

А. А. Марков же по этому поводу не комплексует: «*...определение вероятностей заключает в себе много субъективного, однако ничуть не более, чем и другие человеческие суждения...*» [20, с. 6].

2. Число рассматриваемых примеров и задач в разделе «Основные теоремы» тоже различно. Если в лекциях А. А. Маркова тема занимает с седьмой по тринадцатую страницы вместе с примерами, то у Вороного — с пятидесятой по девяносто девятую страницы. Обращает на себя внимание его четкое напоминание, что теорема сложения вероятностей применима только для несовместных событий, в противном случае получается неверный результат (подтверждается примером).

3. В параграфе «О повторных испытаниях» в лекциях А. А. Маркова нет ни одного примера, только вывод формулы

$$P_{m,n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-m)} p^m q^{n-m}.$$

Лекционный материал по рассматриваемой теме у Вороного сопровождается четырьмя примерами, расположенными по возрастанию сложности. В том числе заслуживает нашего внимания задача о бросании одновременно двух шестигранных костей (выигрыш — при появлении двух шестерок), где нужно определить наименьшее число испытаний, требуемое для того, чтобы бросающий кости имел преимущество. Вороной подробно разбирает решение Б. Паскаля (25 испытаний) и *Chevalier de Méré* (24 испытания), предложившего эту задачу Паскалю.

4. Далее идут расхождения в порядке изложения тем: А. А. Марков рассматривает параграфы:

«Результаты весьма большого числа испытаний»

(Марков в нем применил формулу Стирлинга и получил:

$$P_{\mu,n} < \frac{1}{\sqrt{2\pi p\,(1-p)\,n}} \cdot e^{\frac{1}{12n}},$$

затем использовал это неравенство для доказательства теоремы Бернулли).

«Теорема Бернулли»

(*Если произведем достаточно большое число испытаний, при каждом из которых вероятность случиться некоторому событию A равняется p, то с вероятностью, сколь угодно близкою к единице можем утверждать, что отношение $\dfrac{m}{n}$ — числа повторений события A к числу всех испытаний — будет столь близко к p сколь угодно*).

«Обобщенная теорема Бернулли (доказательство П. Л. Чебышева)»

Здесь впервые появляются кратчайшие упоминания об авторах, в частности: «*Теорема эта в первый раз была доказана Яковом Бернулли (Ars conjectandi, 1713)*» [20, с. 29], имена С. Пуассона (в связи с обобщенной теоремой Бернулли) и П. Л. Чебышева. Отметим также, что в своем следующем литографированном издании 1888 г. Марков излагает и второе доказательство теоремы Бернулли, принадлежащее П. Лапласу [21, с. 44–51].

В лекциях Вороного порядок другой:

«О суммировании рядов»

Замечая, что формула Л. Эйлера, с помощью которой суммируются ряды, применима только для аналитических функций, а в выражении $P_{m,n}$ встречается числовая функция $n!$, он расширяет понятие интеграла, пользуясь исследованиями *Stieltjes'a* и строго выводит так называемую суммарную (обобщенную) формулу Эйлера, имеющую «*...чрезвычайно важное значение для математического анализа*». Применяя ее к вычислению суммы логарифмов натурального ряда чисел и пользуясь формулой Валлиса, получает формулу Стирлинга, затем вводит понятие Гамма-функции $\left(\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}dt = \Gamma(x+1)\right)$. (Вероятно, потому, что по программе интеграл Стилтьеса не читался, а не в характере Вороного было что-то давать без доказательства...).

«Приближенное вычисление вероятности P_{mn}»

Применяя формулу Стирлинга, Вороной выводит формулу

$$P_{mn} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

и применяет изложенный метод для решения задачи Лапласа, находя, что

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_\alpha^\beta e^{-t^2} dt$$

и отмечая важность полученной формулы для практики вычисления P_{mn} и для доказательства теоремы Бернулли.

«Теорема Бернулли»

Теорему Я. Бернулли Вороной доказывает тем методом, что ее доказал П. Лаплас, причем интересно то, что оба автора (Марков и Вороной) рассмотрели один и тот же пример, только с разными целями....

Пример. А. А. Марков [20, с. 34–35]. $p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{3}{5}$. Сколько нужно сделать испытаний, чтобы с вероятностью, превосходящей $1 - \frac{1}{1000}$, можно было утверждать, что отношение $\frac{m}{n}$ будет отличаться от $p = \frac{2}{5}$ не более как на $\frac{1}{50}$?

Ответ: Все условия вопроса будут удовлетворены при $n \geqslant 17350$.

Пример. Г. Ф. Вороной [22, с. 184–185]. В сосуде находится два белых и три черных шара. Из сосуда вынимаем шар, замечаем его цвет и бросаем обратно в сосуд — это одно испытание. Требуется определить число испытаний, достаточное для того, чтобы утверждать с вероятностью, превосходящей 0,999, что отношение между числом появлений белого шара и числом испытаний будет отличаться от вероятности появления белого шара при каждом испытании не больше, чем на $\frac{1}{50}$.

Вороной использует пример для того, чтобы сравнить результаты, полученные Я. Бернулли и П. Лапласом и оценить точность вычисления вероятности. Взяв за исходное число испытаний, полученное Я. Бернулли ($n = 25550$), и, используя таблицы своего учителя — академика А. А. Маркова, он показывает, что значения вероятности у Я. Бернулли $p \approx 0{,}999$, а у П. Лапласа $p \approx 0{,}999\,999\,999\,93$. Здесь же он упоминает об обобщении теоремы Бернулли С. Пуассоном, отмечая, что это лишь частный случай закона больших чисел, открытого русским математиком П. Л. Чебышев.

«О математическом ожидании величин»

Если у А. А. Маркова понятие «*математическое ожидание*» вводится в параграфе, посвященном обобщенной теореме Бернулли, то Г. Ф. Вороной очень подробно рассматривает его свойства с доказательствами и примерами. О том, что материал лекций новый, по существу, только что полученный, свидетельствует отсутствие символики (математическое ожидание оба обозначают словами:

«*Матем. ожид. X*», только у Вороного кое-где есть слабая попытка ввести некие буквенные обозначения).

«Закон больших чисел»

Интересно, что у А. А. Маркова в лекциях нет такого выражения, он, излагая доказательство П. Л. Чебышева обобщенной теоремы Бернулли, иначе — теоремы Пуассона, это не акцентирует, лишь в конце параграфа упоминает об этом. У Г. Ф. Вороного результаты П. Л. Чебышева в качестве примеров прилагаются для доказательства теорем Бернулли и Пуассона (Пример 1 [22, с. 212–214] и Пример 2 [22, с. 215–217]).

5. Затем оба автора переходят к рассмотрению безобидности игр, причем А. А. Марков рассматривает сначала только «Условие безобидности игр», а затем отдельным параграфом «Различные задачи. Лотереи, подобные французской». У Г. Ф. Вороного же изложена «Теория безобидности игр» (с. 221–240) с множеством примеров, среди которых встречаются аналогичные примерам А. А. Маркова. Отметим, что Г. Ф. Вороной подробно рассматривает известную «Петербургскую задачу» и после решения излагает ее историю.

Замечания и выводы

1. В рассматриваемых источниках отсутствуют ссылки на литературу, рекомендованную студентам.

2. Сравнение программы по курсу теории вероятностей А. А. Маркова (Санкт-Петербургский университет) с программой Г. Ф. Вороного в Варшавском университете указывает на то, что, несмотря на менее подготовленный контингент студентов и особенности преподавания в провинциальном университете, Г. Ф. Вороной держит высоко марку петербургской научной школы, той школы, которая его взрастила.

3. Сравнение программы по курсу теории вероятностей А. А. Маркова (Санкт-Петербургский университет) с программой Г. Ф. Вороного в Варшавском политехническом институте дает возможность выявить основное отличие: у Вороного курс предполагается в облегченном изложении с ярко выраженной практической направленностью, что вполне приемлемо для будущих инженеров.

4. Четко выявляется отношение авторов к историческим сведениям при чтении лекций: у А. А. Маркова они минимальны и сводятся к упоминанию авторов исследований, Г. Ф. Вороной же убежден в необходимости использования историко-математического материала и успешно его применяет. Тем самым видна разница отношения к воспитывающей роли обучения. Вороной, по своей сути, — талантливый педагог, и с его ранней кончиной Россия лишилась не только математика, по словам сдержанного на похвалы Д. А. Граве, «*носившего печать гениальности*», но и замечательного педагога, усилиями которого могли быть взращены многие талантливые ученики.

5. Некоторая несхожесть при порядке изложении содержания может объясняться тем, что силами преподавателей факультета в Варшавском университете проводились дополнительно к курсу практические занятия.

В лекциях сохранены пунктуация, оформление текста и обозначения автора, кроме написания некоторых слов, вышедших из употребления в современном русском языке, и явных описок. Для более удобного восприятия текста основные понятия, фамилии математиков и цитаты выделены нами курсивом.

В заключение выражаю глубокую признательность нашему коллеге из Польши Витольду Венслову за предоставленный экземпляр лекций Г. Ф. Вороного и д. ф.-м. н. А. Н. Кириллову за тщательную проверку текста и ценные замечания и предложения по содержанию.

Отметим еще, что на сайте семинара по истории математики ПОМИ СПб имеются записи двух докладов о Г. Ф. Вороном: «Время и судьбы. Вороные» (3 сентября 2015 г.) и «Георгий Вороной — педагог и гражданин. Штрихи к портрету» (7 ноября 2019 г.): http://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=10&confid=504

Учебники Г. Ф. Вороного

- Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в Императорском Варшавском университете профессором Г. Вороным, 1899/1900 учеб. год. 838 с.
- *Вороной Г. Ф.* Дифференциальное и интегральное исчисление // Варшавские университетские известия. Варшава: Тип. Варшавского учебного округа. Краковское предместье. № 3 (1909–1911 гг.), 604 с. (**1909**, № IV–V, с. 1–48, № VI, с. 49–96, № VII, с. 97–128, № VIII, с. 129–192, № IX, с. 193–208; **1910**, № I, с. 209–240, № II, с. 241–272, № III, с. 273–304, № IV, с. 305–320, № V, с. 321–352, № VI, с. 353–360, № VII, с. 361–368, № VIII, с. 369–384, № IX, с. 385–416; **1911**, № I, с. 417–432, № II, с. 433–440, № III, с. 441–448, № IV, с. 449–464, № V, с. 465–480, № VI, с. 481–496, № VII, с. 497–560, № VIII, с. 571–604), или отдельное издание.
- Курс теории вероятностей, читанный профессором Вороным на 1902/3 учеб. год. Варшава, литографированный курс.

Список использованной литературы

1. Геометричні мозаїки великого українця (до 150-річчя від дня народження професора Георгія Вороного) / М. В. Працьовитий, Г. М. Сита // Вісник Національної академії наук України. 2018. № 4.
2. *Шишкалова Н. Г.* Георгий Вороной: математика — для меня вся жизнь // Страна знаний. 2018. № 2.
3. *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Издательство АН СССР, 1947. 420 с.
4. *Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений в 3-х томах. Киев: Институт математики АН УССР, 1952–1953.

5. *Локоть Н. В.* Математики первых петергофских гимназий (1880–1917) // Сборник научных трудов SWorld. Вып. 1(38). Том 21. Одесса: КУПРИЕНКО СВ, 2015. С. 37–50.
6. Варшавские университетские известия. Варшава: Типография Варшавского учебного округа. 1894–1911 гг.
7. *Синкевич Г. И.* Георг Кантор & Польская школа теории множеств. СПб.: СПбГАСУ, 2012. 349 с.
8. *Баженова А. Ю.* Историки императорского Варшавского университета: условия формирования пограничной идентичности // Сословие русских профессоров. Создатели статусов и смыслов [Текст]: коллективная монография / пер. с нем. К. Левинсона; пер. с польск. Д. Добровольского; под ред. Е. А. Вишленковой, И. М. Савельевой. М.: Изд. дом Высшей школы экономики. 2013. 392 с.
9. *Пырков В. Е.* Методическое наследие Д. Д. Мордухай-Болтовского и опыт его использования в современном математическом образовании. Диссертация на соискание ученой степени к. п. н. Ростов-на-Дону, 2014. 230 с.
10. *Долбилин Н. П.* Многогранный Делоне // Квант. 2010. № 1, 2.
11. Варшавский политехнический институт, 1902 год (фото из фонда ИПЦ Нижегородского государственного технического университета).
12. Известия Варшавского политехнического института. Варшава. 1900–1910.
13. Архив РАН. Фонд В. А. Стеклова. Ф. 162. Оп. 2. Дело № 78.
14. *Куприянов М. С.* Функция воспитания в системе высшего образования // Ученые записки: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2013. № 3 (27). Том 1. С. 1–6.
15. *Сита Г.* Деякі сторинкі з історії роду Вороних-Крицьких.
16. http://bcpw.bg.pw.edu.pl/Content/8837/PDF/ivp1908_nr1.pdf (16.07.2022).
17. *Гродзенский С. Я.* Андрей Андреевич Марков. М.: Наука. 1987. 256 с.
18. *Марков А. А.* Теория вероятностей. Лекции, читанные в Санкт-Петербургском университете приват-доцентом А. А. Марковым. 1882/3 акад. год. Издание студентов 4-го курса. [СПб.]. Литогр. Шепердсон; со 2-го листа: типо-литогр. С.Ф. Яздовского. 219 с. Прил.: Программа по теории вероятностей (с. 1–4, 2-я пагинация).

19. Программы курсов Варшавского политехнического института Имп. Николая II. Варшава: Тип. акц. общ-ва С. Оргельбранда и Сыновей. 1904.

20. *Марков А. А.* Теория вероятностей. Лекции, читанные в Санкт-Петербургском университете приват-доцентом А. А. Марковым. 1884/5 акад. год. Издание Петрова. Литогр. Яздовского, Казанская, 18. 1884 г., декабрь. 158 с.

21. *Марков А. А.* Теория вероятностей. Литография Яздовского, Казанская, 18. [1888 г.] 221 с.

22. Курсъ Теоріи Вероятностей, читанный профессоромъ Воронымъ на 1902/3 годъ. Варшава. 1903. С. 1–240. (Варшавский университет. Рукопись).

Н. В. Локоть

КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ЧИТАННЫЙ ПРОФЕССОРОМ ВОРОНЫМ НА 1902/3 ГОД

Лекция 1

Введение

Главная задача теории вероятностей или точнее сказать исчисления вероятностей состоит в рассматривании вопроса о вероятности различных событий, которые могут встретиться при решении некоторых вопросов. Во всех случаях, когда речь идет о появлении какого-нибудь события, можно сделать следующие три предположения: первое, что данное событие A произойдет непременно, второе — данное событие наверно не произойдет, и наконец, третье, данное событие может произойти или не произойти.

В первом случае рассматривается событие *достоверное*, во втором *невозможное*, в третьем *более или менее вероятное*. Достоверность и невозможность какого-нибудь события можно рассматривать как предельные случаи событий более или менее вероятных. Когда имеешь дело с событиями более или менее вероятными, тогда появляются вопросы, чего скорее можно ожидать, того ли, что данное событие произойдет, или того, что оно не произойдет. Для решения нашего сомнения мы должны знать все случаи, *благоприятствующие* данному вопросу или событию и *неблагоприятствующие* ему.

Рассмотрим один пример: предположим, что в сосуде находится несколько шаров белых и черных; белых пусть будет, напр., 3 с номерами 1, 2, 3, а черных 2 с номерами 4, 5. Если мы станем из сосуда вынимать шары, то с достоверностью можем утверждать, что появится или белый, или черный шар, но ведь белых 3 шара, а черных только два, а потому можем скорее предполагать появление белого шара, а не черного. Итак, при вынимании шаров можем наверно ожидать появление двух событий: первое событие будет появление белого шара, другое событие будет появление черного шара; каждое из этих событий можем подразделить на отдельные случаи, именно, первое событие будет иметь место в трех случаях: когда покажется шар с номером 1, 2 или 3; другое событие будет в двух случаях: именно, когда вынем шар с номером 4 или 5. Следовательно, всех случаев имеем $3 + 2 = 5$, причем случаев, благоприятствующих появлению белого шара, то есть первому событию имеем три (№ 1, 2, 3), а появлению черного шара благоприятствуют только два случая (№ шаров 4 и 5), следовательно, мы можем скорее ожидать появления белого шара, нежели черного.

Этот пример обобщим.

Пусть имеем некоторое событие A и пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ будут всевозможные случаи, которые соответствуют данному случаю A. Если окажется, что все случаи $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ благоприятствуют появлению события A, то событие A произойдет наверняка, то есть оно достоверное. Если же часть случаев $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_q$ благоприятствуют событию A, а остальные случаи $a_{q+1,}a_{q+2}, a_{q+3}, \ldots, a_n$ не благоприятствуют появлению события A, то событие A может произойти, а может и не произойти. В этом случае оно более или менее вероятно в зависимости от случаев, благоприятствующих или неблагоприятствующих появлению его. Наконец, если ни один из случаев $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ не благоприятствует событию A, то событие A не произойдет, т. е. оно невозможное.

Итак, чтобы решить вопрос о том, сбудется ли некоторое событие или нет, нужно сначала просчитать все возможные случаи, которые могут представиться при нашем вопросе, а затем посмотреть, сколько случаев благоприятствует и сколько не благоприятствует появлению рассматриваемого события. В зависимости от числа тех и других мы определим достоверность, возможность и невозможность данного события. Нужно, однако, заметить, что такого рода воззрением на вероятность нельзя ограничиваться в области всех возможных явлений. На самом деле: возьмем следующий пример:

Одно лицо задумывает какое-нибудь число, и мы должны отгадать его. Если число чисел, среди которых выбирается задуманное число, не ограничено никакими условиями, то отгадать задуманное число для нас физически невозможно вследствие бесконечного множества случаев неблагоприятствующих. Указанную невозможность угадать задуманное число при полной произвольности его выбора — мы осознаем вполне, тем не менее, с математической точки зрения невозможным называется только то событие, которому не соответствует ни один благоприятствующий случай. В данном примере это условие не соблюдено, так как раз число задумано, то непременно существует один случай, благоприятствующий тому, чтобы число было отгадано. Таким образом, мы имеем дело с возможностью математической и с невозможностью физической.

Подобных примеров можно указать множество. Возьмем еще один:

Требуется найти положение равновесия конуса, опирающегося острием на плоскость. Задача эта допускает математическое решение, но поставить конус на самом деле в положении равновесия физически невозможно; причина этого состоит в том, что число случаев, встречающихся при нашей попытке, бесконечно велико.

Вообще понятие о математической достоверности совпадает с понятием о физической достоверности только тогда, когда число всех возможных случаев конечно. — Предположим, что при решении какого-нибудь вопроса мы перечислим различные возможные события. Если относительно этих событий мы можем с достоверностью утверждать, что одно из них непременно произойдет, то мы такие события будем называть *единственно возможными*. Пусть, например, в сосуде находятся три белых шара с номерами 1, 2, 3 и два черных с номерами 1, 2. Вынимаем один шар наудачу. Мы можем утверждать, что непременно появится либо белый шар, либо черный — это будут события единственно возможные.

Можно также утверждать, что появится шар или с номером 1, или с номером 2, или с номером 3 — это события также единственно возможные, но зато появление белого шара или шара с номером 1 уже события не единственно возможные, так как может появиться черный шар с номером 2. Заметим, что в рассматриваемом случае появление белого шара [не][*)] исключает возможность появиться шару с номером 1, так как в сосуде по предположению находится белый шар с номером 1. Поэтому появление белого шара и шара с номером 1 это события совместные, т, е. такие, которые могут появиться одновременно.

В том случае, когда появление одного события исключает возможность появления другого события, говорят, что эти события *несовместны*, например, появление белого и черного шара в том случае, когда вынимается только один шар из сосуда. Эти события несовместные.

Предположим теперь, что события A_1, A_2, ..., A_n единственно возможны и несовместны. Если данные, которыми мы располагаем при решении рассматриваемого вопроса, не дают нам основания ожидать появления предпочтительно перед каким-нибудь одним из них, то такие события мы будем называть *равновозможными*. Рассмотрим прежний пример.

В сосуде 3 белых шара и два черных. Вытянем из сосуда шар наудачу. Относительно цвета вынутого шара можно сделать два предположения:

1) вынутый шар будет белый;
2) вынутый шар будет черный.

Эти события единственно возможные и несовместные. Спрашивается теперь, будут ли эти события равновозможными или неравновозможными? Так как белых шаров 3, то потому мы можем ожидать появления белого шара в трех случаях, черных же шаров имеется только 2, а потому и случаев появления черного шара имеется два; итак, белый шар появляется в трех случаях и черный в двух, а потому появление белого шара мы можем ожидать скорее, нежели появление черного. На этом основании приходим к заключению, что события: появление черного шара и появление белого шара — неравновозможны. Вообще *неравновоз-*

[*)] «Не» добавлено нами — иначе явная описка!

можными событиями называются те, условия появления которых неодинаковы. — Предположим теперь, что в сосуде находится пять одинаковых шаров; вынимаем наудачу шар; тогда будем иметь пять событий единственно возможных и несовместных, но вместе с тем эти 5 событий будут равновозможными, потому что нет никакого основания ожидать появления одного какого-нибудь шара предпочтительно перед другим. Нужно заметить, что равновозможность события не есть нечто абсолютное: одному лицу известные события кажутся равновозможными, потому что ему известны только некоторые условия появления этих событий, для другого лица, более осведомленного, эти же самые события могут уже казаться неравновозможными. Для определения того, имеем ли мы дело с равновозможными событиями или с неравновозможными, мы можем руководствоваться лишь нашим сознанием, но наше сознание [небезупречно] *). Одни и те же события могут рассматриваться одним лицом как равновозможные, а другим при таких же условиях неравновозможными. Это обстоятельство является причиной ошибок, которые допускались различными лицами при решении задач в Теории вероятностей.

Понятие о событиях равновозможных и неравновозможных есть одно из основных понятий, вводимых в теории вероятностей. Мы упоминаем об ошибках, которые встречаются в решениях задач Теории вероятностей, предложенных различными лицами. Рассмотрим один такой пример.

В сосуде $\underline{n}$ шаров; кто-нибудь вынимает шары. Число вынимаемых шаров не указано, следовательно, можно вынуть один шар, или два шара, или три шара, или даже $\underline{n}$ шаров. Таким образом, мы имеем дело с $\underline{n}$ возможными событиями. Так как одно из этих событий должно непременно произойти и притом только одно, то все эти n событий будут единственно возможными и несовместными. На первый взгляд может показаться, что эти события равновозможны. Так, например, думал знаменитый *Даламбер*. Но

---

*) Слово «небезупречно» вставлено нами, т. к. в тексте неразборчиво.

достаточно глубже вдуматься в занимающий нас вопрос, чтобы убедиться в противоположном. Предположим, например, что вынуто $\underline{k}$ шаров. Эти $\underline{k}$ шаров можно вынуть несколькими способами, число их равно числу сочетаний $\underline{n}$ по $\underline{k}$, т. е. $\dfrac{n(n-1)\ldots.(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots k}$.

Так как нет причины ожидать, что мы эти $\underline{k}$ шаров вынем одним способом, а не каким-нибудь другим, то все способы вынимать шары для нас равновозможны. Таким образом, мы приходим к следующему заключению:

1-й	шар	можно	вынуть	только	в	n	случаях,
2-й	»	»	»	»	в	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	случаях,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k-й	»	»	»	»	в	$\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$	случаях,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n-й	»	»	»	»	в	1	случае.

Из этой таблички видно, что два шара легче вытянуть, нежели один шар, $\underline{k}$ шаров легче вынуть, нежели $\underline{n}$ шаров и т. д. Вообще появление шаров в числе 1, 2, 3, . . . , n события неравновозможные.

Вернемся снова к первому примеру. Пусть в сосуде три белых шара и два черных. Так как белых шаров в сосуде больше, чем черных, то мы склонны ожидать скорее появления белого шара, чем черного. Здесь взята небольшая разница между числом белых и черных шаров и потому может возникнуть сомнение в справедливости сделанного заключения. Но допустим, что в сосуде находится 1 000 000 белых шаров и один черный, в этом случае мы почти с уверенностью скажем, что вынем белый шар. Приведенные примеры показывают, что человеческому сознанию присуща способность оценивать большую или меньшую возможность появления события на основании определенных данных.

Способность эту впервые *Паскаль* и *Ферматъ*[*)] выразили в математической формуле. *Лаплас* во введении к сочинению *«La théorie analytiuque des probabilités»* следующим образом характеризует теорию вероятностей:

«Теория вероятностей по существу не что иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям, т. е. она дает возможность оценивать с точностью то, что сильные умы чувствуют инстинктивно, не отдавая себе в том отчета».

Степень возможности появления по *Паскалю* и *Фермату* какого-нибудь события выражается дробью, знаменателем которой служит число всех равновозможных случаев, соответствующих вопросу, а числителем — число равновозможных случаев, благоприятствующих рассматриваемому событию. Эта дробь называется *мерой вероятности* данного события или просто *вероятностью* события. Мера вероятности, хотя представляет понятие, искусственно созданное, тем не менее, имеет важное значение, так как дает возможность следить за изменением степени сомнения в возможности появления возбуждаемого в нас изучением какого-нибудь явления. Если для данного события имеем $\underline{n}$ всех равновозможных случаев[**)], из которых $\underline{m}$ случаев благоприятствует этому событию, то сомнение в возможности осуществления этого события измеряется дробью $\dfrac{m}{n}$.

Допустим, что или число всех случаев увеличилось, но число благоприятствующих данному событию не изменилось, или число благоприятствующих уменьшилось, но общее число всех случаев не изменилось; в обоих случаях дробь $\dfrac{m}{n}$ уменьшается и в то же время в нашем сознании уменьшается возможность появления события. Если же сомнение наше уменьшилось, значит, или число

---

*) Принятое в то время написание имени Пьера Ферма (Pierre de Fermat).

**) Автором подчеркиваются некоторые буквы, вероятно, с целью выделения их из текста. Так как это делается нерегулярно, то в дальнейшем нами опускается.

всех случаев уменьшилось, или число благоприятствующих случаев увеличилось, значит, или знаменатель дроби должен уменьшиться, или числитель увеличиться, значит, сама дробь увеличивается. К сожалению, вероятность не всегда можно выразить числом, так как возможны такие явления, для которых или всех возможных случаев перечислить нельзя, или же случаев, благоприятствующих данному явлению, или же, наконец, нельзя перечислить ни тех, ни других случаев, так что у нас недостаточно данных для составления дроби, выражающей вероятность рассматриваемого явления. В том случае, когда перечислены единственно возможные и несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, но неравновозможные, необходимо кроме этих событий перечислить равновозможные случаи им соответствующие.

Предположим, что событию A_1 благоприятствует α_1 равновозможных случаев, событию A_2 благоприятствует α_2 равновозможных случаев, событию A_3 — α_3 и наконец, событию A_n — α_n. Таким образом, мы получаем всего $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$ равновозможных случаев, из которых α_1 случаев благоприятны событию A_1, α_2 — событию A_2, α_n — событию A_n. Тогда вероятность события A_1 выразится дробью $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n}$, вероятность события A_2 выразится дробью $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n}$ ... и т. д. — Теперь является следующий вопрос: получится ли та же мера вероятности, если мы станем рассматривать события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ иначе, то есть если другим способом перечислим равновозможные случаи или благоприятствующие. Допустим, что β_1 случаев благоприятствуют событию A_1, β_2 — событию A_2 и т. д. Встает вопрос, можем ли мы утверждать, что две меры вероятности, полученные двумя способами, равны, то есть, имеет ли место равенство

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_n}.$$

Вычисления показывают, что такое равенство вообще существует, то есть что мера вероятности какого-нибудь события не зависит от способов вычисления ее (впоследствии подтвердим это заключение на одном примере), но строго математическим путем доказать этого положения нельзя; это обстоятельство есть одно из важнейших недостатков теории вероятностей. — Событие достоверно тогда, когда все возможные случаи, отвечающие этому событию, благоприятствуют ему. Если число всех равновозможных случаев обозначим через m, то для того, чтобы событие произошло, наверное, требуется, чтобы все m случаев благоприятствовали ему. Мера вероятности достоверного события выразится дробью: $\frac{m}{m} = 1$. Итак, символом достоверности события есть 1.

Невозможность события обнаруживается тогда, когда нет ни одного случая, благоприятствующего ему, т. е., когда число благоприятствующих случаев равно 0. Если число всех благоприятствующих случаев обозначить через m, то мера вероятности невозможного события выразится дробью $\frac{0}{m} = 0$. Итак, символом невозможности какого-нибудь события есть 0.

Пример I. В сосуде находится три белых шара и два черных. Из сосуда вынимаем один шар наудачу. Спрашивается, какова мера вероятности появления белого шара и какова мера вероятности появления черного шара.

Рассматривая появление каждого шара, как отдельное событие, мы получим всего 5 единственно возможных несовместных случаев. Все они равновозможны. Из них три случая благоприятны появлению белого шара и два случая благоприятны появлению черного шара. Поэтому, на основании вышесказанного, вероятность появления белого шара есть $\frac{3}{5}$; вероятность появления черного шара есть $\frac{2}{5}$.

Пример II. В сосуде

a	белых	шаров	с	номером	1,
b	белых	»	»	»	2,
c	черных	шаров	с	номером	1,
d	черных	»	»	»	2.

1) Какова вероятность того, что вынутый шар будет белый?[*)]

Всех возможных случаев в данном вопросе имеем $a+b+c+d$. Все эти случаи единственно возможны, несовместны и равновозможны. Случаев, благоприятствующих появлению белого шара, $a+b$. Вероятность появления белого шара выражается дробью $\dfrac{a+b}{a+b+c+d}$.

2) Какая вероятность того, что вынутый шар будет черный с номером 1?

Всех случаев единственно возможных, несовместных и равновозможных имеем $a+b+c+d$, случаев благоприятных имеем c; дробь $\dfrac{c}{a+b+c+d}$ и будет выражать вероятность появления черного шара[**)] с номером 1.

3) Какая вероятность того, что вынутый шар будет иметь номер 1?

Всех благоприятствующих случаев $a+c$, поэтому вероятность выразится дробью $\dfrac{a+c}{a+b+c+d}$.

4) Какая вероятность того, что вынем шар с номером 1 при условии, что известно, что вынутый шар белый?

[*)] Вопрос поставлен нами.

[**)] В тексте: «вероятность появления белого шара с номером 1».

Всех случаев единственно возможных, несовместных и равновозможных, отвечающих нашему вопросу, $a+b$, случаев благоприятствующих имеем a, вероятность выразится дробью $\dfrac{a}{a+b}$.

Пример III. В XVII столетии была распространена игра в кости. Игроки нередко разные задавали вопросы математикам, относящиеся к различным случаям игры. Решение этих вопросов потребовало введения в математику новых методов, послуживших основанием Теории вероятностей. Рассмотрим пример, известный из истории Теории вероятностей.

Два игрока поставили поровну и условились, что ставку возьмет тот, кто раньше выиграет 3 партии. Игроки должны были разойтись, не окончив игры, и оказалось, что один игрок выиграл 2 партии, а второй одну. Как разделить ставку, они не знали и обратились с просьбой разрешить этот вопрос к *Паскалю*.

