01

Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного
Знамени государственный университет им. А.А.Жданова



М.И.ГОРДИН

# НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.



Диссертация на соискание
учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель - доктор физико-математических
наук профессор И.А.Ибрагимов.

Ленинград
1970.

02

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе содержатся некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле случайных процессов с дискретным временем, а также ряд результатов, позволяющих проверять выполнение условий таких теорем. В частности, найдены

1) новые, менее ограничительные, чем известные ранее, условия применимости центральной предельной теоремы и принципа инвариантности к стационарным[1)] процессам;

2) условия, обеспечивающие применимость указанных результатов к некоторому классу случайных процессов, в том числе к ряду процессов, интересных с точки зрения метрической теории чисел;

3) некоторые условия, обеспечивающие невырожденность предельных распределений в упомянутых теоремах.

Перейдем к систематическому обзору содержания работы.

Глава 1 содержит ряд определений из теории измеримых преобразований, некоторые сведения из этой теории, а также те обозначения, которые применяются на протяжении всей работы.

Глава 2 имеет вспомогательный характер: изложенный в ней материал используется в главе 3.

---

1) Выражения "в узком смысле" и "с дискретным временем" мы опускаем там, где это не может вызвать недоразумений.

Пусть $\xi_k$ - последовательность случайных величин. В этой работе мы будем говорить, что к последовательности $\xi_k$ применима центральная предельная теорема, если последовательность $n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ сходится по распределению к $\Phi_\sigma$, где при $\sigma>0$ под $\Phi_\sigma$ понимается функция распределения нормального закона со средним $0$ и дисперсией $\sigma^2$, а при $\sigma=0$ - функция распределения, единственная точка роста которой $0$.

Мы будем также говорить, что к этой последовательности применим принцип инвариантности, если последовательность случайных ломаных, равных $0$ в $0$, $n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\ell=1}^{k}\xi_\ell$ - в точках $kn^{-1}$ и линейных в интервалах $[(k-1)n^{-1}, kn^{-1}]$ ( $1\le k\le n$ ), сходится по распределению ( как последовательность случайных величин со значениями в метрическом пространстве непрерывных на $[0,1]$ функций) к распределению процесса $W_{\sigma^2}(t)$, где $W_{\sigma^2}(t)$ - гауссовский процесс с независимыми стационарными приращениями, равный $0$ в $0$, имеющий среднее значение $0$, причём дисперсия $W_{\sigma^2}(1)$ равна $\sigma^2$.
Очевидно, что принцип инвариантности более сильное утверждение, чем центральная предельная теорема.

Последовательность случайных величин $\xi_k$ называется последовательностью мартингал - разностей, если при всех $k$

$$E\{\xi_k \mid \xi_\ell,\ \ell<k\}=0$$

с вероятностью 1.

Теорема 2.1 утверждает, что к стационарной эргодической последовательности мартингал-разностей, имеющих конечную дисперсию $\sigma^2$, применим принцип инвариантности, причём предельное распределение соответствует $W_{\sigma^2}$.

Этот результат принадлежит П.Биллингсли [27]. Автором он был получен независимо и включен в работу для полноты изложения. Доказательство отличается от доказательства Биллингсли. Заметим, что, если применить использованную нами схему для получения центральной предельной теоремы, впервые доказанной в этих условиях П.Биллингсли [26] и И.А.Ибрагимовым [12], то доказательство этого факта значительно упростится по сравнению с [26] и [12]

Глава 3 посвящена следующему вопросу. Пусть $(X, \mathfrak{M}, P)$ - вероятностное пространство, а $T$ - его автоморфизм ( т.е. измеримое сохраняющее меру $P$ отображение $X$ на себя, причём обратное к $T$ отображение также измеримо ). Если $f$ - измеримая вещественная функция на $X$, то последовательность $f(T^k)$ образует стационарный процесс. Какие условия достаточно наложить на $T$ и $f$, чтобы этот процесс подчинялся центральной предельной теореме ( принципу инвариантности, закону повторного логарифма и т.д.)?

Если речь идёт о необходимых и достаточных условиях, то такой вопрос, видимо, слишком труден, даже если ограничиться автоморфизмами весьма специального типа. Мы будем интересоваться лишь условиями, достаточными для применимости центральной предельной теоремы и принципа инвариантности.

Одни из применявшихся подходов состоял в том, что некоторые условия слабой зависимости накладывались непосредственно на конечномерные распределения процесса (см. [34], [18]). Однако, быстро выяснилось, что эти условия слишком жестки и им не удовлетворяют многие процессы, к которым, однако, применимы соответствующие предельные теоремы. Попытки расширить класс процессов привели к понятию "процессов, являющихся функционалами от слабо зависимых величин" ([11], [13]). Этот подход состоит в том, что пространство $(X, \mathfrak{M}, P)$ и автоморфизм $T$ снабжаются дополнительной структурой - $\sigma$ - алгеброй $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{L}$ обладает тем свойством, что при больших $n$ $\sigma$- алгебры $\bigvee_{k=-\infty}^{0} T^{-k}(\mathcal{L})$ 1) и $\bigvee_{k=n}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{L})$ в определенном смысле слабо зависимы. От функции $f$ теперь достаточно потребовать, чтобы она хорошо аппроксимировалась $\sigma$ - алгебрами $\bigvee_{k=-n}^{n} T^{-k}(\mathcal{L})$.

На этом пути были получены интересные результаты ([13], [21], [17]), нашедшие, в частности, применение в метрической теории чисел ([13], [17]) и в теории гладких динамических систем [20].

Следует отметить, что, наряду со случаями, когда упомянутая $\sigma$ - алгебра выделяется естественным образом имеются случаи, когда её построение наталкивается на

---

1) Знаком $\bigvee$ обозначается наименьшая $\sigma$ - алгебра, содержащая все указанные $\sigma$ - алгебры.

серьезные трудности. Поэтому естественно стремление формулировать условия на функцию $f$ с помощью более бедной дополнительной структуры, которую, тем самым, легче построить.

В качестве такой дополнительной структуры на пространстве, в котором действует автоморфизм $T$, используется некоторая инвариантная ( в другой терминологии - убывающая ) $\sigma$ - алгебра $\mathfrak{M}_0$ (т.е. такая $\sigma$ - алгебра, что $T^{-1}(\mathfrak{M}_0) \subset \mathfrak{M}_0$).

Пусть $P_k$ - оператор условного математического ожидания относительно $\mathfrak{M}_k = T^{-k}(\mathfrak{M}_0)$.

Положим $Q_k = P_k - P_{k+1}$. Обозначим буквой $R$ линейное (незамкнутое) пространство тех функций $g \in L_2$, для которых при некотором целом $k \geq 0$ выполнено равенство

$$g = \sum_{m=-k}^{k} Q_k g.$$

Пусть $|f|_p$ - норма функции $f$ в пространстве $L_p$.

**Теорема 3.1.** Пусть $T$ - эргодический автоморфизм и выполнено условие

$$\inf_{g \in R} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} (f(T^k) - g(T^k))\Big|_2 = 0.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)\Big|_2 = \sigma$$

и во всех точках непрерывности функции $\Phi_\sigma$

$$P\Big\{n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k) < y\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_\sigma(y).$$

Для проверки условий теоремы 3.1 полезна

Теорема 3.2. Пусть $T$ - эргодический автоморфизм, $\mathfrak{M}_0$ - инвариантная $\sigma$ - алгебра, $f$ - такая функция, что при некотором $\delta$ ( $0 \le \delta \le \infty$ ) $f \in L_{2+\delta}$ и

$$\sum_{k \geq 0} \left( |P_k f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} + |f - P_{-k} f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \right) < \infty .$$

Тогда к $f$ применима теорема 3.1.

Кроме того, в § 3 показано, что если выполнены условия теоремы 3.2 при $\delta = 0$, то к $f(T^k)$ применим принцип инвариантности.

Метод доказательства отличается от метода секционирования, восходящего к С.Н.Бернштейну и применявшегося в работах [13], [18], [21], и от метода моментов [15]. Наш метод использует аппроксимацию процесса последовательностями мартингал - разностей, а результаты, которые мы сформулировали, содержат в себе соответствующие результаты о стационарных мартингал - разностях.

В то же время из сформулированных утверждений следуют основные результаты, полученные ранее для процессов, удовлетворяющих условиям перемешивания, и для функционалов от таких процессов ([13], [18], [6]).

Пусть $\mathcal{L}$ - некоторая $\sigma$ - алгебра. Множества $A$ и $B$ в приводимых ниже формулах берутся, соответственно, из $\sigma$ - алгебр $\bigvee_{\ell=0}^{k-1} T^{-\ell}(\mathcal{L})$ и $\bigvee_{\ell=k+n}^{\infty} T^{-\ell}(\mathcal{L})$ и имеют положительную меру. Положим

$$\alpha(n) = \sup_{k \geq 0} \sup_{A, B} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

$$\varphi(n) = \sup_{k>0} \sup_{A,B} P^{-1}(A) |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

$$\psi(n) = \sup_{k>0} \sup_{A,B} P^{-1}(A) P^{-1}(B) |P(AB) - P(A)P(B)|$$

Оператор условного математического ожидания относительно $\sigma$ - алгебры $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ обозначим через $P_{\mathfrak{M}'}$.

Как показано в теореме 3.7, если $f \in L_p \ (2 \le p \le \infty)$, $\int_X f(x) P(dx) = 0$ и сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \| f - P_{\bigvee_{k=-n} T^{-k}(\mathcal{L})} f \|_{p'}$ $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$, то для применимости теоремы 3.2 достаточно сходимости любого из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{p-2}{p}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)^{\frac{p-1}{p}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n).$$

Согласно теореме 3.9 при тех же условиях применим принцип инвариантности, если сходится хотя бы один из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{p-2}{2p}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)^{\frac{p-1}{p}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n).$$

Первое из этих утверждений содержит в себе теоремы 18.5.2, 18.5.3, 18.5.4, 18.6.1, 18.6.2 и 18.6.3 из [13] второе - теоремы 3.2, 4.1 и 4.2 из [6] .

Используемый метод позволяет получить некоторые теоремы о процессах с бесконечной дисперсией. Доказана, в частности,

Теорема 3.5. Пусть $T$ - эргодический автоморфизм, $\mathfrak{M}_0$ - инвариантная относительно $T$ $\sigma$ - алгебра, $f \in L_1$ и выполнены условия

$$\sum_{k\geq 0}(|P_k f|_1 + |f - P_{-k} f|_1) < \infty,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)\Big|_1 < \infty.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)\Big|_1 = \lambda$$

и нормированные суммы $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)$ сходятся по распределению к $\Phi_\sigma$, где $\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda$.

Теорема 3.5 приводит к новым результатам даже в том случае, когда $f \in L_2$. Так, одно из следствий этой теоремы дает возможность применять центральную предельную теорему в случае, когда $f$ измерима относительно $\mathcal{L}$, $f \in L_2$, $\int_X f(x)P(dx) = 0$ и выполнены условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{1}{2}}(n) < \infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)\Big|_2 < \infty.$$

Для сравнения отметим, что для применения ранее известных результатов (например, теоремы 18.5.3 из [13]) в дополнение к условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{1}{2}}(n) < \infty$$

нужно потребовать, чтобы $f \in L_4$.

В § 5 показано, как преобразуются изложенные результаты, если $T$ - эндоморфизм ( т.е. измеримое сохраняющее меру преобразования) пространства ( $X, \mathfrak{M}, P$ ).

Напомним, что эндоморфизм $T$ пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$

называется точным, если пересечение $\sigma$ - алгебр $T^{-k}(\mathfrak{M})$ тривиально.

В том же параграфе доказана следующая

Теорема 3.10. Пусть $T$ - точный эндоморфизм. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $A_\varepsilon$, $P(A_\varepsilon) < \varepsilon$, и число $k = k(\varepsilon)$ такие, что для произвольной функции, $f \in L_2$ существует функция $f_\varepsilon \in L_2$ совпадающая с $f$ на $X / A_\varepsilon$ и такая, что $P_{T^{-k}(\mathfrak{M})} f_\varepsilon = 0$. К последовательности $f_\varepsilon(T^k)$ применима центральная предельная теорема, а также принцип инвариантности.

Результаты главы 3 без труда могут быть распространены на процессы с непрерывным временем, порождённые однопараметрической группой автоморфизмов, и на многомерные процессы.

Методы, использованные в этой главе, могут быть применены для доказательства других предельных теорем (закон повторного логарифма, получение оценок остаточного члена в центральной предельной теореме и т.п.). Основным препятствием здесь является слабая изученность этих вопросов применительно к стационарным последовательностям мартингал - разностей.

В главе 4 изучается некоторый класс преобразований пространств с мерой. Полученные результаты применяются к преобразованиям, возникающим в метрической теории чисел.

Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ - вероятностное пространство.

Измеримое преобразование этого пространства называется несингулярным, если из того, что $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A)=0$, следует, что $\mu(T^{-1}(A))=0$.

Если $T$ несингулярно, то равенство

$$\int_A V_\mu g(x)\mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} g(x)\mu(dx) \quad (A\in\mathfrak{M})$$

определяет в $L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$ линейный оператор $V_\mu$ с нормой I.

В § I установлены элементарные свойства оператора $V_\mu$, а также некоторый критерий существования инвариантной относительно $T$ меры $P$, эквивалентной мере $\mu$, формулируемый с привлечением оператора $V_\mu$.

В § 2 рассматривается вероятностное пространство $(X,\mathfrak{M},P)$ и его эндоморфизм $T$. Вместо $V_P$ мы будем писать просто $V$.

Предположим, что задана $\sigma$ - алгебра $\mathcal{L}\subset\mathfrak{M}$. Положим $\mathcal{L}_k^l = \bigvee_{p=k}^{l} T^{-p}(\mathcal{L})$, если $l\geq 0$, $k\geq 0$, $l\geq k$, и пусть $\mathcal{L}_k^l = \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ - тривиальная $\sigma$ - алгебра), если $k\geq 0$, $l\geq 0$, $k>l$. Пусть, далее $\mathfrak{M}_n = \mathcal{L}_0^{n-1}$ $(n\geq 0)$. Положим $P_k^l = P_{\mathcal{L}_k^l}$, $P_n = P_{\mathfrak{M}_n}$.

Символы I и $E$ обозначают единичный оператор и оператор интегрирования по мере $P$. Пусть также $|S|_W = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} f(x) - \operatorname{ess\,inf}_{x\in X} f(x)$. Если $S$ - линейный оператор в $L_\infty$, равный $0$ на постоянных функциях, то $|S|_W$ определяется, как норма индуцированного $S$ оператора $\widetilde{S}$ на факторпространстве $L_\infty$ по подпространству постоянных относительно нормы $| \, |_W$ на этом факторпространстве.

Положим при $k \geq 0$

$$\tau(k) = \sup_{n \geq 0} |V^k (I - P_k) V^n P_{k+n}|_W .$$

Теорема 4.2. Пусть эндоморфизм $T$ и $\sigma$ - алгебра $\mathcal{L}$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (\tau(k))^{\frac{1}{k}} < 1$,
2. $\tau(0) < 1$.

Если для функции $f \in L_\infty (X, \mathfrak{M}, P)$ конечна при некотором $\beta$ $(\beta > 1, \beta^{-1} > \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (\tau(k))^{\frac{1}{k}})$ полунорма

$$\rho_\beta(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |V^k (I - P_k)|_W ,$$

то при $n \geq 0$ справедлива оценка

$$|V^n f - Ef|_\infty \leq L e^{-\lambda n} \rho_\beta(f) ,$$

где $L > 0$ и $\lambda > 0$ зависят лишь от чисел $\tau(k)$ и $\beta$.
Из этой теоремы следует, что экспоненциально быстро стремится к $0$ коэффициент $\varphi'(n)$, определение которого отличается от определения $\varphi(n)$ переменой ролей множеств $A$ и $B$.
Кроме того, если $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{L}) = \mathfrak{M}$, то $T$ - точный эндоморфизм.
Там же показано, что условие 1 теоремы 4.2 можно интерпретировать, как требование, чтобы последовательность $\sigma$ - алгебр $T^{-n}(\mathcal{L})$ была асимптотически марковской.

В § 3 для удовлетворяющих определенным условиям преобразований $T$ пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ с выделенной $\sigma$- алгеброй $\mathcal{L}$, порождённой не более, чем счётным разбиением, строится инвариантная мера $P$, эквивалентная $\mu$, а к возникшим эндоморфизмам применяется затем теорема 4.2. При более жёстких предположениях показано, что коэффициент $\psi(n)$ экспоненциально быстро стремится к $0$. Эти результаты содержат в себе, в частности, известную теорему Р.О.Кузьмина из теории цепных дробей [24].

В § 4 полученные результаты применяются к преобразованиям единичного отрезка, связанным с различными обобщениями двоичных разложений и обыкновенных цепных дробей. В частности, показано, что преобразование $T$, определенное формулой $Tx=\theta x-[\theta x]$, где $\theta>1$, и $\sigma$-алгебра порождённая функцией $[\theta x]$, удовлетворяют условиям § 3.

В § 5 изучается преобразование $T$, определенное в единичном кубе размерности $s$ формулой

$$T(x_1,\ldots,x_s)=\left(\frac{x_2}{x_1}-\left[\frac{x_2}{x_1}\right],\ldots,\frac{x_s}{x_1}-\left[\frac{x_s}{x_1}\right],\frac{1}{x_1}-\left[\frac{1}{x_1}\right]\right).$$

Это преобразование связано с алгоритмом Якоби-Перрона, обобщающим на многомерный случай, известный алгоритм разложения вещественного числа в обыкновенную цепную дробь. Оказывается, что $T$ и $\sigma$- алгебра $\mathcal{L}$ порожденная вектор - функцией $\left(\left[\frac{x_2}{x_1}\right],\ldots,\left[\frac{x_s}{x_1}\right],\left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$, удовлетворяют всем условиям § 3.
По ходу доказательства найдена экспоненциальная оценка для скорости сходимости алгоритма Якоби-Перрона. Автору

не удалось обнаружить такую оценку в литературе. В том же параграфе получены некоторые сведения о плотности инвариантной меры.

Следует заметить, что те же задачи, связанные с преобразованием Якоби-Перрона, рассматривались в работах [41] и [44]. Однако содержащиеся там оценки таковы, что, например, остается открытым вопрос о применимости центральной предельной теоремы к измеримым относительно $\mathcal{L}$ функциям из $L_2$. В то же время доказательства этих результатов содержат серьезные ошибки, а сами теоремы сформулированы как условные, причём, как мы показываем в § 5, условия, наложенные в [41] и [44] на плотность инвариантной меры, на самом деле не выполнены.

Отметим, что в условиях §§ 3-5 к функциям, достаточно хорошо аппроксимирующимся $C^*$ алгебрами $\mathfrak{M}_n$ и имеющим моменты достаточно высокого порядка, можно применять центральную предельную теорему, принцип инвариантности ( ссылаясь, например, на теоремы главы 3 ) и закон повторного логарифма. Возможен также переход от меры $P$ к мере $\mu$, которая в приложениях обычно является мерой Лебега. Поскольку схема подобных рассуждений хорошо известна ( [13], [17] ), мы их опускаем.

Применяя предельные теоремы к стационарным процессам, во многих случаях важно знать, при каких условиях неограничены в $L_2$ последовательности сумм этих процессов.

Так, если выполнены условия теоремы 3.2 при $\delta=0$

то неограниченность этих сумм эквивалентна невырожденности предельного распределения.

При определенных условиях ограниченность сумм процесса, порождённого функцией $f$ и эндоморфизмом $T$, эквивалентна разрешимости в $L_2$ уравнений

$$f = g(T) - g$$

(см. [13], [15] ). Однако доказать неразрешимость этого уравнения для конкретных функций часто достаточно трудно.

В главе 5 предлагаются два подхода к этому вопросу. Показано, в частности, что для некоторых эндоморфизмов $T$ достаточно регулярная функция $f$, порождающая процесс с ограниченными в $L_2$ суммами, обязана равняться $0$ в неподвижных точках преобразования $T$. Результаты этой главы применяются в метрической теории чисел. Например, показано, что некоторые постоянные, возникающие в метрической теории цепных дробей, строго положительны. Некоторые из этих результатов были в свое время указаны без доказательства В.Дёблином [29] .

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [3], [4] и [5].

Предлагаемая работа выполнена под руководством И.А.Ибрагимова, которому автор выражает глубокую благодарность.

# ГЛАВА 1.

## НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Предположим, что задано некоторое множество $X$ с $\sigma$ - алгеброй подмножеств $\mathfrak{M}$ и счётно-аддитивной неотрицательной функцией множеств $P$, определенной на $\mathfrak{M}$, такой, что $P(X)=1$. Тройку $(X, \mathfrak{M}, P)$ мы будем называть вероятностным пространством.

Обычно мы будем считать, что все рассматриваемые $\sigma$ - алгебры полны, т.е. содержат все подмножества внешней меры $0$ ( внешняя мера строится по $P$ и $\mathfrak{M}$ ).

Если задано семейство $\sigma$ -алгебр $\mathfrak{M}_a$, $a\in A$, $\mathfrak{M}_a \subset \mathfrak{M}$, то $\bigwedge\limits_{a\in A} \mathfrak{M}_a$ обозначает их пересечение, а $\bigvee\limits_{a\in A} \mathfrak{M}_a$ - наименьшую $\sigma$ -алгебру, содержащую все $\mathfrak{M}_a$. Символом $\mathfrak{N}$ обозначается тривиальная $\sigma$ - алгебра, содержащая лишь множества вероятности $0$ или $1$.

Если $\mathfrak{M}'$ - под - $\sigma$ - алгебра $\mathfrak{M}$, то через $L_p(X, \mathfrak{M}', P)$ $(1\le p\le\infty)$ обозначается, как обычно, пространство измеримых относительно $\mathfrak{M}'$ функций $f$, для которых конечна норма

$$|f|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_X |f(x)|^p P(dx)\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 1\le p<\infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in X} |f(x)|, & \text{если } p=\infty \end{cases}.$$

Вместо $L_p(X, \mathfrak{M}, P)$ иногда мы будем писать просто $L_p$.

Обычно имеются в виду вещественные пространства. Случаи использования комплексных пространств явно оговариваются.

Проекционный оператор, сопоставляющий функции $f\in L_p$ её условное математическое ожидание относительно $\sigma$ - алгебры $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$, обозначается через $P_{\mathfrak{M}'}$. Когда подобный символ слишком громоздок, вводятся более простые обозначения. Вместо $P_{\eta}$ обычно мы будем писать $E$. Единичный оператор обозначается через I. Если $S$ - линейный оператор, то $|S|_{p,p'}$ - норма $S$, как оператора из $L_p$ в $L_{p'}$. По определению $|S|_p = |S|_{p,p}$.

Эндоморфизмом вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ называется такое отображение $T$ множества $X$ на себя, что для всякого $A \in \mathfrak{M}$ $T^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ и $P(T^{-1}(A)) = P(A)$. Эндоморфизм $T$ называется автоморфизмом, если он взаимно однозначен и обратное преобразование является эндоморфизмом.

В главе 4 рассматриваются измеримые преобразования, не являющиеся, возможно, эндоморфизмами. В таких случаях вероятностные меры на $(X, \mathfrak{M})$ обозначаются буквами $\mu$, $\nu$ и т.д.

