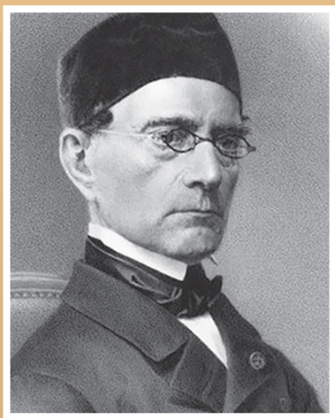
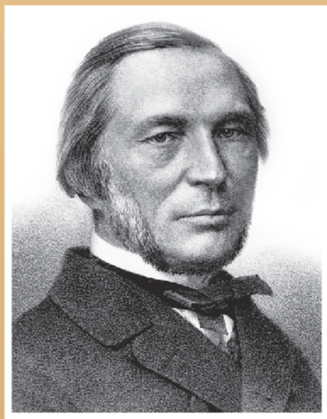
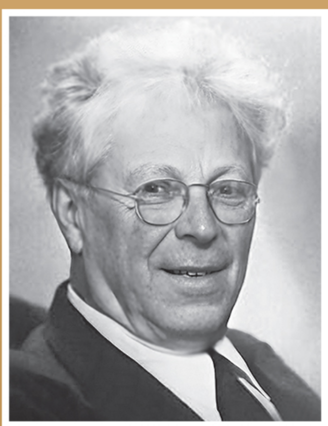
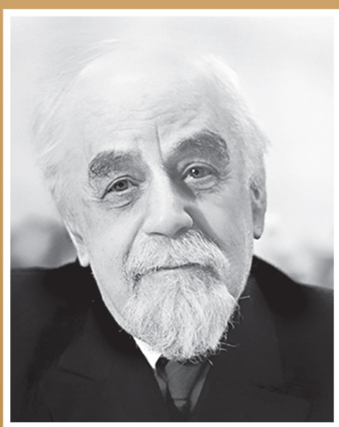
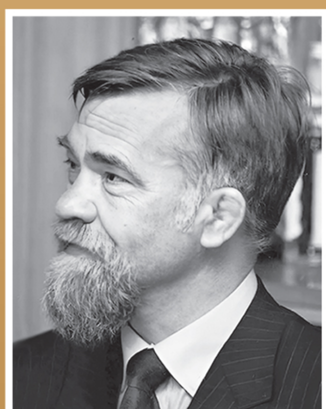
# МАТЕМАТИКИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА И ИХ ОТКРЫТИЯ



# Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908)

В математике встречаются личности, которые появляются внезапно, их одержимость по отношению к своей науке поразительна, их открытия будоражат научное сообщество, привлекая учеников и последователей, они горят ярко и, быстро сгорая, определяют новые направления научных исследований на долгие годы вперед. Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) был в российской математике именно таким явлением: он опубликовал всего 12 работ, и все они стали классическими. Его работы в основном относятся к трем крупным областям: алгебраической теории чисел, теории квадратичных форм и аналитической теории чисел, причем в них гармонически сочетаются арифметические, геометрические и аналитические методы.

Георгий Вороной родился 16 апреля 1868 года в селе Журавка Полтавской губернии в семье педагогов Феодосия Яковлевича и Клеопатры Михайловны Вороных.

Первую свою статью Вороной опубликовал еще в школе. В 1884 году профессор Киевского университета В. П. Ермаков начал издавать «Журнал элементарной математики», в котором среди прочего предлагались темы для ученических работ по математике. На одну из тем, а именно «Разложение многочленов на множители, основанное на свойствах корней квадратных уравнений», была представлена единственная работа — Вороным. Работа понравилась Ермакову, и он опубликовал ее в своем журнале в 1885 году.

В этом же году Вороной закончил гимназию и поступил в Санкт-Петербургский университет. В университете он усердно посещал курсы лекций по чистой математике, которая все более увлекала его. В его дневнике мы читаем: «Лекции профессора Сохоцкого по специальному курсу высшей алгебры я предпочитаю всем остальным». По окончании университета Вороной по представлению профессоров А. А. Маркова, А. Н. Коркина, Ю. В. Сохоцкого, К. А. Поссе был оставлен для подготовки к магистерским экзаменам (1889).

> Главное, что меня занимает, есть ли у меня достаточно способностей (...) в моменты, когда ум охватывает идею, которая раньше, как мячик, ускользала, я забываю, что я существую (...) моими последними успехами я обязан привычке мыслить без пера и бумаги. Все предложения, доказанные мною, возникали совершенно независимо... Я надеюсь, что эта привычка мыслить таким образом сослужит мне службу

— записывает в дневнике Вороной в 1887 году.