Паскаль сказал, что один из игроков должен получить $\frac{3}{4}$ ставки, а другой только $\frac{1}{4}$. Рассуждения свои *Паскаль* вел следующим образом:

Если бы игроки сыграли еще одну партию, то непременно или бы оба имели поровну партий, т. е. по две, или же один выиграл бы ставку, т. е. имел бы 3 партии, а другой бы имел только 1 партию. В первом случае игроки должны были взять обратно каждый свою ставку ~~обратно~~ [*)], во втором же случае первый игрок взял бы общую ставку. Таким образом, половина общей ставки обеспечена за первым игроком, что же касается до другой половины ставки, то он имеет одинаковую вероятность как ее выиграть, так и проиграть, но если бы первый игрок имел выигранных две партии, то и 2-й игрок имел бы тоже две партии, и требуемого перевеса не было бы, поэтому естественно вполне эту ставку разделить пополам между первым и вторым игроком. По этому расчету первый игрок

[*)] Слово «обратно» зачеркнуто нами как повторяющееся.

получает $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ общей ставки, а второй — $\frac{1}{4}$ общей ставки. Изложенное решение задачи не основано на понятии о вероятности, но если задачу усложнить, как это сделал *Паскаль*, введением вместо цифровых данных буквенных условий, то обнаруживается необходимость в применении понятия о вероятности и основных теорем Теории вероятностей.

Пример IV. В средние века была распространена игра в кости, известная в настоящее время под французским названием *passe-dix*, игра заключается в том, что на стол бросают сразу три игральных кости. Все три кости представляют собой кубики, равные по величине. На гранях каждого кубика стоят цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Бросив на стол такие три кости, составляют сумму $\alpha+\beta+\gamma$ из цифр, написанных на верхних гранях. Слагаемые α, β, γ не могут быть меньше 1, ни больше 6, а потому самая малая сумма будет тогда, когда $\alpha = \beta = \gamma = 1$, и самая большая, когда $\alpha=\beta=\gamma=6$, т. е. в первом случае сумма равна 3, а во втором 18. Бросающий выигрывает тогда, когда сумма на верхних сторонах костей больше 10, и проигрывает, когда она не превосходит 10. Один из друзей *Галилея*, очень любивший игру в кости, заметил, что сумма очков 11 появляется чаще, чем сумма 12. Он обратился с просьбой к *Галилею* объяснить ему эту странность. *Галилей* нашел, что появлению суммы 11 благоприятствует больше случаев, чем появлению суммы 12.

Покажем, что это обстоятельство имеет место на самом деле. Итак, предположим, что кости брошены и сумма цифр равна $\alpha+\beta+\gamma$, причем $1 \leqslant \alpha \leqslant 6$, $1 \leqslant \beta \leqslant 6$ и $1 \leqslant \gamma \leqslant 6$. Определим, сколько случаев может представиться в рассматриваемой нами игре. Пусть две кости остаются неподвижны, третью начнем поворачивать. Тогда будем иметь всего шесть случаев:

$$(\alpha\beta 1)\ (\alpha\beta 2)\ (\alpha\beta 3)\ (\alpha\beta 4)\ (\alpha\beta 5)\ (\alpha\beta 6)\,. \tag{1}$$

Если теперь в выражениях (1) будем менять цифры второй кости, то всего будет 36 случаев*):

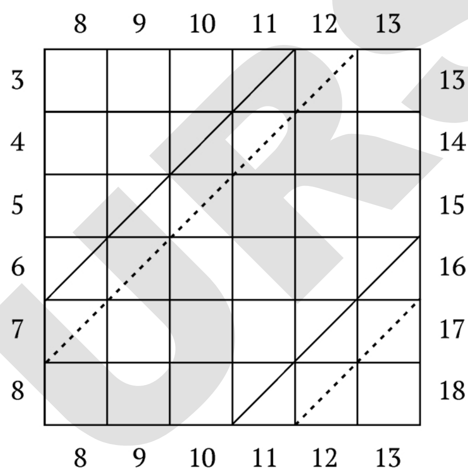
$$
\begin{array}{cccccc}
(\alpha 11) & (\alpha 12) & (\alpha 13) & (\alpha 14) & (\alpha 15) & (\alpha 16) \\
(\alpha 21) & (\alpha 22) & (\alpha 23) & (\alpha 24) & (\alpha 25) & (\alpha 26) \\
(\alpha 31) & (\alpha 32) & (\alpha 33) & (\alpha 34) & (\alpha 35) & (\alpha 36) \\
(\alpha 41) & (\alpha 42) & (\alpha 43) & (\alpha 44) & (\alpha 45) & (\alpha 46) \\
(\alpha 51) & (\alpha 52) & (\alpha 53) & (\alpha 54) & (\alpha 55) & (\alpha 56) \\
(\alpha 61) & (\alpha 62) & (\alpha 63) & (\alpha 64) & (\alpha 65) & (\alpha 66)
\end{array}
$$

и наконец, меняя цифры третьей кости получим случаев всего $36 \cdot 6 = 216$. Следовательно, при бросании трех костей можем встретить 216 случаев. Все эти случаи единственно возможны и несовместны, причем равновозможны, так как мы не имеем никакого основания ожидать появления одной суммы предпочтительно перед другой. Остается определить число случаев, благоприятствующих суммам 11 и 12. Для этого мы могли бы выписать все 216 сумм, состоящих из трех слагаемых $1, 2, \ldots, 6$, и выбрать из них все те суммы, которые равны 11 и 12. Скорее можно прийти к цели следующим путем. Разделим стороны какого-нибудь квадрата на шесть равных частей и, проведя через точки деления параллельные линии, разобьем квадрат на 36 новых квадратов. Предположим, что в каждом квадрате помещено по шесть сумм из выше упомянутых, так что все эти суммы окажутся распределенными в 36 квадратах. Все эти суммы состоят из трех слагаемых. Относительно этих слагаемых сделаем следующие предположения: одному слагаемому будем давать все значения от 1 до 6, два же других слагаемых будут оставаться без изменения, причем во всех квадратах 1-й строки сверху первое слагаемое равно единице, во всех квадратах второй

*) Первая строка в таблице пропущена и восстановлена нами.

строки — равно двум и т. д. — Во всех квадратах первого столбца второе слагаемое равно единице, во всех квадратах второго столбца равно двум и т. д. Поэтому, например, в квадрате, находящемся в 4-й строке сверху и в третьем столбце, слагаемые 4 и 3 будут оставаться без изменения, третье же изменяем от 1 до 6, тогда в этом квадрате окажутся следующие суммы:

$$4+3+1,\quad 4+3+2,\quad 4+3+3,\quad 4+3+4,\quad 4+3+5,\quad 4+3+6.$$



Проведя в каком-нибудь квадрате диагональ в направлении, указанном на чертеже, и продолжая ее вверх и вниз, мы заметим, что все квадраты, находящиеся на этой диагонали, заключают 6 равных сумм. В самом деле, поднимаясь от какого-то квадрата по диагонали вверх, мы уменьшаем первое слагаемое на единицу, но зато увеличиваем второе слагаемое на единицу, третье же слагаемое постоянно равно 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поставим теперь у двух сторон квадрата цифры 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13, показывающие, чему равна самая меньшая сумма из шести сумм, заключающихся в квадратах, в которых они поставлены, а у двух остальных сторон квадрата поставим цифры 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, показывающие, чему равны самые большие суммы из шести, заключающихся в квадратах, около которых они поставлены. Тогда цифры, поставленные на концах какой-нибудь диагонали, проведенной в направлении (указанном на чертеже), показывают, в каких пределах заключаются суммы, помещенные в квадратах, находящихся на этой диагонали. Например, на концах одной из диагоналей, проведенной на чертеже, находятся цифры 6 и 11. Следовательно, во всех квадратах, помещенных на этой диагонали, находится шесть сумм, равных последовательно 6, 7, 8, 9, 10 и 11.

Теперь очень легко определить число случаев, при которых сумма трех слагаемых равна 11. Для этого проводим две диагонали из точек, обозначенных цифрами 11. Все квадраты, находящиеся между этими диагоналями, заключают каждый по одной сумме, равной 11. Теперь остается сосчитать число квадратов между проведенными диагоналями; число их 27, следовательно, из 216 равновозможных случаев 27 благоприятны появлению суммы 11. — Для того, чтобы определить, сколько случаев благоприятно появлению суммы 12, проведем две диагонали из точек, обозначенных цифрами 12, и сосчитаем число квадратов, заключенных между ними, найдем число 25. Поэтому вероятность появления суммы 11 есть $\frac{27}{216}$, а вероятность появления суммы 12 есть $\frac{25}{216}$. Таким образом, мы видим, что вероятность появления первого события больше вероятности второго события. Определим теперь, чему равна вероятность выигрыша для бросающего кости. Он выигрывает всякий раз, как появится сумма больше 10, т. е. 11, 12, 13, ..., 18. Чтобы решить этот вопрос, мы должны вычислить все благоприятствующие случаи для каждой суммы отдельно и затем для всех сумм вместе. Поступая аналогично тому, как поступали при вычислении вероятности сумм 11 и 12, получим, что

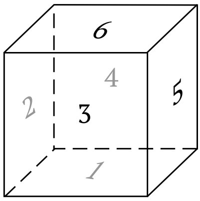
$$\begin{array}{cccccc}
\text{вероятность} & \text{появления} & \text{суммы} & 11 & \text{есть} & \dfrac{27}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 12 & — & \dfrac{25}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 13 & — & \dfrac{21}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 14 & — & \dfrac{15}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 15 & — & \dfrac{10}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 16 & — & \dfrac{6}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 17 & — & \dfrac{3}{216}, \\
\text{»} & \text{»} & \text{»} & 18 & — & \dfrac{1}{216},
\end{array}$$

так как число случаев, благоприятных появлению суммы 11, есть 27, 12 — 25, 13 — 21, 14 — 15, 15 — 10, 16 — 6, 17 — 3, 18 — 1. Всего[*)] — 108.

Число же случаев, благоприятствующих выигрышу, будет равно 108, а вероятность выигрыша есть $\dfrac{108}{216} = \dfrac{1}{2}$. Если имеем 108 случаев, благоприятных выигрышу, то остальные $216 - 108 = 108$ случаи будут благоприятствовать проигрышу, следовательно, вероятность проигрыша есть $\dfrac{108}{216} = \dfrac{1}{2}$. Итак, вероятность выигрыша и вероятность проигрыша равны между собой, а потому игра эта безобидна. К такому же результату мы придем на основании некоторых других соображений.

Предположим, что на каждой кости цифры поставлены так, что против стороны, на которой находится цифра 1, помещена цифра 6, против 2 цифра 5, против 3 цифра 4. Поэтому сумма цифр на верхней и на нижней грани кости во всяком ее положении

*) Слово «всего» вставлено нами.



равна 7. Если три кости брошены, то сумма верхних и нижних цифр будет 21, другими словами сумма цифр на трех нижних гранях дополняет сумму цифр на трех верхних гранях до 21. Если предположим, что цифры наверху будут α, β, γ, то цифры внизу будут $7-\alpha$, $7-\beta$, $7-\gamma$; верхние цифры в сумме дадут $\alpha + \beta + \gamma$, а нижние $7 - \alpha + 7 - \beta + 7 - \gamma = 21 - (\alpha + \beta + \gamma)$. Если теперь окажется, что наверху $\alpha + \beta + \gamma > 10$, то есть, что на верхних гранях имеется случай выигрыша, то на нижних гранях будем иметь $21 - (\alpha + \beta + \gamma) \leqslant 10$, то есть будем иметь случай проигрыша. Если же наверху $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 10$, т. е. случай проигрыша, то внизу $21 - (\alpha + \beta + \gamma) > 10$, т. е. случай выигрыша. Итак, всякому выигрышу наверху соответствует проигрыш внизу при всех возможных положениях костей. Поэтому события: «появление суммы больше 10» и «появление суммы не больше 10» — события единственно возможные, несовместные и равновозможные. Так как далее, всех возможных случаев имеем всего два (выигрыш и проигрыш) и так как случаев, благоприятствующих выигрышу, имеем 1, а случаев, благоприятствующих проигрышу, имеем тоже 1, то вероятность выигрыша есть $\frac{1}{2}$ и вероятность проигрыша тоже $\frac{1}{2}$. Итак, к одному и тому же результату мы пришли различными путями; это обстоятельство показывает, что вероятность какого-нибудь события не зависит от способов определения ее.

Лекция 2

Сложение вероятностей. I основной принцип

Теорема. Вероятность произойти одному из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей [*]**.**

Предположим, что имеем ряд несовместных событий A_1, $A_2, \ldots, A_m$, вероятности которых нам заранее известны и соответственно равны

$$\begin{array}{lll} \text{для события} & A_1 & - \; p_1, \\ \text{»} \qquad \text{»} & A_2 & - \; p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \text{»} \qquad \text{»} & A_m & - \; p_m. \end{array}$$

Обозначим через E сложное событие, состоящее в появлении одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Вероятность этого сложного события E назовем через P; требуется доказать, что вероятность события E равна сумме вероятностей несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ то есть $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$.

События $A_1, A_2 \ldots, A_m$ несовместны, но могут быть единственно возможны и неединственно возможны. Обозначим через A сложное событие, состоящее в непоявлении ни одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$. В том случае, когда события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ единственно возможны, событие A окажется невозможным, вообще же

[*] Формулировки некоторых теорем и отдельные слова в рукописи подчеркнуты. В нашем издании такой текст выделен полужирным шрифтом вместо подчеркивания для удобства читателя.

события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — события несовместные, так как исключают друг друга. Кроме того, эти события будут вместе с тем единственно возможными, потому что одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ непременно произойдет. Если, например, не появится ни одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то появится тогда событие A. Предположим теперь, что этим событиям благоприятны равновозможные случаи, причем событию A благоприятствует α равновозможных случаев, событию A_1 — α_1, A_2 — α_2, $\ldots$, A_m — α_m. Всех равновозможных случаев, соответствующих нашему вопросу, будет:

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m.$$

Обозначая вероятность события A через p, события A_1 через $p_1, \ldots,$ A_m через p_m и замечая, что событию A_1 из всех равновозможных случаев $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ соответствует α_1 благоприятных случаев, событию A_2 — α_2, событию A_m — α_m случаев, получим, что:

$$\left.\begin{aligned} \text{вероятность}\quad p_1 &= \frac{\alpha_1}{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m &= \frac{\alpha_m}{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

В том частном случае, когда $A_1, A_2, \ldots, A_m$ суть события единственно возможные, $\alpha = 0$ и вероятность p события A равна нулю. Найдем теперь вероятность события E. Событие E состоит в том, что одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ появится, событие A состоит в том, что ни одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ не появится, а потому события A и E будут событиями несовместными и единственно возможными. Кроме того, событию A по нашему предположению благоприятны α равновозможных случаев, событию E будут благоприятными все те случаи, которые благоприятны событиям $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то есть случаи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, всего, следовательно, равновозможных случаев, благоприятных событию E, будет $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. Полное же число равновозможных и несовместных случаев для обоих событий A и E имеем $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$.

Поэтому вероятность P события E выразится

$$P = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m}. \tag{II}$$

Складывая почленно равенства (I), получим

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m}. \tag{III}$$

Сравнивая равенства (II) и (III), получим, что $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$. Теорема, таким образом, доказана. Заметим, что найти на практике все указанные $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ весьма трудно и поэтому для применения теоремы о сложении вероятностей всегда является сомнение, можно ли, действительно, указать все те случаи, о которых говорится при доказательстве теоремы. Тем не менее, теорема сложения вероятностей применяется без всяких примечаний, как будто она проверена во всех возможных случаях. Теорема сложения вероятностей является, таким образом, как бы принципом, принимая смысл в Теории вероятностей без всяких ограничений.

Пример I. Раньше мы указали, что в игре в кости *passe-dix*

вероятность	появления	суммы	11	есть	$\frac{27}{216}$,
»	»	»	12	—	$\frac{25}{216}$,
»	»	»	13	—	$\frac{21}{216}$,
»	»	»	14	—	$\frac{15}{216}$,
»	»	»	15	—	$\frac{10}{216}$,
»	»	»	16	—	$\frac{6}{216}$,
»	»	»	17	—	$\frac{3}{216}$,
»	»	»	18	—	$\frac{1}{216}$.

Суммы эти не единственно возможные, но они несовместны, а потому вероятность P выигрыша будет равна сумме вероятностей сумм, то есть

$$P = \frac{27}{216} + \frac{25}{216} + \ldots + \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}.$$

К этому же результату мы пришли уже раньше.

Пример II. Игра *в чет и нечет* состоит в том, что из сосуда вынимают несколько шаров наудачу. Играющие держат пари, что число появившихся шаров будет четное или нечетное. Покажем, что держать пари за нечет выгоднее, чем за чет, то есть, что вероятность нечета больше, чем вероятность чета.

Пусть в сосуде будет n шаров. Вынимая шары, мы можем вынуть или один шар, или два шара, или три, или даже n шаров. Вероятность каждого из этих событий обозначим $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Определим теперь значения этих вероятностей. Мы знаем, что число случаев, благоприятных каждому событию, равно числу сочетаний n элементов по числу вынимаемых шаров, т. е.:

$$\left.\begin{array}{llllll}
1 & \text{шар} & \text{можем} & \text{вынуть} & n & \text{способами,} \\
2 & \text{шара} & » & » & \dfrac{n(n-1)}{2} & » \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\
k & \text{шаров} & » & » & \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k} & » \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\
n & » & » & » & 1 & »
\end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Так что число всех возможных случаев равно на этом основании

$$\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}.$$

Замечая далее, что

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n},$$

то есть, что

$$\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots 1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = 2^n - 1,$$

будем иметь, что число всех возможных случаев, отвечающих нашему вопросу, $= 2^n - 1$. Все эти случаи единственно возможны и несовместны. Принимая в расчет (I), напишем, что

$$p_1 = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{2^n - 1},$$

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^n - 1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_k = \frac{n\,(n-1)\,(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \frac{1}{2^n - 1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

Посмотрим теперь, какова вероятность того, что появится нечетное число, т. е., что появится число или 1, или 3, или 5, и т. д. Замечая, что эти события будут несовместными, и обозначая через P вероятность события, состоящего в появлении нечетного числа, получим на основании вышеуказанной теоремы, что

$$P = p_1 + p_3 + p_5 + \ldots .$$

Обозначая далее через Q вероятность появления четного числа, то есть чисел $2, 4, 6, 8, \ldots$, мы можем написать, что

$$Q = p_2 + p_4 + p_6 + \ldots .$$

Возьмем теперь разность $Q - P$, тогда получим:

$$Q - P = -p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - \ldots + (-1)^n p_n =$$

$$= \frac{1}{2^n - 1} \cdot \left[-\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \ldots + (-1)^n \cdot 1 \right].$$

Замечая, что

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \ldots + (-1)^n \cdot 1 = 0,$$

то есть, что

$$-1 = -\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - \ldots + (-1)^n \cdot 1,$$

будем иметь

$$Q - P = -\frac{1}{2^n - 1}. \tag{I}$$

Разность Q и P отрицательна, значит, $P > Q$, что и требовалось доказать.

Вычислим теперь, чему равно P. P есть вероятность появления нечета, Q — вероятность появления чета, следовательно, $P+Q$ есть вероятность предположения, что число будет либо четным, либо нечетным; но с другой стороны мы **достоверно** знаем, что появится чет или нечет, а потому

$$P + Q = 1. \tag{II}$$

Из равенств (I) и (II) получим, что

$$2P = 1 + \frac{1}{2^n - 1} = \frac{2^n - 1 + 1}{2^n - 1} = \frac{2^n}{2^n - 1},$$

откуда

$$P = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1};$$

итак, P вычислено.

Принцип о сложении вероятностей имеет место лишь тогда, когда речь идет о событиях несовместных, в противоположном же случае принцип этот дает нам неверные результаты. Поясним сказанное на следующем примере.

На стол бросаем две кости. Спрашивается теперь, чему равна вероятность появления одной из цифр 3 или 4 на верхних сторонах костей. Цифры, находящиеся на верхних сторонах костей, могут представлять следующие из 36 комбинаций, единственно возможных, равновозможных и несовместных:

$$
\begin{array}{cccccc}
(11) & (12) & (13) & (\underline{\underline{14}}) & (15) & (16)\\
(21) & (22) & (23) & (\underline{\underline{24}}) & (25) & (26)\\
(31) & (32) & (33) & (\underline{\underline{34}}) & (35) & (36)\\
(\underline{\underline{41}}) & (\underline{\underline{42}}) & (\underline{\underline{43}}) & (\underline{\underline{44}}) & (\underline{\underline{45}}) & (\underline{\underline{46}})\\
(51) & (52) & (53) & (\underline{\underline{54}}) & (55) & (56)\\
(61) & (62) & (63) & (\underline{\underline{64}}) & (65) & (66)
\end{array}
$$

Из этой таблички видно, что число случаев, благоприятствующих появлению цифры 3 равно 11, то есть вероятность появления числа 3 есть $\frac{11}{36}$; точно так же вероятность появления числа 4 есть $\frac{11}{36}$. Следовательно, при применении принципа сложения вероятностей мы могли бы ожидать, что вероятность появления или 3, или 4 равна $\frac{11}{36} + \frac{11}{36} = \frac{22}{36}$, на самом же деле, как видно из нашей таблички, вероятность появления или 3, или 4 равна $\frac{20}{36}$. Разница произошла оттого, что мы неправильно применили принцип сложения, так как появление цифры 3 на одной из костей и появление цифры 4 на другой кости — события совместные.

В самом деле, как видно из таблички, в одно и то же время может появиться на одной кости цифра 3, а на другой — цифра 4 и наоборот.

Следствие I. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ единственно возможны и пусть их вероятности будут равны соответственно $p_1, p_2, \ldots p_m$. Тогда вероятность произойти одному из этих событий равна $p_1 + p_2 + \ldots + p_m$. Раз события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ единственно возможны, то появление одного из них можем с достоверностью ожидать, а потому

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \tag{1}$$

и наоборот, раз существует равенство (1), то наверно имеем дело с событиями единственно возможными. Если же сумма $p_1 + p_2 + \ldots + p_m < 1$, то мы имеем дело с событиями неединственно возможными.

Следствие II. Два несовместных и единственно возможных события A и B будем называть событиями *противоположными*. Обозначая через p и q вероятности событий A и B, на основании следствия первого напишем, что $p = 1 - q$ и $q = 1 - p$, то есть вероятность события какого-нибудь определяется при помощи вероятности события ему противоположного простым вычитанием из единицы. Всякому событию соответствует другое событие прямо противоположное, которое состоит в непоявлении этого события. Если одно событие достоверно, то вероятность его равна 1, тогда вероятность противоположного равна 0. Заметим еще, что чем ближе вероятность какого-нибудь события к 1, тем ближе к нулю вероятность противоположного события и наоборот. Если вероятность события A больше $\frac{1}{2}$, то вероятность противоположного события B меньше $\frac{1}{2}$ в этом случае событие называется **вероятным**. Причина этого названия заключается в том, что мы имеем более оснований ожидать появления события A, чем события B, то есть непоявления события A.

Лекция 3

II основной принцип. Умножение вероятностей

Вероятность произойти двум событиям одновременно равняется произведению вероятности одного из них на вероятность появления другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло.

Называя вероятность появления некоторого события A *абсолютной* вероятностью и обозначая ее символом (A), а вероятность появления события B в предположении, что событие A произошло — вероятностью *относительной* и обозначая ее символом $[B,\ A]$, мы можем доказать существование формул:

$$\left.\begin{aligned}(AB) &= (A)\,[B, A]\,,\\(AB) &= (B)\,[A, B]\,,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

где под символом (AB) разумеем вероятность одновременного появления двух событий A и B.

При доказательстве этой теоремы рассмотрим 3 случая:

I случай. События A и B несовместны. Тогда одновременное появление обоих событий невозможно, а потому $(AB) = 0$; покажем, что и вторая часть равенства (I) равна 0.

На самом деле: раз событие A произошло, то B не может уже произойти по причине несовместности этих событий и, наоборот, раз произошло событие B, то уже невозможно событие A, а потому как $[B, A] = 0$, так $[A, B] = 0$. Таким образом, равенства (I) удовлетворяются и теорема доказана.

II случай. События A и B совместные и независимые. Два события A и B будут *независимыми*, если вероятность произойти одному из них не зависит оттого, произошло или не произошло другое событие. Когда событие A считается независимым, абсолютная вероятность (A) равна относительной вероятности $[A, B]$, то есть $(A) = [A, B]$ и точно так же $(B) = [B, A]$; на этом основании формула (I) принимает вид:

$$(AB) = (A) \cdot (B)\,. \tag{II}$$

Пусть все равновозможные случаи, соответствующие событию A и ему противоположному A', будут $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если появлению события A благоприятствуют события $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то вероятность абсолютная $(A) = \dfrac{m}{n}$. Если событию B и ему противоположному событию B' соответствуют равновозможные случаи: $b_1, b_2, \ldots, b_s$, из которых $b_1, b_2, \ldots, b_v$ благоприятствуют B, то абсолютная вероятность $(B) = \dfrac{v}{s}$. Посмотрим теперь, какова вероятность появления событий A и B одновременно. Событию A соответствуют n равновозможных случаев $a_1, a_2, \ldots, a_n$, событию B соответствуют s равновозможных случаев[*)] $b_1, b_2, \ldots, b_s$ следовательно, одновременному появлению событий A и B соответствуют комбинации:

$$\begin{array}{cccc}
(a_1 b_1) & (a_1 b_2) & \ldots & (a_1 b_s) \\
(a_2 b_1) & (a_2 b_2) & \ldots & (a_2 b_s) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(a_n b_1) & (a_n b_2) & \ldots & (a_n b_s)
\end{array}$$

Всех таких комбинаций будет ns. Мы знаем, что событию A благоприятствуют m случаев $a_1, a_2, \ldots, a_m$, событию же B благоприятствуют v случаев, следовательно, одновременному появлению

[*)] В тексте: $a_1\, a_2 \ldots, a_s$.

событий A и B благоприятствуют комбинации:

$$\begin{array}{c}(a_1 b_1)\ (a_1 b_2)\ \ldots\ (a_1 b_v)\\ (a_2 b_1)\ (a_2 b_2)\ \ldots\ (a_2 b_v)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_m b_1)\ (a_m b_2)\ \ldots\ (a_m b_v)\end{array}$$

Всех таких комбинаций будет mv. Итак, из всех ns равновозможных случаев появлению одновременному событий A и B соответствует mv случаев и потому абсолютная вероятность $(AB) = \dfrac{mv}{ns}$, но раньше мы доказали, что: $(A) = \dfrac{m}{n}$ и $(B) = \dfrac{v}{s}$, а потому:

$$(AB) = \frac{m}{n} \cdot \frac{v}{s} = (A) \cdot (B)\,,$$

что и требовалось доказать.

III случай. Пусть события A и B будут зависимыми. Пусть событиям A и B соответствуют одни и те же несовместные, единственно возможные и равновозможные случаи $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$. Пусть событию A благоприятствуют m событий $a_1,\ a_2, \ldots, a_m$; тогда вероятность появления события A равна $\dfrac{m}{n}$, то есть $(A) = \dfrac{m}{n}$; если мы положим теперь, что из m событий, благоприятствующих событию A, v событий благоприятствуют в то же самое время событию B $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_v)$, то вероятность появления события B после того, как A произошло, $= \dfrac{v}{m}$, то есть $[B, A] = \dfrac{v}{m}$; посмотрим теперь, какова вероятность одновременного появления событий A и B. Всех случаев, соответствующих появлению событий A и B, имеем n: $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$; случаев же, благоприятствующих одновременному появлению обоих событий, имеем v: $a_1,\ a_2, \ldots, a_v$, а потому вероятность появления обоих событий A и B, то есть $(AB) = \dfrac{v}{n}$.

Итак: $(AB) = \dfrac{v}{n}$, $(A) = \dfrac{m}{n}\,[B, A] = \dfrac{v}{m}$ *), следовательно, $\dfrac{v}{n} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{v}{m}$, то есть $(AB) = (A)\,[B, A]$ что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример I. Имеем два сосуда: в одном сосуде находится m белых шаров и n черных, а в другом сосуде r белых и s черных. Из каждого сосуда вынимают наудачу по одному шару. Какова вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми **)?

Если A будет событие, состоящее в появлении белого шара в сосуде I, а B будет событие, состоящее в появлении белого шара в сосуде II, то вероятность события A будет $\dfrac{m}{m+n}$ и вероятность события B будет $\dfrac{r}{r+s}$.

Замечая, что эти два события независимы, напишем на основании теоремы об умножении вероятностей, что вероятность одновременного появления событий A и B равна

$$\frac{m}{m+n} \cdot \frac{r}{r+s}.$$

Вынимаем из I сосуда один шар наудачу. Вероятность появления белого шара равна $\dfrac{m}{m+n}$. Бросаем этот шар обратно в сосуд и вынимаем вторично один шар наудачу. Вероятность появления белого шара будет снова $\dfrac{m}{m+n}$. Замечая, что эти два события независимы, на основании теоремы об умножении вероятностей напишем, что вероятность появления белого шара в обоих случаях равна:

$$\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^2.$$

Опять бросаем вынутый шар в сосуд и опять его вынимаем и поступаем так же, положим, k раз. Вероятность того, что всякий раз

*) В тексте: $[B, A] = \dfrac{v}{n}$.

**) Знак вопроса в тексте отсутствует.

будем вынимать белый шар, равна

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)^k.$$

Рассматривая эту дробь, мы видим, что вероятность появления одного и того же шара уменьшается быстро при увеличении числа опытов.

Пример II. Пусть в сосуде

a белых шаров с № 1,

b белых » » № 2,

c черных шаров с № 1,

d черных » » № 2.

Вынимаем первый шар наудачу и задаемся вопросом, какова вероятность того, что вынутый шар будет белым с № 1?