Эндоморфизму $T$ соответствует линейный оператор $U$ в пространстве всех измеримых функций на $X$, заданный формулой

$$Uf(x) = f(Tx), \quad x \in X .$$

Этот оператор переводит две совпадающие на множестве меры 1 функции в такие же две функции, поэтому $U$ можно рассматривать, как оператор в пространстве классов эквивалентности измеримых функций ( эквивалентными считаются функции, совпадающие на множестве меры 1).

Той же формулой можно определить оператор $U$ на классах эквивалентности измеримых функций и в случае, когда измеримое преобразование $T$ не является эндоморфизмом, а удовлетворяет лишь условию несингулярности: из того, что $A \in \mathfrak{M}, \mu(A)=0$ , следует, что $\mu(T^{-1}(A))=0$. Дополнительные сведения по этому вопросу приводятся в § 1 главы IУ.

Если $\mathfrak{M}'$ - некоторая $\sigma$-алгебра, содержащаяся в $\mathfrak{M}$, а $T$ - несингулярное преобразование, то символом $T^{-1}(\,)\mathfrak{M}')$ обозначается наименьшая (полная) $\sigma$- алгебра, содержащая все множества вида $T^{-1}(A)$ , где $A \in \mathfrak{M}'$.

Если $f$ - вещественная измеримая функция на $X$ , а $T$ - эндоморфизм пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$, то можно образовать последовательность функций $f_k = U^k f$ $(k \geq 0)$. Эта последовательность образует стационарный в узком смысле случайный процесс с дискретным временем. Последнее означает, что конечномерные совместные распределения функций $f_k$ не меняются при сдвиге по параметру $k$.

Обратно, каков бы ни был согласованный набор конечномерных распределений, удовлетворяющий указанному условию инвариантности относительно сдвига, найдутся вероятностное пространство $(X, \mathfrak{M}, P)$, его эндоморфизм $T$ и измеримая функция $f$ на $X$ , такие, что последовательность $U^k f$ имеет именно этот набор конечномерных распределений. Это следует из известной теоремы Колмогорова о продолжении вероятностных мер. Подробно этот вопрос изложен в [ 9, стр.408 ] .

Из сказанного следует, что изучая стационарные в узком смысле случайные процессы, достаточно рассматривать только те из них, которые порождены в разъяснённом выше смысле некоторым эндоморфизмом пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ и измеримой функцией на этом пространстве. Именно такие процессы и изучаются в этой работе. Подобный подход удобен, когда приходится рассматривать большое количество стационарно связанных друг с другом процессов. Кроме того, во многих случаях процессы задаются не своими конечномерными распределениями, а посредством указаний эндоморфизма и функции. Таковы, например, процессы, возникающие в метрической теории чисел и в метрической теории динамических систем.

Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда $T$ является автоморфизмом. В самом деле, как доказал В.А.Рохлин [10], если $T$ - эндоморфизм пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$, то существует такое пространство $(X', \mathfrak{M}', P')$, его автоморфизм $T'$ и гомоморфизм ( т.е. измеримое сохраняющее меру отображение ) $p$ второго пространства на первое, что $pT' = Tp$. Если исходный процесс порождался функцией $f$ и эндоморфизмом $T$, то процесс, определённый формулой $f_k' = f(pT'^k)$ $(-\infty < k < \infty)$, имеет при $k \geqslant 0$ те же конечномерные распределения, что и исходный процесс $f_k = f(T^k)$.

Заметим, что теорема Рохлина доказана в предположении, что $(X, \mathfrak{M}, P)$ - пространство Лебега, т.е. пространство, изоморфное в смысле теории меры вероятностному пространству, являющемуся объединением некоторого отрезка прямой с мерой Лебега на нем и какой-то не более чем счётной совокупности точечных масс. Это предположение не очень ограничительно, т.к. во-первых, практически все встречающиеся пространства являются пространствами Лебега, и во-вторых, любой процесс с дискретным временем ( и многие процессы с непрерывным временем) могут быть реализованы на пространстве Лебега. Кроме того, сама теорема верна, вероятно, и при более слабых условиях.

Если же стационарный процесс задан при $k \geqslant 0$ своими конечномерными распределениями, то можно, используя стационарность, задать согласованные конечномерные распределения при всех целых $k$ , а затем, используя упомина-вшуюся теорему Колмогорова, построить вероятностное пространство, его автоморфизм и функцию на этом пространстве, порождающие стационарный процесс, заданный при всех целых $k$ , причём при $k \geqslant 0$ он имеет заданные конечномерные распределения. В этом случае, следовательно, нет необходимости привлекать теорему Рохлина.

Все эти рассуждения объясняют, почему в главе 3, посвященной предельным теоремам для стационарных процессов основное внимание уделяется процессам, порождённым автоморфизмами.

Впрочем, в этой главе приводятся формулировки (или указания, поясняющие, как получать эти формулировки ) для случая, когда процесс порождён эндоморфизмом.

# ГЛАВА II.

## СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ЛОМАНЫХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТЕЙ

### § 1. Формулировка результата

Определение 2.1. Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ $(-\infty \le a < k < b \le \infty)$, заданных на вероятностном пространстве $(X, \mathfrak{M}, P)$, называется последовательностью мартингал - разностей [8], если выполнены условия:

1. $E|\xi_k| < \infty$;
2. $E\{\xi_k | \xi_l,\ l < k\} = 0$. 1)

Броуновским движением с параметром $\sigma^2$ мы будем называть вещественный гауссовский сепарабельный случайный процесс $w_{\sigma^2}(t)$, имеющий независимые стационарные приращения, равный $0$ при $t = 0$ и удовлетворяющий условиям $E\, w_{\sigma^2}(t) = 0$, $E\, w_{\sigma^2}^2(1) = \sigma^2$.

Известно, что реализации такого процесса с вероятностью 1 непрерывны. Поэтому процессу $w_{\sigma^2}(t)$ $(0 \le t \le 1)$ соответствует вероятностная мера $W_{\sigma^2}$ на борелевских подмножествах пространства $C[0,1]$ непрерывных функций на $[0,1]$. Борелевские множества в $C[0,1]$ соответствуют метрике $\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ $(\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in C[0,1])$, определяемой соотношениями $\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \|\alpha_1 - \alpha_2\|$,

---

1) Если $a > -\infty$, то условие 2 при $k = a + 1$ означает, что $E\xi_k = 0$.

$$\|\alpha\| = \sup_{0\le t\le 1} |\alpha(t)|, \quad (\alpha \in C[0,1]).$$

Пусть $\xi_k$ - случайный процесс, $S_k = \sum_{\ell=1}^{k} \xi_\ell$, если $k \geq 0$, $S_0 = 0$, тогда $\xi_n(t)$ - случайная ломаная, равная $S_k$ при $t = kn^{-1}$ и линейная в интервалах $[(k-1)n^{-1}, kn^{-1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

**Теорема 2.1.** Пусть $\xi_k$ $(-\infty < k < \infty)$ - стационарная эргодическая последовательность мартингал - разностей Предположим, что $E\xi_k^2 = \sigma^2 < \infty$. Обозначим через $\Xi_n$ вероятностную меру на $C[0,1]$, соответствующую случайной ломаной $n^{-\frac{1}{2}}\xi_n(t)$. Тогда

$$\Xi_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} W_{\sigma^2} \quad ^{1)}.$$

Доказательство этой теоремы составляет содержание остальных параграфов главы 2.

## § 2. Некоторые сведения о мерах в метрических пространствах.

Нам понадобятся некоторые сведения о мерах на метрических пространствах, в частности, о метрике Леви-Прохорова, и о случайных величинах, принимающих значения в метрических пространствах. Материал этого параграфа в основном заимствован из [16].

Пусть $R$ - полное сепарабельное метрическое пространство с метрикой $\rho$.

Мерой на $R$ называется ограниченная счётно-адди-

---

1) Знаком $\Longrightarrow$ обозначается слабая сходимость мер на метрическом пространстве (см. § 2).

тивная неотрицательная функция, определённая на борелевской $\sigma$-алгебре пространства $R$.

Говорят, что последовательность мер $\mu_n$ слабо сходится к мере $\mu$ (пишется $\mu_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \mu$), если для всякой ограниченной и непрерывной на $R$ функции $\lambda$

$$\int_R \lambda(r)\mu_n(dr) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \int_R \lambda(r)\mu(dr).$$

Пусть $A$ - замкнутое подмножество $R$.

Тогда $A^\varepsilon = \{ r \in R / \rho(r, A) \leq \varepsilon \}$.

Если $\mu_1$ и $\mu_2$ - меры на $R$, то обозначим через $\varepsilon_{1,2}$ точную нижнюю грань множества таких чисел $\varepsilon$, что для всякого замкнутого множества $A \subset R$ выполнено неравенство

$$\mu_2(A) \leq \mu_1(A^\varepsilon) + \varepsilon.$$

В определении $\varepsilon_{2,1}$ $\mu_1$ и $\mu_2$ меняются ролями.

Пусть теперь $L(\mu_1, \mu_2) = max(\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{2,1})$.

В [16] доказано, что $L$ является метрикой, в которой множество всех вероятностных мер на $R$ полно и сепарабельно, причём сходимость в этой метрике совпадает со слабой.

Лемма 2.1. Пусть $f$ и $g$ - случайные величины, определённые на вероятностном пространстве $X$ с мерой $P$ и принимающие значения в $R$. Пусть

$$P\{\rho(f,g) > \varepsilon\} < \delta.$$

Тогда $L(F,G) \leq max(\varepsilon, \delta)$.[1]

---

1) Большими буквами обозначены меры - распределения случайных величин, обозначенных соответствующими малыми буквами.

Доказательство. Пусть $A$ - замкнутое множество. Очевидно включение

$$\{x \mid f(x)\in A\}\subset\{x \mid g(x)\in A^{\varepsilon}\}\cup\{x \mid \rho(f(x),g(x))>\varepsilon\}.$$

Учитывая, что

$$P\{x \mid f(x)\in A\}=F(A),\quad P\{x \mid g(x)\in A^{\varepsilon}\}=G(A^{\varepsilon}),$$

получим

$$F(A)\le G(A^{\varepsilon})+\delta.$$

Отсюда $\varepsilon_{1,2}\le \max(\varepsilon,\delta)$. Неравенство для $\varepsilon_{2,1}$ устанавливается аналогично.

Лемма 2.2. Пусть $f_n$ и $g_n$ - две последовательности случайных величин на вероятностном пространстве $(X, P)$ со значениями в $R$ и $P\{\rho(f_n, g_n)>\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ при любом $\varepsilon>0$. Тогда $L(F_n, G_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Доказательство. По лемме 2.1 для любого $\varepsilon>0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, L(F_n,G_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\max(\varepsilon,P\{\rho(f_n,g_n)>\varepsilon\})=\varepsilon$$

Лемма 2.3. Пусть в дополнение к условиям леммы 2.2. $F_n\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}F$. Тогда $G_n\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}F$.

Утверждение леммы следует из леммы 2.2 и свойств метрики $L$.

## § 3. Доказательство теоремы 2.1. Специальный случай

В этом параграфе теорема 2.1 будет доказана в предположении, что выполнено условие

$$E(\xi_k^2 \mid \xi_{k-1},\xi_{k-2},\dots)=\sigma^2.\text{[1]}\qquad (1)$$

[1]) При выполнении условия (1) теорема верна без предположения эргодичности.

Лемма 2.4. Конечномерные распределения процессов $n^{-\frac{1}{2}}\xi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям $W_{\sigma^2}(t)$.

Доказательство. Будем считать, что $\sigma^2 = 1$. Вместо случайных процессов $\xi_n(t)$ нам удобнее рассматривать процессы $\bar{\xi}_n(t) = \sum_{0<\ell\le nt} \xi_\ell$.

Поскольку для всякого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\max_{0\le t\le 1} \left|\frac{\xi_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\bar{\xi}_n(t)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{0<\ell\le n} \frac{|\xi_\ell|}{\sqrt{n}} > \varepsilon\right\} \le nP\{|\xi_1| > \varepsilon\sqrt{n}\} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\{x \,|\, |\xi_1(x)| > \varepsilon\sqrt{n}\}} \xi_1^2(x)\, P(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

то утверждение леммы достаточно доказать для случайного процесса $\bar{\xi}_n(t)$. Это утверждение эквивалентно такому:

каковы бы ни были числа $t_0, t_1, \ldots, t_r$ $(0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_r \le 1)$, $u_1, \ldots, u_r$,

$$E\exp\left[i\sum_{k=1}^{r} u_k \frac{\bar{\xi}_n(t_k) - \bar{\xi}_n(t_{k-1})}{\sqrt{n}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\longrightarrow \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(t_k - t_{k-1})u_k^2\right].$$

Пусть $v_\ell = u_k$, если $nt_{k-1} < \ell \le nt_k$. Тогда

$$\left|E\exp\left[i\sum_{k=1}^{r} u_k \frac{\bar{\xi}_n(t_k) - \bar{\xi}_n(t_{k-1})}{\sqrt{n}}\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(t_k - t_{k-1})u_k^2\right]\right|$$

$$= \left| E \exp\left[i \sum_{l=1}^{n} \frac{v_l \xi_l}{\sqrt{n}}\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(t_k - t_{k-1}) u_k^2\right]\right| \le$$

$$\le \left| E \exp\left[i \sum_{l=1}^{n} \frac{v_l \xi_l}{\sqrt{n}}\right] - \exp\left[-\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n} v_l^2\right]\right| +$$

$$+ \left| \exp\left[-\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n} v_l^2\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}(t_k - t_{k-1}) u_k^2\right]\right| =$$

$$= A_1^{(n)} + A_2^{(n)} .$$

Поскольку

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} v_l^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{[nt_k] - [nt_{k-1}]}{n} u_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{r}(t_k - t_{k-1}) u_k^2 ;$$

то $A_2^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и достаточно оценить $A_1^{(n)}$ .

$$A_1^{(n)} = \left| E \exp\left[i \sum_{l=1}^{n} \frac{v_l \xi_l}{\sqrt{n}}\right] - \exp\left[-\sum_{l=1}^{n} \frac{v_l^2}{2n}\right]\right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{n-1} \left| E \exp\left[i \sum_{m=1}^{l} \frac{v_m \xi_m}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\sum_{m=l+1}^{n} v_m^2\right] - \right.$$

$$\left. - E \exp\left[i \sum_{m=1}^{l+1} \frac{v_m \xi_m}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\sum_{m=l+2}^{n} v_m^2\right]\right|^{1)} \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{n} E \left| E\left(\exp\left[i \frac{v_l \xi_l}{\sqrt{n}}\right] - \exp\left[\frac{1}{2n} v_l^2\right] \Big| \xi_{l-1}, \xi_{l-2}, \dots\right)\right|$$

---

1) Суммы, в которых верхний предел меньше нижнего, считаем равными $0$ .

Положим $\varphi(x)=e^{ix}-1-ix-\frac{(ix)^2}{2}$ , заметив, что

$$|\varphi(x)|\le\frac{|x|^3}{6},\ |\varphi(x)|\le x^2. \quad (2)$$

Тогда

$$E(\exp[i\frac{v_\ell\xi_\ell}{\sqrt n}]\,|\,\xi_{\ell-1},\xi_{\ell-2},\dots)=$$

$$=1-\frac{v_\ell^2}{2n}+E(\varphi(\frac{v_\ell\xi_\ell}{\sqrt n})\,|\,\xi_{\ell-1},\xi_{\ell-2},\dots).$$

Отсюда следует, что

$$A_1^{(n)}\le\sum_{\ell=1}^{n}E|\varphi(\frac{v_\ell\xi_\ell}{\sqrt n})|+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{v_\ell^4}{8n^2},$$

Пусть $u=\max(|u_1|,\dots,|u_k|)$. Тогда $\max\limits_{1\le\ell\le n}|v_\ell|\le u$ и, каково бы ни было $\varepsilon>0$,

$$A_1^{(n)}\le\frac{u^4}{8n}+\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\frac{v_\ell^3}{n^{\frac32}}\int\limits_{|\xi_\ell|\le\frac{\varepsilon\sqrt n}{|v_\ell|}}|\xi_\ell|^3P(dx)+$$

$$+\frac{v_\ell^2}{n}\int\limits_{|\xi_\ell|>\frac{\varepsilon\sqrt n}{|v_\ell|}}|\xi_\ell|^2P(dx)\Big)\le\frac{u^4}{8n}+\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\frac{\varepsilon u^2}{n}+\frac{u^2}{n}\int\limits_{|\xi_1|>\frac{\varepsilon\sqrt n}{u}}|\xi_1|^2P(dx)\Big)=$$

$$=\frac{u^4}{8n}+\varepsilon u^2+u^2\int\limits_{|\xi_1|>\frac{\varepsilon\sqrt n}{u}}|\xi_1|^2P(dx)\xrightarrow[n\to\infty]{}\varepsilon u^2.$$

Лемма доказана.

Теперь нам для завершения доказательства теоремы 2.1 в рассматриваемом в этом параграфе случае осталось, согласно критерию слабой сходимости мер на $C[0,1]$ (см. [2, стр.581] или [16] ), доказать для произвольного $\varepsilon>0$ соотношение

$$\lim_{h\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\{\max_{|t-t'|\le h}|\xi_n(t)-\xi_n(t')|>\varepsilon\sqrt n\}=0. \quad (3)$$

Лемма 2.5. Для всякого $A>0$.

$$P\Big\{\max_{1\le m\le n}\Big|\sum_{k=l+1}^{l+m}\xi_k\Big|>A\Big\}\le 2P\Big\{\Big|\sum_{k=l+1}^{l+n}\xi_k\Big|>A-\sigma\sqrt{2n}\Big\}.$$

Лемма доказывается так же, как и для независимых случайных величин, поскольку выполнено условие (1).

Перейдем теперь к доказательству соотношения (3). Поскольку

$$\max_{|t-t'|\le h}|\xi_n(t)-\xi_n(t')|\le 2\max_{kh<1}\max_{kh<t\le(k+2)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|\le$$

$$\le 4\max_{kh<1}\max_{kh<t\le(k+1)h}|\xi_n(t)-\xi_n(kh)|\le$$

$$\le 8\max_{kh<1}\max_{1\le m\le[(k+1)nh]-[knh]+1}\Big|\sum_{l=[knh]+1}^{[knh]+m}\xi_l\Big|,$$

то по лемме 2.5

$$P\Big\{\max_{|t-t'|\le h}|\xi_n(t)-\xi_n(t')|>\varepsilon\sqrt{n}\Big\}\le$$

$$\le\frac{2}{h}P\Big\{\Big|\sum_{l=[knh]+1}^{[(k+1)nh]+1}\xi_l\Big|>\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{8}-\sigma\sqrt{2([(k+1)nh]-[knh]+1)}\Big\}\to$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{h}P\Big\{w_{\sigma^2}(h)>\frac{\varepsilon}{8}-\sigma\sqrt{2h}\Big\}=$$

$$=\frac{2}{h}P\Big\{|w_{\sigma^2}(1)|>\frac{\varepsilon}{8\sqrt{h}}-\sigma\sqrt{2}\Big\}\le$$

$$\le\frac{2}{\sigma h\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{\varepsilon}{8\sqrt{h}}-\sigma\sqrt{2}\Big)^{-2}\int_{|u|>\frac{\varepsilon}{8\sqrt{h}}-\sigma\sqrt{2}}u^2e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

## ~~§ 4. Доказательство теоремы 2.1.~~

### Общий случай.

Зафиксируем натуральное число $l$.

Пусть $n = sl + r,\ 0 \le r < l$.

Положим

$$\eta_{m,l} = \sum_{p=(m-1)l+1}^{ml} \xi_p\,, \quad \xi_{m,l} = \frac{\sigma\sqrt{l}\ \eta_{m,l}}{\sqrt{E(\eta^2_{m,l} / \xi_p,\ p \le (m-1)l}}\,,\ m \ge 1$$

Очевидно, что

$$E(\xi_{m,l} / \xi_p,\ p \le (m-1)l) = 0,\quad E(\xi^2_{m,l} / \xi_p,\ p \le (m-1)l) = \sigma^2 l$$

Введем случайную ломаную $\xi_{n,l}(t)$ с узлами в точках $0, \frac{l}{n}, \ldots, \frac{sl}{n}, 1$, равную $\sum_{p=1}^{m} \xi_{m,l}$ в точке $\frac{ml}{n}$ и постоянную в интервале $[\frac{sl}{n}, 1]$, и случайную ломаную $\xi'_{n,l}(t)$ с узлами в точках $0, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}, 1$ и равную $\sum_{p=1}^{m} \xi_{ml}$ в точке $\frac{m}{s}$. Очевидно, что $\xi'_{n,l}(t) = \xi_{n,l}(t\frac{sl}{n})$.

Напомним, что ломаная $\xi_n(t)$ равна $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ в точке $\frac{k}{n}$.