После успешной защиты диссертации Вороной был назначен профессором математики Императорского Варшавского университета по кафедре чистой математики, где он и проработал с небольшим перерывом до конца жизни. Здесь он познакомился и подружился с профессором математики и механики Николаем Борисовичем Делоне и его семьей. Борис Николаевич Делоне любил рассказывать, как Вороной приходил к ним в гости и допоздна засиживался за беседой с его отцом. Влияние Вороного на творчество Делоне впоследствии оказалось очень значительным.

Изображение Г. Ф. Вороного на украинской монете номиналом 2 гривны

По словам Делоне, Вороной мыслил геометрически, но вынужден был переводить ход своих рассуждений на арифметический язык, так как руководители петербургской школы и особенно А. А. Марков, основной оппонент по диссертации, не приветствовали геометрический характер изложения; диссертацию, написанную на геометрическом языке, могли бы не пропустить. Докторская диссертация была блестяще защищена Вороным в 1897 году в Петербургском университете. Обе его диссертации — магистерская («О целых числах, зависящих от корня уравнения третьей степени», 1894) и докторская («Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей», 1896) — посвящены решению важнейших проблем и были увенчаны премией имени Буняковского (1896).

Геометризации алгоритма Вороного были посвящены работы Б. Н. Делоне, а также часть известной монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева «Теория иррациональностей третьей степени». Диссертация Вороного была напечатана только по-русски, отчасти поэтому ее результаты долго оставались малоизвестными за границей и некоторые из них переоткрывались на протяжении десятилетий.

Статья Г. Ф. Вороного «Об одной задаче из теории асимптотических функций» (1903), посвященная третьему направлению — аналитической теории чисел, стимулировала развитие этой ветви исследований в современной математике. Еще одно открытие Г. Вороного — метод Вороного обобщенного суммирования рядов (1902). К сожалению, он не получил широкой известности и был переоткрыт в 1919 году шведским математиком Нильсом Эриком Нёрлундом (1885–1981).

Г. Ф. Вороной был женат на Ольге Митрофановне Крицкой, девушке из дворянской семьи, чье имение Богданы находилось поблизости от его Журавки. Ольга Крицкая была его большой любовью еще с юности. У них было шестеро детей. Кроме своей многочисленной семьи, Вороной заботился также о семье его рано овдовевшей сестры. Все дети Георгия Феодосьевича, кроме умершей в детстве одной из дочерей, получили хорошее образование и стали специалистами — врачами и учителями. Младший сын Юрий Георгиевич Вороной (1896–1961) стал известным хирургом, доктором медицинских наук, прославился тем, что в 1933 году сделал первую в мире пересадку почки человеку. Две старшие дочери Александра и Мария и старший сын Александр и их семьи стали жертвами сталинских репрессий.

Научное наследие Вороного собрано в трехтомном издании и прокомментировано известными математиками Б. А. Венковым, Б. Н. Делоне, Ю. В. Линником, Н. Г. Чудаковым и И. Р. Шафаревичем [2].

Преподавательская деятельность профессора Вороного проходила в Варшавском университете (1894–1906, 1908) и в Политехническом институте (1898–1906, Варшава; 1907–1908, Новочеркасск), его учениками были В. Серпинский, Т. Банахевич и другие.

К сожалению, Г. Ф. Вороной рано ушел из жизни. Он скончался в Варшаве в возрасте 40 лет 7 (20) ноября 1908 года от желчнокаменной болезни и похоронен в Журавке (Украина).

*Н. В. Локоть*

## Литература

[1] *Делоне Б.* Георгий Федосеевич Вороной // Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947. С. 197–201.

[2] *Вороной Г. .Ф.* Собрание сочинений. Т. 1–3. Киев: АН УССР, 1952–1953.

[3] *Брайцев И. Р.* Г. Ф. Вороной (Некролог) // Сообщения Харьковского матем. общества. Вторая серия. 1910. Т. XI. № 6. С. 197–210.

[4] *Долбилин Н. П.* Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) // Чебышевский сб. 2018. Т. 19. № 3. С. 318–327.

# Г. Ф. Вороной: от чисел к параллелоэдрам

Будучи студентом Петербургского университета, Георгий Феодосьевич Вороной сделал яркую работу о бернуллиевых числах (1890). Эта работа очень понравилась А. А. Маркову, а Вороной был оставлен при университете «для подготовки к получению профессорского звания» (аналог аспирантуры). Под руководством Маркова он написал магистерскую (кандидатскую) диссертацию «О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени», посвященную проблеме нахождения базиса кольца целых чисел кубического поля (1894). В докторской диссертации «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей» (1897) был построен исключительно эффективный алгоритм для нахождения основных единиц кубического поля. В этой работе Вороному удалось проникнуть в суть вопроса гораздо глубже, чем его знаменитым предшественникам Е. И. Золотареву, Г. Минковскому и др. Конструкция Вороного существенно обобщала на трехмерные решетки алгоритм непрерывных дробей, созданный для двумерных решеток.