Появление белого шара назовем событием A, появление же шара с № 1 назовем событием B. Всего случаев единственно возможных и несовместных, соответствующих появлению шара, имеем: $a+b+c+d$; случаев же, благоприятствующих появлению белого шара, имеем: $a+b$, а поэтому вероятность (A) события A равна $\frac{a+b}{a+b+c+d}$, то есть

$$(A) = \frac{a+b}{a+b+c+d}. \tag{1}$$

Посмотрим, какова вероятность появления шара с № 1. Замечая, что всех случаев имеем $a+b+c+d$, случаев благоприятствующих $a+c$, напишем, что вероятность

$$(B) = \frac{a+c}{a+b+c+d}. \tag{2}$$

Посмотрим теперь, какова вероятность появления шара с № 1 после того, как произошло событие A, то есть определим *относительную* *вероятность* $[B, A]$; раз событие A произошло, то всех случаев, соответствующих событию B, имеем $a+b$, случаев же благоприятствующих — a, а потому

$$[B, A] = \frac{a}{a+b}. \tag{3}$$

Вычислим вероятность события A в том предположении, что событие B произошло, то всех случаев, соответствующих событию A имеем $a+c$, из которых только a случаев благоприятствуют событию A, мы напишем, что

$$[A, B] = \frac{a}{a+c}. \tag{4}$$

Далее мы знаем, что $(AB) = (A)\,[BA]$ или же $(AB) = (B)\,[AB]$, подставляя в эти формулы найденные нами результаты, мы и получим, что:

$$(AB) = \frac{\cancel{a+b}}{a+b+c+d}\cdot\frac{a}{\cancel{a+b}} = \frac{a}{a+b+c+d},$$

$$(AB) = \frac{\cancel{a+c}}{a+b+c+d}\cdot\frac{a}{\cancel{a+c}} = \frac{a}{a+b+c+d},$$

то есть вероятность того, что появится белый шар с № 1 равна $\frac{a}{a+b+c+d}$. Заметим, что к этому результату можем прийти и другим путем. Всех случаев, соответствующих требуемому событию, имеем: $a+b+c+d$, случаев же благоприятствующих имеем только a, так как из условия мы видим, что только в a случаях будем иметь белый шар с №1, и потому

$$(AB) = \frac{a}{a+b+c+d}.$$

Итак, мы и на частном примере убедились в справедливости теоремы об умножении. Эту теорему обобщим на сколько угодно событий. — Пусть имеем ряд событий A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$. Пусть вероятность события A_1 будет p_1, вероятность события A_2 в том предположении, что событие A_1 произошло, будет равна p_2, вероятность события A_3, вычисленная в предположении, что события

A_1 и A_2 произошли, пусть будет p_3 и т. д., наконец, вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ произошли, пусть будет равна p_n. Называя через E событие сложное, состоящее в появлении одновременном событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и [обозначая][*)] через P вероятность события E, докажем, что $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Предположим, что теорема доказана для $(n-1)$ событий. Обозначая через F сложное событие, состоящее в одновременном появлении событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$, называя далее вероятность события F через Q и удерживая введенные нами раньше обозначения $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}$, мы предполагаем, следовательно, что:

$$Q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}.$$

Определим теперь, чему равна вероятность одновременного появления событий F и A_n. Вероятность события F мы обозначим через Q; вероятность же события A_n в предположении, что событие F произошло, т. е. что события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ произошли, мы обозначим через p_n, а потому вероятность одновременного появления событий F и A_n выразится произведением Qp_n, но $Q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$, а вероятность одновременного появления событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ мы обозначим через P. Таким образом, получаем равенство: $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n$, что и требовалось доказать.

Теорема об умножении вероятностей формулируется очень просто, когда мы имеем дело с событиями *независимыми*. Тогда все относительные вероятности совпадают с абсолютными вероятностями событий и

$$P = (A_1)(A_2) \ldots (A_n).$$

Теоремы о сложении и об умножении вероятностей представляют основные принципы теории вероятностей, все остальные теоремы основаны на комбинировании этих двух основных предложений.

[*)] Слово «обозначая» в тексте пропущено.

Раньше мы показали, что вероятность произойти одному из несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий, т. е. $(E) = (A) + (B)$.

Покажем теперь, что подобное ограничение необходимо, что в том случае, если данные события A и B не будут несовместными, вероятность произойти одному из них равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность произойти этим событиям одновременно. Докажем это. Пусть A и B будут какие угодно события, совместные или несовместные, все равно; пусть E событие, состоящее в появлении одного из событий A и B. Для доказательства теоремы введем событие A', противоположное событию A и состоящее в непоявлении последнего, и событие B', противоположное событию B и состоящее в непоявлении последнего. Теперь мы можем утверждать с достоверностью, что произойдет одно из следующих 4 единственно возможных и несовместных событий (A и B, A' и B' события единственно возможные и несовместные, а потому и получаем 4 единственно возможных и несовместных комбинаций):

1)	произойдут	события	A и B,
2)	»	»	A и B',
3)	»	»	A' и B,
4)	»	»	A' и B'.

то есть, в 1) случае одновременно происходят наши события (случай, благоприятствующий событию E), в 4) случае ни одно из событий не происходит (случай, не благоприятствующий событию E) и в 2) и 3) происходит одно из наших событий (случаи, благоприятствующие событию E). Итак, событию E благоприятствуют 3 случая несовместные: 1), 2) и 3). Обозначая вероятность события E через (E) и вероятности событий 1), 2), 3) и 4) через (AB), $\left(AB'\right)$, $\left(A'B\right)$, $(A'B')$, на основании только что сказанного мы напишем:

$$(E) = (AB) + \left(AB'\right) + \left(A'B\right). \tag{I}$$

На основании теоремы об умножении вероятностей имеем:

$$(AB) = (A)\,[B, A],$$

$$\left(AB'\right) = (A)\,[B', A].$$

Сложим последние равенства и (A) вынесем за скобку, тогда получим, что:

$$(AB) + \left(AB'\right) = (A)\,[B, A] + \left[B', A\right]. \tag{II}$$

Замечая далее, что B и B' события несовместные и единственно возможные, то есть непременно появится или событие B, или событие B', мы напишем, что:

$$[B, A] + \left[B', A\right] = 1,$$

и формула (II) перепишется в виде:

$$(AB) + \left(AB'\right) = (A). \tag{III}$$

Рассуждая аналогичным путем, мы получим, что

$$(AB) + \left(A'B\right) = (B). \tag{IV}$$

Складывая равенства (III) и (IV), получим

$$2\,(AB) + \left(AB'\right) + \left(A'B\right) = (A) + (B),$$

или

$$(AB) + (AB) + \left(AB'\right) + \left(A'B\right) = (A) + (B);$$

пользуясь формулой (1), напишем, что $(AB) + (E) = (A) + (B)$ или, наконец,

$$(E) = (A) + (B) - (AB), \tag{α}$$

т. е. то, что и требовалось доказать. —

Если события A и B несовместны, то одновременное появление их невозможно и $(AB) = 0$. Тогда формула (α) примет вид:

$$(E) = \left(A\right) + \left(B\right),$$

т. е. получаем формулу, уже ранее нами выведенную при сложении вероятностей двух несовместных событий. Заметим, что умение решать задачу, относящуюся к вычислению вероятностей, значит уметь привести эту задачу к сложению и умножению вероятностей.

Задача I. Имеем две группы вполне одинаковых сосудов; к первой группе принадлежит a сосудов, причем в каждом из них находится m белых шаров и n черных; ко второй же группе принадлежат b сосудов и в каждом сосуде лежит r белых шаров и s черных.

Из всех $a + b$ сосудов выбираем один наудачу, и из выбранного сосуда вынимаем опять наудачу один шар. Спрашивается, какова вероятность, что появившийся шар бел?

Обозначим через E событие сложное, состоящее в появлении белого шара при условиях задачи. Здесь представляются нам два случая. Первый: взят сосуд 1-й категории и вынут белый шар; это событие обозначим через L; и второй случай: взят сосуд второй категории и вынут белый шар. Это событие назовем через M. — Только что указанные два случая являются событиями несовместными, так как мы вынимаем шар из сосуда только одной группы. Поэтому на основании теоремы о сложении вероятностей мы напишем, что вероятность появления белого шара (E) равняется сумме вероятностей двух несовместных событий L и M, т. е.

$$(E) = (L) + (M)\,. \tag{α}$$

Вычислим теперь (L). Через L мы обозначим событие, состоящее в том, что взят из сосуда 1-й группы и вынут белый шар. Таким образом, мы видим, что событие L есть сложное событие, заключающееся в одновременном появлении двух событий: первое, сосуд принадлежит группе 1-й, событие это обозначим через A; второе, вынутый шар будет белый, это событие назовем через B. На основании теоремы об умножении вероятностей напишем:

$$(L) = (A)\,[B, A]. \tag{β}$$

Определим теперь (A).

Всех случаев, соответствующих событию A, имеем $a+b$, случаев благоприятствующих a, а потому $(A) = \dfrac{a}{a+b}$; раз событие A произошло, случаев, соответствующих событию B, имеем $m+n$, случаев же благоприятствующих m, а потому $[B, A] = \dfrac{m}{m+n}$ и на основании формулы (β) будем иметь, что

$$(L) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n}.$$

Рассуждая аналогично, мы можем показать, что

$$(M) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{r}{r+s}.$$

На основании формулы (α) мы напишем, что:

$$(E) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{r}{r+s}.$$

Приводя к общему знаменателю и обозначая (E) через P, мы будем иметь:

$$P = \frac{am\,(r+s) + br\,(m+n)}{\big(a+b\big)\,(m+n)\,(r+s)}.$$

Итак, на основании последней формулы, мы можем сказать, что общее число случаев, соответствующих событиям L и M, в нашей задаче равно произведению $\big(a+b\big)\,(m+n)\,(r+s)$; случаев же благоприятствующих событию E: $am\,(r+s) + br\,(m+n)$ *).

Задача II. Пусть в одном сосуде имеем a белых шаров и b черных, в другом же сосуде m и n черных. Из первого сосуда берем наудачу шар и, не определяя цвета вынутого шара, подбрасываем его в другой сосуд. Спрашивается теперь, какова вероятность, что из II сосуда вынем белый шар.

Пусть E — событие, состоящее в появлении белого шара при условиях задачи. Вероятность этого события обозначим через P, то есть $(E) = P$. Событие E есть событие сложное, состоящее

---

*) Запись в тексте ошибочна: $am\,(r+s) + b\,(m+n)$

в осуществлении одного из следующих двух несовместных событий, первого: подброшен в сосуд белый шар и вынут затем белый, событие это обозначим через L, и второго: подброшен черный шар и вынут белый — событие это обозначим через M. Тогда на основании теоремы о сложении вероятностей мы напишем, что:

$$(E) = (L) + (M)\,. \tag{α}$$

Вычислим теперь отдельно (L) и отдельно (M). L есть событие, состоящее в том, что подброшен белый шар во II-й сосуд и вынут белый, следовательно, событие L есть событие сложное, заключающееся в одновременном появлении двух событий, первого: что подброшен белый шар во II сосуд, обозначим это событие A, и второго: что из сосуда II вынут белый шар после того, как событие A произошло, это событие назовем через B.

На основании теоремы об умножении вероятностей мы напишем, что:

$$(L) = (A)\,[B, A]\,. \tag{β}$$

Всех шаров в первом сосуде есть $a + b$, следовательно, случаев, соответствующих событию A, будет $a + b$, благоприятствующих же будет только a, а потому

$$(A) = \frac{a}{a+b}. \tag{γ}$$

После того, как событие A произошло, всех шаров в сосуде II окажется $m + n + 1$; причем белых шаров будет $m + 1$, поэтому случаев, соответствующих событию B, имеем $m + n + 1$, случаев же благоприятствующих $m + 1$, следовательно:

$$[B, A] = \frac{m+1}{m+n+1}. \tag{δ}$$

Подставляя (γ) и (δ) в формулу $\big(\beta\big)$, будем иметь

$$(L) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{m+1}{m+n+1}. \tag{ε}$$

Рассуждая аналогично, мы найдем, что

$$(M) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n+1}. \qquad (\kappa)$$

Подставляя (κ) и (ε) в формулу (α), будем иметь, что:

$$P = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{m+1}{m+n+1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n+1}.$$

Приводя к общему знаменателю, имеем:

$$P = \frac{am+a+bm}{(a+b)(m+n+1)} = \frac{m(a+b)+a}{(a+b)(m+n+1)} = \frac{m+\dfrac{a}{a+b}}{m+n+1}. \qquad (\lambda)$$

В знаменателе получаем $m+n+1$, то есть число шаров, находящихся во втором сосуде, после того, как из первого сосуда мы перебросили во второй сосуд один шар. Если бы мы заранее знали, что переброшенный шар был белым, то числитель формулы (λ) равнялся бы $m+1$; если бы переброшенный шар был черным, то числитель в формуле (λ) равнялся бы m; но, так как цвет шара нам неизвестен, то в числителе появляется дробь $\dfrac{a}{a+b}$, представляющая собой не что иное, как вероятность того, что из первого сосуда вынут белый шар. Эта последняя величина в данном случае носит специальное название *математического ожидания* белого шара из первого сосуда.

Лекция 4

Повторение испытаний

Мы производили некоторые испытания, после которых нам делается известно, появилось ли какое-нибудь событие A или нет. Предположим, что такого рода испытания мы имеем возможность производить сколько раз угодно. При этом наши испытания могут быть или *зависимыми*, или *независимыми* друг от друга, то есть вероятность появления события A при втором испытании может зависеть от того, появилось ли событие A при первом испытании, или может не зависеть. Объясним это на примере. Пусть в сосуде находятся только белые или черные шары. Вынимаем один шар наудачу. Вероятность этого события можно вычислить. Возвращаем вынутый шар обратно в сосуд и прибавляем еще несколько белых и черных шаров. Вероятность появления белого шара изменится, но она не будет зависеть от того, какой шар вынут при первом испытании, белый или черный. Если бы мы не возвратили обратно шара, вынутого при первом испытании, то вероятность появления белого шара при втором испытании зависела бы от первого испытания. Итак, в первом случае мы имеем дело с независимыми испытаниями, во втором — с зависимыми.

Пусть мы имеем целый ряд испытаний, и пусть при первом испытании вероятность события A будет равна p_1, при 2-м испытании p_2, ..., при n-м испытании — p_n. Зададимся теперь вопросом, какова вероятность того, что после n испытаний данное событие A появится указанное число раз, например, m? Рассмотрим сначала частный случай, когда $n = 2$.

Назовем через B событие, противоположное нашему событию A. Пусть вероятность события A в 1-м испытании будет p_1, а события B — q_1; во 2-м же испытании вероятность события A пусть будет p_2, а события B — q_2, причем оба события A независимы. Тогда при двух испытаниях непременно должно произойти одно из следующих четырех сложных событий:

1) при 1-м	испытании	произойдет	A,	при 2-м	—	A,
2) при 1-м	—		A,	при 2-м	—	B,
3) »	»	»	B,	»	» »	A,
4) »	»	»	B,	»	» »	B.

Обозначая каждое из этих событий AA, AB, BA, BB и их вероятности через (AA), (AB), (BA), (BB), на основании теоремы об умножении напишем:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (AA) = p_1 p_2,\\ &2)\ (AB) = p_1 q_2,\\ &3)\ (BA) = q_1 p_2,\\ &4)\ (BB) = q_1 q_2. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Определим теперь вероятность следующих предположений:

1) событие A появилось при двух испытаниях ровно 2 раза,
2) событие A появилось 1 раз,
3) событие A не появилось ни разу.

Обозначим эти вероятности символом P_{22}, P_{12}, P_{02}. На основании формулы (α) видим, что только один раз событие A появляется при обоих испытаниях, а потому

$$P_{22} = p_1 p_2. \qquad (\beta)$$

По одному разу событие A появляется в двух случаях [(2) и (3) формулы (α)], а потому

$$P_{12} = p_1 q_2 + q_1 p_2. \qquad (\gamma)$$

и, наконец,

$$P_{02} = q_1 q_2. \qquad (\delta)$$

Заметим, что все числа P_{22} , P_{12} , P_{02} представляют коэффициенты при переменной независимой x в функции:

$$\left(p_1 x + q_1\right)(p_2 x + q_2) = P_{22} x^2 + P_{12} x + P_{02}\,. \qquad (\varepsilon)^{*)}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть скобки в левой части нашего равенства и подставить формулы (β), (γ), (δ). Замечая далее, что событие A при двух испытаниях непременно должно произойти или 2 раза, или 1 раз, или 0, мы на основании теоремы о сложении вероятностей напишем, что

$$P_{22} + P_{12} + P_{02} = 1.$$

К тому же заключению мы придем на основании формулы (ε), принимая $x = 1$, тогда будем иметь, что:

$$\left(p_1 + q_1\right)(p_2 + q_2) = P_{22} + P_{12} + P_{02} \;^{**)}$$

и так как $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1$, то и

$$P_{22} + P_{12} + P_{02} = 1. \qquad (\xi)^{***)}$$

Посмотрим теперь, какова вероятность того, что наше событие A при двух испытаниях появится, по крайней мере, один раз; этому событию будут благоприятствовать два случая: появление данного события два раза и появление его 1 раз; на основании теоремы

*) В тексте: P_{01} вместо P_{02}.

**) В тексте: P_{01} вместо P_{02}.

***) В тексте: P_{01} вместо P_{02}.

о сложении вероятностей мы напишем, что искомая вероятность будет равна $P_{22} + P_{12}$, или, пользуясь формулой (ξ), напишем:

$$P_{22} + P_{12} = 1 - P_{02}\,.$$

Решим теперь вопрос более общего характера и определим вероятность того, что данное событие при n испытаниях появится ровно m раз, т. е. найдем значение символа P_{mn} Этот вопрос решится на основании следующей теоремы:

Если $P_{nn},\ P_{n-1\,n},\ \ldots,\ P_{mn},\ \ldots,\ P_{0n}$ суть соответственные вероятности того, что событие A произошло при n испытаниях ровно n раз, $n-1, \ldots, m$ и, наконец, 0 раз, то $P_{n\,n},\ P_{n-1\,n},\ \ldots,\ P_{0n}$ суть коэффициенты при переменной независимой x в разложении функции:

$$(p_1x + q_1)\,(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n)$$

по степеням x, т. е.

$$(p_1x + q_1)\,(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n) =$$
$$= P_{n\,n}x^n + P_{n-1\,n}x^{n-1} + \ldots + P_{mn}x^m + \ldots + P_{1n}x + P_{0n},$$

где $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ суть вероятности появления события A при первом, втором, $\ldots$, n-м испытании, а $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ — вероятности появления события B, противоположного событию A, при первом, втором, $\ldots$, n-м испытании.

Предположим, что теорема наша верна для $n-1$ испытаний. Тогда легко докажем, что она верна и для n испытаний. Значит, мы предполагаем существование равенства:

$$(p_1x + q_1)\,(p_2x + q_2)\ldots(p_{n-1}x + q_{n-1}) =$$
$$= P_{n-1\,n-1}x^{n-1} + P_{n-2\,n-1}x^{n-2} + \ldots + P_{m\,n-1}x^m + \ldots + P_{0\,n-1}. \qquad (\alpha)^{*)}$$

---

*) В формуле вместо $P_{mn-1}x^m$ неверно указана степень: $P_{mn-1}x^{n-1}$.

Умножим обе части этого равенства на p_nx+q_n тогда будем иметь:

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\dots(p_nx+q_n) = P_{n-1\,n-1}p_nx^n+$$
$$+\left.\begin{matrix}P_{n-2n-1}p_n\\ P_{n-1n-1}q_n\end{matrix}\right| x^{n-1}+\dots+\left.\begin{matrix}P_{m-1n-1}p_n\\ P_{mn-1}q_n\end{matrix}\right| x^m+\dots+\left.\begin{matrix}P_{0n-1}p_n\\ P_{1n-1}q_n\end{matrix}\right| x+$$
$$+P_{0n-1}q_n. \tag{I}$$

(I) *)

Все коэффициенты при неизвестном в правой части можем разбить на 3 группы: к первой группе относятся коэффициенты при x^n, ко второй группе коэффициенты при x^0 и, наконец, к 3-ей группе все остальные коэффициенты.

Рассмотрим 1-ю группу: на основании теоремы об умножении коэффициент $P_{n-1n-1}p_n$ представляет вероятность того, что при первых $n-1$ испытаниях событие A произошло $n-1$ раз и при n-м испытании это событие тоже произошло. Другими словами $P_{n-1\,n-1}p_n$ есть вероятность того, что событие A при n испытаниях произошло n раз, т. е.

$$P_{n-1\,n-1}p_n = P_{nn}\,. \tag{II}$$

Рассматривая коэффициент $P_{0\,n-1}q_n$ и замечая что $P_{0\,n-1}$ значит, что при $n-1$ испытании данное событие не произошло ни разу, а q_n значит, что при n испытаниях это событие тоже не произошло, мы напишем, что:

$$P_{0\,n-1}q_n = P_{0n}. \tag{III}$$

Перейдем теперь к последней группе и рассмотрим, например, коэффициент $P_{m-1\,n-1}p_n + P_{m\,n-1}q_n$.

*) Запись непривычная, если в современных обозначениях, то так:
$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\dots(p_nx+q_n) =$
$= P_{n-1\,n-1}p_nx^n + \left(P_{n-2\,n-1}p_n + P_{n-1\,n-1}q_n\right)x^{n-1}+\dots+$
$+\left(P_{m-1\,n-1}p_n + P_{m\,n-1}q_n\right)x^m+\dots+\left(P_{0\,n-1}p_n + P_{1\,n-1}q_n\right)x + P_{0n-1}q_n.$

Произведение $P_{m-1\,n-1}p_n$ представляет собой вероятность того, что при $n-1$ испытаниях событие A произошло $m-1$ раз, и при n-м испытании оно тоже произошло, следовательно, произведение $P_{m-1\,n-1}p_n$ показывает, что при n испытаниях данное событие произошло m раз в указанном порядке (т. е. при $n-1$ испытаниях $m-1$ раз и при последнем 1 раз). Произведение $P_{m\,n-1}q_n$ показывает, что при $n-1$ испытаниях произошло m раз событие A, но при n-м испытании оно не произошло, следовательно, при n испытаниях данное событие произошло m раз в указанном порядке. Замечая, что оба произведения представляют собой события несовместные, мы на основании теоремы о сложении вероятностей убедились в том, что сумма: $P_{m-1\,n-1}p_n + P_{m\,n-1}q_n$ выражает вероятность появления события A при n испытаниях ровно m раз в каком бы то ни было порядке, и поэтому напишем, что:

$$P_{m-1\,n-1}p_n + P_{m\,n-1}q_n = P_{mn}. \tag{IV}$$

Подставляя формулы (II), (III), (IV) в формулу (I), мы получим, что:

$$\begin{aligned}&\big(p_1x+q_1\big)\,(p_2x+q_2)\ldots(p_nx+q_n) = \\ &= P_{nn}x^n + \,P_{n-1\,n}x^{n-1} + \ldots + P_{mn}x^m + \ldots + P_{0n},\end{aligned} \tag{α}$$

то, что и требовалось доказать.

Справедливость нашей теоремы была доказана для $n=2$, а для $n=1$ сама собой очевидна, а поэтому наша теорема верна вообще. Вычислим теперь P_{mn}. Для этого нужно определить коэффициент при x^m в формуле (α), раскладывая левую часть по степеням x. Если мы вынесем за скобки q_i, то получим, что:

$$\big(p_1x+q_1\big)\ldots(p_nx+q_n) = q_1q_2\ldots q_n\,\left[1+\frac{p_1}{q_1}x\right]\ldots\left[1+\frac{p_n}{q_n}x\right],$$

а затем можно найти, что коэффициент при x^m, т. е. P_{mn} равен:

$$P_{mn} = q_1q_2\ldots q_n\sum\frac{P_{h_1}}{q_{h_1}}\cdot\frac{P_{h_2}}{q_{h_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{P_{h_m}}{q_{h_m}},$$

где h_1, h_2, ..., h_m — различные числа из ряда 1, 2, 3, ..., n, а знак суммы распространяется на все возможные комбинации чисел h_1, h_2, ..., h_m. Поэтому сумма будет состоять из стольких членов, сколько можно сделать сочетаний из n элементов по m. Заметим, что подобное вычисление P_{mn} на практике не имеет значения. Для нас гораздо важнее задаться вопросом следующего рода.

Как определить вероятность того, что при n испытаниях появление нашего события X будет заключаться в некоторых, наперед заданных границах.

Так, например, найдем вероятность того, что при n испытаниях число появлений данного события заключается в пределах $a \leqslant m \leqslant b$, причем a и b числа целые, наперед заданные. На основании условия m может принимать следующие значения: a, $a+1$, $a+2, \ldots$, b. В первом случае вероятность появления нашего события будет равна P_{an}, во втором случае $P_{a+1\,n}$, ... и, наконец, в последнем случае будет равна: P_{bn}. — Из всех указанных случаев может появиться только один, какой угодно; таким образом, мы имеем дело с событиями несовместными и на основании теоремы о сложении вероятностей мы напишем, что искомая вероятность равна сумме:

$$P = P_{an} + P_{a+1\,n} + \ldots + P_{bn}, \quad \text{где} \quad a \leqslant m \leqslant b. \tag{I}$$

Вероятности $P_{an}, \ldots, P_{bn}$ можно определить без труда, если n число малое и разность $b - a$ число малое; но раз число n испытаний велико и точно так же промежуток $b - a$ велик, то для решения вопроса приходится суммировать весьма большое число слагаемых, выраженных весьма сложно, что на практике оказывается трудно выполнимым и приходится прибегать к искусственным приемам для приближенного вычисления таких сумм, основанных на принципах интегрального исчисления. С этим приложением интегрального исчисления в теории вероятностей мы ознакомимся в дальнейшем.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

I. Пусть вероятность появления нашего события A и ему противоположного B во всех испытаниях будет одна и та же, т. е.:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p$$

и

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n = q.$$

Тогда формула (α) примет вид:

$$P_{nn}x^n + P_{n-1n}x^{n-1} + \ldots + P_{0n} = (px+q)^n\,. \tag{β}$$

и вероятность того, что при n испытаниях данное событие появится m раз, выразится коэффициентом при x^m, который вычислим, раскладывая правую часть уравнения (β) по степеням x, и на основании бинома Ньютона получим:

$$P_{mn} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m q^{n-m}. \tag{γ}$$ [*)]

II. На основании формулы (I) можно написать, что вероятность P того, что при n испытаниях данное событие появится m раз, где $a \leqslant m \leqslant b$, будет равняться $\sum\limits_{m=a}^{m=b} P_{mn}$, т. е.

$$P = \sum_{m=a}^{m=b} P_{mn}.$$

Случай этот упрощается значительно, если зададимся вопросом, какова вероятность того, что данное событие при n испытаниях появится, по крайней мере, один раз; тогда нужно предположить, что m меняется от 1 до n, т. е.

$$P = \sum_{m=1}^{n} P_{mn}\,. \tag{δ}$$

[*)] Здесь было ошибочно: $P_{mn} = \dfrac{n!}{m!\,(m-1)!}p^m q^{n-m}$.

Меняя m от 0 до n и замечая, что постоянно будем иметь дело с событиями несовместными и единственно возможными, мы можем написать, что:

$$\sum_{m=0}^{n} P_{mn} = 1.$$

Эту последнюю формулу можем переписать в виде:

$$\sum_{m=1}^{n} P_{mn} + P_{0n} = 1,$$

откуда и получим, что искомая вероятность

$$P = \sum_{m=1}^{n} P_{mn} = 1 - P_{0n}\,. \qquad (\varepsilon)$$

Подставляя в формулу (γ) вместо m значение нуль, мы получим, что $P_{0n} = q^n$, а потому формула (ε) перепишется в виде:

$$P = \sum_{m=1}^{n} P_{mn} = 1 - q^n. \qquad (\xi)$$

Возьмем теперь ряд числовых примеров.

Пример I. Бросают два раза подряд монету. Бросающий выигрывает, если хотя бы один раз появится орел. Какова вероятность выигрыша?

Здесь мы имеем дело с двумя испытаниями. Вероятность появления орла в каждом испытании равна $\frac{1}{2}$, следовательно, $p = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$, т. к. $p + q = 1$. На основании формулы (ξ) мы и напишем, что $P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, где P есть вероятность выигрыша; обозначая тогда через Q вероятность проигрыша, мы напишем, что $Q = \frac{1}{4}$, таким образом, видим, что бросающий монету имеет в три раза больше шансов выигрыша, чем проигрыша. *D'Alambert*[*)], занимавшийся тем же вопросом, утверждал, что $P = \frac{2}{3}$ и $Q = \frac{1}{3}$; ошибка его заключалась в следующем; он говорил, что может быть всего 3 случая:

1) орел, орел,
2) решетка, орел,
3) решетка, решетка.

В первых двух случаях бросающий монету выигрывает, в последнем случае проигрывает, а потому $P = \frac{2}{3}$ и $Q = \frac{1}{3}$. *D'Alambert* не обратил внимания на то, что все случаи, хотя единственно возможны и несовместны, но они неравновозможны, так как 2-й случай можно разбить на два случая: 1) орел, решетка, 2) решетка, орел[**)]. Таким образом, получим всего 4 случая, из которых 3 благоприятствуют выигрышу, а потому $P = \frac{3}{4}$ и $Q = \frac{1}{4}$.

Пример II. Бросаем на стол подряд три раза шестигранную кость с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и задумываем одну из этих цифр. Если задуманная нами цифра хоть раз появится, мы выигрываем, в противоположном случае проигрываем. Спрашивается, какова вероятность выигрыша и проигрыша.

Задумываем, например, число 6. При каждом испытании являются 6 случаев, единственно возможных, равновозможных и несовместных, именно, когда появится 1, или 2, или 3, или 4, или 5, или 6, а потому вероятность p появления 6 равна $\frac{1}{6}$, т. е. $p = \frac{1}{6}$; вероятность же непоявления 6, т. е. $q = \frac{5}{6}$. Так как все три испытания независимы друг от друга, то вероятности появления

[*)] Т. к. в XVIII в. написание имен собственных не было фиксированным и сам Даламбер нередко подписывался D'Alambert, в русской математической литературе часто использовалась именно эта транскрипция.

[**)] В рукописи ошибочно записано: «1 случай можно разбить на два случая: 1) орел, решетка, 2) орел, орел».

и непоявления шестерки не изменятся. На основании формулы (ξ) мы напишем, что:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}, \qquad (\kappa)$$

где P есть вероятность выигрыша. Из формулы (κ) видим, что $P < \frac{1}{2}$, а $Q > \frac{1}{2}$ Следовательно, если мы кость бросим три раза, то мы должны ожидать скорее проигрыша. Если же бросим кость [четыре раза]*) подряд, то наоборот мы должны ожидать выигрыша, чем проигрыша. На самом деле, на основании формулы (ξ) напишем тогда, что:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296},$$

$$\text{т. е. } P > \frac{1}{2},$$

$$\text{а потому } Q < \frac{1}{2}.$$

Пример III. На стол бросают одновременно две шестигранных кости и выигрывается, когда появятся две шестерки. Всего имеется 36 комбинаций, из которых только одна благоприятствует появлению двух шестерок, а потому $p = \frac{1}{36}$ и $q = \frac{35}{36}$, где p есть вероятность одновременного появления двух шестерок, а q есть вероятность непоявления одновременного двух шестерок. Зададимся теперь следующим вопросом: определить наименьшее число испытаний, требуемое для того, чтобы бросающий кости имел преимущество.

В этой задаче неизвестным является число испытаний n. Замечая, что при рассматриваемых испытаниях вероятность событий p и q всегда одна и та же, мы на основании формулы (ξ) напишем, что:

$$P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

*) Текст утрачен и добавлен нами.

Для того, чтобы бросающий кость имел преимущество, требуется, чтобы:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}\ ;$$

т. к. данное число n в случае преимущества выигрыша имеет наименьшее значение, то бросая кость $n-1$ раз, мы получим преимущество проигрыша, т. е.: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$. Итак: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$ и $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$, или

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{35}{36}\right)^n \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} < \left(\frac{35}{36}\right)^{n-1},$$

или

$$\left(\frac{36}{35}\right)^n > 2 \quad \text{и} \left(\frac{36}{35}\right)^{n-1} < 2^{*)}.$$

Логарифмируя, получим, что:

$$n \lg \frac{36}{35} > \lg 2^{**)},$$

$$(n-1) \lg \frac{36}{35} < \lg 2,$$

отсюда:

$$n > \frac{\lg 2}{\lg \frac{36}{35}}{}^{***)} \quad \text{и}$$

$$n - 1 < \frac{\lg 2}{\lg \frac{36}{35}}\,.$$

---

*) В тексте: $\left(\frac{36}{55}\right)^{n-1} < 2$.