Оценим близость $\xi_{n,l}(t)$ и $\xi'_{n,l}(t)$:

$$P\left\{\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\xi_{n,l}(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\xi'_{n,l}(t)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\xi_{n,l}(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\xi_{n,l}(t\frac{sl}{n})}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{|t-t'|\le \frac{l}{n}} |\xi_{n,l}(t) - \xi_{n,l}(t')| > \varepsilon\sqrt{n}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\max_{1\le m\le s} |\xi_{m,l}| > \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{n}\right\} \le$$

$$\leq sP\left\{|\xi_{1,\ell}| > \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{n}\right\} \leq \frac{16s}{\varepsilon^2 n}\int\limits_{|\xi_{1,\ell}|>\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{n}} |\xi_{1,\ell}|^2 P(dx) \leq$$

$$\leq \frac{16}{\varepsilon^2 \ell}\int\limits_{|\xi_{1,\ell}|>\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{n}} |\xi_{1,\ell}|^2 P(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Обозначим $\Xi_n$, $\Xi_{n,\ell}$ и $\Xi'_{n,\ell}$ меры на $C[0,1]$, отвечающие случайным ломаным

$$\frac{\xi_n(t)}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\xi_{n,\ell}(t)}{\sqrt{n}} \quad и \quad \frac{\xi'_{n,\ell}(t)}{\sqrt{n}}.$$

Из полученной оценки и Леммы 2.2 следует, что для всякого $\ell$

$$L\left(\Xi_{n,\ell}, \Xi'_{n,\ell}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (5)$$

Кроме того,

$$P\left\{\max_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{\xi_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\xi_{n,\ell}(t)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left|\xi_n\left(\frac{k}{n}\right) - \xi_{n,\ell}\left(\frac{k}{n}\right)\right| > \varepsilon\sqrt{n}\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\max_{1\leq m\leq s}\left|\sum_{q=1}^{m}(\eta_{q,\ell} - \xi_{q,\ell})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\right\} +$$

$$+ P\left\{\max_{m\ell\leq n}\ \max_{m\ell+1\leq p\leq (m+1)\ell}\left|\sum_{q=m\ell+1}^{p}\xi_q\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\max_{1\leq m\leq s}\left|\sum_{q=1}^{m}(\eta_{q,\ell} - \xi_{q,\ell})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\right\} +$$

$$+ (s+1)\,P\left\{\max_{1\leq p\leq \ell}\left|\sum_{q=1}^{p}\xi_q\right| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\right\} \leq$$

$$\le P\Big\{\max_{1\le m\le s}\Big|\sum_{q=1}^{m}(\eta_{q,\ell}-\xi_{q,\ell})\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\Big\}+$$

$$+(s+1)\,P\Big\{\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2>\frac{\varepsilon^2}{4\ell}n\Big\}\le$$

$$\le P\Big\{\max_{1\le m\le s}\Big|\sum_{q=1}^{m}(\eta_{q,\ell}-\xi_{q,\ell})\Big|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}\Big\}+$$

$$+\frac{4([\frac{n}{\ell}]+1)\ell}{\varepsilon^2 n}\int\limits_{\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2>\frac{\varepsilon^2 n}{4\ell}}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2\,P(dx)\le$$

$$\le\frac{E\Big(\sum_{q=1}^{s}(\eta_{q,\ell}-\xi_{q,\ell})\Big)^2}{\frac{\varepsilon^2 n}{4}}+o(1)\quad(n\to\infty). \qquad (6)$$

Последнее неравенство следует из того, что последовательность $\sum_{q=1}^{p}(\eta_{q,\ell}-\xi_{q,\ell})$ $(p=1,2,\dots)$ образует мартингал. Заметим теперь, что из определения мартингал - разностей следует, что при $p<p'$

$$E(\xi_p\xi_{p'}/\xi_q,\ q\le m\le p)=$$

$$=E(E(\xi_p\xi_{p'}/\xi_q,\ q\le p)/\xi_q,\ q\le m\le p)=$$

$$=E(\xi_p E(\xi_{p'}/\xi_q,\ q\le p))/\xi_q,\ q\le m\le p)=0$$

и, следовательно,

$$E\Big(\Big(\sum_{p=1}^{\ell}\xi_p\Big)^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)=$$

$$=E\Big(\sum_{p=1}^{\ell}\xi_p^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big).$$

Учитывая это, получим, что

$$\frac{1}{n} E\Big(\sum_{q=1}^{s}(\eta_{q,\ell}-\xi_{q,\ell})\Big)^2=\frac{s}{n}E(\eta_{1,\ell}-\xi_{1,\ell})^2=$$

$$=\frac{s}{n}E\big(E((\eta_{1,\ell}-\xi_{1,\ell})^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots)\big)=$$

$$=\frac{s}{n}E\Big(2\ell\sigma^2-2\sigma\sqrt{\ell}\,E^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)\Big)\le$$

$$\le 2\sigma^2-2\sigma E\Big(E^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)\Big)=\Delta_\ell .$$

Покажем, используя эргодическую теорему, что $\Delta_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$.
Действительно,

$$\Delta_\ell\le 2\sigma E\Big|\sigma-E^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)\Big|=$$

$$=2\sigma E\,\frac{\Big|\sigma^2-E\Big(\frac{1}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)\Big|}{\sigma+E^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)}\le$$

$$\le 2E\Big|\sigma^2-E\Big(\frac{1}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_q^2/\xi_0,\xi_{-1},\dots\Big)\Big|\le 2E\Big|\sigma^2-\frac{1}{\ell}\sum_{q=1}^{\ell}\xi_k^2\Big|\xrightarrow[\ell\to\infty]{}0.$$

Из оценки (6) и леммы 2.1 следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,L(\Xi_n,\Xi_{n,\ell})=\inf_{\varepsilon>0}\Big(\varepsilon,\frac{4\Delta_\ell}{\varepsilon^2}\Big)\le\sqrt[3]{4\Delta_\ell}\,.$$

Из доказанного в предыдущем параграфе следует, что

$$L(\Xi'_{n,\ell},W_{\sigma^2})\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Поэтому с учётом (5) получаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,L(\Xi_n,W_{\sigma^2})\le\overline{\lim_{\ell\to\infty}}\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,L(\Xi_n,\Xi_{n,\ell})$$

$$+\varlimsup_{n\to\infty} L(\Xi_{n,e}, \Xi'_{n,e}) + \varlimsup_{n\to\infty} L(\Xi'_{n,e}, W_{o2}) \le$$

$$\le \varlimsup_{l\to\infty} \sqrt[3]{4\Delta_e} = 0.$$

**Теорема 2.1 доказана.**

# ГЛАВА III.

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

### § 1. Центральная предельная теорема для процессов с конечной дисперсией

Мы предполагаем, что на вероятностном пространстве $(X, \mathfrak{M}, P)$ задан автоморфизм $T$. Понятия и обозначения, введённые в этой ситуации в главе I, будут использоваться, как правило, без дополнительных пояснений. Предположим, далее, что задана $\sigma$ - алгебра $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, инвариантная относительно $T$, т.е. такая, что $T^{-1}(\mathfrak{M}_0) \subset \subset \mathfrak{M}_0$. Положим $\mathfrak{M}_k = T^{-k}(\mathfrak{M}_0)$ $(-\infty < k < \infty)$, $P_k = P_{\mathfrak{M}_k}$, $Q_k = P_k - P_{k+1}$. $Q_k$ является проектором, т.к. $P_k P_{k+1} = P_{k+1} P_k = P_{k+1}$. Положим $H_k = Q_k(L_2)$. Обозначим буквой $R$ линейное пространство (незамкнутое) тех функций $g \in L_2$, для которых при некотором целом $k$ выполнено равенство

$$g = \sum_{m=-k}^{k} Q_m g \quad .$$

Теорема 3.1. Пусть $T$ - эргодический автоморфизм, $f \in L_2$ и выполнено условие

$$\inf_{g \in R} \varlimsup_{n \to \infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f-g) \Big|_2 = 0. \qquad (1)$$

Тогда существует предел

$$\lim n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} U^k f \Big|_2 = \sigma \qquad (2)$$

и справедливо соотношение

$$P\Big\{ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f < y \Big\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi_\sigma(y) \qquad (3)$$

во всех точках $y$ непрерывности функции $\Phi_\sigma$ , причём

$$\Phi_\sigma(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \quad , \qquad \text{если } \sigma > 0,$$

$$\Phi_0(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases} \qquad . \qquad (4)$$

Доказательство. Докажем сначала, что найдется функция $h$ со свойствами:

1. $h \in Q_c(L_2)$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum\limits_{k=0}^{n-1} U^k(f-h) \right|_2 = 0$.

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f^{(\varepsilon)} \in R$ ,что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-f^{(\varepsilon)}) \right|_2 \le \varepsilon .$$

Имеют место равенства

$$f = f^{(\varepsilon)} + f - f^{(\varepsilon)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k f^{(\varepsilon)} + f - f^{(\varepsilon)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} U^{-k} Q_k f^{(\varepsilon)} + U\Big[\sum_{k>0} \sum_{l=-k}^{-1} U^l Q_k f^{(\varepsilon)} - \sum_{k<0} \sum_{l=0}^{-k-1} U^l Q_k f^{(\varepsilon)}\Big] -$$

$$- \Big[\sum_{k>0} \sum_{l=-k}^{-1} U^l Q_k f^{(\varepsilon)} - \sum_{k<0} \sum_{l=0}^{-k-1} U^l Q_k f^{(\varepsilon)}\Big] + f - f^{(\varepsilon)} =$$

$$= h^{(\varepsilon)} + U g^{(\varepsilon)} - g^{(\varepsilon)} + f - f^{(\varepsilon)} .$$

Легко проверяется, что $h^{(\varepsilon)} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} U^{-k} Q^k f^{\varepsilon} \in Q_0(L_2)$

Заметим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-h^{(\varepsilon)}) \right|_2 \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| U^n g^{(\varepsilon)} - g^{(\varepsilon)} \right|_2 +$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-f^{(\varepsilon)}) \right|_2 \le 2 \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| g^{(\varepsilon)} \right|_2 + \varepsilon = \varepsilon .$$

Из этой оценки следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (h^{(\varepsilon)} - h^{(\varepsilon')}) \Big|_2 \le$$

$$\le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big( \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (f - h^{(\varepsilon)}) \Big|_2 + \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (f - h^{(\varepsilon')}) \Big| \le \varepsilon + \varepsilon',$$

но поскольку при любом $\varepsilon$ $U^K h^{(\varepsilon)} \in Q_K(L_2)$, то функции $U^K(h^{(\varepsilon)} - h^{(\varepsilon')})$ при различных $K$ ортогональны и

$$|h^{(\varepsilon)} - h^{(\varepsilon')}|_2 = n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (h^{(\varepsilon)} - h^{(\varepsilon')}) \Big|_2 \le \varepsilon + \varepsilon' \quad (5)$$

Таким образом $h^{(\varepsilon)} - h^{(\varepsilon')} \xrightarrow[\varepsilon, \varepsilon' \to 0]{} 0$ и вследствие полноты $L_2$ найдется функция $h$, такая, что

$$|h^{(\varepsilon)} - h|_2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Поскольку $Q_0(L_2)$ замкнуто, $h \in Q_0(L_2)$. Далее,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (f - h) \Big|_2 \le \lim_{\varepsilon\to 0} \Big( \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (f - h^{(\varepsilon)}) \Big|_2 +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big| \sum_{K=0}^{n-1} U^K (h^{(\varepsilon)} - h) \Big|_2 \le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \big( \varepsilon + |h^{(\varepsilon)} - h| \big) = 0.$$

Существование $h$ со свойствами 1 и 2 установлено. Заметим, что из (5) легко следует единственность $h$.

Положим $\sigma = |h|_2$. Поскольку $h \in Q_0(L_2)$, то $U^K h \in Q_K(L_2)$, т.е. $U^K h$ измерима относительно $\mathfrak{M}_K$ и ортогональна подпространству $L_2(\mathfrak{M}_{K+1})$.

Это означает, что $U^{-K} h$ есть последовательность мартингал - разностей. Эта последовательность эргодична, т.к. $T$ - эргодический автоморфизм. Поэтому ( см. [26], [12] или гл. 2 настоящей работы) величины $n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} U^k h$ распределены асимптотически нормально со средним $0$ и дисперсией $\sigma^2$.

Из свойства 2 функции $h$, неравенства Чебышева и леммы 2.3 следует, что то же верно и для величин $n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f$, а это эквивалентно соотношению (3).

Докажем равенство (2):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n^{-\frac{1}{2}} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right|_2 - \sigma \right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n^{-\frac{1}{2}} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right|_2 - n^{-\frac{1}{2}} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\right|_2 \right| \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k (f-h)\right|_2 = 0 .$$

Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если функцию $f$ можно представить в виде

$$f = h + Ug - g, \quad g \in L_2, \quad h \in Q_0(L_2), \tag{6}$$

то для неё выполнены условия теоремы 3.1.

Это следует из того, что $h \in R$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k (f-h)\right|_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} |U^n g - g|_2 \le$$

$$\le 2 \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} |g|_2 = 0.$$

Вопрос о том, когда имеет место представление (6), разбирается в § 2.

Замечание 3.2. Если автоморфизм $T$ эргодичен и существует $\sigma$ - алгебра $\mathfrak{M}_0$ со свойствами: $T^{-1}(\mathfrak{M}_0) \subset \mathfrak{M}_0$,

$T^{-1}(\mathfrak{M}_0) \neq \mathfrak{M}_0$ ( или, другими словами, если $T$ - эргодический автоморфизм с положительной энтропией), то существуют функции $f$, обладающие тем свойством, что последовательность $U^k f$ подчиняется центральной предельной теореме. Так будет, например, если $f \in L_2(\mathfrak{M}_0) \ominus L_2(T^{-1}(\mathfrak{M}_0))$.

Впервые существование таких функций установил Я.Г.Синай [22], используя свою теорему о слабом изоморфизме.

Из существования таких функций сразу следует, что множество этих функций плотно в $L_2 \ominus C$ [1]. Действительно, в $L_2 \ominus C$ плотны функции вида $Ug-g$ (это легко следует из эргодичности; см., например, [23], стр.30 ). Значит, функции вида $f+Ug-g$ ( $f$ фиксирована) также плотны в $L_2 \ominus C$. Но они подчиняются центральной предельной теореме вместе с $f$.

Теорема 3.2. Пусть $T$ - эргодический автоморфизм, $\mathfrak{M}_0$ - инвариантная относительно $T$ $\sigma$- алгебра, $f$ - такая функция, что при некотором $\delta$ $(0 \le \delta \le \infty)$ $f \in L_{2+\delta}$ и

$$\sum_{k \geq 0} \left( |P_k f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} + |f - P_{-k} f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \right) < \infty .$$

Тогда $f$ удовлетворяет условию (1) теоремы 3.1 и, следовательно, для $f$ справедливы соотношения (2) и (3).

Доказательство. Положим $f_e^+ = P_e f$, $f_e^- = f - P_e f$, $r_{k,e}^+ = (f_e^+, U^k f_e^+)$, $r_{k,e}^- = (f_e^-, U^k f_e^-)$ [2]

1) $C$ - подпространство постоянных.

2) Мы пишем $(f, g)$ вместо $\int_X f(x) g(x) P(dx)$.

Заметим, используя очевидные соотношения $U^k f_\ell^+ \in P_{\ell+k}(L_2)$ и $U_k f_\ell^- \in (I-P_{\ell+k})(L_2)$, что

$$|r_{k,\ell}^+| = |r_{|k|,\ell}^+| = |(f_\ell^+, U^{|k|} f_\ell^+)| = |(f_\ell^+, P_{\ell+|k|} U^k f_\ell^+)| =$$

$$= |(P_{\ell+|k|} f_\ell^+, U^k f_\ell^+)| = |(f_{\ell+|k|}^+, U^k f_\ell^+)| \le$$

$$\le |f_{\ell+|k|}^+|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} |f_\ell^+|_{2+\delta} \le |f_{\ell+|k|}^+|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} |f|_{2+\delta} ,$$

$$|r_{k,\ell}^-| = |r_{-|k|,\ell}^-| = |(f_\ell^-, U^{-|k|} f_\ell^-)| =$$

$$= |(f_\ell^-, (I-P_{\ell-|k|}) U^{-|k|} f_\ell^-)| \le |((I-P_{\ell-|k|}) f_\ell^-, U^{-|k|} f_\ell^-)| =$$

$$= |(f_{\ell+|k|}^-, U^{-|k|} f_\ell^-)| \le |f_{\ell+|k|}^-|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} |f_\ell^-|_{2+\delta} \le$$

$$\le 2 |f_{\ell+|k|}^-|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} |f|_{2+\delta} .$$

Поскольку $f - f_\ell^+ - f_\ell^- \in R$, то

$$\inf_{g\in R} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-g)\Big|_2 \le \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f_\ell^+ + f_\ell^-)\Big|_2 \le$$

$$\le \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}} \Big(\Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f_\ell^+\Big|_2 + \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f_\ell^-\Big|_2\Big) =$$

$$= \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \lim_{n\to\infty} \Big[\Big(\sum_{|k|<n} \Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big) r_{k,\ell}^+\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \Big(\sum_{|k|<n} \Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big) r_{k,\ell}^-\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] =$$

$$= \overline{\lim_{l\to\infty}} \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{k,l}^{+} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{k,l}^{-} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \le$$

$$\le \overline{\lim_{l\to\infty}} \left[ \left( 2|f|_{2+\delta} \sum_{k=l}^{\infty} |f_k^{+}|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( 4|f|_{2+\delta} \sum_{k=l}^{\infty} |f_k^{-}|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

Теорема доказана.

## § 2. Центральная предельная теорема для процессов с конечным математическим ожиданием

Пусть $R_1$ - совокупность тех функций $g \in L_1$, для которых при некотором целом $K$ справедливо равенство

$$g = \sum_{m=-K}^{K} Q_m g \quad .$$

Теорема 3.3. Пусть $T$ - эргодический автоморфизм, $f \in L_1$ и выполнены условия

$$\inf_{g\in R_1} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f-g) \right|_1 = 0, \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k f \right|_1 < \infty \quad . \tag{8}$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k f \right|_1 = \lambda \tag{9}$$

и справедливо в точках непрерывности функции $\Phi_\sigma$ соотношение

$$P\left\{ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f < y \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_\sigma(y), \tag{10}$$

причём $\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\lambda$, а $\Phi_\sigma$ задается равенствами (4).

Доказательству теоремы 33 предшествуют две леммы.

Лемма 3.1. Пусть $h \in Q_0$ $(L_1)$. Положим $\sigma = |h|_2$, $0 \le \sigma \le \infty$. Тогда имеют место неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_1 \le \sigma \le M \varlimsup_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_1, \quad (11)$$

причём $M$ - некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Левое неравенство очевидно, если $\sigma = \infty$, и следует из неравенства

$$n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_1 \le n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_2 = \sigma,$$

если $\sigma < \infty$.

Для доказательства правого неравенства сформулируем важный результат Д.Буркхолдера ( теорема 8 из [28] ):

Пусть $d_k$ - последовательность мартингал - разностей (стационарность не предполагается). Тогда для всякого $\lambda > 0$ верно неравенство

$$\lambda P\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} > \lambda\Big\} \le M \sup_{0<n<\infty} E\Big|\sum_{k=1}^{n} d_k\Big|, \quad (12)$$

где $M$ - абсолютная постоянная.

Поскольку $U^{-k}h$ - последовательность мартингал - разностей, то, положив $d_k = U^{n-k}h$, если $1 \le k \le n$, и $d_k = 0$, если $k > n$, мы получим, взяв $\lambda = A\sqrt{n}$, что

$$P\Big\{n^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} (U^k h)^2\Big)^{\frac{1}{2}} > A\Big\} \le \frac{M}{A} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_1,$$

т.к. по известным свойствам мартингалов последовательность $E\Big|\sum_{k=1}^{m} d_k\Big|$ возрастает.

Заметим теперь, что из эргодичности $T$ и соотношения

$(U^k h)^2 = U^k h^2$ следует, что

$$P\left\{ n^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (U^k h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma \right\} = 1.$$

Пусть $0 < A < \sigma$. Тогда

$$1 = \lim_{n\to\infty} P\left\{ n^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (U^k h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} > A \right\} \le \frac{M}{A} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k h \right|_1$$

и, следовательно,

$$A \le M \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k h \right|_1 .$$

Поскольку $0 < A < \sigma$ произвольно, то и

$$\sigma \le M \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k h \right|_1 .$$

Лемма 3.2. Пусть $h \in Q_0(L_2)$ и $\sigma = |h|_2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k h \right|_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma . \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим через $F_n$ функцию распределения величины $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} U^k h$. $F_n$ слабо сходится к $\Phi_\sigma$. Докажем, что

$$n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k h \right|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, dF_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} |t|\, d\Phi_\sigma(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma .$$

Из слабой сходимости следует, что для всякого $N > 0$

$$\int_{|t|\le N} (1+t^2)\, dF_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{|t|\le N} (1+t^2)\, d\Phi_\sigma(t) .$$

Но поскольку дисперсия $F_n$ и $\Phi_\sigma$ равна $\sigma^2$, то

$$\int_{|t|>N} (1+t^2)\, dF_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{|t|>N} (1+t^2)\, d\Phi_\sigma(t) .$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|t|>N} (1+t^2)\, dF_n(t) = 0$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |t| dF_n(t) - \int_{-\infty}^{\infty} |t| d\Phi_\sigma(t) \right| \le$$

$$\le \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{|t|\le N} |t| dF_n(t) - \int_{|t|\le N} |t| d\Phi_\sigma(t) \right| +$$

$$+ \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[ \int_{|t|>N} |t| dF_n(t) + \int_{|t|>N} |t| d\Phi_\sigma(t) \right] \le$$

$$\le \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[ \int_{|t|>N} (1+t^2) dF_n(t) + \int_{|t|>N} (1+t^2) d\Phi_\sigma(t) \right] = 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, но используя вместо $L_2$ - нормы $L_1$ - норму, можно из условия (7) получить такое утверждение: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $h_\varepsilon \in Q_0(L_1)$ со свойством

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f - h_\varepsilon) \right|_1 \le \varepsilon .$$

Применяя лемму 3.1, получим, что

$$|h_\varepsilon - h_{\varepsilon'}|_2 \le M \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (h_\varepsilon - h_{\varepsilon'}) \right|_1 \le$$

$$\le M\left( \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f - h_\varepsilon) \right|_1 + \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f - h_{\varepsilon'}) \right|_1 \right) \le$$

$$\le M(\varepsilon + \varepsilon') .$$

Заметим теперь, что $h_\varepsilon \in L_2$, т.к. по лемме 3.1 и условию (8)

$$|h_\varepsilon|_2 \le M\left( \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f - h_\varepsilon) \right|_1 + \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U^k f \right|_1 \right) < \infty$$

Из этих неравенств $\boxed{\text{следует, что}}$ и полноты $L_2$ $|h_\varepsilon - h|_2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, где $h \in Q_0$ ($L_2$). Как и в теореме 3.1, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-h)\Big|_1 = 0 \quad (14)$$

и что для $f$ справедлива (10), причём $\sigma = |h|_2$.

Из леммы 3.2 и равенства (14) следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum\limits_{k=0}^{n-1} U^k f\Big|_1 = \lambda$ и равенство $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$. Теорема доказана.

Замечание 3.3. Если функцию $f$ можно представить в виде

$$f = h + Ug - g,\ g \in L_1,\ h \in Q_0(L_1),$$

то для неё выполнено условие (7) теоремы 3.3, т.к.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k(f-h)\Big|_1 \le 2 \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} |g|_1 = 0.$$

Положим $\mathfrak{M}_\infty = \bigwedge\limits_{-\infty<k<\infty} \mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{M}_{-\infty} = \bigvee\limits_{-\infty<k<\infty} \mathfrak{M}_k$, так что $\mathfrak{M}_\infty \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_{-1} \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_{-\infty}$. Пусть также $P_{\pm\infty} = P_{\mathfrak{M}_{\pm\infty}}$.

Теорема 3.4. Предположим, что $f \in (P_{-\infty} - P_\infty)L_1$.

Тогда, если $f$ можно представить в виде

$$f = h + Ug - g,\ h \in Q_0 L_1,\ g \in L_p\ (1 \le p \le \infty), \quad (15)$$

то частные суммы рядов

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} U^{-\ell} P_\ell f \quad \text{и} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} U^\ell (f - P_{-\ell} f) \quad (16)$$

ограничены в $L_p$; если $p < \infty$, то эти ряды сходятся в $L_p$. В равенстве (15) $g$ можно задать формулой

$$g = \sum_{\ell=1}^{\infty} U^{-\ell} P_\ell f - \sum_{\ell=0}^{\infty} U^\ell (f - P_{-\ell} f). \quad (17)$$

Обратно, $f$ можно представить в виде (15), если ряды (16) сходятся в $L_p$ ; если $p>1$ , то достаточно потребовать, чтобы $f\in(P_{-\infty}-P_{\infty})L_1$ [1] и частные суммы рядов (16) были ограничены в $L_p$ .

Замечание 3.4. В представлении (15) функция $h$ определена однозначно, а функция $g$ - с точностью до аддитивной постоянной, если $T$ - эргодический автоморфизм.

Действительно, пусть

$$f=h+Ug-g=h'+Ug'-g',\quad h,h',g,g'\in L_1.$$

Тогда

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}(h-h')\Big|_1=|U^n(g'-g)-(g'-g)|_1\le$$
$$\le 2|g'-g|_1=o(n^{\frac12})\quad(n\to\infty)$$

и по лемме 3.1 $|h-h'|_2=0$, т.е. $h=h'$.