Исследования Вороного по алгебраической теории чисел были отмечены премией Буняковского Санкт-Петербургской академии наук.

Пусть

$$S(n) = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n),$$

где $\tau(k)$ — количество делителей числа $k$. В работе «Об одной задаче из теории асимптотических функций» Вороной получил существенный прогресс в задаче Дирихле о делителях, а именно, для функции $S(n)$ он нашел более точную асимптотику, чем Дирихле ранее. Эта важная работа явилась отправной точкой для исследований выдающихся математиков В. Серпинского (ученика Вороного) и И. М. Виноградова.

В конце 1890-х гг. под влиянием работ Минковского по геометрии чисел Вороной приступил к исследованиям по теории квадратичных форм $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j$. В 1904 году на математическом конгрессе в Гейдельберге во время личной встречи с Вороным создатель геометрии чисел Герман Минковский проявил интерес к этим исследованиям.

В большом мемуаре «Свойства положительных совершенных квадратичных форм» (1908) Вороной дал алгоритм нахождения всех локально экстремальных положительных квадратичных форм от $n$ переменных. Геометрический смысл этой задачи состоит в отыскания всех локально плотнейших *решетчатых* упаковок пространства $\mathbb{R}^n$ равными шарами.

Свой последний, наиболее глубокий мемуар «Исследования о примитивных параллелоэдрах» (опубликован посмертно в 1909 году) Вороной посвятил изучению многогранников особого вида. В 1885 г. великий кристаллограф Е. С. Федоров ввел понятие *параллелоэдра* как выпуклого многогранника, параллельными копиями которого, приложенными друг к другу по целым граням, можно заполнить все пространство без перекрытий. Легко видеть, что двумерный аналог параллелоэдра есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник (см. рис. 1). Параллелепипед и правильная шестиугольная призма являются примерами трехмерных параллелоэдров. Федоров нашел все пять комбинаторных типов трехмерных параллелоэдров (см. рис. 2).