**) В тексте: $n \lg \frac{36}{35} > \log 2$.

***) В тексте: $n > \frac{\log 2}{\lg \frac{36}{35}}$.

Соединяя последние два неравенства в одно, получим, что:

$$\frac{\lg 2}{\lg \dfrac{36}{35}} < n < 1 + \frac{\lg 2}{\lg \dfrac{36}{35}}\ ^{*)}.$$

После вычислений окажется, что:

$$\frac{\lg 2}{\lg \dfrac{36}{35}} = 24{,}605\ldots, \quad \text{а} \quad \frac{\lg 2}{\lg \dfrac{36}{35}} + 1 = 25{,}605\ldots$$

и потому:

$$24{,}605\ldots < n < 25{,}605\ldots .$$

Так как число n есть целое число, то и приходим к заключению, что $n = 25$.

Итак, для того, чтобы бросающий кость имел преимущество, требуется, чтобы было 25 испытаний. Это решение, данное *Паскалем*, не удовлетворило *Chevalier de Méré*, который именно предложил этот вопрос знаменитому математику, *Chevalier de Méré* рассуждал так:

Если имеем одну кость, то для того, чтобы иметь перевес выигрыша, требуется 4 испытания при 6 комбинациях. Так как при игре двумя костями имеем 36 комбинаций, т. е. в 6 раз больше, чем при игре с одной костью, то при игре с двумя костями требуется в 6 раз больше испытаний, чем при игре с одной костью, т. е. требуется 24 испытания, а не 25, как показал *Паскаль*. Правда, что разница между числом испытаний невелика, но непонятно, почему должна существовать между испытаниями и комбинациями пропорция, указанная *Chevalier de Méré*, а потому *Паскаль* очень легко опроверг решение *Chevalier de Méré*.

---

*) В тексте ошибка: $\dfrac{\lg 2}{\lg \frac{36}{55}} < n < 1 + \dfrac{\lg 2}{\lg \frac{36}{35}}$.

Пример IV. В сосуде находится a белых и b черных шаров. Вынимаем постепенно по одному шару, но вынутые шары обратно не возвращаем. Таким образом, мы видим, что мы имеем дело с испытаниями зависимыми. Предположим, что всего-навсего вынуто n шаров. Спрашивается теперь: какова вероятность, что между вынутыми n шарами m белых шаров?

Искомую вероятность обозначим P_{mn} При решении этого вопроса будем вычислять в отдельности различные вероятности появления одного или нескольких белых шаров при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим первый случай: $n = 1$. Возможное значение m : 1 и 0 Вычислим соответствующие вероятности: P_{11} и P_{01} Всего шаров имеем $a + b$, из которых a белых и b черных, а потому $P_{11} = \dfrac{a}{a+b}$ и $P_{01} = \dfrac{b}{a+b}$.

Пусть теперь $n = 2$. В этом случае возможны следующие случаи:

1. Вынуто два белых шара $m = 2$ и вероятность этого предположения $P_{22.}$

2. Вынут один белый шар и один черный, но $m = 1$, вероятность этого предположения $P_{12.}$ Это последнее событие разбивается на два несовместных события:

$\alpha)$ в первый раз вынут белый шар, а во второй раз черный и

$\beta)$ в первый раз вынут черный шар, а во второй раз белый.

Обозначая вероятность события $\alpha)$ через p, а вероятность события $\beta)$ через p_1, мы и напишем, что $P_{12} = p + p_1$.

3. Белый шар не появится ни разу. Вероятность последнего обозначим P_{02}. Вычислим теперь: P_{22}, P_{12}, P_{02}. Вероятность появления белого шара при первом испытании выражается дробью $\dfrac{a}{a+b}$. После первого испытания в сосуде окажется всего $a + b - 1$ шаров, из которых будет $a - 1$ белых, а потому вероятность появления белого шара при втором испытании равна $\dfrac{a-1}{a+b-1}$. На основании теоремы об умножении, вероятность одновременного появления двух белых шаров при двух испытаниях выразится

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1},$$

т. е.

$$P_{22}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}.$$

Вычислим теперь P_{12}. Сначала вычислим p, а затем p_1. Вероятность появления при первом испытании белого шара $=\dfrac{a}{a+b}$; вероятность появления черного шара при втором испытании выразится дробью $\dfrac{b}{a+b-1}$, а потому $p=\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{b}{a+b-1}$. Рассуждая подобным образом, найдем, что: $p_1=\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{a}{a+b-1}$, а потому:

$$P_{12}=p+p_1=$$
$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=2\frac{ab}{(a+b)\,(a+b-1)}.$$

Перейдем теперь к вычислению P_{02}. Предположим, что при первом испытании и при втором появляется черный шар. Вероятность того, что при первом испытании появится черный шар $=\dfrac{b}{a+b}$; тогда всего останется $a+b-1$ шаров, из которых будет $b-1$ черных, а потому вероятность появления черного шара при втором испытании $=\dfrac{b-1}{a+b-1}$. — На основании теоремы об умножении мы и напишем: $P_{02}=\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{b-1}{a+b-1}$.

Идя таким путем далее, мы могли бы вычислить P_{mn} *) при $n=3,4,\ldots$. Мы сразу перейдем к общему случаю и вычислим P_{mn} того, что при n испытаниях появится m белых шаров. Этот случай разбивается на два несовместных события:

*) В тексте P_m.

α) при $n-1$ испытании белый шар появится $m-1$ раз, и при n-м испытании белый шар тоже появится и

β) при $n-1$ испытании белый шар появится m раз, а при последнем n-м испытании белый шар не появится. —

Обозначая вероятность события (α) через (L), а вероятность события (β) через (M), мы и напишем, что:

$$P_{mn} = (L) + (M)\,.$$

Вычислим (L). Вероятность того, что при $n-1$ испытаниях появилось $m-1$ белых шаров, мы обозначим P_{m-1n-1}; всех шаров при n-м испытании $[a+b-n+1]$ [*)], из них согласно предположению белых будет $a-m+1$, а потому вероятность появления белого шара при n-м испытании $= \dfrac{a-m+1}{a+b-n+1}$ и на основании теоремы об умножении мы напишем, что:

$$(L) = P_{m-1n-1}\cdot\frac{a-m+1}{a+b-n+1}.$$

Обозначим теперь вероятность того, что при $n-1$ испытании появилось m белых шаров, через P_{mn-1}. Раз при $n-1$ испытании появилось m белых шаров, значит, черных появилось $n-1-m$, следовательно, всех черных в сосуде осталось $b-n+m+1$ [**)]. Поэтому вероятность того, что при n-м испытании белый шар не появится, то есть другими словами, при n-м испытании появится черный шар, выразится как: $\dfrac{b-n+m+1}{a+b-n+1}$, и на основании теоремы об умножении мы напишем, что:

$$(M) = P_{mn-1}\cdot\frac{b-n+m+1}{a+b-n+1}\ ^{***)}$$

[*)] Пропущено, вставлено нами.

[**)] В тексте: $b-n+m-1$.

[***)] В тексте: P_{mn}.

и потому

$$P_{mn} = P_{m-1n-1} \cdot \frac{a-m+1}{a+b-n+1} + P_{mn-1} \frac{b-n+m+1}{a+b-n+1}. \qquad (1)$$

Полученная формула дает возможность находить значение вероятности P_{mn}, если известны значения вероятностей P_{n-1n-1}, $\ldots$, P_{0n-1}. На основании формулы (1) легко доказать, что P_{mn} выражается произведением:

$$P_{mn} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m} \times \\ \times \frac{a(a-1)\ldots(a-m+1)\,b\,(b-1)\ldots(b-n+m+1)}{(a+b)\,(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}. \qquad (2)$$

Давая теперь m все значения от 0 до n включительно и замечая, что будем иметь дело с событиями несовместными, из которых только одно наверно[*)] произойдет, мы можем написать, что:

$$\sum_{m=0}^{n} P_{mn} = 1.$$

Подставляя в это равенство все значения P_{mn} и освобождаясь от знаменателя, мы придем к следующему замечательному равенству, аналогичному биному Ньютона:

$$(a+b)\,(a+b-1)\ldots(a+b-n+1) = \\ = a(a-1)\ldots(a-n+1) + \frac{n}{1}a(a-1)\ldots(a-n+2)\,b + \\ + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a\ldots(a-n+3)\,b\,(b-1) + \ldots + \\ + b\,(b-1)\ldots(b-n+1)^{**)}.$$

[*)] Здесь в смысле: обязательно произойдет.

[**)] В тексте : $\ldots \frac{n}{1}a(a-1)\ldots(a-n-2)\,b +$
$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a\ldots(a-n-3)\,b\,(b-1) + \ldots + b\,(b-1)\ldots(b-n+1).$

Лекция 5

Разыскание наивероятнейшего события при повторении испытаний

Производим ряд испытаний, при которых каждый раз появляется или не появляется событие A. Пусть вероятность появления события A и ему противоположного события B будут p и q. Предположим, что эти вероятности не изменяются при различных испытаниях. Вероятность произойти m раз событию A при n испытаниях выражается следующим образом:

$$P_{mn} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m} p^m q^{n-m}. \qquad (1)^{*)}$$

В этом равенстве число m может принять одно из $n+1$ значений: $0, 1, \ldots, n$.

Посмотрим теперь, для какого m вероятность P_{mn} будет иметь наибольшее значение из всех вероятностей:

$$P_{0n},\ P_{1n},\quad \ldots,\quad P_{n-1n},\quad P_{nn}.$$

Значение $m=\mu$, при котором P_{mn} есть *maximum*, называется наивероятнейшим значением. Заметим, что это название не указывает ясно на значение m, появление которого мы станем ожидать предпочтительно перед другими значениями m. Только в том случае, когда $P_{\mu n} > \frac{1}{2}$, мы ожидаем появление значения $m=\mu$ предпочтительно перед другими значениями m. Если же $P_{\mu n} < \frac{1}{2}$, то нет основания ожидать, что число повторений события будет μ, а не какое-нибудь другое определенное число.

---

*) В тексте: q^{n+m}.

Рассмотрим дроби вида:

$$\frac{P_{m+1\,n}}{P_{mn}},$$

где $m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Относительно этих дробей докажем, что:

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} > \frac{P_{2n}}{P_{1n}} > \ldots > \frac{P_{nn}}{P_{n-1n}}.$$

Для этого воспользуемся формулой (1). Аналогично можем написать, что:

$$P_{m+1\,n} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m+1)}p^{m+1}q^{n-m-1}. \tag{2}$$

Разделяя формулу (2) на (1), будем иметь:

$$\frac{P_{m+1\,n}}{P_{mn}} = \frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q}. \tag{3}$$

Из этого равенства видим, что при увеличении m отношение $\frac{P_{m+1\,n}}{P_{mn}}$ уменьшается, т. к. числитель $n-m$ уменьшается, а знаменатель $m+1$ увеличивается.

Итак, теорема наша доказана. Если теперь положим, что $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leqslant 1$, то все дроби окажутся меньшими единицы, т. е. если $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leqslant 1$, то $\frac{P_{2n}}{P_{1n}} < 1, \ldots, \frac{P_{nn}}{P_{n-1\,n}} < 1$. Замечая, что числитель каждой предыдущей дроби служит знаменателем каждой последующей, мы напишем, что:

$$P_{0n} \geqslant P_{1n} > P_{2n} > \ldots > P_{nn}.$$

Таким образом, мы видим, что P_{0n} есть наибольшее из чисел ряда $P_{0n},\ P_{1n},\ P_{2n}, \ldots,\ P_{nn}$.

Рассмотрим теперь, при каких условиях можно получить такой результат. Мы знаем, что в этом случае $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leqslant 1$, а на основании формулы (1) можем написать, что:

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} = n\frac{p}{q}, \tag{4}$$

следовательно, $n\frac{p}{q} \leqslant 1$ или $n \leqslant \frac{q}{p}$ [*]. Иначе мы видим, что если $n < \frac{q}{p}$, то наивероятнейшим значением m будет 0, если же $n = \frac{q}{p}$, то на основании формулы (4) получим, что $P_{1n} = P_{0n}$, т. е. существуют два наивероятнейших значения m: 0 и 1. — Если бы оказалось, что $\frac{P_{nn}}{P_{n-1n}} \geqslant 1$, то, рассуждая, как и раньше, мы бы сейчас показали, что:

$$\frac{P_{nn}}{P_{n-1n}} \geqslant 1,\ \frac{P_{n-1n}}{P_{n-2n}} > 1, \ldots, \frac{P_{1n}}{P_{0n}} > 1\ ^{**)},$$

откуда следует, что

$$P_{nn} \geqslant P_{n-1n} > \ldots > P_{0n}.$$

Итак, P_{nn} есть максимальное значение P_{mn}. Так как по условию:

$$\frac{P_{nn}}{P_{n-1n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{p}{q} \geqslant 1,$$

то $n \leqslant \frac{p}{q}$.

На основании этих результатов мы приходим к следующим заключениям: пока $n < \frac{p}{q}$, то наивероятнейшее значение $m = n$. Если $n = \frac{p}{q}$, то имеем два наивероятнейших значения: $m = n$ и $m = n - 1$.

Мы до сих пор рассматривали два случая, когда $\frac{P_{1n}}{P_{0n}} \leqslant 1$ и когда $\frac{P_{nn}}{P_{n-1n}} \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда ни одно из этих условий не выполняется, т. е. когда

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} > 1 \quad \text{и} \quad \frac{P_{nn}}{P_{n-1n}} < 1. \qquad (A)$$

---

[*] В тексте: $n \leqslant \frac{p}{q}$.

[**] В тексте: вместо $\frac{P_{n-1\,n}}{P_{n-2\,n}} > 1$ написано $\frac{P_{n-1\,n}}{P_{n-1\,n}} > 1$.

Рассматривая дроби: $\dfrac{P_{1n}}{P_{0n}}, \dfrac{P_{2n}}{P_{1n}}, \ldots, \dfrac{P_{nn}}{P_{n-1\,n}}$ последовательно, мы замечаем, что среди этих дробей в начале вследствие условия (A) находятся дроби больше единицы, а затем уже идут дроби меньше единицы. Поэтому можно найти в рассматриваемом ряду две дроби, следующие одна за другой и удовлетворяющие условиям:

$$\frac{P_{\mu n}}{P_{\mu-1\,n}} \geqslant 1, \tag{A}$$

$$\frac{P_{\mu+1\,n}}{P_{\mu n}} < 1. \tag{B}$$

На основании условия (A) мы можем написать, что:

$$\frac{P_{1n}}{P_{0n}} > 1, \quad \ldots, \quad \frac{P_{\mu-1\,n}}{P_{\mu-2\,n}} > 1, \quad \frac{P_{\mu n}}{P_{\mu-1\,n}} \geqslant 1$$

откуда

$$P_{\mu n} \geqslant P_{\mu-1\,n} > \ldots > P_{0n}.$$

На основании же условия (B) напишем, что:

$$\frac{P_{\mu+1\,n}}{P_{\mu n}} < 1, \quad \frac{P_{\mu+2\,n}}{P_{\mu+1\,n}} < 1, \quad \ldots, \quad \frac{P_{n+1\,n}}{P_{nn}} < 1,$$

откуда

$$P_{\mu n} > P_{\mu+1n} > \ldots > P_{nn}.$$

Итак, видим, что в самом общем случае вероятности сначала возрастают, а потом убывают.

$$P_{0n} < P_{1n} < \ldots \leqslant P_{\mu n} > P_{\mu+1\,n} > \ldots > P_{nn}.$$

Определим теперь значение n.

Замечая, что $\dfrac{P_{\mu n}}{P_{\mu-1\,n}} \geqslant 1$ и $\dfrac{P_{\mu+1\,n}}{P_{\mu n}} < 1$ [*)], на основании формулы (3) мы напишем, что: $\dfrac{n-\mu+1}{\mu} \cdot \dfrac{p}{q} \geqslant 1$ и $\dfrac{n-\mu}{\mu+1} \cdot \dfrac{p}{q} < 1$, откуда, освобождаясь от знаменателя, будем иметь:

[*)] В тексте: $\dfrac{P_{\mu+1n}}{P_{nn}} < 1$.

$$np - \mu p + p \geqslant \mu q \text{ и } np - \mu p < \mu q + q,$$

далее

$$np + p \geqslant \mu(p + q) \text{ и } np - q < \mu(p + q),$$

замечая, что $p + q = 1$, получим, что

$$\mu \leqslant np + p \quad \text{и} \quad \mu > np - q.$$

Этими неравенствами целое число μ вполне определяется, так как:

$$np + p - np + q = p + q = 1;$$

на этом основании мы можем написать: $\mu = E(np + p)$.

Когда $np + p$ есть целое число, то $\mu = np + p$, но тогда $P_{\mu n} = P_{\mu-1n}$ и существуют два значения m наивероятнейшие: $np + p$ и $np - q$.

Если же $np+p$ дробь, то существует только одно наивероятнейшее значение $\mu = E(np+p)$. Заметим, что в этом последнем случае заключаются и два первые, пользуясь неравенствами (ξ), а также неравенствами $n \leqslant \dfrac{q}{p}$ и $n \leqslant \dfrac{p}{q}$, выведем формулы, полученные нами ранее. Итак, доказана следующая теорема:

Если $np - q$ есть дробь, то среди чисел ряда

$$P_{nn},\ P_{n-1n}, \ldots, P_{1n},\ P_{0n} \qquad (\zeta)$$

есть одно число $P_{\mu n}$, которое больше всех остальных, причем число μ *) определяется неравенствами: $\mu < np + p$ и $\mu > np - q$. Это значение μ называется наивероятнейшим.

Если $np - q$ целое число, то среди чисел ряда (ζ) будет два равных наибольших числа: $P_{\mu n}$ и $P_{\mu-1n}$, причем $\mu = np - q$.

*) В тексте: m вместо μ .

Лекция 6

О суммировании рядов

Мы вывели формулу, выражающую вероятность предположения, что при n испытаниях событие повторится m раз.

$$P_{mn} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m\ *)}.$$

Если же $a \leqslant m \leqslant b$, то

$$P = \sum_{m=a}^{m=b} P_{mn}.$$

Если n и разность $a - b$ числа большие, то встречаемся здесь с задачей суммирования весьма большого числа слагаемых. Суммирование рядов выполняется обыкновенно с помощью формулы Эйлера, применимой, однако, только к функциям аналитическим. Так как в формуле для P_{mn} встречается $n!$, т. е. числовая функция, то мы должны ее логарифмированием обратить в сумму значений аналитической функции $\lg x$ и тогда только применить формулу Эйлера.

Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть некоторая функция $f(x)$ имеет дифференциал. Если мы составим сумму $\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n)$, то такую сумму можем *грубым приближением* **) вычис-

*) В тексте: q^n.

**) Курсив наш.

лить при помощи интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$; *Эйлер* заметил, что связь между суммой и интегралом очень тесна и показал, что можно представить сумму $\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n)$ более точно, именно:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)dx + A_1\left[f(b) - f(a)\right] + A_2\left[f'(b) - f'(a)\right],$$

где a и b числа целые, а $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{6}$ и т. д.*)

Перейдем теперь к вопросу общего характера и рассмотрим сумму $\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n) f(n)$, где $\tau(n)$ не дифференцируется, а $f(n)$ имеет производную, т. е. имеем случай, когда числовая функция соединена с аналитической. Такого рода функции в теории вероятностей часто встречаются. Функция $\tau(n)$ есть числовая и вполне определена, когда n целое число, если же n число дробное, то функция $\tau(n)$ значения не имеет. Для того чтобы можно было применить формулу Эйлера, мы должны придумать такую аналитическую функцию $w(x)$, которая бы при всех целых значениях x совпадала бы с данными значениями функции $\tau(n)$, а при дробных значениях x что-нибудь выражала. Такую функцию можно составить при помощи периодических функций. Но этот прием не приводит к хорошим результатам. Гораздо важнее представить сумму $\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n)f(n)$ в виде определенного интеграла. Мы знаем, что определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можем рассматривать или как предел суммы, т. е.:

---

*) В конспекте было $A_1 = \frac{1}{2}$; $A_2 = \frac{1}{n}$. Заметим, что это приближенная формула и сейчас мы бы написали ее со знаком приближенного равенства и многоточием, тогда же просто писалось: «и т. д.».

$$\left.\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\xi_k\right)\left(x_{k+1}-x_k\right), \text{причем} \\ a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b, \\ \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1}, \text{ где} \\ x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}, \\ x_0 = a,\ x_n = b\,. \end{aligned}\right\} \quad (\rho)^{*)}$$

Возьмем теперь интеграл вида:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

Если $\varphi(x)$ имеет производную, т. е.

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx,$$

то этот интеграл можно рассматривать так же, как выше указано. Если же функция $\varphi(x)$ производной не имеет, то можно доказать, что:

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \lim S_n,$$

где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} f\left(\xi_k\right)\left[\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\right]$, по крайней мере, в том случае, когда функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(x)$ постоянно возрастает или убывает; этот предел суммы S_n непременно существует, независимо от того, дифференцируема функция φ или нет. Заметим, что в том случае, когда $\varphi(x)$ не имеет производной, интеграл $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ не имеет смысла при обычном определении,

*) В тексте верхний предел $k = 1$.

но мы можем в этом случае символу $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ придать условное значение, считая символ $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ обозначением предела суммы S_n.

К символу $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ (где $\varphi(x)$ не дифференцируется), рассматриваемому с новой точки зрения, установленной *Stieltjes'ом*, можно применять теоремы об определенных интегралах, рассматриваемых с обычной точки зрения.

Теорема I.

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x) \pm \int\limits_a^b f(x)d\psi(x) = \int\limits_a^b f(x)d\left[\varphi(x) \pm \psi(x)\right]. \qquad (\alpha)$$

Интегралы, стоящие в левой части последнего равенства, смысла не имеют, если к ним применять обычное определение, так как $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют производных, что же касается интеграла, стоящего в правой части, то он может иметь смысл, так как $\varphi(x) \pm \psi(x)$ может иметь производную. — Таким образом, видим, что от интегралов, не имеющих смысла с точки зрения прежней теории, мы можем перейти к интегралам, имеющим смысл, если только пользоваться установленным нами расширением имени об определенном интеграле.

Теорема II.

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int\limits_a^b \varphi(x)df(x). \qquad (\beta)$$

Теорема III.

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x) = \int\limits_a^c f(x)d\varphi(x) + \int\limits_c^b f(x)d\varphi(x). \qquad (\gamma)$$

Приложим теперь все эти замечания к суммированию

$$\sum\nolimits_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n)f(n),$$

предполагая, что к функции $f(x)$ применимы действия интегрального исчисления. Функция $\tau(n)$ считается прерывной и к ней неприменимы правила дифференциального исчисления. Для решения нашего вопроса введем функцию $\sum\nolimits_{n>0}^{n\leqslant x} \tau(n)$, которую обозначим через $\varphi(x)$. Тогда можно доказать, что:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau\,(n)\,f\,(n) = \int\limits_a^b f(x)d\varphi(x).$$

В самом деле: пусть будут указаны все целые положительные числа, находящиеся в промежутке от a до b: $a < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} \leqslant b$, причем каждое последующее число больше своего предыдущего на 1. На основании только что сказанного и на основании понятия о суммировании можем написать, что:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n)f(n) = \tau(n_1)f(n_1) + \tau(n_2)f(n_2) + \ldots + \tau\left(n_{k-1}\right)f\left(n_{k-1}\right). \qquad (\mathrm{I})$$

На основании 3-го свойства интегралов *Stieltjes'a* (формула (γ)) напишем, что:

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x) = \int\limits_a^{n_1} f(x)d\varphi(x) + \int\limits_{n_1}^{n_2} f(x)d\varphi(x) + \ldots + \int\limits_{n_{k-1}}^b f(x)d\varphi(x). \qquad (\mathrm{II})$$

Покажем теперь, что каждое слагаемое равенства (II) равно как раз соответствующему слагаемому равенства (I). Для этого рассмотрим сначала $\int\limits_a^{n_1} f(x)d\varphi(x)$ и покажем, что он равен $\tau(n_1)\,f(n_1)$. В самом деле, на основании формулы (ρ)

$$\int\limits_a^{n_1} f(x)d\varphi(x) = \lim S_m, \tag{I}$$

где

$$S_m = \sum_{k=0}^{k=m-1} f(\xi_k)\left(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\right), \qquad (A)^{*)}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{причем} \quad a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < n_1 \\ \text{и} \quad \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{m-1}, \\ \text{а} \quad x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}, \\ x_0 = a,\ x_m = n_1\,. \end{array}\right\} \qquad (\nu)$$

Вычислим сначала разность:

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k).$$

Пока $k \neq m$, то на основании (ν) $x_k < n_1$ **). Замечая далее, что по определению $\varphi(x_k) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x_k} \tau(n)$, мы и напишем, что:

$$\varphi(x_k) = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n_1 - 1)\,. \qquad (1)^{***)}$$

Если $k = m$, то $x_m = n_1$ ****) и

$$\varphi(x_m) = \varphi(n_1) = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n_1)\,. \tag{2}$$

---

*) В тексте: $S_n = \sum_{k=0}^{k=m+1} f(\xi_k)\left(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\right)$.

**) В тексте: $x_k < n$.

***) В тексте: $\tau(n-1)$.

****) В тексте: $x_m = n$.

На основании равенств (1) и (2) будем иметь, что разность: $\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = 0$, пока $k < m - 1$ и

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \varphi(n_1) - \varphi(x_{m-1}) = \tau(n_1),$$

когда $k = m - 1$. — Поэтому формула (A) перепишется в виде: $S_m = f(\xi_{m-1})\tau(n_1)$; но на основании (ν): $x_{m-1} < \xi_{m-1} < n_1$, а потому $f\left(\xi_{m-1}\right) = f(n_1) + \rho$, следовательно:

$$S_m = \{f(n_1) + \rho\}\ \tau(n_1) = f(n_1)\,\tau(n_1) + \rho\tau(n_1)\ .$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то $\lim \rho = 0$ и потому:

$$\lim_{m\to\infty}(S_m) = f(n_1)\,\tau(n_1)\,.$$

И наконец, на основании формулы (I) имеем:

$$\int\limits_a^{n_1} f(x)d\varphi(x) = \tau(n_1)\,f(n_1) \quad \text{и т. д.}$$

Поступая аналогично, мы можем доказать, что все слагаемые ряда II равны соответствующим слагаемым ряда I, заметив, что:

$$\int\limits_{n_{k-1}}^{b} f(x)d\varphi(x) = 0\ ^{*)},$$

мы и напишем, что

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n)\,f(n) = \int\limits_a^b f(x)d\varphi(x).$$

Итак, теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что вопрос о вычислении суммы $\sum\limits_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n)\,f(n)$ сводится к вопросу о вычислении интеграла

*) В тексте: нижний предел k_{k-1}.

$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ [*]. Выведенная формула полезна только тогда, когда на основании свойств функции $\tau(n)$ можем вывести некоторые заключения о приближенном значении

$$\varphi(x) = \sum_{n>a}^{n\leqslant x} \tau(n).$$

Если, например, положить $\tau(n) = 1$, то можно сказать, что $\varphi(x)$ есть сумма стольких единиц, сколько их заключается в x, а потому: $\varphi(x) = E(x)$ и $\sum\limits_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)dE(x)$. $E(x)$ приближенно равно $x - \frac{1}{2}$ или

$$E(x) = x - \frac{1}{2} + \gamma(x), \text{ где } \gamma(x) \leqslant \frac{1}{2}\ ^{**)}.$$

Предполагаем вообще, что нам известно приближенное значение функции $\psi(x)$. Обозначим $\varphi(x) = \psi(x)+v(x)$; $\psi(x)$ называется асимптотой функции $\varphi(x)$. Если $\varphi(x)$ имеет производную, то можем написать, что:

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x) = \int\limits_a^b f(x)d\psi(x) + \int\limits_a^b f(x)dv(x),$$

где $\int\limits_a^b f(x)d\psi(x)$ есть интеграл обыкновенный. Тогда:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n)\, f(n) = \int\limits_a^b f(x)\psi'(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dv(x),$$

[*] В тексте: $dy(x)$.

[**] В тексте: E_x.

и первое приближенное выражение для нашей суммы будет:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\psi'(x)dx.$$

Исследуя $\int_a^b f(x)dv(x)$, будем знать величину ошибки, сделанной нами при первом приближении. Но $\int_a^b f(x)dv(x)$ на основании свойств интегралов *Stieltjes'a* равняется:

$$\int_a^b f(x)dv(x) = f(b)v(b) - f(a)v(a) - \int_a^b v(x)f'(x)dx,$$

а потому обобщенная формула Эйлера представится в виде:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\psi'(x)dx + \\ + f(b)v(b) - f(a)v(a) - \int_a^b v(x)f'(x)dx, \tag{B}$$

где $\int_a^b v(x)f'(x)dx$ есть дополнительный член.

Новое приближенное значение рассматриваемой суммы будет:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n) f(n) = \int_a^b f(x)\psi'(x)dx + v(b)f(b) - v(a)f(a).$$

Найдем теперь приближение более точное; для этого обозначим $\sum_{n>a}^{n\leqslant x} \tau(n)$ через $\varphi_0(x)$, где $\varphi_0(x) = \psi_0(x) + v_0(x)$.

Аналитическая функция $\psi_0(x)$ [*] пусть равняется

$$\psi_0(x) = \int\limits_0^x \zeta(u)du + A_0,$$

где A_0 произвольное постоянное и $\zeta(u) = \psi'(x)$ Тогда:

$$\varphi_0(x) = \int\limits_0^x \zeta(u)du + A_0 + v_0(x), \qquad (\alpha)$$

где $v_0(x)$ остаток, значение которого зависит от выбора $\zeta(u)$ и A_0.

На основании обобщенной формулы Эйлера (B) с дополнительным членом напишем, что:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} \tau(n) f(n) =$$

$$= \int\limits_a^b f(u)\zeta(u)du + v_0(b)f(b) - v_0(a)f(a) - \int\limits_a^b v_0(u)f'(u)du. \qquad (C)$$

Для дальнейшего вывода требуется определить $\int\limits_0^x v(u)du$. Для этого воспользуемся формулой (C) и примем, что $a = 0$, $b = x$, $f(n) = \dfrac{x-n}{1}$. Тогда получим:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau(n)\,\frac{x-n}{1} = \int\limits_0^x \frac{x-n}{1}\zeta(u)du +$$

$$+ v_0(x)\frac{x-x}{1} - v_0(0)\,\frac{x-0}{1} + \int\limits_0^x v_0(u)du$$

[*] В тексте: $\varphi_0(x)$.

или

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau\,(n)\,\frac{x-n}{1} = \int\limits_0^x \frac{x-n}{1}\zeta(u)du - v_0\,(0)\,x + \int\limits_0^x v_0(u)du. \qquad (D)$$

При $x = 0$ функция $\varphi_0\,(0) = 0$ и на основании формулы (α) будем иметь, что $A_0 + v_0(x) = 0$, т. е. $A_0 = -\,v_0(x)$. Подставляя в формулу (D), получим:

$$\int\limits_0^x v_0(u)du = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau\,(n)\,\frac{x-n}{1} - \int\limits_0^x \frac{x-n}{1}\zeta(u)du + A_0 x.$$

Это равенство определяет интеграл $\int\limits_0^x v_0(u)du$ как функцию x. Обозначая

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau\,(n)\,\frac{x-n}{1} = \int\limits_0^x \frac{x-n}{1}\zeta(u)du + A_0 x + A_1 + v_1(x),$$

где A_1 — произвольное постоянное, определим функцию $v_1(x)$ с помощью формулы

$$v_1(x) = \int\limits_0^x v_0(u)du - A_1.$$

Имея выражение для интеграла $\int\limits_0^x v_0(u)du$, можно преобразовать интеграл $\int\limits_a^b v_0(u)f'(u)du$ с помощью интеграции по частям. Получим:

$$\int\limits_a^b v_0(u)f'(u)du = v_1(b)f'(b) - v_1(a)f'(a) - \int\limits_a^b v_1(u)f''(u)du.$$

Подставляя в формулу (C), найдем:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b}\tau(n)f(n)=\int\limits_a^b f(u)\zeta(u)du+v_0(b)f(b)-v_0(a)f(a)-$$

$$-\,v_1(b)f'(b)+v_1(a)f'(a)+\int\limits_a^b v_1(u)f''(u)du\,.\qquad(E)$$

Итак, мы получили более точное значение для нашей суммы.