Отсюда $U(g-g')=g-g'$ и вследствие эргодичности $g-g'=c$ .

Обычно мы будем выбирать $g$ так, чтобы $Eg=0$. Такова, например, функция $g$ в формуле (17).

Если же потребовать, чтобы $g\in(P_{-\infty}-P_{\infty})L_1$ , то $g$ определена однозначно и без предположения об эргодичности $T$ и определяется формулой (17). Это ясно из доказательства первой части теоремы 3.4.

Доказательство теоремы 3.4.

1. Пусть $f$ имеет представление (15).

Покажем, что функции $P_{\infty}g$ и $g-P_{-\infty}g$ инвариантны относительно $U$ . Заметим сначала, что при $1\le p<\infty$

---

1) Это условие выполнено, если ряды (16) сходятся.

$$|P_n(g)-P_\infty g|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad |P_n g - P_{-\infty} g|_p \xrightarrow[n\to-\infty]{} 0 .$$

Это следует, например, из результатов Дуба ( см. теоремы 4.3, 4.2 и 4.1 гл. УП из [9] ).

Используя очевидное соотношение $P_n U = U P_{n-1}$, имеем

$$P_n f = P_n h + U P_{n-1} g - P_n g . \qquad (18)$$

Поскольку $f, h \in (P_{-\infty} - P_\infty) L_1$, то

$$P_\infty f = 0, \; P_\infty h = 0, \; P_{-\infty} f = f, \; P_{-\infty} h = h .$$

Переходя в (18) к пределу в $L_1$ при $n \to \pm\infty$, имеем

$$U P_\infty g = P_\infty g, \; f = h + U P_{-\infty} g - P_{-\infty} g .$$

В сочетании с (15) это дает соотношения

$$U P_\infty g = P_\infty g, \; U(g - P_{-\infty} g) = g - P_{-\infty} g .$$

Вычислим частные суммы рядов (16).

Если $\ell \geq 1$, то

$$P_\ell f = P_\ell h + P_\ell U g - P_\ell g = U P_{\ell-1} g - P_\ell g$$

и

$$\sum_{\ell=1}^{n} U^{-\ell} P_\ell f = \sum_{\ell=1}^{n} (U^{-(\ell-1)} P_{\ell-1} g - U^{-\ell} P_\ell g) =$$

$$= P_0 g - U^{-n} P_n g .$$

Если же $\ell \geq 0$, то

$$f - P_{-\ell} f = h + U g - g - P_{-\ell} h - P_{-\ell} U g + P_{-\ell} g =$$

$$= U g - g - U P_{-(\ell+1)} g - P_{-\ell} g$$

и

$$\sum_{\ell=0}^{n} U^{\ell} (f - P_{-\ell} f) = \sum_{\ell=0}^{n} [U^{\ell+1}(g - P_{-(\ell+1)} g) - U^{\ell}(g - P_{-\ell} g)] =$$

$$= P_0 g - g + U^{n+1}(g - P_{-(n+1)} g) .$$

Из полученных выражений вытекает ограниченность частных сумм в $L_p$. Если же $1 \le p < \infty$, то эти суммы имеют пределы в $L_p$.

Первая сумма сходится к $P_0 g - P_\infty g$, т.к.

$$\| U^{-n} P_n g - P_\infty g \|_p = \| U^{-n}(P_n g - P_\infty g) \|_p = \| P_n g - P_\infty g \|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Вторая сумма стремится к $P_0 g - P_{-\infty} g$, т.к.

$$\| U^{n+1}(g - P_{-(n+1)} g) - (g - P_{-\infty} g) \|_p = \| (g - P_{-(n+1)} g) - (g - P_{-\infty} g) \|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Отсюда также ясно, что если положить

$$g' = \sum_{\ell=1}^{\infty} U^{-\ell} P_\ell f - \sum_{\ell=0}^{\infty} U^{\ell}(f - P_{-\ell} f),$$

то

$$g' = P_0 g - P_\infty g - (P_0 g - P_{-\infty} g) = (P_{-\infty} - P_\infty) g$$

и

$$f = h + Ug' - g',$$

т.к. вследствие инвариантности $P_\infty g$ и $g - P_{-\infty} g$ относительно $U$

$$U(g - g') = U(g - P_{-\infty} g) + U P_\infty g = g - P_{-\infty} g + P_\infty g = g - g',$$

а поэтому

$$Ug - g = Ug' - g'.$$

2. Положим

$$g_n = \sum_{\ell=1}^{n} U^{-\ell} P_\ell f - \sum_{\ell=0}^{n-1} U^{\ell}(f - P_{-\ell} f).$$

Вычислим $f - Ug_n + g_n$:

$$f - Ug_n + g_n = f - \sum_{l=0}^{n-1} U^{-l} P_{l+1} f + \sum_{l=1}^{n} U^{l}(f - P_{-l+1} f) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} U^{-l} P_l f - \sum_{l=0}^{n-1} U^{l}(f - P_{-l} f) =$$

$$= f - \sum_{l=-(n-1)}^{n} U^{l} P_{-l+1} f + \sum_{l=1}^{n} U^{l} f + \sum_{l=-n}^{n-1} U^{l} P_{-l} f - \sum_{l=0}^{n-1} U^{l} f =$$

$$= \sum_{-(n-1)}^{(n-1)} U^{l}(P_{-l} - P_{-l+1}) f + U^{n}(f - P_{-n+1} f) + U^{-n} P_n f .$$

Положим $h_n = \sum_{l=-(n-1)}^{n-1} U^{l}(P_{-l} - P_{-l+1}) f$,

$r_n = U^{n}(f - P_{-n+1} f) + U^{-n} P_n f$. Тогда

$f - Ug_n + g_n = h_n + r_n$, причём

$h_n = \sum_{l=-(n-1)}^{n-1} (P_0 - P_1) U^{l} f \in (P_0 - P_1) L_1 = Q_0 L_1$,

а $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} 0$, если $1 \le p < \infty$.

Предположим пока, что $1 \le p < \infty$. Покажем, что в условиях теоремы найдется подпоследовательность $n_k$ и функция $g \in L_p$ такие, что $g_{n_k}$ слабо сходится в $L_1$ к $g$.

При $p = 1$ это прямо следует из условий теоремы. Если $1 < p < \infty$, то пространство $L_p$ рефлексивно. Поэтому из ограниченности последовательности $g_n$ в $L_p$ следует, что она слабо компактна.

Заметив, что из слабой сходимости в $L_p$ следует слабая сходимость в $L_1$, мы устанавливаем существование требуемой подпоследовательности $n_k$ и функции $g$.

Функция $f-Ug+g$, будучи слабым пределом в $L_1$ последовательности $h_{n_k}$ (напомним, что $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} 0$), принадлежит $Q_0L_1$, т.к. $h_n \in Q_0L_1$ и $Q_0L_1$ слабо замкнуто.

Пусть теперь $p=\infty$. Поскольку из ограниченности частных сумм в $L_\infty$ следует ограниченность в $L_q$, $1\le q<\infty$, согласно только что изложенному можно утверждать, что

$$f=h+Ug-g,\ h\in Q_0L_1,\ g\in L_1.$$

Но тогда из первой части теоремы следует, что $g$ можно задать формулой (17), причём, ряды сходятся в $L_1$. Но их частные суммы ограничены в $L_\infty$. Поэтому $g\in L_\infty$. Доказательство закончено.

Теорема 3.5. Пусть $T$ - эргодический автоморфизм, $\mathfrak{M}_0$ - инвариантная относительно $T$ $\sigma$- алгебра, $f\in L_1$ и выполнены условия

$$\sum_{k\ge 0}\left(|P_k f|_1+|f-P_{-k}f|_1\right)<\infty, \tag{18}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}U^k f\right|_1<\infty. \tag{19}$$

Тогда выполнены условия теоремы 3.3 и, следовательно, справедливы соотношения (9) и (10).

Доказательство. По теореме 3.4 из (18) следует, что

$$f=h+Ug-g,\ h\in Q_0L_1,\ g\in L_1.$$

Отсюда, согласно замечанию 3.3, вытекает выполнение условия (7) терремы 3.3. Условие же (8) теоремы 3.3 совпадает с условием (19) теоремы 3.5.

Замечание 3.5. В условиях теоремы 3.5 имеет место представление

$$f = h + Ug - g,\ h \in Q_0 L_2\ ,\ g \in L_1\ .$$

Это можно вывести из леммы 3.1, т.к.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_1 \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\Big|_1 + 2\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} |g|_1 < \infty.$$

Точно так же в условиях теоремы 3.2 имеет место представление

$$f = h + Ug - g,\ h \in Q_0 L_2\ ,\ g \in L_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}\ .$$

Это следует из теоремы 3.4 и того, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k h\Big|_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\Big|_1 \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\Big|_2$$

Пример. Пусть $Y_k$ и $Z_k$ - независимые последовательности независимых случайных величин, причём случайные величины, обозначенные одной буквой, одинаково распределены. Пусть $EY_k^2 < \infty$ , $EY_k = 0$, $E|Z_k| < \infty$, $EZ_k^2 = \infty$
Положим $X_k = Y_k + Z_{k+1} - Z_k$ .

Тогда $X_0$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5, если взять в качестве вероятностного пространства пространство реализаций векторного процесса ( $Y_k$, $Z_k$), а в качестве $\mathfrak{M}_0$ -$\sigma$- алгебру, порождённую $Y_k$ и $Z_k$ при $k \ge 0$.
Заметим, что $EX_0^2 = \infty$ .

## § 3. Сходимость распределений случайных ломаных, построенных по стационарному процессу.

Пусть $U^u f$ - стационарный случайный процесс, а случайная ломаная $f_n(t)$ имеет своими узлами точки вида $kn^{-1}$, $k = 0,1, \dots, n$, и равна $0$ в $0$ и $\sum_{\ell=0}^{k-1} U^\ell f$ в точке $kn^{-1}$ при $k>0$.

**Теорема 3.6.** Пусть $T$ - эргодический автоморфизм с инвариантной $\sigma$ - алгеброй $\mathfrak{M}_0$ и имеет место представление

$$f = h + Ug - g, \quad g \in L_2, \; h \in Q_0 L_2 .$$

Обозначим через $F_n$ распределение в $C[0,1]$, соответствующее случайной ломаной $n^{-\frac{1}{2}} f_n(t)$.

Тогда
$$F_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} W_{\sigma^2}, \quad \sigma = |h|_2 = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} \Big|\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\Big|_2 . \qquad (19)$$

**Доказательство.** Пусть случайная ломаная $h_n(t)$ построена по процессу $U^k h$ так же, как $f_n(t)$ по $U^k f$. Обозначим распределение, соответствующее $n^{-\frac{1}{2}} h_n(t)$, через $H_n$.

По теореме 2.1. $H_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} W_{\sigma^2}$. С другой стороны, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$P\Big\{\max_{0\le t\le 1} |n^{-\frac{1}{2}} f_n(t) - n^{-\frac{1}{2}} h_n(t)| > \varepsilon\Big\} \le$$

$$\le P\Big\{\max_{1\le k\le n} \Big|\sum_{\ell=0}^{k-1} U^\ell (f-h)\Big| > \varepsilon n^{\frac{1}{2}}\Big\} =$$

$$= P\Big\{\max_{1\le k\le n} |U^k g - g| > \varepsilon n^{\frac{1}{2}}\Big\} \le$$

$$\le P\Big\{\max_{1\le k\le n} |U^k g| > \frac{\varepsilon}{2} n^{\frac{1}{2}}\Big\} \le$$

$$\le n P\Big\{|g| > \frac{\varepsilon}{2} n^{\frac{1}{2}}\Big\} \le \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{|g| > \frac{\varepsilon}{2} n^{\frac{1}{2}}} g^2(x) P(dx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Таким образом наша теорема следует из леммы 2.3.

Следствие 3.1. Пусть для $f$ выполнены условия теоремы 3.2 при $\delta = 0$, т.е.

1. $f \in L_2$,
2. $\sum_{k \geq 0} (|P_k f|_2 + |f - P_{-k} f|_2) < \infty$.

Тогда выполнено условие теоремы 3.6.

Действительно, по теореме 3.4

$$f = h + Ug - g, \; g \in L_2, \; h \in Q_0 L_1 .$$

Но, поскольку $f \in L_2$, $h = f - Ug + g \in L_2$.

Замечание 3.6. Нетрудно убедиться, что во всех утверждениях §§ 1,2,3 настоящей главы ( за исключением замечания 3.4 ) достаточно вместо эргодичности $T$ требовать, чтобы из соотношений $T^{-1}(A) = A$, $A \in \mathcal{M}_{-\infty}$ следовало, что $P(A)$ есть либо 0, либо 1 ( т.е., чтобы $T$ был эргодичен на $\mathcal{M}_{-\infty}$), т.к. возникающие последовательности мартингал - разностей измеримы относительно $\mathcal{M}_{-\infty}$.

## § 4. Процессы, обладающие свойствами перемешивания и функционалы от них.

В этом параграфе приводятся некоторые следствия теорем 3.2, 3.5 и следствия 3.1. Они относятся к процессам, порождённым случайными процессами, удовлетворяющими тому или иному условию перемешивания. Среди этих следствий имеются как уже известные теоремы, так и новые результаты

Пусть $T$ - автоморфизм вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$, а $\sigma$- алгебра $\mathcal{L} \subset \mathfrak{M}$. Положим $\mathcal{L}_K^{\ell} = \bigvee_{k \leq m \leq \ell+1} T^{-m}(\mathcal{L})$, если $-\infty \leq K \leq \ell \leq \infty$. Очевидно, что $T^{-n}(\mathcal{L}_K^{\ell}) = \mathcal{L}_{K+n}^{\ell+n}$.

Определим числа $\alpha(n)$, $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ при $n \geq 1$ равенствами

$$\alpha(n) = \sup_{A \in \mathcal{L}_{-\infty}^{K},\, B \in \mathcal{L}_{K+n}^{\infty}} |P(AB) - P(A)P(B))|,$$

$$\varphi(n) = \sup_{A \in \mathcal{L}_{-\infty}^{K},\, B \in \mathcal{L}_{K+n}^{\infty}} P^{-1}(A)|P(AB) - P(A)P(B)|,$$

$$\psi(n) = \sup_{A \in \mathcal{L}_{-\infty}^{K},\, B \in \mathcal{L}_{K+n}^{\infty}} P^{-1}(A)P^{-1}(B)|P(AB) - P(A)P(B)|.$$

Заметим, что $\alpha(n)$, $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ не зависят от $K$, т.к. автоморфизм $T$ сохраняет меру $P$.

Определение 3.1. Говорят, что $\sigma$- алгебра $\mathcal{L}$ обладает свойством сильного перемешивания ( с.п.), равномерно сильного перемешивания ( р.с.п.), плавного перемешивания (п.п.), если, соответственно, $\alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Замечание 3.7. Очевидно, что $\alpha(n) \leq 1$, $\varphi(n) \leq 1$. С другой стороны, не исключено равенство $\psi(n) = \infty$. Соотношение $\psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ подразумевает, в частности, что $\psi(n) < \infty$ для $n > n_0$.

Определение 3.2. Если $\sigma$- алгебра $\mathcal{L}$ порождена функцией $f$, то говорят, что процесс $f$ ($T^k$) удовлетворяет условию с.п., р.с.п. или п.п., если соответствующему условию удовлетворяет $\mathcal{L}$.

Лемма 3.3. Пусть $\sigma$- алгебра $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$. Если $f \in L_p, g \in L_{p'}$ ($1 \le p, p' \le \infty, p^{-1} + p'^{-1} = 1$), то

$$(P_{\mathfrak{M}_0} f, g) = (P_{\mathfrak{M}_0} f, P_{\mathfrak{M}_0} g) = (f, P_{\mathfrak{M}_0} g).^{1)}$$

Доказательство.

$$(P_{\mathfrak{M}_0} f, g) = E(E(f|\mathfrak{M}_0)g) =$$

$$= E(E[E(f|\mathfrak{M}_0)g|\mathfrak{M}_0]) =$$

$$= E[E(f|\mathfrak{M}_0)E(g|\mathfrak{M}_0)] = (P_{\mathfrak{M}_0} f, P_{\mathfrak{M}_0} g) =$$

$$= E(E[E(g|\mathfrak{M}_0)f|\mathfrak{M}_0]) = E(f E(g|\mathfrak{M}_0)) =$$

$$= (f, P_{\mathfrak{M}_0} g) .$$

Лемма доказана.

Положим $P_k^l = P_{\mathcal{L}_k^l}$ ($-\infty \le k \le l \le \infty$). Если $S$ - некоторый оператор в пространствах $L_p$, то через $|S|_{p,q}$ обозначим норму $S$, как оператора из $L_p$ в $L_q$ (имеются ввиду комплексные пространства

---

1) $(f, g) = Efg$.

Не исключается равенство $|S|_{p,q}=\infty$. Если $1\le p\le\infty$, то $p'=(1-p^{-1})^{-1}$. Символ $E$ понимается как оператор, сопоставляющий функции её интеграл.

Лемма 3.4. Имеют место оценки ( $p\geqslant q\geqslant 1$):

$$\max(|P_{k+n}^{\infty}P_{-\infty}^{k}-E|_{p,q},|P_{-\infty}^{k}P_{k+n}^{\infty}-E|_{p,q})\le C(p,q)\alpha(n)^{q^{-1}-p^{-1}}, \quad (20)$$

$$|P_{k+n}^{\infty}P_{-\infty}^{k}-E|_{p,q}\le 2\varphi^{q^{-1}}(n), \quad (21)$$

$$|P_{-\infty}^{k}P_{k+n}^{\infty}-E|_{p,q}\le 2\varphi^{1-p^{-1}}(n), \quad (22)$$

$$\max(|P_{k+n}^{\infty}P_{-\infty}^{k}-E|_{p,q},|P_{-\infty}^{k}P_{k+n}^{\infty}-E|_{p,q})\le\psi(n). \quad (23)$$

Доказательство. Как известно,

$$|P_{k+n}^{\infty}P_{-\infty}^{k}-E|_{\infty,1}=\sup_{\substack{|f|_\infty\le 1\\ |g|_\infty\le 1}}|(P_{k+n}^{\infty}P_{-\infty}^{k}f-Ef,g)|.$$

Но согласно лемме 3.3 и свойствам условного математического ожидания

$$|(P_{k+n}^{\infty}P_{-\infty}^{k}f-Ef,g)|=|(P_{-\infty}^{k}f,P_{k+n}^{\infty}g)-EfEg|=$$

$$=|(P_{-\infty}^{k}f,P_{k+n}^{\infty}g)-EP_{-\infty}^{k}fEP_{k+n}^{\infty}g|.$$

Как доказано в [13], стр. 389, если $f_1$ измерима относительно $\mathcal{L}_{-\infty}^{k}$, а $g_1$ измерима относительно $\mathcal{L}_{k+n}^{\infty}$, то

$$|(f_1,g_1)-Ef_1Eg_1|\le 16\alpha(n)|f_1|_\infty|g_1|_\infty;$$

Положив $f_1 = P_{-\infty}^{k} f$, $g_1 = P_{k+n}^{\infty} g$, получим, что

$$|(P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} f - Ef, g)| \le 16\alpha(n) |P_{-\infty}^{k} f|_\infty |P_{k+n}^{\infty} g|_\infty \le$$

$$\le 16\alpha(n) |f|_\infty |g|_\infty .$$

Это означает, что

$$|P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{\infty,1} \le 16\alpha(n) .$$

По теореме М.Рисса о выпуклости ( [7], стр. 560 ) $\ln |P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{p,q}$ есть выпуклая функция $p^{-1}$ и $q^{-1}$ в квадрате $0 \le p^{-1} \le 1$, $0 \le q^{-1} \le 1$.

Поскольку $(p^{-1}, q^{-1}) = (q^{-1} - p^{-1})(0,1) + (p^{-1} - q^{-1} + 1)$ $(1 - p(q^{-1} - 1), 1 - p(q^{-1} - 1))$ и

$$|P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{r,r} \le |P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k}|_{r,r} + |E|_{r,r} \le 2,$$

то при $p \ge q$

$$|P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{p,q} \le (16\alpha(n))^{q^{-1}-p^{-1}} 2^{p^{-1}-q^{-1}+1} =$$

$$= 2^{3(q^{-1}-p^{-1})+1} \alpha^{q^{-1}-p^{-1}}(n) .$$

Перейдем к доказательству неравенства (21). Докажем предварительно, что из измеримости функций $f$ и $g$ относительно $\sigma$ - алгебр $\mathcal{L}_{-\infty}^{k}$ и $\mathcal{L}_{k+n}^{\infty}$ соответственно следует неравенство

$$|(f,g) - EfEg| \le 2\varphi(n) |f|_1 |g|_\infty .$$

Это неравенство достаточно установить для случая, когда $f$ и $g$ принимают конечное число значений. Пусть $f$ равна $a_l$ на множестве $A_l$, $g$ равна $b_m$ на множестве $B_m$, причём множества $A_\ell$ имеют положительную меру, попарно не пересекаются, их объединение есть $X$ и то же верно для множеств $B_m$. Тогда

$$|(f,g)-EfEg|=\left|\sum_{\ell,m} a_\ell b_m \left(P(A_\ell B_m)-P(A_\ell)P(B_m)\right)\right|\le$$

$$\le \sum_\ell |a_\ell| P(A_\ell) \max_m |b_m| \sup_{A\in\mathcal{L}_{-\infty}^{k}} \sum_m |P^{-1}(A)P(AB_m)-P(B_m)|=$$

$$=|f|_1 |g|_\infty \sup_{A\in\mathcal{L}_{-\infty}^{k}} \sum_m |P^{-1}(A)P(AB_m)-P(B_m)|.$$

Пусть $A\in\mathcal{L}_{-\infty}^{k}$, тогда, обозначив $M_+$ ($M_-$) множество тех значений $m$, при которых $P(AB_m)-P(A)P(B_m)\ge 0$ ($<0$) и положив $B_+=\bigcup_{m\in M_+} B_m$, $B_-=\bigcup_{m\in M_-} B_m$, получим, учитывая, что $B_+$ и $B_-$ принадлежат $\mathcal{L}_{k+n}^{\infty}$, что

$$\sum_m |P^{-1}(A)P(AB_m)-P(B_m)|=\sum_{m\in M_+}(P^{-1}(A)P(AB_m)-P(B_m))-$$

$$-\sum_{m\in M_-}(P^{-1}(A)P(AB_m)-P(B_m))=$$

$$=(P^{-1}(A)P(AB_+)-P(B_+))-$$

$$-(P^{-1}(A)P(AB_-)-P(B_-))\le 2\varphi(n).$$

Поэтому $|(f,g)-EfEg|\le 2\varphi(n)|f|_1|g|_\infty$.