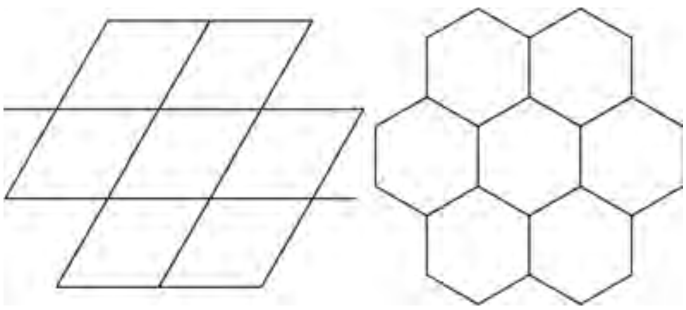


Рис. 1. Параллелоэдры на плоскости

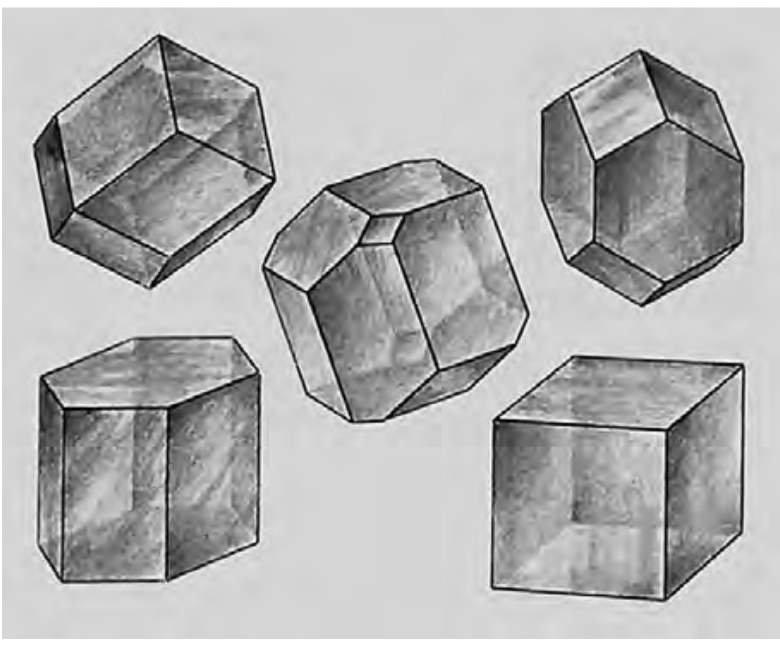


Рис. 2. Пять типов трехмерных параллелоэдров

Во второй половине 1890-х гг. Г. Минковский исследовал параллелоэдры и установил ряд их фундаментальных свойств. Именно на этом этапе Минковский открыл одну из самых замечательных теорем в теории выпуклых многогранников — о существовании и единственности выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней. Так как параллелоэдр замощает пространство параллельными копиями, каждая грань (в многомерном пространстве — гипергрань) имеет противоположную, равную и параллельную, грань. Отсюда и из своей общей теоремы о многогранниках Минковский вывел, что *параллелоэдр имеет центр симметрии* (1) и *все его грани* (*гиперграни в многомерном случае*) *также центрально симметричны* (2). К этим двум условиям Б. Н. Делоне добавил еще одно: *проекция параллелоэдра вдоль ребра* (*грани коразмерности* 2) *на плоскость есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник* (3). Позднее выяснилось, что эти три условия не только необходимы, но и достаточны (Б. А. Венков, 1954).

Существует простой способ строить параллелоэдры. Для этого нужно взять решетку $\Lambda$ целых точек относительно произвольного базиса (см. рис. 3) и для какой-либо точки $\lambda \in \Lambda$ построить ее *область Вороного*

$$V_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^d : |x\lambda| \leqslant |x\lambda'|,\ \forall \lambda' \in \Lambda\}.$$

Легко видеть, что область Вороного $V_\lambda$ есть выпуклый многогранник, который является частным случаем параллелоэдра. Такие параллелоэдры называют сейчас *параллелоэдрами Вороного*.

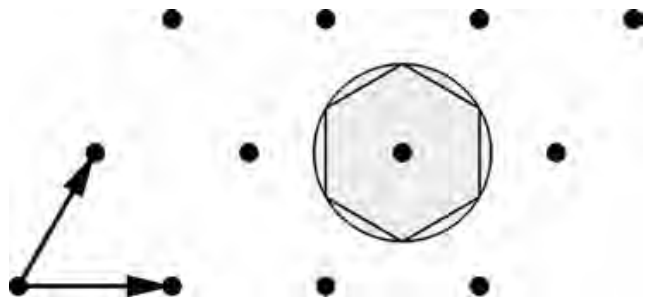


Рис. 3. Решетка и область Вороного

Геометрия параллелоэдра Вороного однозначно задается решеткой $\Lambda$ и в конечном счете ее базисом. В свою очередь, базис в $n$-мерном евклидовом пространстве определяется $n(n+1)/2$ параметрами: длинами векторов и углами между ними. Однако не всякий параллелоэдр — это параллелоэдр Вороного. Так, например, параллелоэдр Вороного под действием аффинного преобразования переходит в многогранник, остающийся параллелоэдром, но уже не являющийся, вообще говоря, параллелоэдром Вороного. В случае плоскости параллелоэдры — это параллелограммы и центрально симметричные шестиугольники, но параллелоэдрами Вороного будут только те, которые вписаны в окружность.

Вороной, развив геометрию положительных квадратичных форм, построил теорию $n$-мерных параллелоэдров Вороного и, в частности, предложил алгоритм нахождения для любого данного $n$ всех комбинаторных типов $n$-мерных параллелоэдров Вороного.

А как быть с нахождением типов параллелоэдров, которые не являются параллелоэдрами Вороного? В своем последнем мемуаре Вороной рассмотрел *примитивные* параллелоэдры. Это такие параллелоэдры, что в каждой вершине разбиения $n$-мерного пространства сходится минимально возможное число, то есть $n+1$, многогранников. Известно, что при $n=2, 3$ примитивный параллелоэдр только один, при $n=4$ их 3 из 52, а при $n=5$ их 221 из 110244. С ростом $n$ число примитивных параллелоэдров быстро растет и в то же время их доля в общем числе всех типов параллелоэдров падает. Вороной доказал, что *примитивный параллелоэдр* (*любой размерности*) *аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного*.