Для получения общей формулы проинтегрируем по частям m раз. В результате получим формулу:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b}\tau\,(n)\,f\,(n)=\int\limits_a^b f(u)\zeta(u)du+$$

$$+\sum_{A=0}^{A=m-1}(-1)^A\left[v_A(b)f^A(b)-v_A(a)f^A(a)\right]+(-1)^m\int\limits_a^b v_{m-1}(u)f^{(m)}(u).\qquad(F)$$

Заметим, что коэффициенты $A_0,\ldots,A_k$ в выведенной формуле произвольны. Обозначая $\varphi_k(x)=\sum\limits_{n>0}^{n\leqslant x}\tau\,(n)\,\dfrac{(x-n)^k}{k!}$, будем иметь для определения функций $v_0(x)$, $v_1(x)$ формулу:

$$\begin{aligned}\varphi_k(x)&=\sum_{n>0}^{n\leqslant x}\tau\,(n)\,\frac{(x-n)^k}{k!}=\\&=\int\limits_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}\zeta(u)du+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k}A_\lambda\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}+v_k(x).\end{aligned}\qquad(P)$$

Функцию аналитическую $\psi_k(x)$, выражаемую формулой:

$$\psi_k(x)=\int\limits_0^x\frac{(x-u)^k}{k!}\zeta(u)du+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k}A_\lambda\frac{x^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!},\qquad(Q)$$

мы назовем асимптотическим выражением функции $\varphi_k(x)$; функция $v_k(x)$ есть дополнительный член или остаток.

Во всех случаях, когда можно указать высшую границу для числовых значений $v_k(x)$ в промежутках $a < x < b$, можно определить степень точности, с которой функция $\psi_k(x)$ определяется формулой (Q), представляя функцию $\varphi_k(x)$. Формула (F) в этом случае дает возможность выразить приближенную сумму: $\sum\limits_{n>0}^{n\leqslant k} \tau\,(n)\,f\,(n)$. Рассмотрим теперь частный случай, когда $\tau\,(n) = 1$, т. е. когда мы имеем сумму вида: $\sum\limits_{n>a}^{n\leqslant b} f\,(n)$.

Если $\tau\,(n) = 1$, тогда формула (P) перепишется в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) &= \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \frac{(x-n)^k}{k!} = \\ &= \int\limits_0^x \frac{(x-u)^k}{k!}\zeta(u)du + A_0\frac{x^k}{k!} + \ldots + A_k + v_k(x). \qquad (R)\end{aligned}$$

Теперь мы должны выбрать функцию $\zeta(u)$ и коэффициенты $A_0, \ldots, A_k$. Если $k = 0$, то $\varphi_0(x) = \sum\limits_{n>0}^{n\leqslant x} 1 = E(x)$. Известно, что приближенное значение $E(x)$ равно $x - \dfrac{1}{2}$, и если положить $E(x) = x - \dfrac{1}{2} + v_0(x)$, то $v_0(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ при всяком значении x *). Сравнивая формулу $\varphi_0(x) = x - \dfrac{1}{2} + v_0(x)$ с формулой (R) в том предположении, что $k = 0$, мы заметим, что для полного тождества этих формул нужно положить $\zeta(u) = 1$ и $A_0 = -\dfrac{1}{2}$. Формула (R) при условии, что

*) В тексте: Ex.

$\zeta(u) = 1$, примет вид:

$$\varphi_k(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-u)^k}{k!}du + A_0\frac{x^k}{k!} + A_1\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + A_k + v_k(x)$$

или:

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \frac{(x-n)^k}{k!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + A_0\frac{x^k}{k!} + \ldots + A_k + v_k(x). \quad (S)$$

Дадим теперь x приращение 1. Тогда будем иметь :

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x+1} \frac{(x+1-n)^k}{k!} = $$
$$= \frac{(x+1)^{k+1}}{(k+1)!} + A_0\frac{(x+1)^k}{k!} + \ldots + A_k + v_k\,(x+1)\,. \quad (T)$$

Вычтем теперь из формулы (T) формулу (S), получим тогда:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x+1} \frac{(x+1-n)^k}{k!} - \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \frac{(x-n)^k}{k!} = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{(k+1)!} +$$

$$+ A_0\frac{(x+1)^k - x^k}{k!} + \ldots + A_{k-1}\frac{x+1-k}{1} + v_k\,(x+1) - v_k(x). \quad (U)$$

Замечая, что:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x+1} \frac{(x+1-n)^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} + \frac{(x-1)^k}{k!} + \ldots$$

и

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} \frac{(x-n)^k}{k!} = \frac{(x-1)^k}{k!} + \frac{(x-2)^k}{k!} + \ldots$$

мы можем написать, что:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x+1} \frac{(x+1-n)^k}{k!} - \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \frac{(x-n)^k}{k!} = \frac{x^k}{k!},$$

а потому формула (U) перепишется в виде:

$$\frac{x^k}{k!} = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{(k+1)!} + A_0 \frac{(x+1)^k - x^k}{k!} + \cdots + \\ + A_{k-1} \frac{x+1-k}{1} + v_k(x+1) - v_k(x). \qquad (L)^{*)}$$

Коэффициенты $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_k$ можно так определить, что из предыдущего равенства исчезнут все члены, содержащие x в различных степенях. Другими словами, мы желаем выбрать коэффициенты $A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_k$ так, чтобы целая функция:

$$F_k(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{(k+1)!} + A_0 \frac{(x+1)^k - x^k}{k!} + \ldots + \\ + A_{k-1} \frac{x+1-k}{1} - \frac{x^k}{k!}$$

обращалась в нуль тождественно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

$$F_k(0) = 0, \quad F_k'(0) = 0, \quad F_k''(0) = 0, \quad \ldots .$$

Полагая $x = 0$, найдем:

$$F_k(0) = \frac{1}{(k+1)!} + A_0 \frac{1}{k!} + \ldots + A_{k-1} = 0.$$

Взяв производную от функции $F_k(x)$ по x, получим:

$$F'_k(x) = \frac{(x+1)^k - x^k}{k!} + A_0 \frac{(x+1)^{k-1} - x^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + \\ + A_{k-2} \frac{x+1-k}{1} - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!},$$

*) В тексте: $v_k(x-1) - v_k(x)$.

т. е. функция $F'_k(x)$ не что иное, как функция $F_{k-1}(x)$ и потому равенство $F'_k\,(0)=0$ приводится к следующему:

$$F'_k\,(0)=F_{k-1}(x)=\frac{1}{k!}+A_0\frac{1}{(k-1)!}+\ldots+A_{k-2}=0.$$

Подобным же образом определим условия, при которых

$$F''_k\,(0)=0,\ F'''_k\,(0)=0,\quad \ldots,\text{ и т. д.}$$

Приходим к следующему результату:
функция $F_k(x)$ равна нулю тождественно, если при всех значениях $k=1,2,\ldots$ имеет место равенство:

$$\frac{1}{(k+1)!}+A_0\frac{1}{k!}+\frac{A_1}{(k-1)!}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{1}=0.$$

Полученные равенства вполне определяют A_0, A_1. В самом деле, полагая[*)] $k=1$, получим равенство:

$$\frac{1}{2}+\frac{A_0}{1}=0,\ A_0=-\frac{1}{2}\,,$$

при $k=2$ имеем:

$$\frac{1}{3!}+\frac{A_0}{2!}+\frac{A_1}{1}=0,\ A_1=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

и т. д.

Давая A_0, A_1 найденные значения, мы на основании формулы (L) напишем, что:

$$v_k\,(x+1)-v_k(x)=0,$$

откуда

$$v_k\,(x+1)=v_k(x),$$

т. е. остаточный член $v_k(x)$ есть функция периодическая с периодом равным единице. Периодичность эта имеет весьма важное значение. Пользуясь периодичностью функции $v_k(x)$, легко просуммировать степени натурального ряда чисел: $1^k+2^k+\ldots+(x-1)^k$,

[*)] В тексте: получая.

где x число целое и положительное. Мы знаем, что:

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \frac{(x-n)^k}{k!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + A_0\frac{x^k}{k!} + \ldots + A_k + v_k(x). \quad \text{(I)}$$

При x целом и положительном давая n различные значения, будем иметь, что:

$$\varphi_k(x) = \frac{(x-1)^k + (x-2)^k + \ldots + 1^k}{k!} =$$
$$= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + A_0\frac{x^k}{k!} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{1} + A_k + v_k(x), \quad \text{(II)}$$

функция $v_k(x)$ периодична, а потому $v_k(x) = v_k\,(0)$.

Давая в формуле (I) члену x значение 0, мы получим, что:

$$\varphi_k\,(0) = 0 = A_k + v_k\,(0)\,.$$

Но $v_k\,(0) = v_k(x)$, а потому $v_k(x) = -A_k$. Подставляя в формулу (II), получим:

$$\frac{1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k}{k!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + A_0\frac{x^k}{k!} + \ldots + A_{k-1}\frac{x}{1}\,^{*)}.$$

Выведенное равенство дает выражение суммы степеней натурального ряда чисел, меньших x, в виде целой функции x.

Обратимся теперь к суммарической формуле (F). Полагая $\zeta(u) = 1$ и предполагая, что числа A_0, A_1 определены, как выше было указано, получим формулу:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f\,(n) = \int_a^b f(u)du + \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda\, \left[v_\lambda(b)f^\lambda(b) - v_\lambda(a)f^\lambda(a)\right] +$$
$$+ (-1)^m \int_a^b v_{m-1}(u)f^{(m)}(u). \quad \text{(II)}$$

*) В тексте в правой части формулы пропущено многоточие.

Выведенная формула значительно упрощается в том случае, когда числа a и b целые и положительные, т. к. на основании предыдущего вследствие периодичности функции $v_k(x)$ получают место равенства:

$$v_k(a) = v_k(b) = -A_k. \text{ Здесь } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Подставляя эти числа в формулу (II), получим:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(u)du + \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda+1} A_\lambda \left[f^{(\lambda)}(b) - f^{(\lambda)}(a)\right] + \\ + (-1)^m \int_a^b v_{m-1}(u) f^{(m)}(u). \tag{III}$$

Полученная формула носит название суммар[ической] формулы Эйлера[*)], имеющей чрезвычайно важное значение для математического анализа. Применим формулу Эйлера к вычислению суммы логарифмов натурального ряда чисел:

$$\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg x.$$

Полагая в формуле (III) $m = 1$, $a = 1$, $b = x$ и $f(u) = \lg u$, получим:

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant x} \lg\ (n) = \int_1^x \lg u\, du + \frac{1}{2}\lg x - \int_1^x v_0(u)\frac{du}{u},$$

но

$$\int_1^x \lg u\, du = x\lg x - x + 1,$$

а потому

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant x} \lg\ (n) = x\lg x - x + \frac{1}{2}\lg x + 1 - \int_1^x v_0(u)\frac{du}{u}. \tag{IV}$$

[*)] В современных источниках эта формула называется формулой суммирования Эйлера, иногда — формулой суммирования Эйлера—Маклорена.

При x целом и положительном можем написать:

$$\int\limits_1^x v_0(u)\frac{du}{u} = \int\limits_1^2 v_0(u)\frac{du}{u} + \int\limits_2^3 v_0(u)\frac{du}{u} +$$

$$+ \ldots + \int\limits_k^{k+1} v_0(u)\frac{du}{u} + \ldots + \int\limits_{x-1}^x v_0(u)\frac{du}{u}. \qquad \text{(V)}$$

Рассмотрим один из интегралов, стоящих в правой части этого равенства, например, $\int\limits_k^{k+1} v_0(u)\frac{du}{u}$. Преобразуем этот интеграл с помощью подстановки $u = k + t$. Замечая, что при $u = k$ будет $t = 0$, а при $u = k + 1$ будет $t = 1$, можем написать, что:

$$\int\limits_k^{k+1} v_0(u)\frac{du}{u} = \int\limits_0^1 v_0\left(k+t\right)\frac{dt}{k+t},$$

но вследствие периодичности функции $v_0(x)$: $v_0\left(k+t\right) = v_0(t)$, а потому:

$$\int\limits_k^{k+1} v_0(u)\frac{du}{u} = \int\limits_0^1 v_0(t)\frac{dt}{k+t}.$$

Заменяя переменное t переменной u, напишем:

$$\int\limits_k^{k+1} v_0(u)\frac{du}{u} = \int\limits_0^1 v_0(u)\frac{du}{k+u}.$$

На основании последнего преобразования можем написать, что:

$$\int\limits_1^x v_0(u)\frac{du}{u} = \sum_{k=1}^{k=x-1}\int\limits_0^1 v_0(u)\frac{du}{k+u}.$$

Формула (IV) перепишется в виде:

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant x} \lg\ (n) = x\lg x - x + \frac{1}{2}\lg x + 1 - \sum_{k=1}^{k=x-1}\int\limits_0^1 v_0(u)\frac{du}{k+u}. \qquad \text{(VI)}$$

Но $v_0(u) = E(u) - u + \frac{1}{2}$ *) при $0 < u < 1$, $E(u) = 0$ **), а потому $v_0(u) = \frac{1}{2} - u$, следовательно:

$$\int\limits_0^1 v_0(u)\frac{du}{u+k} = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - u\right)\frac{du}{u+k}.$$

Разбиваем рассматриваемый интеграл на два:

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - u\right)\frac{du}{u+k} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - u\right)\frac{du}{u+k} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - u\right)\frac{du}{u+k}. \quad (\alpha)$$

Преобразуем $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - u\right)\frac{du}{u+k}$ с помощью подстановки $u = 1 - t$, замечая, что при $u = \frac{1}{2}$ будет $t = \frac{1}{2}$, а при $u = 1$ будет $t = 0$, напишем, что:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - u\right)\frac{du}{u+k} = -\int\limits_{\frac{1}{2}}^0 \left(t - \frac{1}{2}\right)\frac{-dt}{k+1-t} =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)\frac{dt}{k+1-t}.$$

*) В тексте: $v_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}$.

**) В тексте: Eu.

Заменяя t через u, будем иметь, что:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{2}-u\right)\frac{du}{u+k}=-\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-u\right)\frac{dt}{k+1-u}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (α), получим:

$$\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}-u\right)\frac{du}{u+k}=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-u\right)\frac{du}{u+k}=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-u\right)\frac{du}{k+1-u}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-u\right)\left(\frac{1}{k+u}-\frac{1}{k+1-u}\right)du=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-u\right)\left(\frac{k+1-u-k-u}{k\left(k+1\right)-ku+ku+u-u^2}\right)du=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right)+u-u^2}du.$$

На основании последнего преобразования можно написать, что:

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant x}\lg n=x\lg x-x+\frac{1}{2}\lg x+$$
$$+1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=x-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right)+u-u^2}du. \qquad (P')$$

Последнего интеграла мы не вычисляем, а находим его приближенное значение. Укажем границы, в которых заключается

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right)+u-u^2}du.$$

Замечая, что u изменяется от 0 до $\frac{1}{2}$, находим $0 \leqslant u - u^2 \leqslant \frac{1}{4}$ $\left(u - u^2 = \frac{1}{4} \text{ при } u = \frac{1}{2}\right)$, следовательно:

$$k\left(k+1\right) < k\left(k+1\right) + u - u^2 \leqslant \left(k+1\right)\left(k+2\right)$$

в промежутке $0 < u < \frac{1}{2}$. На основании последнего неравенства можно написать, что:

$$\frac{(1-2u)^2}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)} < \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} < \frac{(1-2u)^2}{\left(k+1\right)k},$$

и следовательно:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}du < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2}du < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{\left(k+1\right)k}du.$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2u)^2\,du < \left[-\frac{(1-2u)^3}{3\cdot 2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$

а потому имеем:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)} < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2}du < \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(k+1\right)k}$$

или:

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2}du < \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right). \qquad (\beta)$$

Введем теперь вместо x новое переменное n и обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2}du. \qquad (\gamma)$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует, т. е. что члены бесконечного ряда $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$. имеют определенный предел. Известно, что для этого необходимо и достаточно выполнение условий: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ при $n > r$ и $p = 1,\ 2, \ldots$, где ε положительное произвольно малое число.

На основании (γ) имеем:

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{k=n+p-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2du}{k(k+1)+u-u^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{k-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2du}{k(k+1)+u-u^2} = \sum_{k=n}^{k=n+p-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2du}{k(k+1)+u-u^2}\ {}^{*)}.$$

Давая k значения $n,\ n+1, \ldots, n+p-1$, на основании неравенства (β) напишем, что:

$$\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{k=n+p-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) < S_{n+p} - S_n < \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{k=n+p-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right),$$

или

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p-1}\right) < S_{n+p} - S_n < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right). \qquad (\gamma)$$

Или, наконец, взяв границы менее точные, получим, что

$$0 < S_{n+p} - S_n + \frac{1}{6n};$$

при n достаточно великом имеем, что:

$$\frac{1}{6n} < \varepsilon.$$

---

*) В тексте: $\displaystyle\sum_{k=n}^{k=n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2\,du}{k\,(k+1)+u-u^2}.$

Это будет, когда $n > \dfrac{1}{6\varepsilon}$; в этом случае можем написать, что при $p = 1, 2, \ldots$ $\lfloor S_{n+p} - S_n \rfloor < \varepsilon$. Итак, мы показали, что члены ряда S_1, S_2, ... стремятся к некоторому пределу, который можно вычислить с любой степенью точности.

На основании этой теоремы можно написать, что:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du = A. \qquad (\delta)$$

Положим, что величина A известная. Возвращаясь теперь к первоначальному интегралу $\sum\limits_{k=1}^{k=x-1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du$, можем написать, что:

$$\sum_{k=1}^{k=x-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du - \sum_{k=x}^{k=\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du,$$

или на основании равенства (γ) будем иметь, что:

$$\sum_{k=1}^{k=x-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du = A - \sum_{k=x}^{k=\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du. \qquad (\varepsilon)\text{*)}$$

*) В тексте: $A - \sum\limits_{k=1}^{k=\infty} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right) + u - u^2} du$.

Исследуем интеграл, стоящий в правой части последнего равенства. Полагая в равенстве (γ), что $n = x$ и $p = \infty$, мы напишем, что:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1} < \sum_{k=x}^{k=\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right)+u-u^2}du < \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}.$$

На основании последнего неравенства мы можем обозначить

$$\sum_{k=x}^{k=\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right)+u-u^2}du = \frac{1}{6(x+\varsigma)},\ \text{где}\ 0<\varsigma<1,$$

а потому формула (ε) перепишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{k=x-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-2u)^2}{k\left(k+1\right)+u-u^2}du = A-\frac{1}{6(x+\varsigma)},$$

и, наконец, сумма логарифмов натурального ряда чисел на основании формулы (P') напишется в виде:

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant x}\lg\, n = \left(x+\frac{1}{2}\right)\lg x - x + 1 - \frac{A}{2} + \frac{1}{12(x+\varsigma)},\ \text{где}\ 0<\varsigma<1.$$

Выражение $1-\dfrac{A}{2}$ обозначим через C, тогда будем иметь, что:

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant x}\lg\, n = \left(x+\frac{1}{2}\right)\lg x - x + C + \frac{1}{12(x+\varsigma)},\ \text{где}\ 0<\varsigma<1. \qquad (\xi)$$

Для вычисления C мы воспользуемся формулой Валлиса. Для этого рассмотрим интеграл: < … > *)

*) Далее несколько страниц, посвященных выводу формулы Валлиса, совершенно неразборчивы: путаница в обозначениях и нечеткость записей. Такое впечатление, что студент переписывал эти страницы, не видя и не слыша оригинала. Причем, на с. 161 написано: *Лист 11-й*, но подписи Вороного нет или не видно на фото. Нужно отметить, что опечаток и погрешностей в записи текста лекций немало, очень похоже, что у Вороного не было времени для тщательной проверки.

* * *

Разделяя последнее неравенство на $\dfrac{2n\,(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 1}$, получим, что

$$\frac{1}{2n-1} < \left[\frac{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 1}{2n\,(2n-2)\ldots 2}\right]^2 \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}.$$

На основании этих неравенств можно обозначить:

$$\frac{[(2n-1)\,(2n-3)\ldots 1]^2}{[2n\,(2n-2)\ldots 2]^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2n+\varsigma}, \text{ где } 0 < \varsigma < 1.$$

Равенство это называют формулой *Валлиса*. Умножая числитель и знаменатель левой части нашего равенства на произведение $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^2$, получим, что:

$$\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2n+\varsigma}, \text{ где } 0 < \varsigma < 1.$$

Это же равенство переписываем еще в виде:

$$\frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{2^{4n}\,(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2n+\varsigma},$$

откуда

$$\frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^4} = \frac{2 \cdot 2^{4n}}{\pi\,(2n+\varsigma)}, \quad \text{или} \quad \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^4}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n)^2} = \frac{\pi\left(n+\frac{\varsigma}{2}\right)}{2^{4n}}.$$

Логарифмируя последнее равенство, получим, что:

$$\lg \pi + \lg\left(n + \frac{\varsigma}{2}\right) - 4n \cdot \lg 2 =$$

$$= 4\,[\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n] - 2\,[\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg 2n]\,. \qquad (\kappa)$$

На основании формулы (ξ), полагая x равным n, другой раз равным $2n$, мы можем написать, что:

$$\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lg n - n + C + \frac{1}{12(n+\tau)},$$

где $0 < \tau < 1$, и

$$\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg 2n = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \lg 2n - 2n + C + \frac{1}{12(2n + \tau_0)},$$

$0 < \tau_0 < 1$. На основании этих формул равенство (κ) перепишется в виде:

$$\lg \pi + \lg n + \lg \left(1 + \frac{\varsigma}{2n}\right) - 4n \lg 2 =$$
$$= 4\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \lg n - n + C + \frac{1}{12(n + \tau)}\right] -$$
$$-2\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right) \lg 2n - 2n + C + \frac{1}{12(2n + \tau_0)}\right].$$

Раскрывая скобки и замечая, что $\lg 2n = \lg 2 + \lg n$, получим, что:

$$\lg \pi + \lg n + \lg \left(1 + \frac{\varsigma}{2n}\right) - 4n \lg 2 =$$
$$= 4 \lg n + 2 \lg n - 4n + 4C + \frac{1}{3(n + \tau)} -$$
$$- 4n \lg 2 - 4n \lg n - \lg 2 - \lg n - 4n - 2C - \frac{1}{6(2n + \tau_0)}.$$

После сокращений получим, что:

$$\lg \pi + \lg \left(1 + \frac{\varsigma}{2n}\right) = 2C - \lg 2 - \frac{1}{6(2n + \tau_0)} + \frac{1}{3(n + \tau)}$$

или, наконец:

$$\lg \pi + \lg 2 - 2C = \frac{1}{3(n + \tau)} - \frac{1}{6(2n + \tau_0)} - \lg \left(1 + \frac{\varsigma}{2n}\right),$$

где $0 < \tau < 1$, $0 < \tau_0 < 1$, $0 < \varsigma < 1$. Полученная формула верна для всякого целого и положительного n. При увеличении n правая часть последнего равенства будет предельно уменьшаться, так что при $n > n_0$ можем написать, что:

$$\lg \pi + \lg 2 - 2C = \rho_n, \text{ где } |\rho_n| < \varepsilon.$$

В пределе ρ_n будет равно нулю, а потому $\lg\pi + \lg 2 - 2C = 0$, откуда $C = \dfrac{1}{2}\lg 2\pi$ *).

Определив, таким образом, постоянное C в формуле (ξ), представим ее в виде:

$$\lg 1 + \lg 2 + \ldots + \lg x = x\lg x + \frac{1}{2}\lg 2\pi x - x + \frac{1}{12(x+\varsigma)}, \text{ где } 0 < \varsigma < 1.$$

Полученная формула называется формулой *Стирлинга*. Переходя от логарифмов к числам, найдем:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x = \sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x+\frac{1}{12(x+\varsigma)}}. \qquad (Z)$$

Разделив обе части нашего равенства на $\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}$, мы получим, что:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x}{\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}} = e^{\frac{1}{12(x+\varsigma)}}.$$

На основании этого равенства убеждаемся в том, что при безграничном увеличении x отношение $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x}{\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}}$ стремится к пределу 1, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x}{\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{12(x+\varsigma)}} = 1 \text{ **)}.$$

Такие две функции, отношение которых при безграничном увеличении переменного в пределе равно 1, называются взаимно асимптотическими, так, например, $\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}$ есть асимптота для функции $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x$.

Эйлер показал, что произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x$ может быть представлено в виде определенного интеграла:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt.$$

---

*) В тексте: $C = \dfrac{1}{2}\lg\pi$.

**) В тексте: $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x}{\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}} = \lim\limits_{n=\infty} e^{\frac{1}{12(x+\varsigma)}} = 1$.

Интеграл этот замечателен в том отношении, что имеем определенное значение при всяком постоянном x, и потому с помощью *Эйлерова* интеграла $\int\limits_0^\infty t^x e^{-t} dt$ устанавливается понятие о функции аналитической, которая при всех целых значениях x совпадает с числовой функцией, выражаемой произведением $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$. Функция, выраженная интегралом $\int\limits_0^\infty t^x e^{-t} dt$, обозначается обыкновенно символом $\Gamma(x+1)$ и называется функцией ***Гамма.***

Лекция 7

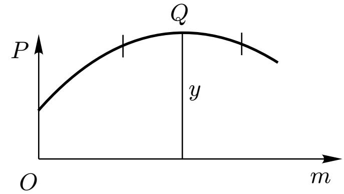
Приближенное вычисление вероятности P_{mn}

Предположим, что производится ряд испытаний, независимых друг от друга, причем вероятность появления события A при каждом испытании пусть будет p, а вероятность непоявления A — q. Вероятность того, что при n испытаниях событие A произойдет m раз, выразится символом P_{mn}

$$P_{mn} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Если же определяется вероятность того, что m заключается в пределах $m_0 \leqslant m \leqslant m_1$, то P выразится суммой $P = \sum\limits_{m>m_0}^{m\leqslant m_1} P_{mn}$.

При больших значениях n все слагаемые в этом случае будут весьма малыми. Графически эти слагаемые можно изобразить следующим образом, где ординаты y представляют собой величину вероятности, так что сначала вероятность возрастает, достигает своего *maximum* в точке Q, и затем убывает. *Бернулли* заметил, что вправо и влево возле *maximum*'а вероятность изменяется по определенному закону. *Лаплас* нашел простую формулу, приближенно выражаемую P_{mn} и вблизи *maximum*'а. Известно, что *maximum* P_{mn} определяется условием: $np - q < m \leqslant np + p$, так что $m = np + z$, где $-q < z \leqslant p$. Очевидно, z правильная дробь: положительная



или отрицательная. Мы воспользуемся формулой Стирлинга (Z) и напишем, что:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n+\frac{1}{12(n+\varsigma)}},$$

$$m! = \sqrt{2\pi m}\cdot m^m\cdot e^{-m+\frac{1}{12(m+\vartheta)}},$$

$$(n-m)! = \sqrt{2\pi(n-m)}\cdot(n-m)^{n-m}\cdot e^{n-m+\frac{1}{12(n-m+\omega)}}\,{}^{*)}.$$

Подставляя эти значения в формулу для P_{mn}, будем иметь, что:

$$P_{mn} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n+\frac{1}{12(n+\varsigma)}}\cdot p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m\cdot e^{-m+\frac{1}{12(m+\vartheta)}}\sqrt{2\pi(n-m)}\cdot(n-m)^{n-m}\cdot e^{-n+m+\frac{1}{12(n-m+\omega)}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^m\cdot n^{n-m}\cdot e^{-n+\frac{1}{12(n+\varsigma)}}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m\cdot e^{-m+\frac{1}{12(m+\vartheta)}}\sqrt{2\pi(n-m)}\cdot(n-m)^{n-m}\cdot e^{-n+m+\frac{1}{12(n-m+\omega)}}}p^m q^{n-m}.$$

После сокращений напишем, что:

$$P_{mn} = \frac{e^{\frac{1}{12(n+\varsigma)}-\frac{1}{12(m+\vartheta)}-\frac{1}{12(n-m+\omega)}}}{\sqrt{2\pi\frac{m}{n}(n-m)}}\cdot\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}. \qquad (Z')$$

При беспредельном увеличении n показатель при e беспредельно уменьшается, а потому:

$$e^{\frac{1}{12(n+\varsigma)}-\frac{1}{12(m+\vartheta)}-\frac{1}{12(n-m+\omega)}}$$

мало отличается от единицы**).

Используем теперь произведение $\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$, которое для краткости обозначим через u. Для удобства положим, что $m = np + z$. Тогда:

$$u = \left(\frac{np}{np+z}\right)^{np+z}\left(\frac{nq}{nq-z}\right)^{nq-z}, \qquad (Z'')$$

*) В тексте: в левой части равенства $n! - m!$.

**) В тексте: $e^{\frac{1}{12(n+\varsigma)}-\frac{1}{12(n+\vartheta)}-\frac{1}{12(n-m+\omega)}}$.

так как: $n - m = n - np - z = n(1-p) - z$, но $p + q = 1$, т. е. $1 - p = q$, а потому: $n - m = nq - z$.

Разделив числители и знаменатели формулы (Z'') на np и nq, прологарифмируем эту формулу. Получим тогда, что:

$$-\lg u = (np+z)\lg\left(1+\frac{z}{np}\right) + (nq-z)\lg\left(1-\frac{z}{nq}\right), \qquad (Z''')$$

где $0 < z < 1$. Так как n число большое, то можно разложить логарифмы формулы (Z''') по формуле:

$$\lg\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\vartheta x}$$

так, что

$$-\lg u = (np+z)\left(\frac{z}{np} - \frac{z^2}{2\,(np)^2}\cdot\frac{1}{1+\vartheta\frac{z}{np}}\right) +$$

$$+\,(nq-z)\left(-\frac{z}{nq} - \frac{z^2}{2\,(nq)^2}\cdot\frac{1}{1-\vartheta_0\frac{z}{nq}}\right);$$

далее:

$$-\lg u = z + \frac{z^2}{np} - \frac{z^2}{2np}\cdot\frac{np+z}{np+\vartheta z} - z + \frac{z^2}{nq} - \frac{z^2}{2nq}\cdot\frac{nq-z}{nq+\vartheta_0 z}.$$

Замечая, что $p + q = 1$, будем иметь, что:

$$-\lg u = \frac{z^2}{npq} - \frac{z^2}{2npq}\delta,$$

где δ есть величина, мало отличающаяся от единицы. Так как n постоянно возрастает, то правую часть последнего равенства можно представить иначе, именно: $-\lg u = \dfrac{\rho}{n}$, где ρ не превосходит некоторого конечного предела независимо от n, тогда $u = e^{-\frac{\rho}{n}}$,*) с увеличением n последнее равенство стремится к единице, но

*) В тексте: $n = e^{-\frac{\rho}{n}}$.