Из этой оценки следует, что если $f\in L_1$, $g\in L_\infty$, то

$$|(P_{-\infty}^{k}f,\ P_{k+n}g)-EfEg|\le 2\varphi(n)|f|_1|g|_\infty.$$

Используя лемму 3.3, получаем, что

$$|(P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} f - Ef, g)| \le 2\varphi(n) |f|_1 |g|_\infty ,$$

$$|(P_{-\infty}^{k} P_{k+n}^{\infty} g - Eg f)| \le 2\varphi(n) |g|_\infty |f|_1 .$$

Эти соотношения эквивалентны неравенствам

$$|P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{1,1} \le 2\varphi(n) ,$$

$$|P_{-\infty}^{k} P_{k+n}^{\infty} - E|_{\infty,\infty} \le 2\varphi(n) .$$

Пусть $p \ge q$ . Тогда, используя теорему М.Рисса, получим, что

$$|P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{p,q} \le |P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{q,q} \le$$

$$\le |P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{\infty,\infty}^{1-q^{-1}} |P_{k+n}^{\infty} P_{-\infty}^{k} - E|_{1,1}^{q^{-1}} \le$$

$$\le 2^{1-q^{-1}} (2\varphi(n))^{q^{-1}} = 2\varphi^{q^{-1}}(n)$$

и

$$|P_{-\infty}^{k} P_{k+n}^{\infty} - E|_{p,q} \le |P_{-\infty}^{k} P_{k+n}^{\infty} - E|_{p,p} \le$$

$$\le |P_{-\infty}^{k} P_{k+n}^{\infty} - E|_{\infty,\infty}^{1-p^{-1}} |P_{-\infty}^{k} P_{k+n}^{\infty} - E|_{1,1}^{p^{-1}} \le$$

$$\le (2\varphi(n))^{1-p^{-1}} 2^{p^{-1}} = 2\varphi^{1-p^{-1}}(n) .$$

Перейдем к доказательству неравенства (23).

Пусть $f$ и $g$ - функции с конечным числом значений, причём $f$ ( соответственно $g$ ) принимает значение $a_\ell$ ( $b_m$ ) на множестве $A_\ell \in \mathcal{L}^{k}_{-\infty}$ ( $B_m \in \mathcal{L}^{\infty}_{k+n}$ ).

Из определения $\Psi(n)$ следует, что

$$|(f,g)-EfEg| = \Big|\sum_{\ell,m} a_\ell b_m \big(P(A_\ell B_m) - P(A_\ell)P(B_m)\big)\Big| \le$$

$$\le \Psi(n)\sum_{\ell,m} |a_\ell||b_m| P(A_\ell)P(B_m) = \Psi(n)|f|_1 |g|_1 .$$

Отсюда легко вывести, что если $f\in L_1$, $g\in L_1$, то

$$|(P^{k}_{-\infty} f, P^{\infty}_{k+n} g) - EfEg| \le \Psi(n)|f|_1 |g|_1 .$$

Применяя лемму 3.3, получаем, что

$$|P^{\infty}_{k+n} P^{k}_{-\infty} - E|_{1,\infty} = |P^{k}_{-\infty} P^{\infty}_{k+n} - E|_{1,\infty} =$$

$$= \sup_{|f|_1\le 1, |g|_1\le 1} |(P^{k}_{-\infty} f, P^{\infty}_{k+n} g) - EfEg| \le \Psi(n).$$

Поэтому $|P^{\infty}_{k+n} P^{k}_{-\infty} - E|_{p,q} \le |P^{\infty}_{k+n} P^{k}_{-\infty} - E|_{1,\infty} \le \Psi(n)$

и $|P^{k}_{-\infty} P^{\infty}_{k+n} - E|_{p,q} \le |P^{k}_{-\infty} P^{\infty}_{k+n} - E|_{1,\infty} \le \Psi(n)$.

Лемма доказана.

Оценки, эквивалентные ( с точностью до постоянных множителей) неравенствам (20), (21), (22), содержатся в работах [11], [13] и [6].

Теорема М.Рисса позволяет получать эти оценки единообразным методом.

Теорема 3.7. Пусть $f \in L_p$, $(2 \le p \le \infty)$, $Ef=0$, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f - P_{\mathcal{L}_{-n}^{n}} f|_{p'}$ и выполнено одно из следующих условий:

а) $\mathcal{L}$ обладает свойством с.п., причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{p-2}{p}} < \infty \; ; \qquad 1)$$

б) $\mathcal{L}$ обладает свойством р.с.п., причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)^{\frac{p-1}{p}} < \infty \; ;$$

в) $\mathcal{L}$ обладает свойством п.п., причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) < \infty .$$

Тогда для $f$ выполнены условия теоремы 3.2 при $\delta = p-2$, причём в качестве автоморфизма $T$ и $\sigma$ - алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0$ из теоремы 3.2 можно взять $T$, $\mathcal{L}_{-\infty}^{\infty}$ и $\mathcal{L}_0^{\infty}$. Таким образом, для $f$ справедливы соотношения (2) и (3).

Доказательство. Эргодичность $T$ на $\mathcal{L}_{-\infty}^{\infty}$ следует из свойства с.п. (см. [13] ). Нам остается установить, что сходится ряд $\sum_{k \ge 0} (|f - P_{-k} f|_{p'} + |P_k f|_{p'})$, где $P_n = P_{\mathcal{M}_n} = P_{\mathcal{L}_n^{\infty}} = P_n^{\infty}$. Поскольку при $k \ge 0$

$$|f - P_{-k}^{\infty} f|_q = |(f - P_{-k}^{k} f) + P_{-k}^{\infty}(f - P_{-k}^{k} f)|_q \le$$
$$\le 2|f - P_{-k}^{k}|_q$$

и

$$|P_k^{\infty}|_q \le |P_k^{\infty} P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} f|_q + |P_k^{\infty}(f - P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} f)|_q \le$$
$$\le |P_k^{\infty} P_{-\infty}^{[\frac{k}{2}]} P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} f|_q + |f - P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} f|_q =$$

---

1) При $p=2$ здесь и в теореме 3.9 имеется ввиду, что $\alpha(k) = 0$ при $n \ge n_0$.

$$= |P_K^{\infty} P_{-\infty}^{[\frac{K}{2}]} P_{-[\frac{K}{2}]}^{[\frac{K}{2}]} f - EP_{-[\frac{K}{2}]}^{[\frac{K}{2}]} f|_q + |f - P_{-[\frac{K}{2}]}^{[\frac{K}{2}]} f|_q \le$$

$$\le |P_K^{\infty} P_{-\infty}^{[\frac{K}{2}]} - E|_{p,q} |f|_p + |f - P_{-[\frac{K}{2}]}^{[\frac{K}{2}]} f|_q \text{ , то}$$

справедливы неравенства

$$|f - P_{-K}^{\infty} f|_q \le 2|f - P_{-K}^{K} f|_q \qquad (24)$$

и

$$|P_K^{\infty} f|_q \le |P_K^{\infty} P_{-\infty}^{[\frac{K}{2}]} - E|_{p,q} |f|_p + |f - P_{-[\frac{K}{2}]}^{[\frac{K}{2}]} f|_q . \qquad (25)$$

Согласно лемме 3.4, $|P_K^{\infty} P_{-\infty}^{[\frac{K}{2}]} - E|_{p,p'}$ не больше чем любое из чисел $C(p,p')\alpha^{1-2p^{-1}}([\frac{K}{2}]), 2\varphi^{1-p^{-1}}([\frac{K}{2}]),$ $\cdot \Psi([\frac{K}{2}])$. Отсюда, из неравенств (24), (25) при $q = p'$ и из условий теоремы следует сходимость ряда.

Теорема 3.8. Пусть $f \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $Ef = 0$, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f - P_{\mathcal{L}-n}^{n-1} f|_1$, справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} |\sum_{K=0}^{n-1} U^K f|_1 < \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

а) $\mathcal{L}$ обладает свойством с.п., причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{p-1}{p}} < \infty \quad ; \text{1)}$$

б) $\mathcal{L}$ обладает свойством р.с.п., причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) < \infty .$$

---

1) Если $p = 1$, то имеется ввиду, что $\alpha(n) = 0$ при $n \ge h$

Тогда для $f$ выполнены условия теоремы 3.5, причём в качестве автоморфизма $T$ и $\sigma$ - алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0$ из теоремы 3.2 можно взять $T$, $\mathcal{L}_{-\infty}^{\infty}$ и $\mathcal{L}_0^{\infty}$. Таким образом, для $f$ справедливы соотношения (9) и (10).

Доказательство. Нам достаточно показать, что сходится ряд $\sum_{k\geq 0}(|f-P_k f|_1+|P_k f|_1$ ), но это следует из неравенств (24), (25) при $q$ = 1, оценок (20), (21) и условий теоремы.

Следствие 3.2. Пусть $f\in L_{2+\delta}$ $(0\leq\delta\leq\infty)$, $Ef=0$, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f-P_{\mathcal{L}_{-n}^{n}}f|_1$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{2}}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}U^k f\Big|_2<\infty$$

и выполнено одно из условий:

а) $\mathcal{L}$ обладает свойством с.п., причём

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\frac{1+\delta}{2+\delta}}(n)<\infty,$$

б) $\mathcal{L}$ обладает свойством р.с.п., причём

$$\sum_{n=}^{\infty}\varphi(n)<\infty.$$

Тогда справедливы заключения теоремы 3.8.

Действительно, применима теорема 3.8 при $p=2+\delta$, т.к. $$\Big|\sum_{k=0}^{n-1}U^k f\Big|_1\leq\Big|\sum_{k=0}^{n-1}U^k f\Big|_2.$$

Теорема 3.9. Пусть $f\in L_p$ $(2\leq p\leq\infty)$, $Ef=0$, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|f-P_{\mathcal{L}_{-n}^{n}}f|_2$ и для $\sigma$-алгебры $\mathcal{L}$ выполнено одно из следующих условий:

а) $$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\frac{p-2}{2p}}(n)<\infty,$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{\frac{p-1}{p}}(n) < \infty$ ,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) < \infty$ .

Тогда для $f$ выполнены условия следствия 3.1 из § 3 и, таким образом, справедливы соотношения (19) теоремы 3.6. При этом в качестве $\mathcal{M}$, $T$, $\mathcal{M}_0$ из теоремы 3.6 можно взять в случаях а), в) $\mathcal{L}_{-\infty}^{\infty}$, $T$, $\mathcal{L}_0^{\infty}$, а в случае б) $\mathcal{L}_{-\infty}^{\infty}$, $T^{-1}$, $\mathcal{L}_{-\infty}^{0}$.

Доказательство. Нам достаточно установить сходимость ряда $\sum_{k\geq 0} (|f-P_{-k}f|_2 + |P_k f|_2)$, где $P_k = P_{\mathcal{M}_k}$, $\mathcal{M}_k = T^{-k}(\mathcal{M}_0)$ в случаях а) в) и $\mathcal{M}_k = (T^{-1})^{-k}(\mathcal{M}_0)$ в случае б).

Для случаев а), в) сходимость ряда вытекает из неравенст (24), (25) при $q = 2$, оценок (20), (23) и условий теоремы.

Рассмотрим случай б). Неравенства (24), (25) при замене $T$ на $T^{-1}$ перейдут в неравенства

$$|f-P_{-\infty}^{k}f|_q \leq 2|f-P_{-k}^{k}f|_q, \quad (24^1)$$

$$|P_{-\infty}^{-k}f|_q \leq |P_{-\infty}^{k}P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]}-E|_{p,q}\,|f|_p + |f-P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]}f|_q. \quad (25^1)$$

Напомним, что $P_k^{\ell} = P_{\mathcal{L}_k^{\ell}}$, $\mathcal{L}_k^{\ell} = \bigvee_{m=k}^{\ell} T^{-m}(\mathcal{L})$.

Но $P_k = P_{\mathcal{M}_k} = P_{\bigvee_{m=k}^{\infty} T^{m}(\mathcal{L})} = P_{\bigvee_{m=-\infty}^{-k} T^{-m}(\mathcal{L})} = P_{-\infty}^{-k}$.

Поэтому из неравенств ($24^1$), ($25^1$) и оценки (22) следует, что

$$|f-P_{-k}f|_2 \le 2|f-P_{-k}^{k}f|_2 ,$$

$$|P_k f|_2 = |P_{-\infty}^{-k} f|_2 \le |P_{-\infty}^{-k} P_{-[\frac{k}{2}]}^{\infty} - E|_{p,2}\, |f|_p +$$

$$+ |f - P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} f|_2 \le 2\varphi^{\frac{p-1}{p}}([\tfrac{k}{2}])|f|_p + |f - P_{-[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} f|_2$$

и сходимость ряда вытекает из условий теоремы.

Заметим, что случай а) теоремы 3.7 и случай б) при $p = 2$ той же теоремы - это результаты И.А.Ибрагимова (см.теоремы 18.6.2, 18.6.3 и 18.6.1 из [13]), а случай б) при $p = 2$ и случай а) теоремы 3.9 - результаты Ю.А.Давыдова [6]. Несомненно, что методами И.А.Ибрагимова и Ю.А. Давыдова можно получить теоремы 3.7 и 3.9 в полном объёме. Так ли это в отношении теоремы 3.8 - автору неизвестно.

## § 5. Некоторые замечания и дополнения

1. Возникает естественный вопрос о том, когда предельное распределение в теоремах этой главы невырождено, т.е. когда в соотношениях (3), (10) и (19) $\sigma \neq 0$. Оказывается, что случаи, когда $\sigma = 0$, допускают некоторое описание ( см. по этому поводу также [15], § 3 гл.5 и теорему 18.22 из [13]).

В условиях теоремы 3.1 из равенства (2) следует, что $\sigma = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} U^k f\right|_2 = 0$.

В условиях теоремы 3.3 из равенства (9) и соотношения

$\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda$ следует, что $\sigma=0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}|\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f|_1=0.$

Если выполнены условия других теорем, то можно дать более точный ответ на поставленный вопрос.

Так, если выполнены условия теоремы 3.2, то согласно замечанию 3.5, имеет место представление

$$f=h+Ug-g,\ h\in Q_0L_2,\ g\in L_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}.$$

Т.к. $n^{-\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f=n^{-\frac{1}{2}}(\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k h+U^k g-g)$, то ясно, что дисперсия предельного распределения величин $n^{-\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f$ и $n^{-\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k h$ одна и та же. Это означает, поскольку $E n^{-1}|\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k h|^2=|h|_2^2$, что $\sigma=|h|_2.$

Пусть $\sigma=0$. Тогда $h=0$, т.е. $f=Ug-g,\ g\in L_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}.$ Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\sum_{k=0}^{n-1}U^k f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}\le 2|g|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}<\infty.$$

Но из соотношения $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}<\infty$ следует, что асимптотическое распределение величин $n^{-\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f$ – вырожденное, т.е. что $\sigma=0.$

Итак, в условиях теоремы 3.2. равносильны такие утверждения: $\sigma=0$; имеет место представление $f=Ug-g,\ g\in L_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}$; последовательность $\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f$ ограничена в $L_{\frac{2+\delta}{1+\delta}}$.

Подобные утверждения эквивалентны и если выполнены условия теоремы 3.5 или теоремы 3.6. При этом в теореме 3.5 $g\in L_1$, а в теореме 3.6 $g\in L_2$.

2. Все теоремы §§ 1-4 относились к случаю, когда задан автоморфизм $T$ вероятностного пространства. Сейчас мы будем предполагать, что нам задан эндоморфизм $T$ вероятностного пространства ($X$, $\mathcal{M}$, $P$) и инвариантная относительно $T$ $\sigma$- алгебра $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$.

Оказывается, что можно так изменить формулировки и доказательства всех утверждений §§ 1-4, чтобы они стали применимы к этому случаю и были в то же время эквивалентными прежним, если $T$ - автоморфизм. Этот путь не был избран с самого начала лишь для того, чтобы не усложнять изложения. Кроме того, если $T$- автоморфизм, то прежние формулировки выглядят естественнее.

Например, чтобы преобразовать теорему 3.1 применительно к новой ситуации, достаточно изменить определение пространства $R$ : теперь в $R$ будут входить те функции $g \in L_2$, для которых при некотором $K \geq 0$ выполнено равенство $g = \sum_{m=0}^{K} Q_m g$ , причём $Q_m$ при $m \geq 0$ определяются так же, как и раньше. Может показаться, что в случае, когда $T$ - автоморфизм, сузился класс функций $f$ , для которых выполнены условия теоремы, поскольку теперь пространство $R$ содержит меньше функций. Однако это не так, ибо из доказательства теоремы 3.1 ясно, что можно было ограничиться теми функциями $g$ , для которых $g = Q_0 g$.

Аналогично преобразовывается теорема 3.3.

Перейдем к теореме 3.2, теореме 3.5 и следствию 3.1.

Поскольку имеют место равенства

$$U^k(f - P_{T^k(\mathfrak{M}_0)} f) = U^k f - P_{\mathfrak{M}_0} U^k f, \quad (26)$$

$$|f - P_{T^k(\mathfrak{M}_0)} f|_q = |U^k f - P_{\mathfrak{M}_0} U^k f|_q, \quad (27)$$

то заменяя в формулировках этих утверждений выражения вида $|f - P_{T^k(\mathfrak{M}_0)} f|_q$ выражениями $|U^k f - P_{\mathfrak{M}_0} U^k f|_q$, мы получаем утверждения, имеющие смысл и в случае, когда $T$ - эндоморфизм.

Так, теорема 3.2 примет следующий вид:

Теорема 3.2'. Пусть $T$ - эргодический эндоморфизм, $\mathfrak{M}_0$ - инвариантная относительно $T$ $\sigma$- алгебра, $f$ - такая функция, что при некотором $\delta$ $(0 \le \delta \le \infty)$ $f \in L_{2+\delta}$ и

$$\sum_{k \ge 0} \left( |P_{T^{-k}(\mathfrak{M}_0)} f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} + |U^k f - P_{\mathfrak{M}_0} U^k f|_{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \right) < \infty .$$

Тогда для $f$ справедливы соотношения (2) и (3).

Теорема 3.4 преобразуется следующим образом:

Теорема 3.4'. Пусть $f \in L_1$, $|P_{T^{-k}(\mathfrak{M}_0)} f|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $|U^k f - P_{\mathfrak{M}_0} U^k f|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Тогда, если $f$ можно представить в виде

$$f = h + Ug - g, \quad (15')$$

где $P_{\mathfrak{M}_0} h = h$, $P_{T^{-1}(\mathfrak{M}_0)} h = 0$, $g \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, то частные суммы рядов

$$\sum_{l=1}^{\infty} U^{-l} P_{T^{-l}(\mathfrak{M}_0)} f \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{\infty} (U^l f - P_{\mathfrak{M}_0} U^l f) \quad (16')$$

ограничены в $L_p$ ; если $p<\infty$ , то эти ряды сходятся в $L_p$ . В равенстве ($15^I$) $g$ можно задать формулой

$$g=\sum_{l=1}^{\infty} U^{-l} P_{T^{-l}(\mathfrak{M}_0)} f-\sum_{l=0}^{\infty}(U^l f- P_{\mathfrak{M}_0} U^l f). \quad (17^I)$$

Обратно, $f$ можно представить в виде ($15^I$), если ряды ($16^I$) сходятся в $L_p$ ; если $p>1$ , то достаточно потребовать, чтобы $|P_{T^{-k}(\mathfrak{M}_0)} f|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $|U^k f - P_{\mathfrak{M}_0} U^k f|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и частные суммы рядов($16^I$) были ограничены в $L_p$.

Заметим, что оператор $U^{-l} P_{T^{-l}(\mathfrak{M}_0)}$ определён при $l\geqslant 0$ даже тогда, когда $U^{-l}$ не определён, т.к. область значений оператора $U^l$ всегда содержит область значений оператора $P_{T^{-l}(\mathfrak{M}_0)}$ .

Доказательства преобразованных утверждений получаются из прежних доказательств с помощью равенств (26), (27) и изменения некоторых других деталей. Как будет показано ниже, возможна также редукция к случаю, когда $T$ - автоморфизм.

Подобные преобразования возможны и в § 4. Надо так изменить определение коэффициентов $\alpha$ , $\varphi$ и $\psi$ ,чтобы в них участвовали $\sigma$- алгебры вида $T^k(\mathcal{L})$ лишь при $k\geqslant 0$, т.е., например, положить

$$\alpha(n) = \sup_{k\geqslant 0} \sup_{A\in\mathcal{L}_0^k,\, B\in\mathcal{L}_{k+n}^{\infty}} |P(AB)-P(A)P(B)|.$$

Затем вместо условий вида $\sum_{n=0}^{\infty} |f-P_{\mathcal{L}_{-n}^{n}} f|_q < \infty$ нужно потребовать, чтобы $\sum_{n=0}^{\infty} |U^n f - P_{\mathcal{L}_0^{2n}} U^n f|_q < \infty$ .
Кроме того, в пункте б) теоремы 3.9 нужно заменить $\varphi$ коэффициентом $\varphi'$ , в определении которого события $A$ и

$B$ меняются ролями. Впрочем, этого можно не делать, если $T$ допускает "расширение до автоморфизма" в смысле, уточняемом ниже. Такое расширение всегда возможно, если $(X, \mathfrak{M}, P)$ - пространство Лебега.[1)]

Действительно, как показал В.А.Рохлин [19], при этом предположении существует пространство Лебега $(X', \mathfrak{M}', P')$ и его автоморфизм $T'$, а также измеримое отображение $p$ пространства $X'$ на $X$ с такими свойствами :

1. $pT = Tp$ ,
2. $P'(p^{-1}(A)) = P(A)$ , $A \in \mathfrak{M}$ .

Автоморфизм $T'$ называется расширением эндоморфизма $T$.

Заметим попутно, что наличие у эндоморфизма $T$ расширения позволяет свести доказательство утверждений, касающихся $T$ , к случаю автоморфизма, а не доказывать их заново, хотя бы и по известной уже схеме.

Пусть, например, заданы функция $f$ на $X$ и инвариантная относительно $T$ $\sigma$- алгебра $\mathfrak{M}_0$ , причём эти объекты удовлетворяют условиям какой-нибудь теоремы §§ 1-3 в варианте, приспособленном для эндоморфизмов. Положим $f' = fp$, $\mathfrak{M}_0' = p^{-1}(\mathfrak{M}_0)$ . Тогда, как нетрудно понять, для $T'$, $f'$ и $\mathfrak{M}_0'$ выполнены условия первоначального варианта соответствующей теоремы, а значит и её заключение. Но из свойств 1 и 2 расширения $T'$ легко

---

1) Понятие пространства Лебега рассматривается в главе 1. Там же поясняется, что последнее условие практически не является ограничением на класс процессов.

вывести, что то же заключение относится и к $f$. Подобным образом, полагая $\mathcal{L}' = p^{-1}(\mathcal{L})$, можно доказать и утверждения § 4.

Теперь ясно, что при наличии у эндоморфизма $T$ расширения $T'$ безразлично, какой из коэффициентов $\varphi$, $\varphi'$ используется при переформулировке утверждений § 4, т.к. для $\sigma$ - алгебры $\mathcal{L}'$ и одного из автоморфизмов $T'$, $T'^{-1}$ выполнено соответствующее условие с коэффициентом $\varphi$.

В дальнейшем, желая сослаться на модификацию какого-либо утверждения §§ 1-4 применительно к эндоморфизмам, мы будем упоминать, к примеру, теорему $3.4^1$, следствие $3.1^1$ и т.д.

3. Здесь приводится пример, показывающий, что условия утверждений §§ 1-3 гораздо менее жёстки, чем условия их следствий, собранных в § 4. Мы ограничимся сравнением условий теоремы $3.2^1$ при $\delta = 0$ (или совпадающих с ними условий следствия $3.1^1$) с условиями теорем $3.7^1$ и $3.9^1$ при $p = 2$.