Доказательство опирается на две замечательные идеи Вороного, обе относительно подъема разбиения пространства на параболоид. Первая идея: разбиение Вороного для любого дискретного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (а не только для решетки) можно «поднять» на полиэдр, описанный около кругового параболоида $y = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ в пространстве $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$. Вороной назвал этот описанный полиэдр *женератрисой*. Женератриса проекти-

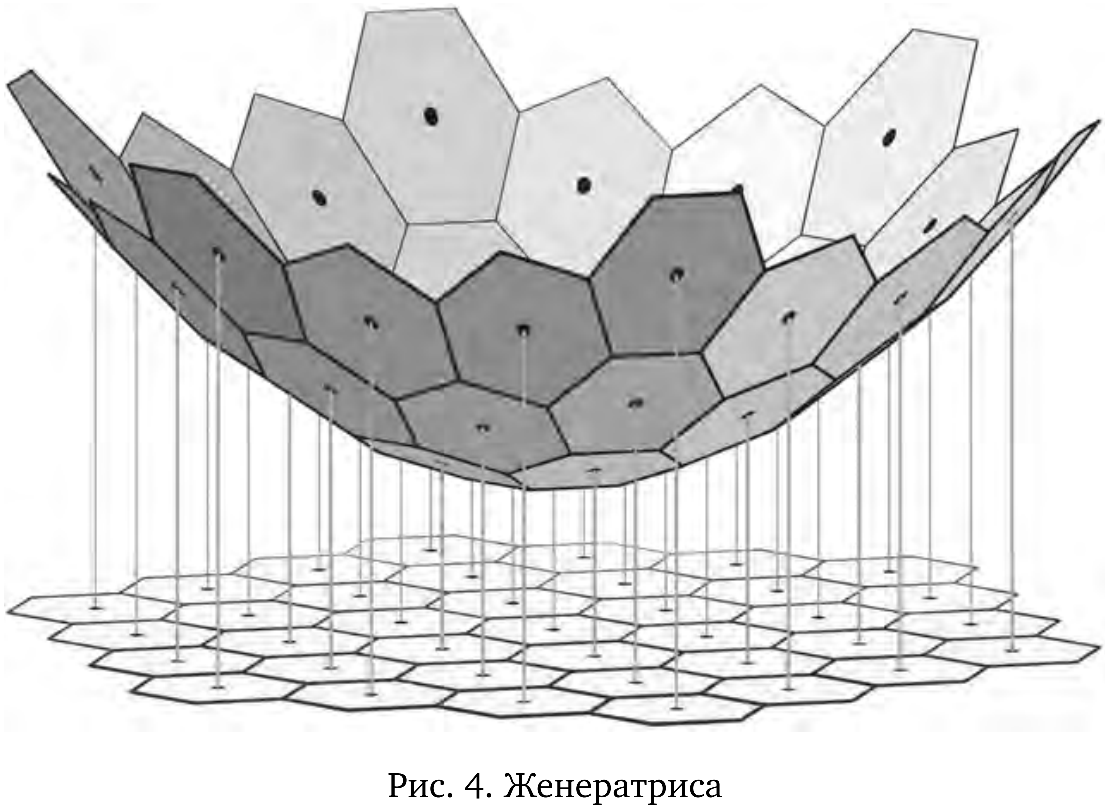


Рис. 4. Женератриса

руется в разбиение Вороного пространства $\mathbb{R}^n$ (см. рис. 4). При этом множество точек касания граней женератрисы проектируется в множество точек, для которых области Вороного являются проекциями соответствующих граней. Этот факт активно используется в вычислительной геометрии при исследовании диаграмм Вороного.

Труднореализуемой оказалась вторая идея: любое разбиение $T$ пространства $\mathbb{R}^n$ на примитивные параллелоэдры можно поднять на полиэдр, описанный около некоторого *эллиптического* параболоида П. Далее, если разбиение $T$ поднято на полиэдр, описанный около параболоида П, то подходящее аффинное преобразование $\varphi$, которое переводит эллиптический параболоид П в круговой параболоид $\Pi_V$, одновременно переводит разбиение $T$ на примитивные параллелоэдры в разбиение Вороного $T_V$, а примитивный параллелоэдр соответственно в параллелоэдр Вороного.

Этот фрагмент последнего сочинения Вороного, в котором доказывается аффинная эквивалентность примитивного параллелоэдра параллелоэдру Вороного, по мнению Б. Н. Делоне, является наиболее глубоким местом всего мемуара.

На пути к пониманию того, как устроены не только примитивные параллелоэдры, стоит с 1908 года проблема Вороного: доказать (или опровергнуть), что любой (а не только примитивный) параллелоэдр размерности $n$ аффинно эквивалентен параллелоэдру Вороного. Сейчас, более века спустя, эта проблема положительно решена (помимо $n = 2, 3$) для $n = 4$ (Делоне, 1929) и $n = 5$ (А. Гарбер и А. Магазинов, 2019).

Автор благодарит Ярослава Кучериненко за создание рис. 4.

*Н. П. Долбилин*