остается всегда меньше ее. На основании того, что:

$$u = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} = e^{-\frac{\rho}{n}},$$

мы напишем, что

$$P_{mn} = \frac{e^{\frac{1}{12(n+\varsigma)} - \frac{1}{12(m+\vartheta)} - \frac{1}{12(n-m+\omega)} - \frac{\rho}{n}}}{\sqrt{2\pi \frac{m}{n}(n-m)}}\,^{*)}.$$

Замечая, что показатель при e состоит из слагаемых одного и того же порядка относительно $<\ldots>$ [*текст утрачен*], можем его представить в виде дроби $\dfrac{\lambda}{n}$, где λ не превосходит некоторого конечного предела при всяком значении n. Вводя еще на основании равенств $m = np + z$ и $n - m = nq - z$ переменное z, можем написать, что:

$$P_{mn} = \frac{e^{\frac{\lambda}{n}}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{np+z}{n}\right)\left(\frac{nq-z}{n}\right)\cdot n}} = \frac{e^{\frac{\lambda}{n}}}{\sqrt{2\pi n\left(p+\frac{z}{n}\right)\left(q-\frac{z}{n}\right)}},$$

или

$$P_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \frac{e^{\frac{\lambda}{n}}}{\sqrt{\left(1+\frac{z}{pn}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{z}{qn}\right)}}. \qquad (Z'''')$$

Используем теперь произведение:

$$\frac{e^{\frac{\lambda}{n}}}{\sqrt{\left(1+\frac{z}{pn}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{z}{qn}\right)}}; \quad e^{\frac{\lambda}{n}} = 1 + \frac{\rho}{n},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{z}{pn}\right)}} = \left(1+\frac{z}{pn}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\delta}{n},$$

*) В тексте: вторая дробь в показателе снова $\dfrac{1}{12\,(n+\vartheta)}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{z}{qn}\right)}}=\left(1-\frac{z}{qn}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\delta_0}{n},$$

где ρ, δ, δ_0 обозначают некоторые конечные числа.

На основании этих формул можно написать:

$$\frac{e^{\frac{\lambda}{n}}}{\sqrt{\left(1+\frac{z}{pn}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{z}{qn}\right)}}=1+\frac{\alpha}{n},$$

где α опять число конечное. И, наконец, получим, что:

$$P_{mn}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\left[1+\frac{\alpha}{n}\right],$$

или иначе:

$$P_{mn}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}+\frac{\rho}{n^{\frac{3}{2}}},$$

[*неразборчиво*] где ρ опять есть некоторое конечное число. Единственный недостаток последней формулы состоит в том, что нельзя определить границ, в которых заключается ρ. При большом n *maximum* вероятности очень мал и приблизительно можем принять, что: $P_{mn}\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$ *), причем ошибка получается очень малая.

Излагаемый метод применим к решению следующего вопроса:

Найдем приближенное выражение вероятности в предположении, что при n испытаниях число появлений события A заключается в границах:

$$np+\alpha\sqrt{2pqn}\leqslant m\leqslant np+\beta\sqrt{2pqn},$$

где α и β заданные числа, причем $\alpha<\beta$. Вопрос этот был поставлен и решен *Лапласом.*

---

*) В тексте: $\neq$. Заметим, что в лекциях нигде не используется знак $\approx$, даже тогда, когда речь идет о приближенных вычислениях, ставится знак $=$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\approx$, когда в рукописи стоит знак $\neq$ в значении приближенного равенства.

Пусть в данных пределах m_0 будет наименьшим целым числом, а m_1[*)] наибольшим, так что $m_0 \leqslant m \leqslant m_1$. Искомая вероятность P выразится следующей суммой:

$$P = \sum_{m=m_0}^{m=m_1} P_{mn}.$$

Заметим, что максимальное значение слагаемых есть $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi pqn}}$. Число слагаемых равно $m_1 - m_0 \leqslant (\beta - \alpha)\sqrt{2pqn}$. Поэтому $\sum\limits_{m \geqslant m_0}^{m \leqslant m_1} P_{mn} < \dfrac{(\beta - \alpha)\sqrt{2pqn}}{\sqrt{2\pi pqn}}$, или $P < \dfrac{\beta - \alpha}{\sqrt{2\pi}}$. Полученный результат весьма неточно выражает P. Для более точного определения P найдем сначала приближенное выражение для P_{mn}.

Раньше мы вывели формулу:

$$P_{mn} = \frac{e^{\frac{1}{12(n+\varsigma)} - \frac{1}{12(m+\vartheta)} - \frac{1}{12(n-m+\omega)}}}{\sqrt{2\pi \frac{m}{n}(n-m)}} \cdot \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \text{[**)]}.$$

Введем теперь в эту формулу переменную z на основании равенства $m = np + z\sqrt{2pqn}$. Определим, в каких пределах может заключаться z. Мы знаем, что: $np + \alpha\sqrt{2pqn} \leqslant m \leqslant np + \beta\sqrt{2pqn}$, а потому, с одной стороны, найдем, что:

$$np + z\sqrt{2pqn} \leqslant np + \beta\sqrt{2pqn}, \text{ т. е. что } z \leqslant \beta,$$

а с другой стороны, что:

$$np + \alpha\sqrt{2pqn} \leqslant np + z\sqrt{2pqn}, \text{ т. е. что } \alpha \leqslant z,$$

и, наконец, можем написать, что: $\alpha \leqslant z \leqslant \beta$. Если α и β числа большие, то и z число большое, но конечное. Обозначим, как и раньше, произведение $\left(\dfrac{np}{m}\right)^m \left(\dfrac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$ через u, т. е.

*) В тексте: m.

**) В тексте: вторая дробь в показателе $\dfrac{1}{12(n+\vartheta)}$.

$u = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$ и исследуем эту функцию. Пользуясь равенством $m = np + z\sqrt{2pqn}$ и

$$n - m = n - np - z\sqrt{2pqn} = n\,(1-p) - z\sqrt{2pqn} = nq - z\sqrt{2pqn}$$

(т.к. $p + q = 1$) напишем, что:

$$u = \left(\frac{np}{np + z\sqrt{2pqn}}\right)^{np+z\sqrt{2pqn}} \left(\frac{nq}{nq - z\sqrt{2pqn}}\right)^{nq-z\sqrt{2pqn}}.$$

Разделяя переменные числителя и знаменателя дробей на np и nq и логарифмируя, получим, что:

$$-\lg u = \left(np + z\sqrt{2pqn}\right)\lg\left(1 + z\sqrt{\frac{2q}{pn}}\right) + \\ + \left(nq - z\sqrt{2pqn}\right)\lg\left(1 - z\sqrt{\frac{2p}{qn}}\right)^{*)}.$$

Логарифмы, стоящие в правой части, разлагаем по формуле:

$$\lg\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{1+\vartheta x}, \text{ где } 0 < \vartheta < 1.$$

Тогда получим, что:

$$-\lg u = \left(np + z\sqrt{2pqn}\right)\left[z\sqrt{\frac{2q}{pn}} - \frac{z^2 q}{pn} + \frac{z^3}{3}\sqrt{\left(\frac{2q}{pn}\right)^3}\cdot\frac{1}{1+\vartheta z\sqrt{\frac{2q}{pn}}}\right] +$$

$$+\left(nq - z\sqrt{2pqn}\right)\left[-z\sqrt{\frac{2p}{qn}} - \frac{z^2 p}{qn} - \frac{z^3}{3}\sqrt{\left(\frac{2p}{qn}\right)^3}\cdot\frac{1}{1-\vartheta z\sqrt{\frac{2p}{qn}}}\right]^{**)},$$

---

*) В левой части равенства отсутствует знак «$-$», но ниже появляется.

**) В тексте: в знаменателе последней дроби $1 + \vartheta z\sqrt{\frac{2p}{qn}}$.

или, раскрывая скобки, получим, что:

$$-\lg u = z\sqrt{2pqn} - z^2q + \frac{\lambda n}{n^{\frac{3}{2}}} + 2z^2q + \frac{\mu\sqrt{n}}{n} + \frac{\gamma\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} - \\ - z\sqrt{2pqn} - z^2p + \frac{\lambda' n}{n^{\frac{3}{2}}} + 2z^2p + \frac{\mu'\sqrt{n}}{n} + \frac{\gamma'\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}\,{}^{*)},$$

или иначе:

$$-\lg u = z\sqrt{2pqn} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} + z^2q + \frac{\mu}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} - z\sqrt{2pqn} + \\ + \frac{\lambda'}{\sqrt{n}} + z^2p + \frac{\mu'}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma'}{\sqrt{n}},$$

где λ, μ, γ, λ', μ', γ' суть некоторые конечные числа при всяком n, заменяющие собой комбинации произведений z, p, q, n,[**)] и, наконец, $\lg u$ можно представить в виде: $-\lg u = z^2 + \frac{\rho}{\sqrt{n}}$, где ρ опять число конечное, откуда:

$$u = e^{-z^2 - \frac{\rho}{\sqrt{n}}} = \left(\frac{np}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \quad \text{и}$$

$$P_{mn} = \frac{e^{\frac{1}{12(n+\varsigma)} - \frac{1}{12(m+\vartheta)} - \frac{1}{12(n-m+\omega)}}}{\sqrt{2\pi\frac{m}{n}\,(n-m)}} \cdot e^{-z^2 - \frac{\rho}{\sqrt{n}}}, \quad {}^{***)}$$

[*)] В тексте в правой части равенства восьмое слагаемое: $-z^2q$.

[**)] Отметим, что рассуждения неясные и не совсем четкие, описание некоторых вводимых обозначений отсутствует, опущенные во время доказательства члены не оговорены, восстановить истинный ход доказательства не представляется возможным. В рукописи части листов 171–174 выглядят зачеркнутыми.

[***)] В тексте отсутствует символ корня из $2\pi\dfrac{m}{n}\,(n-m)$ и вторая дробь в показателе снова: $\dfrac{1}{12\,(n+\vartheta)}$.

или, соединяя показатели при e в одно конечное число $\dfrac{\lambda}{n}$ и вводя вместо m значение $np + z\sqrt{2pqn}$, будем иметь:

$$P_{mn} = \frac{e^{\frac{\lambda}{n}}}{\sqrt{2\pi n\left(p + z\sqrt{\frac{2pq}{n}}\right)\left(q - z\sqrt{\frac{2pq}{n}}\right)}} \cdot e^{-z^2 - \frac{\rho}{\sqrt{n}}},\ ^{*)}$$

или:

$$P_{mn} = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi pqn}} \cdot \frac{e^{\frac{\lambda}{n} - \frac{\rho}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + z\sqrt{\frac{2q}{pn}}} \cdot \sqrt{1 - z\sqrt{\frac{2p}{qn}}}}\ ^{**)}.$$

Замечая, что

$$e^{\frac{\lambda}{n} - \frac{\rho}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\delta}{\sqrt{n}},\quad \frac{1}{\sqrt{1 + z\sqrt{\frac{2q}{pn}}}} = 1 + \frac{\delta_0}{\sqrt{n}},\quad \frac{1}{\sqrt{1 - z\sqrt{\frac{2p}{qn}}}} = 1 + \frac{\delta_1}{\sqrt{n}},$$

где $\delta,\ \delta_0,\ \delta_1$ суть некоторые конечные числа, мы можем написать, что:

$$\frac{e^{\frac{\lambda}{n} - \frac{\rho}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + z\sqrt{\frac{2q}{pn}}} \cdot \sqrt{1 - z\sqrt{\frac{2p}{qn}}}} = \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{\delta_0}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{\delta_1}{\sqrt{n}}\right) = $$

$$= \left(1 + \frac{\tau}{\sqrt{n}}\right),$$

так что:

$$P_{mn} = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}\left(1 + \frac{\tau}{\sqrt{n}}\right),$$

или, наконец:

$$P_{mn} = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi pqn}} + \frac{\rho}{n},$$

---

*) В тексте в знаменателе: $\sqrt{2\pi n\left(p + z\sqrt{\dfrac{2p - q}{n}}\right)\left(q - z\sqrt{\dfrac{2pq}{n}}\right)}$.

**) В тексте в числителе отсутствует степень $-z^2$.

где ρ некоторое конечное число. С увеличением n вероятность P_{mn} может стать приблизительно равной $\dfrac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}$, т. е. $P_{mn} \approx \dfrac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}$; ρ конечное число, а потому, чем больше n, тем меньше ошибка этой приближенной формулы.

Перейдем теперь к первоначальным обозначениям и исключим z по формуле:

$$m = np + z\sqrt{2pqn}, \text{ откуда } z = \frac{m - np}{\sqrt{2pqn}}.$$

Тогда:

$$P_{mn} = \frac{e^{-\left(\frac{m-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}} + \frac{\rho}{n},$$

и вероятность P представится в виде:

$$P = \sum_{m \geqslant np+\alpha\sqrt{2pqn}}^{m \leqslant np+\beta\sqrt{2pqn}} \left[\frac{e^{-\left(\frac{m-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}} + \frac{\rho_m}{n}\right],$$

где ρ_m есть число конечное. Полагая для краткости $np + \beta\sqrt{2pqn} = B$ и $np + \alpha\sqrt{2pqn} = A$, мы можем приблизительно вычислить $\sum\limits_{m \geqslant A}^{m \leqslant B} \dfrac{\rho_m}{n}$. Для этого нужно только предположить, что:

$$|\rho_m| < M,$$

где M конечное число. Тогда можно написать, что $\left|\sum\limits_{m \geqslant A}^{m \leqslant B} \dfrac{\rho_m}{n}\right| < \dfrac{M}{n}\sum 1$, причем единицу нужно повторить столько раз слагаемым, сколько слагаемых заключается в нашей сумме. Число их приблизительно равно разности пределов, т. е.:

$$B - A = \left(\beta - \alpha\right)\sqrt{2pqn};$$

так как β, α, p, q числа заданные, то и можно сказать, что число слагаемых равно $k\sqrt{n}$, так что:

$$\left|\sum_{m\geqslant A}^{m\leqslant B}\frac{\rho_m}{n}\right|<\frac{M\cdot k}{\sqrt{n}}\,^{*)},$$

а потому, таким образом:

$$\sum_{m\geqslant A}^{m\leqslant B}\frac{\rho_m}{n}=\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$$

где ϑ есть некоторое число, заключающееся в конечных пределах. На основании этих замечаний сумму P представим в виде:

$$P=\sum_{m\geqslant A}^{m\leqslant B}\frac{e^{-\left(\frac{m-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}+\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}. \qquad (Y)$$

Вспомним теперь формулу *Эйлера*. Она пишется следующим образом:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b}f(n)=$$
$$=\int\limits_a^b f(u)du+v_0(b)f(b)-v_0(a)f(a)-\int\limits_a^b v_0(u)f'(u)du, \qquad (Y')$$

где $v_0(u)=E(u)-u+\dfrac{1}{2}$ и $|v_0(u)|<\dfrac{1}{2}\,^{**)}$.

Положим, что $f'(u)$ не меняет знака, т. е. иначе положим, что $f(u)$ в пределах интегрирования или постоянно возрастает, или же постоянно убывает. Но в этом случае к интегралу $\int\limits_a^b v_0(u)f'(u)du$

---

*) В тексте: вместо M написано A.

**) В тексте: Eu.

можно применить теорему о среднем значении и написать равенство:

$$\int_a^b v_0(u)f'(u)du = \frac{\vartheta}{2}\int_a^b f'(u)du,$$

где $|\vartheta| < 1$ вследствие условия $|v_0(u)| < \dfrac{1}{2}$ Выполняя интегрирование в правой части, получим:

$$\int_a^b v_0(u)f'(u)du = \frac{\vartheta}{2}[f(b) - f(a)].$$

Соединяя три последние члена формулы (Y') и замечая, что $|v_0(a)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $|v_0(b)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ и $|\vartheta| < 1$,мы можем написать, что:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(u)du + v_0(b)f(b) + \tau[f(a) + f(b)],\ |\tau| \leqslant 1\,.$$

Применяя эту формулу к сумме $\displaystyle\sum_{m\geqslant A}^{m\leqslant B} \frac{e^{-\left(\frac{m-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}$, получим равенство:

$$\sum_{m\geqslant A}^{m\leqslant B} \frac{e^{-\left(\frac{m-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}} = \int_A^B \frac{e^{-\left(\frac{n-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}du + \frac{\delta}{\sqrt{n}},$$

в котором δ конечное число [*]).

На основании формулы (Y) мы напишем, что:

$$P = \int_A^B \frac{e^{-\left(\frac{u-np}{\sqrt{2pqn}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}du + \frac{\rho}{\sqrt{n}},$$

---

[*]) В тексте в знаменателе дроби в левой части равенства отсутствует корень: $2\pi pqn$

где ρ некоторое конечное число. Введем теперь новую переменную t по равенству:

$$t = \frac{u - np}{\sqrt{2pqn}}.$$

Когда $u = A = np + \alpha\sqrt{2pqn}$, то $t = \alpha$; когда же $u = B = np + \beta\sqrt{2pqn}$, то $t = \beta$ а потому:

$$P = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt + \frac{\rho}{\sqrt{n}}\ ^{*)},$$

так как $du = \sqrt{2pqn}\, dt$ и, наконец:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt + \frac{\rho}{\sqrt{n}}.$$

Эта последняя формула носит название формулы *Лапласа*. Полученная формула имеет важное практическое значение, т. к. существуют таблицы значений интеграла $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt$ и потому, полагая приближенно:

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt\ ^{**)},$$

легко и просто определяет приближенное значение вероятности P. Дополнительным членом пренебрегают, так как хотя ρ конечная величина, тем не менее, нельзя указать каких-нибудь даже грубых пределов. Это есть единственный недостаток формулы Лапласа. Второе значение формулы Лапласа состоит в том, что при помощи ее можно доказать весьма важную теорему Бернулли, к которой мы и переходим.

*) В тексте: e^{-t}.

**) В тексте: знак $\neq$.

Лекция 8

Теорема Бернулли

Бернулли заметил, что между числом испытаний n, числом появлений события m и вероятностью появления события p существует тесная связь, именно разность $\frac{m}{n}-p$ с увеличением n уменьшается и может быть сделана сколь угодно малой, т. е. $\left(\frac{m}{n}-p\right) < \varepsilon$ при весьма большом числе испытаний. *Бернулли* поставил вопрос: какова вероятность P осуществления неравенства $\left(\frac{m}{n}-p\right) < \varepsilon$ при весьма большом числе испытаний, другими словами: **какова вероятность предположения, что число появлений события A заключается в границах:**

$$np - \varepsilon n < m < np + \varepsilon n.$$

Точного выражения вероятности P Бернулли не нашел, но указал, что **всегда можно указать такое число испытаний n_0, что начиная с этого числа испытаний, т. е. при всяком $n > n_0$, вероятность P удовлетворяет условию $P > 1-\eta$, где η произвольно малое заданное число, т. е. вероятность P при увеличении n стремится к единице.**

Докажем по способу Лапласа теорему Бернулли. Полагая, что $np - \varepsilon n = A$ и $np + \varepsilon n = B$, мы представим искомую вероятность P в виде:

$$P = \sum_{m \geqslant A}^{m \leqslant B} P_{mn}.$$

В основание своего доказательства Лаплас положил следующую очевидную теорему (I):

Если $A \leqslant m \leqslant B$ и соответствующая вероятность равна P, то называя через P_0 вероятность, соответствующую границам $A_0 \leqslant m \leqslant B_0$, где $B_0 \leqslant B$ и $A_0 < A$, можем утверждать, что $P \geqslant P_0$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить значение вероятностей P и P_0 выражаемых суммами:

$$P = \sum_{m \geqslant A}^{m \leqslant B} P_{mn} \quad \text{и} \quad P_0 = \sum_{m \geqslant A_0}^{m \leqslant B_0} P_{mn}.$$

Первая сумма содержит, кроме слагаемых, принадлежащих ко второй сумме, еще другие слагаемые, так как пределы A_0 и B_0 во второй сумме взяты точнее, нежели в первой сумме. Может, конечно, случиться, что обе суммы будут равны между собой.

Мы имеем приближенное значение вероятности P_0 в том случае, когда

$$A_0 = np + \alpha\sqrt{2pqn} \text{ и } B_0 = np + \beta\sqrt{2pqn}\,.$$

Числа α и β нужно только так подобрать, чтобы имело место неравенство: $A_0 \geqslant A$ и $B_0 \leqslant B$ [*], начиная с некоторых значений n.

Получаем условия:

$$np + \beta\sqrt{2pqn} \leqslant np + \varepsilon n$$

и

$$np + \alpha\sqrt{2pqn} \geqslant np - \varepsilon n,$$

или иначе:

$$\left.\begin{aligned} \beta\sqrt{2pqn} &\leqslant +\varepsilon n \\ \text{и } \alpha\sqrt{2pqn} &\geqslant -\varepsilon n \end{aligned}\right\}. \qquad (O)$$

[*] В тексте: $B_0 \geqslant B$.

Полученные неравенства показывают, что α и β можно выбирать совершенно произвольно всегда, начиная с некоторых значений n условия будут выполнены. — В самом деле, из первого неравенства следует: $n \geqslant \dfrac{\beta^2 2pq}{\varepsilon^2}$. — Из второго неравенства следует: $n \geqslant \dfrac{\alpha^2 2pq}{\varepsilon^2}$ [*)].

Предполагая для большей простоты, что $-\alpha = \beta = a$, мы заменим оба неравенства одним

$$n \geqslant \frac{a^2 2pq}{\varepsilon^2}\ ^{**)}.$$

Обозначая $n_0 = \dfrac{a^2 2pq}{\varepsilon^2}$, можем утверждать, что вероятность P больше и не равна P_0 при $n > n_0$, где P_0 выражается формулой Лапласа

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-a}^{+a} e^{-t^2}\,dt + \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

Получаем, таким образом, неравенство

$$P > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-a}^{+a} e^{-t^2}\,dt + \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

при условии, что $n > n_0$, где $n_0 = \dfrac{a^2 2pq}{\varepsilon^2}$ и a совершенно произвольное положительное число.

Покажем теперь, что выражение, стоящее в правой стороне нашего равенства, сколь угодно мало отличается от единицы. В самом

[*)] В тексте: $n \geqslant \dfrac{\beta^2 2pq}{2pq\varepsilon^2}$ и $n \geqslant \dfrac{\alpha^2 2pq}{2pq\varepsilon^2}$.

[**)] В тексте неразборчиво и с ошибками.

деле:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-a}^{+a} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{a} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a}^{\infty} e^{-t^2}dt =$$
$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a}^{\infty} e^{-t^2}dt \text{ *)}.$$

Последний интеграл очень мало отличается от нуля даже при средних значениях a. Итак,

$$P \geqslant 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a}^{\infty} e^{-t^2}dt + \frac{\delta}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Так как a и n числа достаточно большие, то все выражение, стоящее в правой части последнего равенства, очень мало отличается от единицы. Мы могли бы даже указать, на сколько оно отличается от 1, если бы δ было нам известно. Заметим, что $\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$ можно положить отрицательным; если бы $\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$ было положительным, то можно было бы его просто отбросить. Обозначив через η сколь угодно малое число, мы можем всегда a и n так подобрать, чтобы были выполнены условия

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a}^{\infty} e^{-t^2}dt < \frac{\eta}{2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right| < \frac{\eta}{2}.$$

Последнего условия мы не можем осуществить на практике, так как границы, в которых заключается δ, нам неизвестны. Однако из предыдущего нам точно известно, что такие границы, не зави-

*) В тексте: вместо нижнего предела a в последних двух интегралах написан 0 и в левой части равенства нет множителя $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

сящие от n, существуют. Обозначим верхнюю границу численных значений δ через M, тогда и условие $\left|\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right| < \frac{M}{\sqrt{n}}$; $\left|\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\varepsilon} - h$ будет выполнено, если $\frac{M}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\eta$ или $n > \frac{4M^2}{\eta^2}$. — На основании сказанного можем утверждать, что действительно существует такое число испытаний n_1, начиная с которого вероятность P удовлетворяет условию $P > 1 - \eta$ при $n > n_1$.

Таким образом, теорема Бернулли доказана. Заметим, что на практике в высшей степени важно знать, чему должно равняться число испытаний, при котором имеет место неравенство: $P > 1-\eta$, чтобы мы могли ожидать осуществления сделанного предположения с вероятностью, почти равной достоверности.

Пример. В сосуде находится два белых и три черных шара. Из сосуда вынимаем шар, замечаем его цвет и бросаем обратно в сосуд — это одно испытание. Требуется определить число испытаний, достаточное для того, чтобы утверждать с вероятностью, превосходящей 0,999, что отношение между числом появлений белого шара и числом испытаний будет отличаться от вероятности появления белого шара при каждом испытании не больше, чем на $\frac{1}{50}$.

Замечая, что в данном случае $p = \frac{2}{5}$, по условию вопроса имеем, что:

$$P > 0,999 \text{ и } \left|m - \frac{2}{5}\right| \leqslant \frac{1}{50}.$$

Бернулли показал, что достаточное число испытаний будет 25550. Решим эту же задачу по способу *Лапласа*, только положим, что число n известно и равно 25550, а ищем вероятность P. Заметим, что теперь имеем следующие данные:

$$p = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{3}{5}, \quad \varepsilon = \frac{1}{50}, \quad n = 25550.$$

На основании этих данных неравенство $pn - \varepsilon n \leqslant m \leqslant pn + \varepsilon n$ перепишется в виде:

$$\frac{2}{5}n - \frac{1}{50}n \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}n + \frac{1}{50}n.$$

Для определения β на основании формулы (O) имеем равенство:

$$\frac{1}{50}n = \beta\sqrt{2pqn},$$

откуда

$$\beta = \frac{n}{50\sqrt{2pqn}} = \frac{\sqrt{n}}{50\sqrt{2pq}} = \frac{\sqrt{25550}}{50 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{25550}}{20\sqrt{3}}$$

и β приближенно равняется 4,61. Тогда $\alpha = -\beta = -4{,}61$ и приближенно

$$P \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{4{,}61} e^{-t^2}\,dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{4{,}61}^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Последний интеграл вычисляется по таблицам, составленным академиком *Марковым*, и равен 0,000 000 000 06. Тогда:

$P \approx 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0{,}000\,000\,000\,06$

или $P \approx 1 - 0{,}000\,000\,000\,07$,

и, наконец, $P \approx 0{,}999\,999\,999\,93$.

У Бернулли $P \approx 0{,}999$,

у Лапласа $P \approx 0{,}999\,999\,999\,93$.

Какая из этих формул ближе к истине, мы не можем сказать без дополнительных специальных исследований. *Poisson* обобщил теорему Бернулли на тот случай, когда при каждом испытании вероятность появления события изменяется, например, при первом испытании вероятность появления события A равна p_1, при втором p_2 и, наконец, при n-м испытании равна p_n, тогда с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний n отношение между числом m появлений данного события при этих n испытаниях и числом испытаний будет сколь угодно мало отличаться от среднего арифметического

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}$$

из вероятностей появления события A при всех n испытаниях.

Теорема Пуассона представляет собой лишь частный случай этой чрезвычайно важной [теоремы] *), открытой русским математиком Чебышевым, которая получила название закона больших чисел. Исследования Чебышева обоснованы и вводят в теорию вероятностей новые понятия и методы **).

*) Слово «теоремы» пропущено.

**) В оригинале: «Исследования Чебышева основаны и введены в теорию вероятностей новых понятий и методов».

Лекция 9

О математическом ожидании величин

Понятие о математическом ожидании величин, которые могут получать при различных условиях различные значения, возникло при решении различных задач теории вероятностей, и было известно давно. Заслуга Чебышева заключается в использовании свойств математических ожиданий и применении их к решению труднейших вопросов теории вероятностей.

Рассмотрим один пример.

В одном сосуде a белых и b черных шаров, а в другом сосуде m белых и n черных шаров. Из первого сосуда вынимаем один шар и, не определяя его цвета, бросаем во второй сосуд. Требуется определить, какова вероятность того, что из второго сосуда будет вынут белый шар. Мы эту задачу решали раньше.

Оказалось, что:

$$P = \frac{m + \frac{a}{a+b}}{m+n+1}\,,$$

а дробь $\dfrac{a}{a+b}$, появившаяся в числителе дроби, выражающей P, называется *математическим ожиданием* появления белого шара из первого сосуда.

Из этого примера видно, что математическое ожидание в простейшем случае равно вероятности. Обобщим понятие о математическом ожидании.

Пусть X будет некоторая величина, могущая принять в зависимости от различных условий одно из следующих значений: $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$; причем одно из этих значений величина X непременно должна получить, но какое неизвестно. Появление каждой из величин $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ имеет некоторую вероятность. Обозначим эти вероятности через $p_1,\ p_2,\ \ldots, p_n$. Так как появление каждого из значений $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ величины X события единственно возможные и несовместные, то должно существовать равенство:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Математическим ожиданием величины X условились называть следующую сумму:

$$\text{Мат. ож.}\, X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Понятие о математическом ожидании применяется и к постоянным величинам, тогда $X = x$, $p = 1$ и Мат. ож. $X = X$.

Пример I. Предположим, что некоторая лотерея состоит из 200 билетов, из которых один билет выигрывает 50 рублей и 5 билетов по 20 рублей. Билет лотереи стоит 1 рубль. Спрашивается, чему равно математическое ожидание барыша для лица, взявшего один билет в этой лотерее. Если лицо выигрывает 50 руб., то барыш, который получает это лицо, равен 49 руб., так как 1 рубль стоит билет, при выигрыше в 20 руб. барыш составляет 19 руб. и, наконец, при проигрыше барыш равен −1 рублю. Выигрыш в 50 руб. даст только один билет, а поэтому вероятность барыша в 49 руб. равна $\frac{1}{200}$; билетов, дающих выигрыш в 20 руб., — пять, а потому вероятность барыша в 19 руб. равна $\frac{5}{200}$ и, наконец, билетов, приводящих к проигрышу, 194, а потому вероятность барыша в −1 руб.[*] равна $\frac{194}{200}$. Итак:

$$x_1 = 49,\ x_2 = 19,\ x_3 = -1,\ p_1 = \frac{1}{200},\ p_2 = \frac{5}{200},\ p_3 = \frac{194}{200},$$

а потому:

[*] В тексте: 1 руб.

Мат. ож. $X = 49 \cdot \frac{1}{200} + 19 \cdot \frac{5}{200} - 1 \cdot \frac{194}{200} = -\frac{1}{4}$ [*]).

Практика показала, что при большом числе испытаний результат испытаний оказывается весьма близким к тому, который получился бы, если вместо различных значений величины X появилось бы математическое ожидание X

Например, лицо, участвовавшее 100 раз в выше приведенной лотерее, должно ожидать убытка примерно в 25 руб., если только изложенное выше правило верно. Исследования *Чебышева* показали, что вероятность осуществления этого предположения весьма близка к достоверности, если только число испытаний достаточно велико.