Пусть $X$ - отрезок $[0,1)$, $\mathfrak{M}$ - $\sigma$ - алгебра лебеговских множеств, $P$ - мера Лебега. Положим $Tx = \{2x\}$ ( $\{t\}$ - дробная доля $t$ ). Ясно, что $T$ - эндоморфизм. Интервалы вида $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ ( $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$) будем называть интервалами ранга $n$. Пусть $\mathcal{L}$ - $\sigma$-алгебра порождённая интервалами ранга 1. Как хорошо известно $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{L}) = \mathfrak{M}$, а $\sigma$- алгебры $T^{-k}(\mathcal{L})$ независимы в совокупности.

Положим $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} = \bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{L})$. Нам понадобится описание $\sigma$- алгебр $\mathfrak{M}_k = T^{-k}(\mathfrak{M}_0) = T^{-k}(\mathfrak{M})$ и $\mathcal{L}_k^{\ell} = \bigvee_{m=k}^{\ell-1} T^{-m}(\mathcal{L})$ $(0 \le k \le \ell-1)$[1]. В дальнейшем мы, говоря о совпадении множеств или о равенстве функций, не будем каждый раз делать оговорок о допустимости пренебрежения множествами меры $0$. Как нетрудно убедиться, $\mathfrak{M}_k$ состоит из множеств, инвариантных относительно сдвига на числа вида $\frac{m}{2^k}$ (сдвиг и сложение нужно производить по модулю 1), $\sigma$- алгебра $\mathcal{L}_0^{\ell}$ порождается интервалами ранга $\ell$, причём $\sigma$- алгебры $\mathcal{L}_0^{k}$ и $\mathfrak{M}_k$ независимы, а $\sigma$- алгебра $\mathcal{L}_k^{\ell}$ содержит те множества, которые являются объединениями интервалов ранга $\ell$ и инвариантны относительно сдвигов на числа вида $\frac{m}{2^k}$. Отсюда ясно, что $\mathcal{L}_k^{\ell} = \mathcal{L}_0^{\ell} \wedge \mathfrak{M}_k$. Если $f \in L_1$, то

$$P_{\mathfrak{M}_n} f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(x + \frac{k}{2^n}\right),$$

$$P_{\mathcal{L}_0^n} f(x) = 2^n \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t)\,dt, \quad \text{если} \quad x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Пусть теперь $f \in L_2$, $Ef = 0$. Поскольку $\sigma$-алгебры $T^{-k}(\mathcal{L})$ независимы, $\mathcal{L}$ удовлетворяет всем условиям перемешивания, причём $\alpha(n) = \varphi(n) = \psi(n) = 0$ при $n \geq 1$. Поэтому условия теоремы 3.7[1] при $p = 2$ принимают вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |U^n f - P_{\mathcal{L}_0^{2n+1}} U^n f|_2 < \infty .$$

Придадим этому условию более удобную форму. Заметим, что $P_{\mathfrak{M}_n} U^n f = U^n f$, т.к. $U^k f$ измерима относительно $\mathfrak{M}_k$, и

---

1) В §4 подобная $\sigma$-алгебра обозначалась через $\mathcal{L}_k^{\ell-1}$.

$$|U^n f - P_{\mathcal{L}_0^{2n+1}} U^n f|_2 = |U^n f - P_{\mathcal{L}_0^{2n+1}} P_{\mathfrak{M}_n} U^n f|_2 =$$
$$= |U^n f - P_{\mathcal{L}_0^{2n+1} \wedge \mathfrak{M}_n} U^n f|_2 = |U^n f - P_{\mathcal{K}_n^{2n+1}} U^n f|_2 =$$
$$= |U^n (f - P_{\mathcal{L}_0^{n+1}} f)|_2 = |f - P_{\mathcal{L}_0^{n+1}} f|_2$$

Использованное здесь соотношение $P_{\mathfrak{M}_n} \cdot P_{\mathcal{L}_0^{2n+1}} =$ $= P_{\mathfrak{M}_n \wedge \mathcal{L}_0^{2n+1}}$, неверное для произвольных $\sigma$-алгебр, в нашем случае нетрудно проверить непосредственно.

Итак, условие теоремы 3.7[I] принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f - P_{\mathcal{L}_0^n} f|_2 < \infty . \tag{26}$$

С другой стороны, в теореме 3.2[I] требуется, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U^n f - P_{\mathfrak{M}_0} U^n f|_2 , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |P_{\mathfrak{M}_n} f|_2 ,$$

Все члены первого ряда в нашем случае равны $0$, т.к. $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. Обозначим через $H_n$ ортогональное дополнение в $L_2$ подпространства функций, измеримых относительно $\mathfrak{M}_n$, а через $P_n$ - проектор на $H_n$. Как нетрудно убедиться, $H_n$ состоит из тех $g \in L_2$, для которых почти всюду верно равенство

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(x + \frac{k}{2^k}\right) = 0 .$$

Поскольку $P_{\mathfrak{M}_n} f = f - P_n f$, условие теоремы 3.2[I] принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f - P_n f|_2 < \infty . \tag{27}$$

Сравним теперь условия (26) и (27). В первом случае $f$ должна быстро аппроксимироваться функциями $g$, постоянными на интервалах ранга $n$, причём можно считать, что $Eg=0$, т.к. $Ef=0$. Размерность подпространства, образованного такими функциями $g$, равна $2^n-1$.

Можно сказать, что условие (26) имеет локальный характер, т.е. накладывает ограничения на поведение $f$ во всех частях отрезка ( 0,1 ). Последнее замечание можно уточнить следующим образом: если $f_1 = f$ на некотором двоичном интервале $A$ и $f_1 = 0$ на $X \setminus A$, то из соотношения (26) следует аналогичное соотношение для $f_1$. Отсюда ясно, что изменяя $f$ на каком-то наперёд заданном интервале, нельзя в общем случае добиться выполнения условия (26), если оно не было выполнено ранее.

Совсем иначе обстоит дело с условием (27). Пространства $H_n$ при $n \geqslant 1$ имеют бесконечную размерность и содержат весьма обширные множества функций. Так, функции из $H_n$ могут совпадать с произвольной функцией $f$ из $L_2$ на всём отрезке $[0,1)$, кроме некоторого интервала $A = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$. Действительно, положим $f_1(x)=f(x)$, если $x \in X \setminus A$, и $f_1(x) = -\sum_{k=0,\,k\neq m}^{2^n-1} f\left(x+\frac{k}{2^n}\right)$, если $x \in A$. Тогда, как легко видеть, $f_1 \in H_n$.

Таким образом, произвольную функцию $f \in L_2$ можно так изменить на произвольном интервале, чтобы условие (27) выполнялось для изменённой функции.

4. Здесь мы, используя только что изложенные соображения, рассмотрим более общую ситуацию.

Рассмотренный выше эндоморфизм принадлежит классу так называемых точных эндоморфизмов. Эндоморфизм $T$ пространства $(X, \mathcal{M}, P)$ называется точным (см. [19]), если $\bigwedge_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$. 1)

**Теорема 3.10** Пусть $T$ - точный эндоморфизм пространства $(X, \mathcal{M}, P)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $A_\varepsilon$, $P(A_\varepsilon) < \varepsilon$, и число $K = K(\varepsilon)$ такие, что для произвольной функции $f \in L_2$ существует функция $f_\varepsilon \in L_2$, совпадающая с $f$ на $X \setminus A_\varepsilon$ и такая, что $P_{T^{-K}(\mathcal{M})} f_\varepsilon = 0$. Таким образом, для $f_\varepsilon$ выполнены условия теорем 3.2' и 3.6'.

**Доказательство.** Положим, как обычно, $\mathcal{M}_K = T^{-K}(\mathcal{M}_0)$, $\mathcal{M}_\infty = \bigwedge_{K=0}^{\infty} \mathcal{M}_K$. Пусть $A \in \mathcal{M}$ и $P(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Применяя результаты Дуба ([9], стр.297), получаем, что

$$\| P_{\mathcal{M}_n} \chi_A - P_{\mathcal{M}_\infty} \chi_A \|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Здесь и ниже мы используем общепринятые обозначения для характеристических функций множеств. Из точности $T$ следует, что $P_{\mathcal{M}_\infty} \chi_A = P_{\mathcal{N}} \chi_A = P(A)$. Поэтому найдется такое $k = K(\varepsilon)$, что если положить $B = \{x \mid P_{\mathcal{M}_K} \chi_A(x) > \frac{1}{2} P(A)\}$, то $P(B) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, что $B \in \mathcal{M}_K$.

Пусть $C = A \cap B$. Тогда $P_{\mathcal{M}_K} \chi_C = P_{\mathcal{M}_K} \chi_A \chi_B = \chi_B P_{\mathcal{M}_K} \chi_A > \frac{1}{2} \chi_B P(A)$.

---

1) Напомним, что так обозначается тривиальная подалгебра $\mathcal{M}$.

Положим

$$f_\varepsilon = f\chi_{B|C} - \frac{\chi_C}{\chi_{X|B} + P_{\mathfrak{M}_k}\chi_C} P_{\mathfrak{M}_k}(f\chi_{B|C}).$$

Заметим, что $f_\varepsilon \in L_2$, т.к. из оценки для $P_{\mathfrak{M}_k}\chi_C$ следует, что

$$|f_\varepsilon|_2 \leq \left(1+\frac{2}{P(A)}\right)|f|_2 < \infty .$$

Далее, вынося измеримые относительно $\mathfrak{M}_k$ функции из под оператора $P_{\mathfrak{M}_k}$, имеем:

$$P_{\mathfrak{M}_k} f_\varepsilon = \left(1 - \frac{P_{\mathfrak{M}_k}\chi_C}{\chi_{X|B} + P_{\mathfrak{M}_k}\chi_C}\right) P_{\mathfrak{M}_k}(f\chi_B\chi_{B|C})$$

$$= \frac{\chi_{X|B}}{\chi_{X|B} + P_{\mathfrak{M}_k}\chi_C}\chi_B P_{\mathfrak{M}_k}(f\chi_{B|C}) = 0 .$$

Положим $A_\varepsilon = X\setminus(B|C)$. Поскольку $f$ и $f_\varepsilon$ совпадают на $X\setminus A_\varepsilon = B|C$ и $P(A_\varepsilon) \leq 1 - P(B) + P(C) \leq$ $\leq 1 - P(B) + P(A) < \varepsilon$, то доказательство закончено.

Замечание 3.7. Если допустить зависимость множества $A_\varepsilon$ от функции $f$, то утверждение теоремы справедливо для произвольной измеримой вещественной функции $f$, т.к. можно, изменяя $f$ на множестве произвольно малой меры, сделать её ограниченной, а затем применить теорему 3.10. Отсюда следует, что множество функций, подчиняющихся центральной предельной теореме, в случае, когда $T$ - точный эндоморфизм, плотно в пространстве всех измеримых функций в смысле метрики $d(f,g) = P\{x \,|\, f(x) \neq g(x)\}$.

# ГЛАВА IV.

# ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО БЫСТРОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

## § 1. Операторы, связанные с измеримыми преобразованиями, и их простейшие свойства

Пусть $T$ - измеримое преобразование пространства $X$ с $\sigma$- алгеброй подмножеств $\mathfrak{M}$ и заданной на $\mathfrak{M}$ вероятностной мерой $\mu$.

Мы предполагаем в этом параграфе, что $T$ несингулярно относительно $\mu$, т.е. что из соотношений $A\in\mathfrak{M}$, $\mu(A)=0$ следует, что $\mu(T^{-1}(A))=0$. Не предполагается, что $\mu$ инвариантна относительно $T$, но, разумеется, если это так, то $T$ несингулярно относительно $\mu$.

С преобразованием $T$ связан оператор $U$, действующий по формуле $(Uf)(x)=f(Tx)$, $x\in X$, заданный для всех измеримых функций.

Оператор $U$, как оператор на классах эквивалентности относительно $\mu$ измеримых функций, не изменится, если заменить $\mu$ любой другой эквивалентной (в смысле абсолютной непрерывности) мерой. Оператор $U$ мультипликативен, т.е. $U(fg)=Uf\,Ug$, и порождает не увеличивающий норму эндоморфизм алгебры $L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$. Здесь также можно заменить $\mu$ любой другой эквивалентной мерой.

Очевидно, что $U$ будет изометрией в пространствах $L_p(X,\mathfrak{M},\mu)$ $(1\le p<\infty)$ тогда и только тогда, когда мера $\mu$ инвариантна относительно $T$. Для изометричности $U$ в $L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $A \in \mathfrak{M}$ равенства $\mu(A) = 0$ и $\mu(T^{-1}(A)) = 0$ были равносильны.

Сейчас мы введём оператор, в определении которого мера $\mu$ играет более существенную роль, чем в определении оператора $U$. Этот оператор действует в $L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и сопряжённым к нему оператором в $L_\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ является $U$.

Пусть $g \in L_1$. Положим для $A \in \mathfrak{M}$

$$G(A) = \int_{T^{-1}(A)} g(x)\mu(dx).$$

$G$ - счётно аддитивная функция на $\mathfrak{M}$, причём для вариации $G$ на множестве $A \in \mathfrak{M}$ справедлива оценка

$$v(G, A) \le \int_{T^{-1}(A)} |g(x)|\mu(dx).$$

Из этой оценки и из несингулярности $T$ следует, что $v(G, A) = 0$, если $\mu(A) = 0$ и по теореме Радона - Никодима существует единственная с точностью до различий на множестве $\mu$ -меры $0$ функция $V_\mu g$ со свойством

$$\int_A V_\mu g(x)\mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} g(x)\mu(dx), \quad A \in \mathfrak{M}. \qquad (1)$$

При этом

$$|V_\mu g|_1 = \int_X |V_\mu g(x)|\mu(dx) = v(G, X) \le \int_X |g(x)|\mu(dx) = |g|_1.$$

Тем самым на $L_1$ определён (линейный) оператор $V_\mu$ с нормой $|V_\mu|_{1,1} \le 1$. Из п.1.1 (см.ниже) следует, что $|V_\mu|_{1,1} = 1$.

Перечислим простейшие свойства оператора $V_\mu$.

1.1. Если $g \in L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$, $h \in L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$, то
$$\int_X h(x) V_\mu g(x)\mu(dx) = \int_X g(x) U h(x)\mu(dx).$$

В частности, положив $h=1$, получаем, что
$$\int_X V_\mu g(x)\mu(dx) = \int_X g(x)\mu(dx).$$

Если $h$ - характеристическая функция множества $A$ из $\mathfrak{M}$, то утверждаемое равенство совпадает с (1). В общем случае нужно равномерно аппроксимировать $h$ линейными комбинациями характеристических функций.

1.2. Если $g \geq 0$, то и $V_\mu g \geq 0$.[1]

Следует из определения $V_\mu$.

1.3. Пусть $p \in L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$. Соотношение
$$V_\mu p = p$$
справедливо тогда и только тогда, когда мера $P$, заданная равенством $P(A) = \int_A p(x)\mu(dx)$, инвариантна относительно $T$.

В самом деле, $p$ является неподвижной точкой оператора $V_\mu$ тогда и только тогда, когда для произвольной $h \in L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$
$$\int_X h(x) V_\mu p(x)\mu(dx) = \int_X h(x)p(x)\mu(dx).$$

Но левая часть этого равенства по 1.1 есть $\int_X Uh(x)P(dx)$, правая же часть равна $\int_X h(x)P(dx)$, а совпадение двух этих выражений для всех $h \in L_\infty$ эквивалентно инвариантности меры $P$.

---

1) Неравенство $g \geq h$ (без указания аргумента) означает, что $g(x) \geq h(x)$ для почти всех $x$. Аналогично понимается знак равенства.

1.4. Пусть $C$ - функция, тождественно равная постоянной $C \neq 0$. $V_\mu C = 0$ тогда и только тогда, когда мера $\mu$ инвариантна относительно $T$.

Это утверждение следует из 1.3 при $\rho = C$.

1.5. Если $g \in L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $h \in L_\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $k \geq 1$, то
$$\int_X h(x) V_\mu^k g(x) \mu(dx) = \int_X g(x) U^k h(x) \mu(dx).$$

Доказательство состоит в последовательном применении 1.1.

1.6. Пусть $\nu$ - мера на $\mathfrak{M}$, абсолютно непрерывная относительно $\mu$, и пусть $s$ - плотность $\nu$ относительно $\mu$. Тогда, если $g \in L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$, то
$$V_\mu(gs) = s V_\nu g.$$

Действительно, если $A \in \mathfrak{M}$, то
$$\int_A V_\mu(gs)(x) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} g(x) s(x) \mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} g(x) \nu(dx) =$$
$$= \int_A V_\nu g(x) \nu(dx) = \int_A s(x) V_\nu g(x) \mu(dx).$$

1.7. Если $f \in L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $g \in L_\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$, то $|V_\mu fg| \leq |g|_\infty V_\mu(|f|)$.

Это свойство следует из 1.2 и того, что
$$-|g|_\infty |f| \leq fg \leq |g|_\infty |f|.$$

1.8. Если $f\in L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$, $g\in L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$, то
$$V_\mu^u(fU^ug)=gV_\mu^u f.$$
В самом деле, если $h\in L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$, то согласно 1.1 имеем
$$\int_X V_\mu^u(fU^ug)(x)h(x)\mu(dx)=\int_X f(x)U^ug(x)U^uh(x)\mu(dx)=$$
$$=\int_X f(x)U^u(hg)(x)\mu(dx)=\int_X h(x)g(x)V_\mu^u f(x)\mu(dx).$$

Теперь будет изучаться случай, когда на $\mathfrak{M}$ задана инвариантная вероятностная мера $P$. Вместо $V_P$ мы будем писать просто $V$. Дело в том, что в основном мы будем заниматься случаем, когда в классе мер, абсолютно непрерывных относительно некоторой фиксированной меры $\mu$, есть лишь одна вероятностная мера, инвариантная относительно $T$.

Поскольку $P$ - инвариантная мера, $T$ теперь будет именоваться эндоморфизмом пространства $(X,\mathfrak{M},P)$ (до сих пор мы называли $T$ преобразованием).

Введём обозначения, сохраняемые до конца этой главы. Мы полагаем $\mathfrak{M}^k=T^{-k}(\mathfrak{M})$, $k=0,1,\dots\dots$, причём $T^{-k}(\mathfrak{M})$ - наименьшая полная [1] $\sigma$ - алгебра, содержащая все множества вида $T^{-k}(A)$, $A\in\mathfrak{M}$. Обозначим

---

1) $\sigma$ - алгебра $\mathfrak{M}_0$ называется полной в пространстве $(X,\mathfrak{M},\mu)$, если она содержит все множества внешней меры $0$ (внешняя мера строится по $\mathfrak{M}$ и $\mu$).

через $P^k$ оператор условного математического ожидания относительно $\mathfrak{M}^k$.

1.9. $U^n V^n = P^n$.

Для проверки этого равенства достаточно показать, что $U^n V^n f = P^n f$, если $f \in L_1(X, \mathfrak{M}, P)$. Поскольку обе части последнего равенства измеримы относительно $\mathfrak{M}^n$, для его доказательства достаточно установить, что равны интегралы от произведений обеих его частей на произвольную ограниченную функцию, измеримую относительно $\mathfrak{M}^n$, т.е. имеющую вид $U^n h$, $h \in L_\infty(X, \mathfrak{M}, P)$.

Проверим это:

$$\int_X U^n V^n f(x)\, U^n h(x)\, P(dx) = \int_X U^n (V^n f h)(x)\, P(dx) =$$

$$= \int_X V^n f(x) h(x)\, P(dx) = \int_X f(x)\, U^n h(x)\, P(dx) =$$

$$= \int_X P^n f(x)\, U^n h(x)\, P(dx) .$$

1.10. $V^n U^n = I$ ($I$ - единичный оператор).

В самом деле, если $f \in L_1(X, \mathfrak{M}, P)$, $g \in L_\infty(X, \mathfrak{M}, P)$, то

$$\int_X g(x) V^n U^n f(x)\, P(dx) = \int_X U^n g(x)\, U^n f(x)\, P(dx) = \int_X g(x) f(x)\, P(dx)$$

1.11. Оператор $V$ действует в каждом из пространств $L_p(X, \mathfrak{M}, P)$ ( $1 \le p \le \infty$ ) с нормой 1.

То, что норма $V^n$ не превосходит 1, следует из 1.9

и того, что $U^n$ - изометрия, а норма $P^n$ не превосходит 1. То, что норма $V^n$ не меньше 1, следует из 1.10 и изометричности $U^n$.

1.12. Если $T$ - автоморфизм, то $V^n = U^{-n}$ $(n \geq 0)$. Действительно, в этом случае $P^n = I$ при всех $n \geq 0$ и утверждение следует из свойств 1.9 и 1.10.

Напомним, что эндоморфизм пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ называется точным [19], если $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ - наименьшая $\sigma$- алгебра пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$, содержащая лишь множества меры 0 и 1.

1.13. Эндоморфизм $T$ точен тогда и только тогда, когда для всех $p$ ($1 \leq p < \infty$) из того, что $f \in L_p(X, \mathfrak{M}, P)$, следует, что

$$\left| V^n f - \int_X f(x) P(dx) \right|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Действительно, в силу свойства 1.9 и изометричности $U$, только что написанное соотношение равносильно такому:

$$\left| P^n f - \int_X f(x) P(dx) \right|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Если выполнено это соотношение, то, применяя его к характеристическим функциям $\chi_A$ множеств $A \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathfrak{M})$, для которых $P^n \chi_A = \chi_A$ при всех $n \geq 0$, убеждаемся, что все они постоянны, т.е. что эндоморфизм $T$ точен.

Обратно, если $T$ - точный эндоморфизм, то по теореме Дуба ([9], стр.295) при $1 \leq p < \infty$

$$\left| P^n f - \int_X f(x) P(dx) \right|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

1.14. Если $f\in L_p$, $g\in L_{p'}(1\le p,p'\le\infty, p^{-1}+p'^{-1}=1)$, то

$$\int_X g(x)\,V^n f(x)P(dx)=\int_X f(x)U^n g(x)P(dx).$$

Доказательство. Если $g\in L_\infty$, то утверждение следует из 1.5. В общем случае нужно аппроксимировать $g$ в $L_{p'}$ ограниченными функциями и воспользоваться тем, что $V^n f\in L_p$ (см. 1.11), а $U^n$ - изометрия в $L_{p'}$.

Теперь мы перейдем к доказательству утверждения, гарантирующего существование инвариантной меры с определенными свойствами.

Лемма 4.1. Пусть $S$ - линейный оператор в $L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$, отображающий $L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$ в себя, причём операторы $S^n$ ($n\geqslant 0$) равномерно ограничены как в $L_\infty$, так и в $L_1$. Тогда средние $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}S^k$ сильно сходятся в $L_p$ $(1\le p<\infty)$.

Доказательство. Мы применим эргодическую теорему для операторов в банаховом пространстве ([7], следствие УП. 5.3). Эта теорема гарантирует сильную сходимость средних $A_n=n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}S^k$, если они равномерно ограничены, последовательность $n^{-1}S^n$ сильно сходится к $0$ и последовательность $A_n f$ слабо компактна для всех $f$ из некоторого плотного множества. Из условий леммы и теоремы М.Рисса о выпуклости следует, что $S$ отображает $L_p$ в себя и операторы $S^n$ ($n\geqslant 0$) равномерно ограничены в $L_p$. Отсюда следует равномерная ограниченность $A_n$

и сходимость $n^{-1} \delta_k^n O$. В качестве плотного в $L_p$ множества возьмём $L_\infty$.