Пример II. Имеется n сосудов, причем

в	1-м	сосуде	a_1	белых и	b_1	черных	шаров
во	2-м	»	a_2	»	» b_2	»	»
...	...	...	...	...	...	...	...
в	n-м	»	a_n	»	» b_n	»	»

Кроме того, имеем отдельно стоящий сосуд, в котором находим ϑ белых и s черных шаров. Вынимаем из первого сосуда шар и, не определяя его цвета, бросаем его в сосуд отдельно стоящий, затем вынимаем шар из второго сосуда и, тоже не определяя цвета, бросаем в сосуд отдельно стоящий, ... и, наконец, из n-го сосуда вынимаем шар и, не определяя цвета, бросаем в сосуд стоящий отдельно. После этого вынимаем шар из сосуда, стоящего отдельно, спрашивается, какова вероятность, что вынутый шар будет белым.

Покажем, что вероятность P появления белого шара выразится следующим образом:

$$P = \frac{\vartheta + \text{Мат. ож. } X}{\vartheta + s + n},$$

*) В тексте: $\frac{1}{4}$.

где X есть величина, значения которой равны всем возможным комбинациям числа белых шаров, которые могли быть брошены в отдельно стоящий сосуд.

В самом деле, имеем n сосудов, вынимаем из каждого сосуда по шару, а бросаем их в отдельно стоящий сосуд. Тогда в нем окажется всего $\vartheta + s + n$ шаров; зная, сколько мы подбросили белых шаров, мы нашу задачу разрешили бы очень легко; в действительности это же нам неизвестно, и потому мы должны вести наши рассуждения следующим образом. Относительно числа белых шаров, вынутых из n сосудов, можем сделать следующие $n+1$ предположения:

$$\left.\begin{array}{cccccccc} \text{из} & n & \text{сосудов} & \text{вынуто} & 0 & \text{белых} & \text{шаров,} \\ \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 1 & \text{»} & \text{»,} \\ \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 2 & \text{»} & \text{»,} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & n & \text{»} & \text{».} \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

Рассматривая каждое вынимание шара из сосуда как одно испытание и замечая, что через P_{mn} мы обозначали ранее вероятность того, что при n испытаниях появилось наше событие m раз, мы можем написать, что P_{0n}; P_{1n}; P_{2n}; $\ldots$; P_{mn} есть соответствующие вероятности, отвечающие событиям (α) Как вычислить такого рода вероятности, мы указали раньше, а потому теперь будем считать величины $P_{0n}, P_{1n}, \ldots, P_{mn}$ известными. Вероятность того, что из n сосудов вынуто 0 шаров, а из отдельного сосуда вынут белый шар, выразится на основании принципа умножения вероятностей через $P_{0n} \cdot \dfrac{\vartheta}{\vartheta + s + n}$. Вероятность того, что из n сосудов вынут 1 белый шар и, кроме того, из отдельно стоящего сосуда тоже вынут белый шар, выразится как: $P_{1n} \cdot \dfrac{\vartheta + 1}{\vartheta + s + n}$ и т. д. и, наконец, вероятность того, что из n сосудов вынуто n шаров и из отдельно стоящего сосуда тоже вынут белый шар, выразится $P_{nn} \cdot \dfrac{\vartheta + n}{\vartheta + s + n}$ [*]. Называя через P вероятность появления белого шара при условиях задачи, мы на основании принципа сложения вероятностей можем написать, что:

$$P = P_{0n} \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta + s + n} + P_{1n} \cdot \frac{\vartheta + 1}{\vartheta + s + n} + \ldots + P_{nn} \cdot \frac{\vartheta + n}{\vartheta + s + n}.$$

Все величины в правой части последнего равенства нам известны, а потому и P величина известная. Приводя правую часть к общему знаменателю и преобразуя соответствующим образом числителя, мы придем к следующему равенству:

$$P = \frac{\vartheta\,(P_{0n} + P_{1n} + \ldots + P_{nn}) + 0 \cdot P_{0n} + 1 \cdot P_{1n} + \ldots + n \cdot P_{nn}}{\vartheta + s + n}.$$

Но так как мы имеем дело с событиями единственно возможными и несовместными, то $P_{0n} + P_{1n} + \ldots + P_{nn} = 1$, а потому:

$$P = \frac{\vartheta + 0 \cdot P_{0n} + 1 \cdot P_{1n} + \ldots + n \cdot P_{nn}}{\vartheta + s + n}. \qquad (\beta)$$

Введем теперь в рассмотрение математическое ожидание числа белых шаров, вынутых из n сосудов. Обозначая число белых шаров, вынутых из n сосудов, через X, мы скажем, что X может получить одно из следующих значений: 0, 1, 2, ..., n, причем соответствующие вероятности равны: P_{0n}, P_{1n}, ..., P_{nn}.

По определению математического ожидания можем написать, что:

$$\text{Мат. ож.}\, X = 0 \cdot P_{0n} + 1 \cdot P_{1n} + \ldots + n \cdot P_{nn},$$

а потому формула (β) перепишется в виде:

$$P = \frac{\vartheta + \text{Мат. ож.}\, X}{\vartheta + s + n},$$

что и требовалось доказать.

[*] В тексте был потерян множитель P_{nn}.

Перейдем теперь к выводу некоторых лемм, относящихся к свойствам математического ожидания. Введем потому в рассмотрение две величины: X и Y. Пусть каждая из них может принимать единственно возможные и несовместные значения, вероятности которых известны, так что X может получить значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$, вероятности которых равны

$$(x_1)\,,\,(x_2)\,,\ldots,(x_m)\,,\quad \text{где}\quad (x_1)+(x_2)+\ldots+(x_m)=1,$$

а Y может получать значения $y_1,\ y_2,\ \ldots\ ,\ y_n$, вероятности которых равны $(y_1)\,,\ (y_2)\,,\ \ldots\ ,\ (y_n)$, где $(y_1)+(y_2)+\ \ldots+(y_n)=1$.

Тогда

$$\text{Мат. ож.}\, X = (x_1)\,x_1 + (x_2)\,x_2 + \ldots + (x_m)\,x_m = \sum_{i=1}^{m} x_i\,(x_i),$$

$$\text{Мат. ож.}\, Y = \left(y_1\right) y_1 + \left(y_2\right) y_2 + \ldots + \left(y_n\right) y_n = \sum_{j=1}^{n} y_j\,\left(y_j\right).$$

Докажем теперь следующую лемму.

<u>**Лемма I.**</u> Математическое ожидание суммы величин X и Y равно сумме математических ожиданий величин X и Y, т. е.

$$\text{Мат. ож.}\,(X+Y) = \text{Мат. ож.}\,X + \text{Мат. ож.}\,Y.$$

Мы знаем, что X и Y суть символы, которые при известных условиях получают различные значения. Посмотрим теперь, что нужно подразумевать под суммой $(X+Y)$. По *Чебышеву* сумма эта выражает сумму всех возможных комбинаций значений X и Y, т. е. сумму слагаемых вида $x+y$, где $i=1,\,2,\ldots,\,m$ комбинируется всеми возможными способами с $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, всех слагаемых будем иметь mn. Слагаемое x_i+y_j [*)] показывает на одновременное появление двух чисел x_i и y_j, а потому вероятность появления суммы x_i+y_j [**)] есть вероятность одновременного осуществления

[*)] В тексте : $x_i + y_i$.

[**)] В тексте : $x_i + y_i$.

двух предположений: X получило значение x и Y получило значение y, и вычисляется очень легко: она равняется вероятности одного предположения, умноженной на вероятность второго предположения, вычисленную при условии, что первое предположение оправдалось. Обозначим вероятность эту $\left(x_i y_j\right)$. На основании определения математического ожидания можем написать, что:

$$\text{Мат. ож.}\,(X+Y)=\sum_i^m\sum_j^n\left[x_i y_j\right]\cdot\left(x_i y_j\right),$$

где $i=1,\,\ldots,\,m$ комбинируется всеми возможными способами с $j=1,\,\ldots,\,n$ или где:

$$\text{Мат. ож.}\,(X+Y)=\sum_i^m\sum_j^n x_i\left(x_i y_j\right)+\sum_j^n\sum_i^m y_j\left(x_i y_j\right). \qquad \text{(I)}$$

Рассмотрим сначала сумму $\sum x_i\left(x_i y_j\right)$ [*]. Давая значения 1, 2, 3, ..., n, мы получим сумму:

$$\sum_i^m x_i\left[(x_i y_1)+(x_i y_2)+\ldots+(x_i y_n)\right]\ ^{**)}.$$

Мы видим, что x_i комбинируется сначала с y_1, потом с y_2 и т. д., и, наконец, с y_n. Все эти комбинации события несовместные, а потому сумма, стоящая в квадратных скобках, на основании теоремы о сложении вероятностей представляет вероятность появиться одной из комбинаций

$$x_i y_1,\ x_i y_2,\ \ldots\ , x_i y_n.$$

Замечая далее, что $y_1,\ y_2,\ \ldots\ ,\ y_n$ единственно возможные значения Y, мы можем написать, что в случае, если X примет значение x_i, вероятность появления одной из выше написанных комбинаций

[*] В тексте: $\sum x_i\,(x_i y_i)$.

[**] В тексте вместо y_1 написано y_i.

будет равна вероятности появления значения x_i, т. е. (x_i). Таким образом, получаем формулу:

$$(x_i y_1) + (x_i y_2) + \ldots + (x_i y_n) = (x_i)$$

<...>[*]. [Подставляя вместо] i значения $1, \ldots, m$, мы и можем написать:

$$\sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} x_i \left(x_i y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(x_i\right)^{**)}.$$

Рассуждая таким же образом, мы можем доказать, что:

$$\sum_{j}^{n} \sum_{i}^{m} y_j \left(x_i y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(y_j\right)^{***)}.$$

Но на основании определения математического ожидания:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ (x_i) = \text{Мат. ож.}\, X \quad \text{и}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \left(y_j\right) = \text{Мат. ож.}\, Y, \quad \text{а потому:}$$

$$\sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} x_i \left(x_i y_j\right) = \text{Мат. ож.}\, X \quad \text{и}$$

$$\sum_{j}^{n} \sum_{i}^{m} y_j \left(x_i y_j\right) = \text{Мат. ож.}\, Y$$

и, наконец, на основании формулы (I) будем иметь, что:

$$\text{Мат. ож.}\, (X + Y) = \text{Мат. ож.}\, X + \text{Мат. ож.}\, Y,$$

что и требовалось доказать.

---

[*] Текст частично утрачен.

[**] В тексте верхний предел первой суммы в левой части равенства указан неверно: n.

[***] В тексте нижний предел первой суммы в левой части равенства указан неверно: i.

Эту лемму можно обобщить на сколько угодно слагаемых, так что, если X_1, X_2, ..., X_n рассматриваемые величины, то существует равенство:

$$\text{Мат. ож. } (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$$
$$= \text{Мат. ож. } X_1 + \text{Мат. ож. } X_2 + \ldots + \text{Мат. ож. } X_n.$$

Применим эту теорему к решению примера II. Там мы вывели следующую формулу:

$$P = \frac{\vartheta + \text{Мат. ож. } X}{\vartheta + s + n},$$

где X возможное число белых шаров, появившихся из n сосудов. Это X есть сумма отдельных переменных величин X_1, X_2, ..., X_n, где X_1 есть возможное число белых шаров, появившихся из первого сосуда, X_2 — из второго сосуда и т. д.

Но из каждого сосуда можно вынуть или один белый шар, или же 0 белых шаров, а потому величины X_1, X_2, ..., X_n могут принимать или значение 1 или же значение 0. Вероятность непоявления[*)] белого шара из первого сосуда равна $\dfrac{b_1}{a_1 + b_1}$, а потому:

$$\text{Мат. ож. } X_1 = 1 \cdot \frac{a_1}{a_1 + b_1} + 0 \cdot \frac{b_1}{a_1 + b_1} = \frac{a_1}{a_1 + b_1}.$$

Точно так же находим:

$$\text{Мат. ож. } X_2 = \frac{a_2}{a_2 + b_2}, \ \text{Мат. ож. } X_3 = \frac{a_3}{a_3 + b_3}, \ldots,$$
$$\text{Мат. ож. } X_n = \frac{a_n}{a_n + b_n}.$$

Но $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, а потому на основании Леммы I можно написать, что:

$$\text{Мат. ож. } X = \text{Мат. ож. } X_1 + \text{Мат. ож. } X_2 + \ldots + \text{Мат. ож. } X_n,$$

[*)] В тексте: появления.

и, подставляя соответствующие значения в последнем равенстве, получим, что:

$$\text{Мат. ож.}\, X = \frac{a_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2}{a_2+b_2} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+b_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+b_i}.$$

Теперь, наконец, будем иметь

$$P = \frac{\vartheta + \text{Мат. ож.}\, X}{\vartheta + s + n} = \frac{\vartheta + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+b_i}}{\vartheta + s + n}.$$

Итак, наша задача решена.

При доказательстве Леммы I мы не делали никаких предположений относительно величин X и Y, а теперь положим, что величины X и Y независимы, и докажем следующую лемму.

Лемма II. Если величины X и Y независимы друг от друга, то математическое ожидание произведения этих величин равно произведению их математических ожиданий, т. е.:

$$\text{Мат. ож.}\ (X \cdot Y) = \text{Мат. ож.}\, X \cdot \text{Мат. ож.}\, Y.$$

Пусть X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а Y — $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Называя соответствующие вероятности через (x_1), $(x_2), \ldots,$ (x_m) *), (y_1), (y_2), ... , (y_n), можем написать, что:

$$\text{Мат. ож.}\, X = \sum_{i=1}^{m} (x_i)\, x_i\,, \tag{I}$$

$$\text{Мат. ож.}\ Y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, (y_j)\,. \tag{II}$$

Под произведением XY будем разуметь символ, значения которого равны всевозможным произведениям $x_i\, y_j$ **), $i = 1, \ldots, m$ комбинируется всевозможными способами с $j = 1, \ldots, n$ так, что

*) В тексте: (x_n)

**) В тексте: xy

всех значений $x_i\, y_j$ будет $m\, n$. Обозначая вероятность комбинаций x_i и y_j через $\left(x_i\, y_j\right)$, мы можем написать, что:

$$\text{Мат. ож. } XY = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j \cdot \left(x_i\, y_j\right)\ ^{*)}.$$

Но события X и Y величины, независимые друг от друга, то потому $\left(x_i\, y_j\right) = (x_i) \cdot \left(y_j\right)$, так что:

$$\text{Мат. ож. } XY = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j \cdot \left(x_i\, y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\ (x_i) \cdot y_j\ \left(y_j\right)\ ^{**)}.$$

Давая сначала i некоторое определенное значение, а j меняя от 1 до n, можем написать, что:

$$\sum_{j=1}^{n} x_i\ (x_i) \cdot y_j\ \left(y_j\right) = x_i\ (x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j\ \left(y_j\right)\ .$$

На основании формулы (II) мы будем иметь, что:

$$\sum_{j=1}^{n} x_i\ (x_i) \cdot y_j\ \left(y_j\right) = x_i\ (x_i) \cdot \text{Мат. ож. } Y.$$

Меняя теперь i от 1 до m, мы и получим, что:

$$\text{Мат. ож. } XY = \sum_{i=1}^{m} x_i\ (x_i) \cdot \text{Мат. ож. } Y,$$

или на основании формулы (I) мы напишем, что:

$$\text{Мат. ож. } XY = \text{Мат. ож. } X \cdot \text{Мат. ож. } Y,$$

что и требовалось доказать.

---

*) В тексте: $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_j \left(x_i \cdot y_j\right)$.

**) В тексте: $\sum\limits_{i=1}^{i=n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \left(x_i \cdot y_j\right)$.

Лемма II обобщается на сколько угодно независимых величин $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$, т. е. существует равенство:

$$\text{Мат. ож.}\, X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n = \text{Мат. ож.}\, X_1 \cdot \text{Мат. ож.}\, X_2 \cdot \ldots \cdot \text{Мат. ож.}\, X_n.$$

Для дальнейшего нам нужно вычислить математическое ожидание величины $(X-a)^2$, где a суть Мат. ож. X. Для этого поступаем следующим образом:

$$(X-a)^2 = X^2 - 2a\,X + a^2.$$

На основании I леммы будем иметь, что:

$$\text{Мат. ож.}\,(X-a)^2 = \text{Мат. ож.} X^2 - \text{Мат. ож.}\,(2a\,X) + \text{Мат. ож.}\,a^2. \qquad (\alpha)$$

Замечая, что X принимает значения $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ с соответствующими вероятностями (x_1), $(x_2), \ldots, (x_n)$, мы напишем, что:

$$\text{Мат. ож.}\, X^2 = x_1^2 \cdot (x_1) + x_2^2 \cdot (x_2) + \ldots + x_n^2 \cdot x_n.$$

Последнюю сумму для краткости обозначим через b так, что:

$$\text{Мат. ож.}\, X^2 = b. \qquad (\beta)$$

Замечая, что математическое ожидание постоянного равно самому постоянному и что Мат. ож. $X = a$, мы будем иметь, что:

$$\text{Мат. ож.}\,(2a\,X) = \text{Мат. ож.}\,2 \cdot \text{Мат. ож.} X \cdot \text{Мат. ож.}\,a = 2a^2 \qquad (\gamma)\ ^{*)}$$

и

$$\text{Мат. ож.}\,a^2 = a^2. \qquad (\delta)$$

На основании равенств (β) (γ) и (δ) формула (α) перепишется в виде:

$$\text{Мат. ож.}\ (X-a)^2 = b - 2a^2 + a^2 = b - a^2. \qquad (\kappa)$$

---

*) В тексте ошибочно написан знак «$+$»:
Мат. ож. $(2a\,X) =$ Мат. ож. $2 +$ Мат. ож. X Мат. ож. a

Пусть имеем теперь две величины X_1 и X_2, причем:

$$\left.\begin{aligned}\text{Мат. ож.}\, X_1 = a_1,\ \text{Мат. ож.}\, X_1^2 = b_1\\ \text{Мат. ож.}\, X_2 = a_2,\ \text{Мат. ож.}\, X_2^2 = b_2\end{aligned}\right\}. \qquad (\rho)$$

Найдем теперь: Мат. ож. $(X_1 + X_2 - a_1 - a_2)^2$. Для этого поступим так: $(X_1 + X_2 - a_1 - a_2)^2 = [(X_1 - a_1) + (X_2 - a_2)]^2 = (X_1 - a_1)^2 + 2(X_1 - a_1)(X_2 - a_2) + (X_2 - a_2)^2$, а потому:

$$\text{Мат. ож.}\ (X_1 + X_2 - a_1 - a_2)^2 = \text{Мат. ож.}\ (X_1 - a_1)^2 + \\ + 2\,\text{Мат. ож.}\ (X_1 - a_1)\,(X_2 - a_2) + \text{Мат. ож.}\ (X_2 - a_2)^2. \qquad (\xi)$$

Вычислим теперь Мат. ож. $(X_1 - a_1)\,(X_2 - a_2)$

$$(X_1 - a_1)\,(X_2 - a_2) = X_1X_2 - X_1a_2 - X_2a_1 + a_1a_2.$$

Полагая, что величины X_1 и X_2 независимы друг от друга, мы можем написать, что:

$$\text{Мат. ож.}\ (X_1 - a_1)\,(X_2 - a_2) = \text{Мат. ож.}\, X_1X_2 - \text{Мат. ож.}\ X_1a_2 -$$

$$- \text{Мат. ож.}\ X_2a_1 + \text{Мат. ож.}\, a_1a_2 = \text{Мат. ож.}\, X_1 \cdot \text{Мат. ож.}\, X_2 -$$

$$- \text{Мат. ож.}\, X_1a_2 - \text{Мат. ож.}\ X_2a_1 + \text{Мат. ож.}\, a_1a_2,$$

или на основании формулы (ρ) будем иметь, что:

$$\text{Мат. ож.}\ (X_1 - a_1)\,(X_2 - a_2) = a_1a_2 - a_1a_2 - a_2a_1 + a_2a_1 = 0.$$

Итак, Мат. ож. $(X_1 - a_1)\,(X_2 - a_2) = 0$.

На основании формулы (κ)

$$(X_1 - a_1)^2 = b_1 - a_1^2 \quad \text{и} \quad (X_2 - a_2)^2 = b_2 - a_2^2.$$

Тогда формула (ξ) перепишется следующим образом:

$$\text{Мат. ож.}\ (X_1 + X_2 - a_1 - a_2)^2 = \left(b_1 - a_1^2\right) + \left(b_2 - a_2^2\right)$$

Рассматривая 3 независимых величины, увидим, что в правой части прибавится еще одно слагаемое, и, наконец, положив, что рассматривается n независимых величин $X_1 X_2, \ldots, X_n$, для которых:

$$\begin{gathered}\text{Мат. ож. } X_1 = a_1, \text{ Мат. ож. } X_1^2 = b_1,\\ \text{Мат. ож. } X_2 = a_2, \text{ Мат. ож. } X_2^2 = b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \text{Мат. ож. } X_n = a_n, \text{ Мат. ож. } X_n^2 = b_n,\end{gathered}$$

мы увидим, что:

$$\text{Мат. ож. } (X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)^2 = \\ = \left(b_1 - a_1^2\right) + \left(b_2 - a_2^2\right) + \ldots + \left(b_n - a_n^2\right).$$

Заметим, что равенство Мат. ож. $(X - a)^2 = b - a^2$ указывает на связь между величинами a и b. В самом деле, математическое ожидание всегда положительно [*)], а потому $b - a^2 \geqslant 0$, т. е. $a^2 \leqslant b$ или $|a| \leqslant \sqrt{b}$. Из этого неравенства мы видим, что, ограничивая математическое ожидание квадрата данной величины, мы одновременно ограничим математическое ожидание самой величины; но, ограничивая математическое ожидание нашей величины, мы не ограничим математическое ожидание квадрата нашей величины.

III лемма Чебышева. Пусть рассматривается одна величина X, получающая только положительные значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$, вероятности которых $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ известны. Математическое ожидание X обозначим через a, тогда

$$a = x_1 (x_1) + x_2 (x_2) + \ldots + x_m (x_m).$$

Предположим, что t — число, произвольно взятое и притом больше единицы. При этих условиях лемма III может быть сформулирована следующим образом:

---

*) Вернее, Мат. ож. $(X - a)^2$ всегда неотрицательно.

Вероятность P предположения, что X получает значение, которое меньше at^2, всегда больше $1 - 1/t^2$.

Для простоты доказательства этой леммы будем полагать, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ расположены в порядке их возрастания, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m$. Разделим теперь все эти значения на такие две группы, чтобы к одной группе принадлежали все значения, меньшие произведения at^2, а к другой группе все значения, большие или равные произведению at^2 и пусть:

$$\text{значения } x_1, x_2, \ldots, x_l \text{ будут} < at^2;$$

$$x_{l+1} \geqslant at^2, \quad x_{l+2} \geqslant at^2, \quad \ldots, \quad x_m \geqslant at^2.$$

Покажем, что такие две группы непременно должны существовать. — Если бы первой группы не было, то имело бы место неравенство

$$x_i \geqslant at^2$$

при значениях $i = 1, 2, \ldots, m$. Умножая обе части этого неравенства [на] (x_i) и складывая полученные таким образом неравенства, в которых $i = 1, 2, \ldots, m$, получим неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\,(x_i) \leqslant at^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} (x_i)\ ^{*)}.$$

Замечая, что имеем дело с событиями единственно возможными и несовместными, и потому $\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i) = 1$ [**)], а с другой стороны по условию $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\,(x_i) = a$, мы представим полученное неравенство в виде: $a \geqslant at^2$, а т. к. $a > 0$, то $t^2 \leqslant 1$, что противоречит предположению.

Итак, мы видим, что, по крайней мере, должно существовать хоть одно число, принадлежащее к первой группе. — Если бы

---

*) В тексте: $\sum_{i=1}^{m} x_1\,(x_i) \leqslant at^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i$.

**) В тексте: $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

второй группы не было, то все $x_i < at^2$, где $i = 1, 2, \ldots, m$ и мы могли бы с достоверностью утверждать, что неравенство $X < at^2$, т. к. все возможные значения X по предположению этому неравенству удовлетворяют. В этом случае $P = 1$, именно очевидно, что к первой группе принадлежат случаи, благоприятствующие осуществлению неравенства $X < at^2$; ко второй же группе — случаи, неблагоприятствующие; поэтому вероятность предположения, что величина X получит значение, меньшее произведения at^2, выразится следующим образом:

$$P = (x_1) + (x_2) + \ldots + (x_l)\,. \qquad (\alpha)$$

Замечая, что имеем дело с событиями единственно возможными и несовместными, мы можем написать, что:

$$P = 1 - \left[\left(x_{l+1}\right) + \left(x_{l+2}\right) + \ldots + (x_m)\right]. \qquad (\beta)$$

Мы знаем, что

$$x_{l+1} \geqslant at^2, \quad x_{l+2} \geqslant at^2, \quad \ldots, \quad x_m \geqslant at^2,$$

а потому

$$\begin{gathered} x_{l+1}\left(x_{l+1}\right) \geqslant at^2\left(x_{l+1}\right), \\ x_{l+2}\left(x_{l+2}\right) \geqslant at^2\left(x_{l+2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m\,(x_m) \geqslant at^2\,(x_m)\,. \end{gathered}$$

Складывая почленно эти результаты, получим, что:

$$\begin{gathered} x_{l+1}\left(x_{l+1}\right) + x_{l+2}\left(x_{l+2}\right) + \ldots + x_m\,(x_m) \geqslant \\ \geqslant at^2\left[\left(x_{l+1}\right) + \left(x_{l+2}\right) + \ldots + (x_m)\right]. \end{gathered}$$

Если мы к левой части полученного неравенства прибавим $x_1\,(x_1) + x_2\,(x_2) + \ldots + x_l\,(x_l)$, то от этого неравенство не нарушится, и мы получим, что:

$$x_1\,(x_1) + \ldots + x_l\,(x_l) + x_{l+1}\left(x_{l+1}\right) + \ldots + x_m\,(x_m) \geqslant$$
$$\geqslant at^2\left[\left(x_{l+1}\right) + \ldots + (x_m)\right].$$

Заключая, что левая часть неравенства представляет математическое ожидание X, равное по условию a, а правая часть на основании формулы (β) представляется в виде $at^2\,[1-P]$, мы получаем неравенство: $a \geqslant at^2\,[1-P]$ или иначе $1 - P < \dfrac{1}{t^2}$ и, наконец, $P > 1 - \dfrac{1}{t^2}$.

Таким образом, лемма III доказана.

Лемма IV. Пусть величины $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, будут величины независимые друг от друга. Математические ожидания их обозначим соответственно через $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ и математические ожидания их квадратов через $b_1,\ b_2,\ \ldots, b_n$. Обозначая через P вероятность предположения, что:

$$|X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n| < t\sqrt{A_n}\ ^{*)},$$

где $A_n = b_1 - a_1^2 + b_2 - a_2^2 + \cdots + b_n - a_n^2$, где число t произвольно взятое и больше единицы, мы докажем, что всегда эта вероятность $P > 1 - \dfrac{1}{t^2}$.

Рассмотрим для доказательства нашей леммы величину:

$$[X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n]^2.$$

Так как значение этой величины всегда положительное, то мы и можем применить к ней лемму III. Замечая, как мы раньше показали,

$$\text{Мат. ож. } [X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n]^2 =$$

$$= b_1 - a_1^2 + b_2 - a_2^2 + b_n - a_n^2 = A_n,$$

*) В тексте: $t\sqrt{A}$.

мы на основании леммы III можем утверждать с вероятностью $P > 1 - \dfrac{1}{t^2}$, что

$$[X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n]^2 < t^2 A_n \,,$$

т. е. что

$$|X_1 + X_2 + \ldots + X_n - a_1 - a_2 - \ldots - a_n| < t\sqrt{A_n} \,.$$

Итак, лемма наша доказана. Последний результат можно еще представить в другом виде:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - t\sqrt{A_n} < X_1 + \ldots + X_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_n + t\sqrt{A_n} \,. \tag{I}$$

Лекция 10

Закон больших чисел

Теорема I. Если число независимых величин X_1, $X_2, \ldots,$ X_n можно увеличивать беспредельно, причем математические ожидания b_1, b_2, $\ldots$, b_n квадратов этих величин не превосходят некоторого заданного предела b, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом n среднее арифметическое значений, которые получают величины X_1, $X_2, \ldots,$ X_n, будет сколь угодно мало отличаться от среднего арифметического из математических ожиданий a_1, $a_2, \ldots, a_n$ этих величин.

Доказательство. По условию $b_i < b$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $A_n \leqslant nb$ и формула (I) перепишется в виде:

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < t\sqrt{\frac{b}{n}}\,.$$

Предположим теперь, что ε и η положительные произвольно малые числа. С помощью числа η определим t, полагая

$$\eta = \frac{1}{t^2} \quad \text{или} \quad t = \sqrt{\frac{1}{\eta}}\,. \tag{α}$$

Имея значение t, выберем n таким образом, чтобы имело место неравенство:

$$t \cdot \sqrt{\frac{b}{n}} \leqslant \varepsilon\,. \tag{β}$$

Это условие будет выполнено, если $n \geqslant \dfrac{t^2 b}{\varepsilon^2}$ или на основании (α)

$$n \geqslant \frac{b}{\eta\varepsilon^2}\,.$$

Обозначая через P вероятность предположения, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < \varepsilon\,,$$

мы замечаем, что вследствие неравенства (β) эта вероятность не меньше вероятности предположения, что

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < t\sqrt{\frac{b}{n}}\,.$$

Эта же последняя вероятность на основании предыдущего больше $1 - \dfrac{1}{t^2}$, следовательно,

$$P > 1 - \frac{1}{t^2}\,,$$

или на основании (α) $P > 1 - \eta$.

Приходим к следующему результату: число величин $X_1,\ X_2, \ldots,$ X_n достаточно сделать настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$n > a\frac{b}{\eta\varepsilon^2}\,.$$

При этом значение вероятности предположения, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < \varepsilon\,,$$

будет отличаться от единицы не больше, чем на η.

Пример I. Приложим полученный результат к доказательству теоремы *Бернулли.*

Предположим, что [имеется] (вставлено нами) произвольный ряд испытаний, независимых друг от друга, причем в результате каждого испытания появляется или не появляется некоторое событие A. Предположим, что при каждом испытании вероятность появления события A есть p и вероятность непоявления q. Требуется доказать, что при достаточно большом числе испытаний n, будет отличаться от единицы сколь угодно мало вероятность предположения

$$\left(\frac{m}{n} - p\right) < \varepsilon\,,$$

где m обозначает число появлений события A при n испытаниях.

Доказательство. Пусть произведено n испытаний. Каждому из этих испытаний пусть соответствует одна из величин X_1, $X_2, \ldots,$ X_n, которая получает значение 1, если событие A появляется, и 0, если событие не появляется.

Тогда сумма $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = m$, так как она состоит из единиц и нулей, причем единиц столько, сколько раз появилось событие, замечая далее, что при X_1 в случае появления события имеем, что $x'_1 = 1$, а в случае непоявления $x'_2 = 0$,
при X_2 $\ldots$ $x''_1 = 1$ — $x''_2 = 0$ и т. д.[*)]

Напишем, что

$$\text{Мат. ож. } X_i = x_1^{(i)} p + x_2^{(i)} q = a$$

и

$$\text{Мат. ож. квадратов } X_i = x_1^{(i)2} p + x_2^{(i)2} q = b.$$

[*)] Имеется в виду, что случайная величина X_1 принимает значение x'_1 при появлении события и x'_2 при непоявлении и т. д., т. е. случайная величина X_k принимает значение $x_1^{(k)}$ при появлении события и $x_2^{(k)}$ при непоявлении (число штрихов равно номеру случайной величины, $k = 1, 2 \ldots, n$).