Из условий леммы следует, что если $f \in L_\infty$, то последовательность $A_n f$ равномерно ограничена и поэтому слабо компактна в $L_p$ ($1 \le p < \infty$).

**Теорема 4.1.** Пусть $T$ - несингулярное преобразование пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Для того, чтобы существовала инвариантная относительно $T$ вероятностная мера $P$, задаваемая равенством

$$P(A) = \int_A p(x) \mu(dx), \quad A \in \mathfrak{M}, \quad (1)$$

где $p$ удовлетворяет при некоторых постоянных $C_1$ и $C_2$ ($0 < C_1 \le C_2 < \infty$) неравенствам

$$C_1 \le p \le C_2, \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $C_1'$ и $C_2'$ ($0 < C_1' \le C_2' < \infty$) выполнялись неравенства

$$C_1' \le V_\mu^n 1 \le C_2', \ (n \geq 0). \quad (3)$$

Кроме того, если выполнено (3), то можно положить

$$p = L_1 \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} V_\mu^k 1. \quad (4)$$

**Доказательство.** Необходимость. Если $p$ - плотность инвариантной меры, удовлетворяющая неравенствам (2), то из свойств 1.2 и 1.3 следует, что

$$V_\mu^n 1 = V_\mu^n p p^{-1} \le C_1^{-1} V_\mu^n p = C_1^{-1} p \le C_1^{-1} C_2 = C_2'$$

и

$$V_\mu^n 1 = V_\mu^n \rho\rho^{-1} \geq C_2^{-1} V_\mu^n \rho = C_2^{-1}\rho \geq C_1 C_2^{-1} = C_1'$$

Достаточность. Последнее из неравенств (3) в сочетании со свойством 1.2 обеспечивает равномерную ограниченность операторов $V_\mu^n$ в $L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$: в самом деле из 1.2 следует, что для нетрицательных $f$ $|V_\mu^n f|_\infty \leq C_2' |f|_\infty$, а произвольную функцию $f$ из $L_\infty$ [1)] можно представить в виде суммы $\sum_{k=0}^{3} i^k f_k$, где $f_k \geq 0$ и $|f_k|_\infty \leq |f|_\infty$, поэтому $|V_\mu^n|_{\infty,\infty} \leq 4C_2'$.

Равномерная ограниченность операторов $V_\mu^n$ в $L_1$ следует из того, что $|V_\mu^n|_{1,1} = 1$. Применяя к $V_\mu$ лемму 4.1, получаем, что существует в $L_1$ предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} V_\mu^k 1 = \rho .$$

Очевидно, что $V_\mu \rho = \rho$. Поэтому, согласно 1.3, $\rho$ определяет инвариантную меру. Поскольку все средние $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} V_\mu^k 1$ заключены между $C_1'$ и $C_2'$, то это верно и для их $L_1$ - предела $\rho$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Из сходимости $\rho_n = n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} V_\mu^k 1$ к $\rho$ в $L_1$ следует существование подпоследовательности, сходящейся почти всюду. Это можно использовать для получения сведений о свойствах $\rho$, явный вид которой, как правило, неизвестен.

---

1) Нам нужны здесь комплексные $L_p$, т.к. мы будем использовать теорему о выпуклости.

Например, если $X$ - метрическое пространство, причём все непустые открытые множества в $X$ измеримы и имеют положительную $\mu$ - меру, а функции $V_\mu^n 1$ удовлетворяют на некотором открытом множестве $A \subset X$ условию Гёльдера с одинаковыми показателями и постоянными, то и функцию $\rho$ можно считать удовлетворяющей тому же условию Гельдера на $A$.

Действительно, $\rho_n$ удовлетворяют на $A$ тому же условию, что и $V_\mu^n$; в силу сходимости некоторой подпоследовательности $\rho_{n_k}$ почти всюду, для $\rho$ то же условие выполняется на некотором множестве $B \subset A$, причём $\mu(A \setminus B)=0$. Но $B$ плотно в $A$ (иначе $A \setminus B$ содержит открытое множество и имеет положительную меру) и $\rho$, пользуясь её равномерной непрерывностью на $B$, можно продолжить на $A$ с сохранением гёльдеровского свойства.

Можно также доказать, что если $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ - отрезок прямой с мерой Лебега, то из равномерной ограниченности вариаций функций $V_\mu^n 1$ следует, что $\rho$ - функция ограниченной вариации. Справедливы и некоторые другие утверждения того же типа. В связи с этим отметим, что имеющиеся в работе [25] требование существования у $\rho$ ограниченной производной излишне: это можно вывести из остальных предположений указанной работы.

Замечание 4.2. Вообще говоря, у преобразования $T$ могут быть инвариантные вероятностные меры, абсолютно непрерывные относительно $\mu$, и отличные от меры с плотностью

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} V^k 1 .$$

Свойства регулярности, о которых шла речь в предыдущем замечании, относятся только к $p$. В приложениях, однако, обычно $T$ эргодично, и инвариантная вероятностная мера, плотность которой удовлетворяет условию (2), единственна.

Замечание 4.3. Если $(X, \mathfrak{M}, P)$ - пространство Лебега [19], а $T$ - его эндоморфизм, то для почти всех $x \in X$ множество $T^{-1}(x)$ можно снабдить $\sigma$- алгеброй подмножеств $\mathfrak{M}_x$ и вероятностной мерой $P_x$ на $\mathfrak{M}_x$, взяв в качестве $\mathfrak{M}_x$ и $P_x$ элементы канонической системы мер, отвечающей измеримому разбиению $X$ на прообразы точек относительно $T$ ( см. [19] ). Можно показать, что оператор $V$ с помощью мер $P_x$ записывается так:

$$Vf(x) = \int_{T^{-1}(x)} f(u) P_x(du) .$$

$P_x$ можно интерпретировать, как переходную функцию некоторого марковского процесса с пространством состояний $X$ и со стационарным распределением $P$, причём движение, обратное этому процессу, детерминировано и определяется эндоморфизмом $T$. Число $Vf(x)$ является для этого марковского процесса "математическим ожиданием $f$ исходя из точки $x$ за один шаг."

Пример 1. Пусть $(X, \mathfrak{M}, P)$ - отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега, а $Tx = \{2x\}$ ( $\{t\} = t - [t]$ ). Тогда, очевидно, $T^n x = \{2^n x\}$ и

$$\int_0^1 g(\{2^n x\}) f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} g(\{2^n x\}) f(x)\,dx =$$
$$= 2^{-n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_0^1 g(t) f\left(\frac{t+i}{2^n}\right) dt,$$

т.е.

$$V^n f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+i}{2^n}\right).$$

Пример 2. Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ - отрезок $(0,1)$ без рациональных точек с мерой Лебега, $Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\}$. Это преобразование возникает в метрической теории цепных дробей (см. [24], [13]). Действуя так же как в примере 1, легко установить, что

$$V_\mu f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{i+x}\right) \frac{1}{(i+x)^2}.$$

Положим

$$p(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2}.$$

Тогда $V_\mu p = p$ и мера $P$ с плотностью $p$ относительно $\mu$ инварианта относительно $T$ (см. 1.3). Согласно 1.6

$$Vf(x) = V_P f(x) = \frac{1}{p(x)} V_\mu (pf)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{i+x}\right) \frac{1+x}{(i+x)(i+x+1)}$$

Укажем вид операторов $V_\mu^n$ и $V^n$. Суммирование будет производиться по всем наборам $(i_1, \ldots, i_n)$, где $i_k \geq 1$ - целые $(k = 1, \ldots, n)$, причём числитель и знаменатель цепной дроби порядка $n$ с последовательности неполных частных $i_1, \ldots, i_n$, обозначаются, соответственно через $p_n$ и $q_n$. С учётом этих соглашений

$$V_\mu^n f(x) = \sum_{(n)} f\left(\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2},$$

$$V^n f(x) = \sum_{(n)} f\left(\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}\right) \frac{1+x}{(q_n + x q_{n-1})(p_n + x p_{n-1} + q_n + x q_{n-1})}$$

Первая из этих формул получена еще Р.О.Кузьминым ( см. [24] ), вторая получается из первой с помощью 1.6. Соображения, излагаемые в § 3, позволяют выписывать подобные формулы для широкого класса преобразований.

## § 2. Экспоненциальная сходимость

В этом параграфе для определённого класса эндоморфизмов $T$ и функций $f$ будут получены оценки вида

$$|V^u f - \int_X f(x) P(dx)|_\infty = O(e^{-\lambda u}),\ \lambda > 0.$$

Пусть $T$ - эндоморфизм вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$. Предположим, что задана $\sigma$- алгебра $\mathcal{L} \subset \mathfrak{M}$. Положим $\mathcal{L}_k^l = \bigvee_{p=k}^{l} T^{-p}(\mathcal{L})$, если $l \geq 0$, $k \geq 0$, $l \geq k$, и пусть $\mathcal{L}_k^l = \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$- тривиальная $\sigma$ - алгебра), если $k \geq 0, l \geq 0, k > l$. Пусть, далее, $\mathfrak{M}_u = \mathcal{L}_0^{u-1}$ $(u \geq 0)$, $\mathfrak{M}^u = T^{-u}(\mathfrak{M})$. Операторы условного математического ожидания относительно $\sigma$- алгебр $\mathcal{L}_k^l$, $\mathfrak{M}_u$, $\mathfrak{M}^u$ обозначим, соответственно, через $P_k^l$, $P_u$, $P^u$. Символы $I$ и $E$ обозначают единичный оператор и оператор интегрирования по мере $P$.

Колебание функции $f$ на множестве $A \subset X$ определяется равенством

$$W(f,A) = \begin{cases} \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} f(x) - \operatorname{ess\,inf} f(x), & \text{если внешняя мера } A \text{ положительна,} \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Вместо $W(f, X)$ будем писать $W(f)$, или же $|f|_W$. Заметим, что $W$ - полунорма на пространстве $L_\infty$ ,причём $W(f)=0$ тогда и только тогда, когда $f\in C$ ($C$-подпространство постоянных).

Пусть $S$ - линейный оператор в $L_\infty$, причём $C\subset S^{-1}(0)$. Положим

$$|S|_W=\inf\{K \mid W(Sf)\le K\,W(f),\ f\in L_\infty\}.$$

Иначе можно определить $|S|_W$, как норму оператора $\tilde S$, индуцированного $S$ на факторпространстве $L_\infty/C$, снабжённом нормой $W$.

Положим при $k\geq 0$

$$\tau(k)=\sup_{n\geq 0}|V^k(I-P_k)V^nP_{n+k}|_W. \qquad (5)$$

Теорема 4.2. Пусть эндоморфизм $T$ и $\sigma$-алгебра $\mathcal{L}$ удовлетворяют следующим условиям.

1. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(\tau(k))^{\frac{1}{k}}<1$,

2. $\tau(0)<1$.

Если для функции $f\in L_\infty(X,\mathfrak{M},P)$ конечна при некотором $\beta$ ($\beta>1,\ \beta^{-1}>\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(\tau(k))^{\frac{1}{k}}$) полунорма

$$\rho_\beta(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k W(V^k(I-P_k)f),$$

то при $n\geq 0$ справедлива оценка

$$|V^nf-Ef|_\infty\le L e^{-\lambda n}\rho_\beta(f),$$

где $L>0$ и $\lambda>0$ зависят лишь от чисел $\tau(k)$ и $\beta$.

Замечание 4.4. Теорема и доказательство остаются в силе, если в определении чисел $\tau(k)$ и $\rho_\beta(f)$ заменить $W$ нормой любого из пространства $L_p$

$(1 \le p \le \infty)$. Однако проверка условия 2 проще всего именно при использовании $W$ (см. § 3). Что касается проверки условия 1, то тут можно перейти к $L_\infty$ - норме. Действительно, операторы, фигурирующие в (5) обладают свойствами $S^{-1}(0) \supset C$, $ES = 0$, а для таких операторов $|S|_W \le |S|_\infty \le 2|S|_W$.

Доказательству теоремы предшествует ряд вспомогательных предложений.

**Лемма 4.2.** Пусть $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ - две $\sigma$ - алгебры, содержащиеся в $\mathfrak{M}$, $P'$ и $P''$ - операторы условного математического ожидания относительно $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{M}'' = T^{-u}(\mathfrak{M}')$.

Тогда справедливы равенства

$$U^u P' = P'' U^u, \qquad (6)$$

$$P'' V^u = V^u P. \qquad (7)$$

Доказательство. Как следует из предположений леммы, обе части (6) одинаково действуют на характеристические функции множеств из $\mathfrak{M}'$. Отсюда вытекает, что они совпадают на всех интегрируемых функциях $f$, измеримых относительно $\mathfrak{M}'$, т.е. таких, что $P'f = f$.

Если же $f \in L_1$ и $P'f = 0$, то

$$\int_X f(x) P'g(x) P(dx) = 0$$

для всякой $g \in L_\infty$. В виду этого и инвариантности меры $P$

$$\int_X U^u f(x) \cdot U^u P' g(x) P(dx) = 0,$$

если $g \in L_\infty$. Но в виде $U^n P' g$, $g \in L_\infty$, представима всякая ограниченная функция, измеримая относительно $\mathfrak{M}'$. Поэтому $P'' U^n f = 0$ и обе части (6) совпадают на всех $f \in L_1$, для которых $P' f = 0$. Т.к. $P'$ - проектор, то (6) установлено.

Поскольку оператор $U^n$ изометричен и, следовательно его ядро тривиально, равенство (7) равносильно такому:

$$U^n P' V^n = U^n V^n P''.$$

Это равенство, в свою очередь, равносильно, как следует из (6) и свойства 1.9 оператора $V$, следующему:

$$P'' P^n = P^n P''$$

Справедливость последнего равенства очевидна: обе его части равны $P''$, т.к. $T^{-n}(\mathfrak{M}') \subset T^{-n}(\mathfrak{M})$.

Замечание 4.5. Теперь можно разъяснить вероятностный смысл условия 1 теоремы. Оператор $V^k(I-P_k)V^n P_{n+k}$ равен, как следует из (7) и равенства $P_k = P_0^{k-1}$, оператору $V^{k+n}(I-P_n^{n+k-1})P_0^{n+k-1}$.

В силу изометричности $U^{n+k}$ в полунорме $W$ и свойства 1.9

$$\| V^{k+n}(I-P_n^{n+k-1})P_0^{n+k-1}\|_W = \| V^{k+n}(P_0^{k+n-1}-P_n^{k+n-1})\|_W =$$

$$= \| U^{k+n} V^{k+n}(P_0^{k+n-1}-P_n^{k+n-1})\|_W = \| P^{k+n} P_0^{k+n-1} - P^{k+n} P_n^{k+n-1}\|_W$$

Условие 1 требует, чтобы последовательность $\tau(k)$ весьма быстро стремилась к $0$. Посмотрим, что означает равен ство $0$ $\tau(k)$ при некотором $k$ ( или, что эквивалентно, равенство $0$ всех операторов $P^{k+n}P_0^{k+n-1}-P^{k+n}P_n^{k+n-1}$ ( $n \geq 0$ ) ). Если, например, $\tau(0)=0$, то $P^n P_0^{n-1}=E$. Легко убедиться, что это равносильно независимости $\sigma$ - алгебр $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{L})$ и $T^{-n}(\mathcal{M})$ при всех $n \geq 0$.

Пусть теперь $k \geq 1$ и $\tau(k)=0$. Тогда при всех $n \geq 1$

$$P^{k+n}P_0^{k+n-1}=P^{k+n}P_n^{n+k-1}.$$

Переходя к сопряженным операторам и пользуясь тем, что при этом операторы условного математического ожидания переходят в себя, получаем эквивалентное равенство

$$P_0^{n+k-1}P^{k+n}=P_n^{n+k-1}P^{k+n}.$$

Как нетрудно понять, это равенство равносильно условной независимости $\sigma$ - алгебр $T^{-(k+n)}(\mathcal{M})$ и $\bigvee_{\ell=0}^{n-1} T^{-\ell}(\mathcal{L})$ ( или, что эквивалентно, $\bigvee_{\ell=0}^{k+n-1} T^{-\ell}(\mathcal{L})$) относительно $\sigma$ - алгебры $\bigvee_{\ell=n}^{k+n-1} T^{-\ell}(\mathcal{L})$.

Важный специальный случай, которым мы будем заниматься ниже, это случай, когда $\mathcal{L}$ - образующая для $T$, т.е. $\mathcal{M}=\bigvee_{\ell=0}^{\infty} T^{-\ell}(\mathcal{L})$.

В этом случае равенство $\tau(k)=0$ эквивалентно условной независимости относительно $\bigvee_{\ell=n}^{k+n-1} T^{-\ell}(\mathcal{L})$ $\sigma$- алгебр $\bigvee_{\ell=k+n}^{\infty} T^{-\ell}(\mathcal{L})$ и $\bigvee_{\ell=0}^{k+n-1} T^{-\ell}(\mathcal{L})$ при всех $n \geq 0$. Это равносильно тому, что последовательность $\sigma$ - алгебр $T^{-n}(\mathcal{L})$ - $k$ - марковская ( заметим, что $k$ - марковость этой последовательности вытекает из того, что $\tau(k)=0$, без предположения, что $\mathcal{L}$ - образующая).

Таким образом, естественно считать, что по крайней мере в случае, когда $\mathcal{L}$ - образующая для $T$, условие I есть условие асимптотической марковости. Результаты этого параграфа содержат в себе, следовательно, и некоторые результаты о стационарных марковских процессах. Эти результаты, однако, можно вывести из классических условий экспоненциальной сходимости к стационарному распределению для марковских процессов.

Лемма 4.3. Пусть $f \in L_\infty$. Положим $S_k(f) = |V^k(I-P_k)f|_W$. Тогда при $k \geqslant 0$, $n \geqslant 0$

$$S_k(V^n f) \leq S_{k+n}(f) + r(k) S_0(f).$$

Доказательство. Напомним еще раз, что $P_0 = P_0^{-1} = E$ и, значит, $S_0(f) = |f - Ef|_W = W(f)$. Теперь мы имеем

$$S_k(V^n f) = |V^k(I-P_k)V^n f|_W \leq$$

$$\leq |V^k(I-P_k)V^n(I-P_{k+n})f|_W +$$

$$+|V^k(I-P_k)V^n P_{k+n} f|_W .$$

Первое слагаемое по лемме 4.2 равно

$$|V^{k+n}(I-P_n^{k+n-1})(I-P_{k+n})f|_W =$$

$$= |V^{k+n}(I-P_n^{n+k-1})(I-P_0^{n+k-1})f|_W =$$

$$= |V^{k+n}(I-P_n^{k+n-1}-P_0^{n+k-1}+P_n^{n+k-1})f|_W =$$

$$= |V^{k+n}(I-P_{k+n})f|_W = S_{k+n}(f),$$

Поскольку $V^k(I-P_k)V^n P_{k+n} E = 0$, то

$$\|V^k(I-P_k)V^n P_{k+n} f\|_n = \|V^k(I-P_k)V^n P_{k+n}(I-E)f\|_W \le$$

$$\le \|V^k(I-P_k)V^n P_{k+n}\|_W \|(I-E)f\|_W \le \tau(k)\, S_0(f).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4. Пусть $f \in L_\infty$ и $\rho_\beta(f) < \infty$ при некотором $\beta > 1$, причём $\beta^{-1} > \lim\limits_{k\to\infty} (\tau(k))^{\frac{1}{k}}$.

Имеют место неравенства

$$\rho_\beta(V^n f) \le C\, S_0(f) + \beta^{-n} \rho_\beta(f), \tag{8}$$

$$S_0(V^n f) \le \tau(0)\, S_0(f) + \beta^{-n} \rho_\beta(f), \tag{9}$$

причём $C \ge 0$ зависит лишь от $\beta$ и последовательности $\tau(k)$.

Доказательство. Поскольку $\rho_\beta(f) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta^k S_0(f)$, то, согласно лемме 4.3,

$$\rho_\beta(V^n f) \le \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k S_k(V^n f) \le \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k S_{k+n}(f) + S_0(f) \sum_{k=0}^{\infty} \tau(k)\beta^k \le$$

$$\le \beta^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+n} S_{k+n}(f) + C\, S_0(f) \le C\, S_0(f) + \beta^{-n} \rho_\beta(f)$$

и

$$S_0(V^n f) \le S_n(f) + \tau(0)\, S_0(f) \le$$

$$\le \beta^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k S_k(f) + \tau(0)\, S_0(f) \le \tau(0)\, S_0(f) + \beta^{-n} \rho_\beta(f$$

Теперь мы докажем, опираясь лишь на неравенства (8) и (9), что некоторая степень оператора $V$ является сжимак щим отображением в полунорме $\rho_\beta$.

Лемма 4.5. Пусть $1>\beta^{-1}>\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(\tau(k))^{\frac{1}{k}}$.
Найдутся такие числа $\theta$ $(0\le\theta<1)$ и $N(N\geq 0$, целое), зависящие лишь от $\beta$ и $\tau(k)$, что для всех $f$, для которых $\rho_\beta(f)<\infty$, справедлива оценка

$$\rho_\beta(V^N f)\le\theta\rho_\beta(f). \qquad (10)$$

Доказательство. Пусть $k$ и $\ell$ - натуральные числа, которые мы зафиксируем позже. Согласно (9) мы получаем, что

$$S_0(V^{k\ell}f)\le \tau(0)S_0(V^{k(\ell-1)}f)+\beta^{-k}\rho_\beta(V^{k(\ell-1)}f)\le$$
$$\le\tau^2(0)S_0(V^{k(\ell-2)}f)+\tau(0)\beta^{-k}\rho_\beta(V^{k(\ell-2)}f)+$$
$$+\beta^{-k}\rho_\beta(V^{k(\ell-1)}f)\le\ldots\le\tau^\ell(0)S_0(f)+\beta^{-k}\sum_{i=0}^{\ell-1}\tau^i(0)\rho_\beta(V^{k(\ell-i-1)}f)$$

Так как $S_0(f)\le\rho_\beta(f)$, то, в силу (8), для всех $n\geq 0$

$$\rho_\beta(V^n f)\le cS_0(f)+\beta^{-n}\rho_\beta(f)\le(c+1)\rho_\beta(f)$$

и, поскольку $\tau(0)<1$, то

$$S_0(V^{k\ell}f)\le\tau^\ell(0)S_0(f)+(c+1)\beta^{-k}\rho_\beta(f)\sum_{i=0}^{\infty}\tau^i(0)\le$$
$$\le\left(\tau^\ell(0)+\beta^{-k}\frac{c+1}{1-\tau(0)}\right)\rho_\beta(f).$$

Поэтому

$$\rho_\beta(V^{k(\ell+1)}f)\le cS_0(V^{k\ell}f)+\beta^{-k}\rho_\beta(V^{k\ell}f)\le$$
$$\le\left[c\left(\tau^\ell(0)+\beta^{-k}\frac{c+1}{1-\tau(0)}\right)+\beta^{-k}(c+1)\right]\rho_\beta(f).$$

Теперь достаточно, поскольку $\tau(0)<1$ и $\beta>1$, выбрат $k$ и $\ell$ такими большими, чтобы число в квадратных скобках стало меньше 1, а затем положить $N=k(\ell+1)$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $n \geq 0$ - целое число. Тогда $n = sN + r$, где $0 \leq r < N$. Поскольку из (8) следует, что $\rho_\beta(V^k f) \leq (c+1)\rho_\beta(f)$ при всех $k \geq 0$ ( см.доказательство леммы 4.5), то

$$\rho_\beta(V^n f) = \rho_\beta(V^{sN}(V^r f)) \leq \theta^s \rho_\beta(V^r f) \leq$$
$$\leq (c+1)\theta^s \rho_\beta(f) \leq (c+1)\left(\theta^{\frac{1}{N}}\right)^{sN} \rho_\beta(f) \leq$$
$$\leq L' e^{-\lambda n},$$

где $e^{-\lambda} = \theta^{\frac{1}{N}}$, $L' = (c+1)\theta^{-(1-\frac{1}{N})}$.