Так как далее $x_1^{(i)} = 1$, а $x_2^{(i)} = 0$, то $a_i = p$ и $b_i = p$, и потому

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i^2 = \sum_{1}^{n} p - p^2 = \sum_{1}^{n} p(1-p) = \sum_{1}^{n} pq = npq\,.$$

Тогда с вероятностью $P > \dfrac{1}{t^2}$ можем утверждать, что при достаточно большом n существует неравенство

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < t\sqrt{\frac{pq}{n}}\,,$$

которое, замечая, что: $a_i = p$ и $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = m$, обращается в неравенство

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < t\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

[Мы воспользовались здесь формулой (I), подставляя вместо A_n его значение npq.] Для того чтобы определить, какому условию должно удовлетворять число n, мы прямо в неравенство (γ) [*)] подставим вместо b величину pq и тогда получим, что

$$n \geqslant \frac{pq}{\eta\varepsilon^2}\,.$$

Пример II. Обобщенная теорема *Бернулли* (теорема *Пуассона*) [**)]**.**

Предположим, что производится ряд испытаний друг от друга независимых. Предположим, что вероятность появления события A при первом испытании равна p_1, а непоявления q_1; при втором испытании вероятность появления события A пусть будет p_2, а вероятность непоявления A — q_2 и т. д.

Требуется доказать, что при достаточно большом числе испытаний будет сколь угодно мало отличаться от единицы вероятность

---

*) В тексте: равенство (γ); видимо, имеется ввиду неравенство $n \geqslant \dfrac{b}{\eta\varepsilon^2}$.

**) Из текста рукописи следует, что эта теорема считается теоремой II.

предположения

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\,,$$

где m обозначает число появлений события A при n испытаниях. Другими словами, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при беспредельном возрастании числа испытаний отношение $\dfrac{m}{n}$ будет сколь угодно мало отличаться от среднего арифметического из вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$ события A при отдельных испытаниях.

Доказательство. Введем в рассмотрение n величин $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$. Предположим, что величина X_k получит значение $x_k = 1$, тогда событие A появляется при k-м испытании, и значит, $x'_k = 0$, если событие A при этом испытании не появляется. $k = 1, 2, \ldots,\ n$. При этом условии $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = m$, причем

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \text{Мат. ож. } X_k = 1 \cdot p_k + 0 \cdot q_k = p_k \\ b_k &= \text{Мат. ож. } X_k^2 = 1 \cdot p_k + 0 \cdot q_k = p_k \end{aligned}\right\} \ k = 1, 2, \ldots,\ n\,.$$

Следовательно,

$$A_n = p_1 - p_1^2 + p_2 - p_2^2 + \ldots + p_n - p_n^2$$

или

$$A_n = p_1\,(1 - p_1) + p_2\,(1 - p_2) + \ldots + p_n\,(1 - p_n)\,,$$

и так как $1 - p_1 = q_1$, $1 - p_2 = q_2$, $\ldots$, $1 - p_n = q_n$, найдем

$$A_n = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n.$$

Замечая, что $p_1 q_1 < 1$, $p_2 q_2 < 1$, $\ldots$, $p_n q_n < 1$, получаем, что $A_n < n$.

На основании указанной теоремы можем утверждать, что при числе испытаний n, удовлетворяемом условию

$$n > \frac{1}{\eta\varepsilon^2}\,,$$

будет больше $1-\eta$ вероятность предположения

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}\right|<\varepsilon\,.$$

Здесь ε и η произвольно малые числа, и, следовательно, теорема Пуассона доказана.

Теорема III. Если число величин $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ можно увеличить беспредельно, причем математическое ожидание каждой величины больше или равно какому-нибудь положительному числу a, т. е. $a_i\ \geqslant a$ а математическое ожидание квадратов $b_i\ \leqslant b$, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можем утверждать, что при достаточно большом n будет иметь место неравенство

$$X_1+\,X_2+\ldots+\,X_n>E,$$

где E сколь угодно велико, наоборот, если $a_i\ <a$, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно предположить, что

$$X_1+\,X_2+\ldots+\,X_n\leqslant-E'\ ^{*)},$$

где E' положительное сколь угодно большое число.

Доказательство. Из формулы (I$'$) имеем, что

$$X_1+\ldots+\,X_n>a_1+\,a_2+\ldots+a_n-\,t\sqrt{A_n}\,.$$

По условию $A_n\leqslant bn$ и $a_1+\,a_2+\ldots+a_n\geqslant an$, а потому

$$X_1+\ldots+\,X_n>na-t\sqrt{nb}.$$

Мы можем всегда найти такое число испытаний n, начиная с которого будет выполняться неравенство $na-t\sqrt{nb}\ >\ E$, где E сколь угодно большое число; на основании этого можем утверждать с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, что будет иметь место неравенство: $X_1+\ldots+\,X_n>E$.

*) В тексте: $\leqslant-F'$.

Аналогичным образом можно показать, что при $a_i < a$,

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n < E'.$$

На основании этой теоремы приходим к следующему заключению: устраивая довольно большое число предприятий, математическое ожидание выгоды которых постоянно не меньше некоторого положительного числа, а математическое ожидание квадратов прибыли не превосходит b, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно рассчитывать на сколь угодно большую прибыль. [*Заметим, однако, что число n, при котором, согласно теории, должна получиться указанная заранее прибыль, является столь великим, что в жизни человеческой нельзя его осуществить, вследствие этого чисто теоретические выводы расходятся с результатами практики в таких случаях, когда опыт производится недостаточное число раз*.] [*)]

Если же математическое ожидание прибыли постоянно отрицательно и меньше некоторого отрицательного числа, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можем утверждать, что получится сколь угодно большой убыток, опять таки при n достаточно большом.

Пример. Лотерея состоит из 200 билетов, один билет дает выигрыш в 50 руб., 5 билетов в 20 руб. Цена билета 1 руб. Пусть некоторое лицо участвовало в этой лотерее 1000 раз, покупая всегда по одному билету. Требуется определить с вероятностью, превосходящей 1/2, барыш этого лица.

По условию задачи X принимает значения 49, 19, –1, вероятности этих значений $\frac{1}{200}$, $\frac{5}{200}$, $\frac{194}{200}$,

$$a_1 = \frac{1}{200}\cdot 49 + \frac{5}{200}\cdot 19 - \frac{194}{200} = -\frac{1}{4},$$

$$b_1 = \frac{1}{200}\cdot 49^2 + \frac{5}{200}\cdot 19^2 + 1\cdot\frac{194}{200} = 22.$$

[*)] Курсив наш.

С вероятностью $P > 1 - \dfrac{1}{t^2}$ можем предполагать существование неравенства

$$-\frac{n}{4} - t\sqrt{n\left(22 - \frac{1}{16}\right)} < X_1 + \ldots + X_n < -\frac{n}{4} + t\sqrt{n\left(22 - \frac{1}{16}\right)} \quad \text{(III)}$$

(пользуемся формулой (I$'$)).

Желая иметь вероятность, превосходящую $\dfrac{1}{2}$ при $n = 1000$, мы обозначим $t = \sqrt{2}$. Тогда будем иметь по формуле (III)

$$-250 - \sqrt{1000\left(44 - \frac{1}{8}\right)} < X_1 + \ldots + X_n < -250 + \sqrt{1000\left(44 - \frac{1}{8}\right)}.$$

Отбрасывая $\dfrac{1}{8}$ и принимая $\sqrt{1000 \cdot 44}$ приближенно равным 210, мы получим, что

$$-460 < X_1 + \ldots + X_n < -40.$$

Итак, с вероятностью $P > \dfrac{1}{2}$ можем утверждать, что игрок остается в убытке, который не меньше 40 и не больше 460 руб.

Чем больше n, тем величина убытка и его вероятность больше, а потому играющий останется непременно в убытке; такие игры, в которых один из игроков всегда остается в убытке, называются **небезобидными.**

Лекция 11

Теория безобидности игр

Пусть n лиц A_1, $A_2 \ldots$, A_n, участвуют в предприятии, в результате которого каждое лицо получает некоторую прибыль и убыток, которые обозначим $X_1\,X_2, \ldots,\ X_n$. В том случае, когда величина $X_1\,X_2, \ldots,\ X_n$ связана зависимостью $X_1 + \ldots + X_n = 0$, мы будем называть *предприятие игры*. Другими словами, игра есть предприятие, в котором не изменяется сумма состояний участвующих в нем лиц.

Теорема. Во всякой игре сумма, составленная из математических ожиданий выигрыша для каждого лица, равна нулю.

По условию имеет место равенство $X_1 + \ldots + X_n = 0$, поэтому

$$\text{Мат. ож. } (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$$
$$= \text{Мат. ож. } X_1 + \text{Мат. ож. } X_2 + \ \ldots\ + \text{Мат. ож. } X_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \text{Мат. ож. } X_k.$$

Так как сумма $X_1 + \ldots + X_n$ постоянно равна нулю, то Мат. ож. $(X_1 + \ldots + X_n) = 0$, и на основании предыдущего получаем равенство:

$$\text{Мат. ож. } X_1 + \text{ мат. ож. } X_2 + \ \ldots\ + \text{Мат. ож. } X_n = 0.$$

Игра называется *безобидной*, если математическое ожидание выигрыша для каждого игрока будут равно нулю, т. е. Мат. ож. $X_k = 0$ при $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Если хотя для одного игрока математическое ожидание выгоды не равно нулю, то такая игра уже не безобидна. Действительно, пусть для одного из игроков математическое ожидание выигрыша > 0, то на основании последней теоремы сейчас скажем, что найдется, по крайней мере, один игрок, для которого математическое ожидание выигрыша < 0. Если игра повторяется много раз и при одинаковых условиях, то можно применить теорему II [теорему Пуассона][*)] и утверждать с вероятностью сколь угодно близкой к единице, что при достаточно большом числе повторений игры игрок, для которого математическое ожидание выигрыша > 0, выиграет сколь угодно большую сумму, а игрок, для которого математическое ожидание выигрыша < 0, проиграет сколь угодно большую сумму.

Теорема. В игре участвуют n игроков A_1, $A_2 \ldots, A_n$. Ставки их равны соответственно M_1, M_2, ..., M_n, причем всю сумму ставок

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M$$

выигрывает один из игроков. Для безобидности игры необходимо и достаточно, чтобы ставки игроков были пропорциональны вероятностям p_1, $p_2, \ldots, p_n$ выиграть ставку каждому игроку в отдельности.

Если игрок A_k выиграет ставку, то его чистый барыш равен $M - M_k$, если же игрок A_k проиграет, то теряет ставку M_k; вероятность первого события равна p_k, второго $1 - p_k$, а потому математическое ожидание для игрока A_k равно $(M - M_k)\,p_k - M_k\,(1 - p_k)$. Для безобидности игры требуется, чтобы последнее выражение равнялось нулю. Тогда:

$$Mp_k - M_kp_k - M_k + M_kp_k = 0$$

и $\dfrac{M_k}{p_k} = M$; давая k значения 1, 2, ..., n, мы придем к искомому результату:

$$\frac{M_1}{p_1} = \frac{M_2}{p_2} = \ldots = \frac{M_n}{p_n}\,.$$

[*)] Добавлено нами.

На основании доказанной теоремы мы приходим к следующему заключению:

При безобидной игре ставки игроков должны быть пропорциональны числу шансов выигрыша для каждого игрока в отдельности. Если для 1-го игрока благоприятны α_1 шансов [*)], для 2-го α_2 и т. д., причем все шансы единственно возможны, равновозможны и несовместны, то:

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}, \ \ldots, \ p_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

и потому:

$$\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{M_n}{\alpha_n},$$

что и требовалось доказать.

Из равенства $M_k = Mp_k$, вытекает, что $p_k = \dfrac{M_k}{M}$, т. е. вероятность взять ставку тем больше, чем больше поставленная сумма, и тем меньше, чем больше сумма выигрыша.

Задача I. Два игрока A и B образовали общую ставку M. Игрок A возьмет ставку, если он выиграет m отдельных партий раньше, чем игрок B выиграет n партий, и, наоборот, игрок B возьмет ставку, если он выиграет n партий раньше, чем игрок A — m партий. Какова вероятность P и Q выиграть ставку для A и B, если известно, что вероятность выиграть каждую отдельную партию для A равна p, а для B равна q.

Вычислим сначала вероятность P. Для этого рассмотрим все предположения, которые можно сделать относительно всех случаев, предоставляющихся в этой игре.

I предположение: игра кончится после m партий, именно A выигрывает подряд m партий, B не выигрывает ни одной.

[*)] В тексте: α .

II предположение: игра кончится после $m+1$ партии. A выигрывает при первых m партиях только $m-1$ партий, кроме того, еще последнюю партию, B выигрывает одну партию.

III предположение: игра кончится после $m+1$ партий. A при первых $m+1$ партиях выигрывает только $m-1$, да еще последнюю партию, B выигрывает две партии и т. д.

$k+1$-е предположение: игра кончается после $m+k$ партий, A выигрывает при первых $m+k-2$ партиях $m-1$, да еще последнюю; B выигрывает $n-1$ партий; если бы оказалось, что A последней партии не выиграл, то выиграет ее B, и тогда у B будет n партий, а у A — $m-1$, следовательно, ставку возьмет игрок B. Таким образом, мы видим, что больше предположений, при которых A выигрывает игру, существовать не может. Вероятности наших предположений назовем соответственно через:

$$L_0,\ L_1,\ \ldots,\ L_{n-1}.$$

Тогда $P = L_0 + L_1 + \ldots + L_{n-1}$.

Но

$$\left.\begin{aligned}
&L_0 = p^m\\
&L_1 = P_{m-1,\,m}\cdot p\\
&L_2 = P_{m-1,\,m+1}\cdot p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_k = P_{m-1,m+k-1}\cdot p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_{n-1} = P_{m-1,m+n-2}\cdot p
\end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)^{*)}$$

*) В тексте: $L_k = P_{m-1,m+n-1}\cdot p$

Замечая далее, что:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

можем написать, что:

$$P_{m-1,m+k-1} = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!} p^{m-1} q^k = \\ = \frac{m\,(m+1)\cdots(m+k-1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k} p^{m-1} q^k.$$

Давая k значения $1,\ 2,\ \dots,\ n-1$, мы получим выражения для $P_{m-1,m}$, $P_{m-1,m+1}$ и т. д.

Подставляя эти выражения в формулы (α) и складывая почленно, мы получим:

$$P = p^m \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m\,(m+1)\dots(m+k-1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k} q^k.$$

Подобным же образом найдем, что:

$$Q = q^n \sum_{h=0}^{m-1} \frac{n\,(n+1)\dots(n+h-1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot h} p^h.$$

Итак, задача наша решена. Заметим, что из очевидного равенства $P+Q=1$ на основании выведенных формул вытекает связь между различными коэффициентами при степенях p или q. Если исключить q с помощью равенства $q=1-p$, то получим равенство двух целых функций относительно p. Приравнивая коэффициенты при равных степенях p, получим ряд формул.

Задача II. Два игрока A и B образовали общую ставку M и условились, что возьмет ставку игрок, удовлетворяющий следующим условиям. A возьмет ставку тогда, когда он выиграет на m партий больше, чем B; игрок B в тех же условиях берет ставку, когда у него на n партий больше, чем у A; вероятность выигрыша каждой отдельной партии для A равна p, для B равна q. Требуется определить вероятность P и Q выигрыша ставки для игрока A и B в отдельности.

Предполагаем, что в начале игры A получит n марок, B — m марок, и пусть проигравший отдельную партию даст выигравшему одну марку. Если A отдаст все свои марки, то он проигрывает ставку; если же A соберет все $n + m$ марок, то он выигрывает. Пусть теперь A имеет x марок, тогда B имеет $m + n - x$, причем $0 < x < m + n$. Возможность выиграть ставку для A тем меньше, чем меньше x, так что вероятность выигрыша есть функция от x. Вероятность же обозначим символом Y_x. Из определения следует, что $Y_0 = 0$ и $Y_{m+n} = 1$. Действительно, если $x = 0$, то у A нет марок и он проигрывает ставку; в этом случае вероятность выигрыша для него равна нулю; если же $x = m+n$, то A выиграл игру. Вероятность выигрыша для него равна единице. — Предположенная задача будет решена, если известно будет значение Y_x при $x = n$, т. е. если будет известно Y_n, но мы определим значение всех значений x в промежутке Y_x для $0 < x < m + n$. Если $x < m + n$, то A еще не выиграл игру. Он может выиграть при одном из следующих условий:

1) A выигрывает следующую партию, так что у него $x + 1$ марок, а затем выигрывает всю игру.
2) A проигрывает следующую партию (марок у него будет тогда $x - 1$), но выигрывает всю партию.

Пусть вероятность первого предложения будет L, второго M, тогда $Y_x = L + M$. Замечая, что в первом случае у A будет $x + 1$ марок, а следовательно, вероятность выигрыша в это время для него равна Y_{x+1}, мы напишем, что

$$L = p \cdot Y_{x+1};$$

во втором случае вероятность выигрыша равна Y_{x-1}, а потому

$$M = q \cdot Y_{x-1},$$

так что

$$Y_x = p \cdot Y_{x+1} + q \cdot Y_{x-1}. \qquad (1)$$

Это равенство называется *уравнением 2-го порядка в конечных разностях.*

Уравнение вида:

$$p_0 Y_{x+n} + p_1 Y_{x+n-1} + \ldots + p_{n-1} Y_{x+1} + p_n Y_x = 0,$$

где $p_0,\ p_1, \ldots,\quad p_n$ функции от x, называется *линейным уравнением n-го порядка в конечных разностях.*

Если $p_0,\ p_1, \ldots,\quad p_n$ не зависят от x, то это будет *линейное уравнение с постоянными коэффициентами*[*].

Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ корни уравнения

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n = 0.$$

Если все $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ различны, то интегралом уравнения:

$$p_0 Y_{x+n} + p_1 Y_{x+n-1} + \ldots + p_{n-1} Y_{x+1} + p_n Y_x = 0$$

будет

$$Y_x = C_1 \xi_1^x + C_2 \xi_2^x + \ldots + C_n \xi_n^x,$$

где $C_1 C_2,\ \ldots,\ C_n$ произвольные постоянные[**].

В этом можно убедиться простой подстановкой. Не прибегая к общей теории решения линейных уравнений в конечных разностях, мы решим составленное нами уравнение (I) с помощью следующего приема.

Так как $p + q = 1$, то:

$$Y_x\,(p+q) = pY_{x+1} + qY_{x-1}, \text{ откуда}$$

$$pY_x + qY_x = pY_{x+1} + qY_{x-1} \quad \text{и}$$

$$q\left(Y_x - Y_{x-1}\right) = p\left(Y_{x+1} - Y_x\right).$$

Полагая, что

[*] Курсив наш.

[**] В тексте у переменной ξ не везде указаны индексы.

$$Y_x - Y_{x-1} = L_x \text{ и } Y_{x+1} - Y_x = L_{x+1},$$

мы получим, что

$$qL_x = pL_{x+1}, \text{ тогда } \quad L_{x+1} = \frac{q}{p} L_x$$

даст x различные значения 1, 2, ..., $x - 1$ (0 нельзя, т. к. при $x = 0 \quad z_0 = y_0 - Y$, но Y не имеет смысла).

Таким образом, находим:

$$\left.\begin{aligned} L_2 &= \frac{q}{p} L_1, \\ L_3 &= \frac{q}{p} L_2, \\ &\dots \\ L_x &= \frac{q}{p} L_{x-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Перемножая равенства (β), получим:

$$L_x = \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} L_1\,;$$

но $L_x = Y_x - Y_{x-1}$, а потому :

$$Y_x - Y_{x-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} L_1.$$

Даем опять x значения 1, 2, ..., x, тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 - Y_0 &= L_1, \\ Y_2 - Y_1 &= L_1 \frac{q}{p}, \\ &\dots.., \\ Y_x - Y_{x-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} L_1. \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Складывая равенства (γ) и замечая, что с правой стороны явится сумма прогрессии, мы напишем, что:

$$Y_x - Y_0 = L_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \frac{q}{p}} \right]. \tag{II}$$

Y_0 и L_1 числа произвольные; замечая, что $Y_0 = 0$, полагаем, что $x = m + n$, тогда

$$Y_{m+n} = 1 = L_1 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}{1 - \frac{q}{p}},$$

откуда

$$L_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

Подставляя найденное значение L_1 в равенство (II), получим, что:

$$Y_x = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

Итак, значение Y_x найдено. Чтобы получить вероятность P, надо принять $x = n$, тогда:

$$Y_n = P = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}, \text{ а } Q = 1 - P.$$

Итак, наша задача решена.

В частном случае, если $p = q$, $P = \dfrac{n}{m+n}$.

Задача III. В игре принимает участие n лиц $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образуя общую ставку. Каждый игрок производит одно и то же испытание, причем испытания эти производят игроки по очереди, один за другим, в порядке

$$A_1\, A_2\, A_3 \ldots\, A_n,\; A_1\, A_2\, A_3 \ldots\, A_n,\; \ldots$$

При каждом испытании ожидается появление некоторого события E, выигрывает тот из игроков, который производит испытание, сопровождающееся появлением события E. Спрашивается, какие вероятности выиграть эту игру каждому из игроков в отдельности, если вероятность появления события E при каждом испытании равна p, а вероятность непоявления $= q$.

Пусть P_k вероятность выиграть игроку A_k. Если A_k выигрывает, то имеют место следующие предположения:

1) событие E не появилось подряд $k-1$ раз, но появится в k-й раз;
2) событие E не появилось подряд $k-1+n$ раз, но появится в $(k+n)$-й раз;
3) событие E не появилось подряд $k-1+2n$ раз, но появится в $(k+2n)$-й раз;

и т. д. Таких предположений можно сделать бесконечное число.

Если вероятность первого предположения будет L_1, второго L_2, третьего L_3 и т. д., то $P_k = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$.

Замечая далее, что $L_1 = q^{k-1} \cdot p$, $L_2 = q^{k-1+n} \cdot p$ и т. д., получим, что

$$P_k = q^{k-1} \cdot p + q^{k-1+n} \cdot p + \ldots,$$

где с правой стороны будет сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, так что

$$P_k = p\frac{q^{k-1}}{1-q^n}.$$

Итак, задача решена.

Рассмотрим частный пример. Два лица играют в игру: «орел и решетка». Когда появляется орел, игрок выигрывает. Спрашивается, как должна быть образована общая ставка для безобидности игры.

В данном случае

$$p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2},\ n = 2\ ^{*)},$$

а потому

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\ .$$

Следовательно, тот, кто первый бросает, должен поставить в два раза больше, чем второй игрок.

Задача IV. В сосуде m белых и n черных шаров. Два игрока A и B вынимают из этого сосуда поочередно шар за шаром, пока один из них не вынет белого шара. Тот, кто первый вынет белый шар, выигрывает ставку. Шаров вынутых обратно в сосуд не возвращают. Требуется определить вероятность выигрыша для каждого из этих игроков.

Пусть $P_{m,n}$ вероятность выигрыша для лица, вынимавшего шар, когда в сосуде было m белых шаров и n черных. Если A выигрывает ставку, то или:

1) A сразу вынул белый шар или же
2) A вынул черный шар, а затем все-таки выиграл ставку.

Если вероятность первого предположения L_1 , в а второго L_2, то

$$P_{m,n} = L_1 + L_2,\ \text{причем}\ L_1 = \frac{m}{m+n}.$$

Вычислим теперь L_2. При вычислении L_2 мы предположим, что A вынул черный шар, а потому осталось еще $n-1$ черных, и вероятность $P_{m,n-1}$ есть вероятность выиграть партию для игрока B, который в этот момент вынимает шар из сосуда. Вероятность проигрыша для игрока B равна $1 - P_{m,n-1}$, а потому

$$L_2 = \frac{n}{m+n}\left(1 - P_{m,n-1}\right),$$

*) В тексте: $n = \frac{1}{2}$

следовательно,

$$P_{m,n} = L_1 + L_2 = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n}\left(1 - P_{m,n-1}\right) = \\ = 1 - \frac{n}{m+n} P_{m,n-1}. \tag{I}$$

Замечая, что в случае отсутствия черных шаров $P_{m,0} = 1$, мы, давая n различные значения 1, 2, 3, ..., определим значение символа $P_{m,n}$ при каких угодно целых и положительных значениях m и n. В самом деле:

$$P_{m,1} = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}; \; P_{m,2} = 1 - \frac{2}{m+2} \cdot \frac{m}{m+1} \text{ и т. д.},$$

но этот способ [неудобен] *) для вычисления $P_{m,n}$, когда n сколько-нибудь велико. Преобразуем поэтому формулу (I). Заменяя в этой формуле m на $m-1$, получаем :

$$P_{m-1,n} = 1 - \frac{n}{m-1+n} \cdot P_{m-1,n-1}.$$

Умножая последнее равенство на $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m}{m+n}$ и вычитая из (I), найдем, что:

$$P_{m,n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot P_{m-1,n} = \\ = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n} - \frac{n}{m+n}\left[P_{m,n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n-1} \cdot P_{m-1,n-1}\right] = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n} - \frac{n}{m+n}\left[P_{m,n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n-1} \cdot P_{m-1,n-1}\right],$$

откуда

$$P_{m,n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot P_{m-1,n} - \frac{1}{2} = \\ = -\left[P_{m,n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n-1} \cdot P_{m-1,n-1} - \frac{1}{2}\right]. \tag{α}$$

*) Вставлено нами.

Если $n = 1$, то правая часть равна нулю, так как

$$P_{m,0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m} \cdot P_{m-1,0} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Но в этом случае на основании равенства (α) [*)] получим:

$$P_{m,1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot P_{m-1,1} - \frac{1}{2} = 0.$$

Полагая $n = 2$, получим на основании равенства (α):

$$P_{m,2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+2} \cdot P_{m-1,2} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Одним словом, теперь при значении n имеет место равенство:

$$P_{m,n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot P_{m-1,n} - \frac{1}{2} = 0. \tag{II}$$

По этой формуле можем вычислить $P_{m,n}$, зная $P_{m-1,n}$, а потому вся задача сводится к вычислению $P_{1,n}$ [**)]. Мы знаем, что

$$P_{1,n} = 1 - \frac{n}{n+1} \cdot P_{1,n-1},$$

$$\text{но} \quad P_{1,0} = 1, \quad P_{1,1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P_{1,2} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad P_{1,3} = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Легко видеть, что при n нечетном $P_{1,n} = \frac{1}{2}$, а при n четном $P_{1,n} = \frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$. Итак, задача решена.

Задача V. В игре в штосс банкомет вскрывает первую карту для себя. Он выигрывает, если на свою сторону положит раньше, чем на другую сторону, определенную карту, масть которой может быть какая угодно. Определить вероятность выигрыша для банкомета.

*) В тексте: неравенства (α).

**) В тексте: P_{1-n}.

Колода имеет 52 карты, в ней 4 масти, а потому $m = 4$, $n = 48$, следовательно, $P = P_{4,48}$. Вычислим $P_{4,48}$

$$P_{1,48} = \frac{\frac{48}{2} + 1}{48 + 1} = \frac{25}{49}.$$

По формуле (II)

$$P_{2,48} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{25}{49} + \frac{1}{2} = \frac{25}{49},$$

$$P_{3,48} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{25}{49} + \frac{1}{2} = \frac{429}{833},$$

и, наконец,

$$P_{4,48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{429}{833} = \frac{433}{833}.$$

Вероятность проигрыша $Q = \frac{400}{833}$ [*)]. Поэтому, если понтирующий ставит на карту, например, один рубль, то для безобидности игры банкомет должен отдавать в случае проигрыша $\frac{833}{400}$ рубля.

[*)] В тексте: $Q = \frac{200}{833}$.

Лекция 12

Петербургская задача

Два лица A и B играют в «орел и решетку» на следующих условиях:

Игрок A отдает в начале игры игроку B сумму M рублей безвозвратно. Затем он бросает монету. Если наверху окажется орел, то A получает от B 1 рубль и игра кончается. Если в первый раз наверху окажется решетка, то A снова бросает монету и получает уже два рубля, если на этот раз наверху окажется орел; если наверху окажется решетка, то бросает в третий раз и A получает $2^2 = 4$ рубля, если появится орел, и т. д. Спрашивается, чему должна равняться сумма M, чтобы игра была безобидна, причем игра прекращается после того, как монета будет брошена n раз и орел не появится ни разу.

Вычислим математическое ожидание выигрыша для игрока A. Он дает сумму M, взамен же может получить 1 р., 2 р., 2^2 р., ..., 2^{k-1} рубля и может ничего не получить. Поэтому чистый выигрыш для A может быть

$$\text{или } 1 - M, \text{ или } 2 - M, \text{ и т. д., или } 2^{n-1} - M, \text{ или, наконец, } M.$$

Соответствующие вероятности будут:

$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{4},\ \ldots,\ p_n = \frac{1}{2^n}\ {}^{*)}$$

и, наконец, вероятность того, что при n испытаниях не появится ни разу орел, равна $\frac{1}{2^n}$ **). Поэтому матем. ожид. выигрыша для

---

*) В тексте: $p_n = \frac{1}{2}n$.

**) В тексте: $\frac{1}{2}n$.

игрока A равно:

$$(1-M)\,\frac{1}{2}+(2-M)\,\frac{1}{2^2}+\ldots+\left(2^{n-1}-M\right)\,\frac{1}{2^n}-M\frac{1}{2^n}=$$

$$=\frac{n}{2}-M\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right]-M\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2}-M\,.$$

Игра будет выгодна для игрока B до тех пор, пока $\frac{n}{2}-M>0$, т. е. пока $M<\frac{n}{2}$, и для безобидности игры должно существовать равенство $M=\frac{n}{2}$.

Эту задачу предложил *Монморту*[*)] *Бернулли*[**)], но он не ставил ограничения для числа партий. В этом случае игра эта всегда выгодна для игрока A, какую бы сумму он ни отдал заранее игроку B. Результат этот казался неверным современникам. *Бернулли* казалось совершенно очевидным, что никакой рассудительный человек не хотел бы быть на месте игрока A, а всякий предпочитал бы быть на месте игрока B. Противоречие это между теорией и здравым смыслом явилось благодаря тому, что теории приписывали то, чего она вовсе не утверждала. По теории игра выгодна для A, если поставлено условие, что соответственно суммы M будет сыграно определенное наперед число партий. Но, если сумма M хоть сколько-нибудь велика, то такое число партий будет столь большим, что не хватит жизни человеческой, чтобы сыграть их. Если же число сыгранных партий окажется меньше числа, предписанного теорией, то теория решительно ничего не утверждает.

[*)] Пьер Монмор (1678–1719, Pierre Rémond de Montmort), французский математик, член Лондонского Королевского общества и Парижской академии.

[**)] Николай Бернулли (Nicolaus I Bernoulli, 1687–1759), см. письмо Николая I Бернулли к Пьеру Монмору от 9 сентября 1713 г. В 1738 г. Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700–1782) опубликовал эту задачу в Комментариях Санкт-Петербургской Академии (Specimen theoriae novae de mensura sortis). Даламбер назвал эту задачу «Петербургским парадоксом», т. к. она была опубликована в Петербурге.

И вот вследствие того, что современники *Бернулли* не обратили внимания на этот последний факт, явилось даже сомнение в правильности выводов, основанных на теории вероятностей, растаявшее лишь с течением времени.