Очевидно также, что

$$|V^n f - Ef|_\infty \leq W(V^n f) = W(V^n f - EV^n f) =$$
$$= S_0(V^n f) \leq \rho_\beta(V^n f) \leq L_1 e^{-\lambda n} \rho_\beta(f).$$

Теорема доказана.

Замечание 4.6. В приложениях выбор числа $\beta$ обычно определяется модулем непрерывности рассматриваемого класса функций $f$. Так, если в примере 1 § 1 в качестве $\mathcal{L}$ взят $\sigma$ - алгебру, порождённую интервалами $[0, \frac{1}{2})$ и $[\frac{1}{2}, 1)$ и определить полунорму $H_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ равенством

$$H_\alpha(f) = \sup_{x,y \in [0,1]} |x-y|^{-\alpha} |f(x) - f(y)|,$$

то, выбрав $\beta \in (1, 2^\alpha)$ нетрудно получить оценку

$$\rho_\beta(f) \leq \frac{1}{1 - \beta 2^{-\alpha}} H_\alpha(f).$$

Пользуясь этой оценкой, можно исключить $\rho_\beta$ из доказываемого в теореме 4.2 неравенства.

Подобное же замечание относится к обобщению теоремы 4.2, о котором говорится в замечании 4.4. При этом нужно рассматривать гёльдеровскую полунорму относительно метрики соответствующего пространства $L_p$ .

Связь $\rho_\beta(f)$ с вариацией функции $f$ обсуждается в § 4.

Замечание 4.7. Полунорма $\rho_\beta$ удобна тем, что её определение не требует выхода за рамки теории меры. Во многих случаях, однако, с таким же успехом можно использовать вместо $\rho_\beta$ другие полунормы, мажорирующие $W$ , связанные с дополнительными структурами на $X$ (например, с метрикой, с гладкостью, с упорядоченностью и т.д.). Для этого нужно получить неравенства вида

$$\begin{aligned} &\rho(V^n f) \le c\,W(f) + \beta(n)\rho(f), \\ &W(V^n f) \le \theta\, W(f) + \beta(n)\rho(f) \end{aligned} \qquad (11)$$

(здесь $\rho$ - полунорма, $0 \le \theta < 1,\ \beta(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$), заменяющие неравенства леммы 4,4, а затем повторить остальные рассуждения доказательства теоремы 4.2.

Такой подход полезен, когда нужно, например, доказать что функция $\sum_{k=0}^{\infty}(V^k f - Ef)$ обладает теми же достоинствами (гладкость, ограниченность вариации и т.п.), что и $f$ .

Впервые использованная в лемме 4.5 схема вывода оценки теоремы 4.2 из неравенств (11) применялась в [3] ,где в качестве полунормы $\rho$ для функций на $[0,1]$ была взята вариация.

Эта схема, применённая к примеру 2, с использованием в качестве $\rho(f)$ верхней грани модуля производной $f$, позволяет улучшить первоначальную оценку Р.О.Кузьмина [24], имевшую порядок $e^{-\lambda\sqrt{n}}$, действуя при этом в духе работы [24] (П.Леви [31], а затем и Р.О.Кузьмин [14] получили позже оценку порядка $e^{-\lambda n}$, но совсем другим способом).

**Теорема 4.3.** Если $T$ и $\mathcal{L}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2, а $f\in L_\infty$ измерима относительно $\mathfrak{M}_k=\mathcal{L}_0^{k-1}$, то при $n\geq 0$ справедливо неравенство

$$|P^{n+k}f-Ef|_\infty\leq L'e^{-\lambda n}|f|_\infty,$$

где $L'>0$, $\lambda>0$ зависят лишь от $T$ и $\mathcal{L}$.

**Доказательство.** В силу условий теоремы 4.3

$$S_\ell(V^kf)=|V^\ell(I-P_\ell)V^kf|_\infty=|V^\ell(I-P_\ell)V^kP_{k+\ell}P_kf|_\infty\leq$$

$$\leq r(\ell)|P_kf|_\infty=r(\ell)|f|_\infty$$

и если выбрать $\beta$ таким, что $\overline{\lim_{\ell\to\infty}}(r(\ell))^{\frac{1}{\ell}}<\beta^{-1}<1$, то

$$\rho_\beta(V^kf)\leq|f|_\infty\sum_{\ell=0}^{\infty}\beta^\ell r(\ell)=c|f|_\infty .$$

По теореме 4.2

$$|V^{n+k}f-Ef|_\infty=|V^nV^kf-EV^kf|_\infty\leq Le^{-\lambda n}\rho_\beta(V^kf)\leq$$
$$\leq Lce^{-\lambda n}|f|_\infty=L'e^{-\lambda n}|f|_\infty .$$

Вследствие свойства 1.9 оператора $V$ и изометричности $U$

$$|P^{n+k}f-Ef|_\infty=|U^{n+k}(V^{n+k}f-Ef)|_\infty=|V^{n+k}f-Ef|_\infty\leq$$
$$\leq L'e^{-\lambda n}|f|_\infty .$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1. ( Равномерное сильное перемешивание). Если $A \in \mathfrak{M}_k$, $B \in \mathfrak{M}^{k+n}$, то при $n \geq 0$

$$|P(AB)-P(A)P(B)| \leq L' e^{-\lambda n} P(B).$$

Доказательство. Обозначим через $\chi_A$ характеристическую функцию $A$. Тогда

$$|P(AB)-P(A)P(B)| = |\int_B (\chi_A(x)-P(A))P(dx)| =$$

$$= |\int_B (P^{n+k}\chi_A(x)-P(A))P(dx)| \leq |P^{n+k}\chi_A - P(A)|_\infty P(B) =$$

$$= |P^{n+k}\chi_A - E\chi_A|_\infty P(B) \leq L' e^{-\lambda n} P(B).$$

Следствие 4.2. Если в дополнение к условиям теоремы 4.2 (или 4.3) $\mathcal{L}$ - образующая, то $T$ - точный эндоморфизм.

Доказательство. Согласно 1.13, достаточно доказать, что для всех $f \in L_p(X, \mathfrak{M}, P)$ $(1 \leq p < \infty)$

$$|V^n f - Ef|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

По теореме 4.2 это верно для всех ограниченных $f$, измеримых относительно какой-нибудь из $\sigma$- алгебр $\bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}(\mathcal{L})$, Т.к. $\mathcal{L}$ - образующая, такие функции $f$ плотны в $L_p$ при $1 \leq p < \infty$.

Поскольку нормы операторов $V^n - E$ равномерно ограничены, из сходимости на плотном множестве следует сильная сходимость.

Замечание 4.8. Результаты этого параграфа можно получить при более общих предположениях. Именно, условие $r(0) < 1$ ( оно эквивалентно условию $\sup_{n \geq 0} |P^n P_n - E|_W < 1$)

можно заменить более слабым условием: $\sup\limits_{n\geq 0} |P^{n+s} P_n - E|_W < 1$ при некотором $s \geq 0$.

При этом нужно положить

$$S_k(f) = |V^{k+s}(I - P_k) f|_W ,$$

$$\tau(k) = \sup_{n\geq 0} |V^{k+s}(I - P_k) V^n P_{k+n}|_W$$

и повторить рассуждения этого параграфа.

## § 3. Один класс преобразований вероятностных пространств

В этом параграфе для некоторого класса преобразований с помощью теоремы 4.1 доказывается существование инвариантной меры. Затем к возникшим эндоморфизмам применяются результаты § 2. Изложение ведётся в рамках теории меры, но уже хорошо приспособлено для применения к теоретико-числовым эндоморфизмам ( см. §§ 4,5).

Пусть $T$ - измеримое преобразование вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ с непрерывной (т.е. не имеющей атомов) мерой $\mu$. Условия, накладываемые на $T$, нумеруются римскими цифрами и вводятся на протяжении всего параграфа, т.к. для введения последующих условий часто нужно прокомментировать ранее введённые.

Некоторые из этих условий накладываются на все степени преобразования $T$. Однако, чтобы облегчить использование результатов § 3, мы стараемся указывать, как проверять эти условия, не обращаясь ко всем степеням $T$.

I. Предположим, что задано разбиение пространства $X$ на конечное или счётное число измеримых множеств положительной меры $A_i$, находящихся во взаимно однозначном соответствии с элементами $i$ некоторого множества $I$, причём $T$ несингулярно [1)] и взаимно однозначно отображает каждое множество $A_i$ на $T(A_i)$ и, кроме того, $T(A_i)$ измеримо, а обратное отображение $f_i : T(A_i) \to A_i$ измеримо и несингулярно.

Из (1) следует, что $T$ несингулярно.

Те множества положительной меры, которые имеют вид $A_{i_1} \cap T^{-1}(A_{i_2}) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(A_{i_n})$ ($n$ фиксировано), также образует разбиение $X$ на не более чем счётное число частей. Множества такого вида будем называть квазиинтервалами ранга $n$ (единственный квазиинтервал ранга $0$ – пространство $X$). Квазиинтервалы ранга $n$ порождают $\sigma$ - алгебру, которую мы обозначим $\mathfrak{M}_n$. Если положить $\mathcal{L} = \mathfrak{M}_1$ то ясно, что $\mathfrak{M}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{L})$.

С помощью индукции из (1) нетрудно вывести, что $T^n$ несингулярно, взаимно однозначно и обратимо отображает всякий квазиинтервал $A$ ранга $n$ на $T^n(A)$, причём $T^n(A)$ измеримо. Заданное на $T^n(A)$ обратное отображение $f_A^{(n)}$ измеримо, несингулярно и взаимно однозначно.

Если $i^n = (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, то положим

$$A_{i^n} = A_{i_1} \cap T^{-1}(A_{i_2}) \cap \ldots \cap T^{-(n-1)}(A_{i_n}),$$

---

1) Измеримое отображение называется несингулярным, если прообраз множества меры $0$ имеет меру $0$.

Если при этом $\mu(A_{i^n})>0$, то $A_{i^n}$ - квазиинтервал ранга $n$. Вместо $f^{(n)}_{A_{i^n}}$ мы будем также писать $f_{i^n}$. Очевидно, что $f_{i^n}(x)=f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_n}(x)$.

Удобно считать, что $f_{i^0}(x)=x$ для всех $x\in X$.

Вводимая ниже функция $J_{i^n}$ (или $J^{(n)}_A$) в случае, когда $X$ - множество в $R^s$ с мерой Лебега, а $f_{i^n}$ - гладкое отображение, совпадает на множестве $T^n(A_{i^n})$ с модулем якобиана отображения $f_{i^n}$. Положим $M_{i^n}(A):=\mu(A_{i^n}\cap T^{-n}(A))$, если $A\in\mathfrak{M}$. Поскольку $T^n$ несингулярно, мера $M_{i^n}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$ и имеет относительно $\mu$ плотность $J_{i^n}$. Заметим, что $J_{i^n}(x)=0$ для почти всех $x\bar{\in} T^n(A_{i^n})$.

Условимся до конца главы обозначать характеристическую функцию множества $A_{i^n}$ через $\chi_{i^n}$.

Условимся также считать, что произведение двух функций равно $0$ в тех точках, где хотя бы одна из них равна $0$, а другая, возможно, не определена.

**Лемма 4.6.** Пусть $g\in L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$. Тогда

$$V^n_\mu(g\chi_{i^n})=g(f_{i^n})\cdot J_{i^n}.$$

**Доказательство.** Пусть $h\in L_\infty(X,\mathfrak{M},\mu)$. Тогда

$$\int_X V^n_\mu(g\chi_{i^n})(x)\cdot h(x)\mu(dx)=\int_X h(T^nx)g(x)\chi_{i^n}(x)\mu(dx)=$$

$$=\int_{A_{i^n}} h(T^nx)g(x)\mu(dx)=\int_{T^n(A_{i^n})} h(y)g(f_{i^n}(y))M_{i^n}(dy)=$$

$$=\int_X h(x)g(f_{i^n}(x))J_{i^n}(x)\mu(dx).$$

Следствие 4.2. Пусть $i^l=(i_1,\ldots,i_l)\in I^l$, $j^m=(j_1,\ldots,j_m)\in I^m$, $k^n=(k_1,\ldots,k_n)=(i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_m)\in I^n$, причём $n=l+m$. Тогда для почти всех $x\in X$

$$J_{k^n}(x)=J_{i^l}(f_{j^m}(x))\cdot J_{j^m}(x).$$

Доказательство. Для почти всех $x\in X$ верны равенства

$$J_{k^n}(x)=V_\mu^n\chi_{k^n}(x)=V_\mu^m V_\mu^l(\chi_{i^l}U^l\chi_{j^m})(x)=$$

$$=V_\mu^m(\chi_{j^m}J_{i^l})(x)=J_{i^l}(f_{j^m}(x))\cdot J_{j^m}(x).$$

Следствие доказано.

Условимся до конца этой главы обозначать символом $(n)$ совокупность всех квазиинтервалов ранга $n$. В соответствии с этим выражения вида $\sum\limits_{(n)}$ ($\sup\limits_{(n)}$, $\inf\limits_{(n)}f$ и т.д.) означают, что суммирование (взятие верхней грани и т.д.) проводится по всем квазиинтервалам ранга $n$.

Следствие 4.3. Если $g\in L_1(X,\mathfrak{M},\mu)$, то

$$V_\mu^n g=\sum_{(n)} g(f_{i^n})\,J_{i^n}\quad,$$

причём ряд в правой части сходится в $L_1$.

Доказательство. Поскольку $V_\mu^n$ - ограниченный в $L_1$ оператор

$$V_\mu^n g=V_\mu^n\Big(\sum_{(n)}\chi_{i^n}g\Big)=\sum_{(n)}V_\mu^n(\chi_{i^n}g)=$$

$$=\sum_{(n)} g(f_{i^n})\,J_{i^n}\quad.$$

Доказательство закончено.

Мы будем называть квазиинтервал $A$ ранга $n$ невырожденным, если $\mu(T^n(A))=1$ и вырожденным, если $\mu(T^n(A))<1$. Совокупность всех невырожденных квазиинтервалов ранга $n$ обозначим $(n)_0$.

II. Существует такое $q>0$, что при всех $n\geq 0$

$$\sum_{(n)_0} \mu(A_{i^n}) \geq q.$$

Определим числа $\overline{J}_{i^n}$ и $\underline{J}_{i^n}$. Если $A_{i^n}$ - квазиинтервал, то положим

$$\overline{J}_{i^n} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in T^n A_{i^n}} J_{i^n}(x), \quad \underline{J}_{i^n} = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in T^n(A_{i^n})} J_{i^n}(x).$$

Будем также считать, что $\overline{J}_{i^n}=\underline{J}_{i^n}=0$, если $\mu(A_{i^n})=0$.

III.[1] Существует такая постоянная $C$, что

$$\overline{J}_{i^n} \leq C\,\underline{J}_{i^n}$$

для всех $i^n\in I^n$ и всех $n\geq 0$.

IУ. Существует такая постоянная $L$, что для всех $n\geq 0$

$$\sum_{(n)} \overline{J}_{i^n} \leq L.$$

Замечание 4.9. Как будет показано в лемме 4.12, условие IУ выполнено, если выполнены условия III и УП (см. ниже).

Пусть $A_{i^n}$ - квазиинтервал ранга $n$. Символом $(k, i^n)$ мы будем обозначать совокупность всех квазиинтервалов ранга $k$, содержащихся с точностью до множества меры $0$ в $T^n(A_{i^n})$, а символом $(k, \overline{i^n})$ - совокупность всех квазиинтервалов ранга $k$, которые пересекаются как с $T^n(A_{i^n})$, так и с $\overline{T^n(A_{i^n})}$ по множествам положительной меры. Очевидно, что $(k, \overline{i^n})$ пусто, если $A_{i^n}$ - невы-

1) Ср. [33], [34].

рожденный квазиинтервал.

Положим

$$d_k = \sup_{n\geq 0} \sum_{(n)} \overline{J_{in}} \sum_{(k,i^n)} \overline{J_{ik}},$$

$$e_k = \sup_{n\geq 0} \sum_{(n)} \sum_{(k,i^n)} \overline{J_{ik}}\, W(J_{in}, A_{ik}).$$

$\underline{V}$. $\overline{\lim_{k\to\infty}} (d_k)^{\frac{1}{k}} < 1.$

$\underline{VI}$. $\overline{\lim_{k\to\infty}} (e_k)^{\frac{1}{k}} < 1.$

Для доказательства некоторых результатов нам понадобятся условия $V'$ и $VI'$.

Положим

$$d_k' = \sup_{n\geq 0} \sup_{(n)} \sum_{(k,i^n)} \overline{J_{ik}},$$

$$e_k' = \sup_{n\geq 0} \sup_{(n)} \frac{\sum_{(k,i^n)} \overline{J_{ik}}\, W(J_{in}, A_{ik})}{\overline{J_{in}}},$$

$\underline{V}'$. $\overline{\lim_{k\to\infty}} (d_k')^{\frac{1}{k}} < 1.$

$\underline{VI}'$. $\overline{\lim_{k\to\infty}} (e_k')^{\frac{1}{k}} < 1.$

Замечание 4.10. Если выполнено IV, то $d_k \leq L d_k'$, $e_k = L e_k'$, и из $V'$ следует $V$, а из $VI'$ следует $VI$.

VII. При некотором $\tau > 0$

$$\inf_{n\geq 0} \inf_{(n)} \mu\left(T^n(A_{in})\right) \geq \tau .$$

Определим для функций $g \in L_\infty$ полунорму $t_k(g)$ равенством

$$t_k(g) = \sum_{(k)} \overline{J_{ik}}\, W(g, A_{ik}) \ . \qquad (12)$$

Сформулируем теперь теоремы 4.4 и 4.5.

**Теорема 4.4.** Пусть преобразование $T$ пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и не более чем счётное разбиение пространства $X$, порождающее $\sigma$ - алгебру $\mathcal{L}$, удовлетворяют условиям I-УII. Тогда справедливо следующее:

1. Существует в $L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{(k)} J_{ik} = p, \qquad (13)$$

причём $0 < C_1 \le p \le C_2 < \infty$, и соотношение

$$P(A) = \int_A p(x)\,\mu(dx)$$

определяет инвариантную относительно $T$ меру.

2. Эндоморфизм $T$ пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ и $\sigma$-алгебра $\mathcal{L}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2. При этом $\tau_k \le M(d_k + \ell_k)$, где $M$ зависит лишь от $T$ и $\mathcal{L}$.

3. Пусть $g \in L_\infty$. Положим

$$\sigma_\beta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k t_k(g) \ . \qquad (14)$$

Если $1 > \beta^{-1} > \max(\overline{\lim_{k\to\infty}} (d_k)^{\frac{1}{k}}, \overline{\lim_{k\to\infty}} (\ell_k)^{\frac{1}{k}})$ и $\sigma_\beta(g) < \infty$, то

$$|V^n g - \int_X g(x) P(dx)|_\infty \le A e^{-\lambda n} \sigma_\beta(g),$$

причём $A > 0$ и $\lambda > 0$ - постоянные, зависящие лишь от $T, \mathcal{L}$ и $\beta$.

**Теорема 4.5.** Пусть преобразование $T$ пространства $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и разбиение пространства $X$ удовлетворяют условиям I-III, У$'$, УI$'$ и УII. Тогда выполнены условия теоремы 4.4 и, кроме того, если $g \in L_1(X, \mathfrak{M}_k, P)$

$(\mathfrak{M}_k = \bigvee_{\ell=0}^{k-1} T^{-\ell}(\mathcal{L}))$, то при $n \geq 0$

$$|P^{n+k} g - \int_X g(x) P(dx)|_\infty \leq B e^{-\lambda n} |f|_1$$

причём $B>0$ и $\lambda>0$ — постоянные, зависящие лишь от $T$ и $\mathcal{L}$.

Сначала мы докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.7. Если выполнены условия I–IУ, то $T$ имеет инвариантную меру $P$ с плотностью

$$p = L_1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{(k)} J_{ik} \ , \qquad (13')$$

причём при некоторых $C_1$ и $C_2$ $(0 < C_1 < C_2 < \infty)$

$$C_1 \leq p \leq C_2 \ . \qquad (15')$$

Доказательство. Поскольку $V_\mu^k 1 = \sum_{(k)} J_{ik}$ (см. следствие 4.3), то, чтобы вывести лемму из теоремы 4.1, достаточно показать, что при всех $n \geq 0$,

$$C_1' \leq \sum_{(n)} J_{in} \leq C_2' \ ,$$

где $0 < C_1' < C_2' < \infty$. Правое неравенство выполнено, как следует из IУ, при $C_2' = L$. Далее, используя Ш и П, имеем:

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} \sum_{(n)} J_{in}(x) \geq \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} \sum_{(n)_0} J_{in}(x) \geq$$

$$\geq \sum_{(n)_0} \underline{J_{in}} \geq C^{-1} \sum_{(n)_0} \overline{J_{in}} \geq C^{-1} \sum_{(n)_0} \int_X J_{in}(x)\mu(dx) =$$

$$= C^{-1} \sum_{(n)_0} \mu(A_{in}) \geq C^{-1} q = C_1' \ .$$

Лемма доказана.

В соответствии с соглашением, принятым в § I, вместо

$V_P$ мы будем писать просто $V$. Согласно 1.6 и следствию 4.3

$$V^n g = \frac{1}{P} V_\mu^n (pg) = \sum_{(n)} g(f_{i^n}) \frac{P(f_{i^n}) J_{i^n}}{P} .$$

Положим

$$p_{i^n} = \frac{P(f_{i^n}) J_{i^n}}{P} . \qquad (16)$$

Тогда

$$V^n g = \sum_{(n)} g(f_{i^n}) p_{i^n} . \qquad (17)$$

В силу 1.4 и того, что $P$ - инвариантная мера,

$$\sum_{(n)} p_{i^n} = 1 . \qquad (18)$$

Положим

$$\overline{p_{i^n}} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in T^n(A_{i^n})} p_{i^n}(x), \quad \underline{p_{i^n}} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in T^n(A_{i^n})} p_{i^n}(x)$$

Из (15) и (16) следует, что

$$\overline{p_{i^n}} \le C_1^{-1} C_2 \overline{J_{i^n}} , \quad \underline{p_{i^n}} \geqslant C_1 C_2^{-1} \underline{J_{i^n}} . \qquad (19)$$

Лемма 4.8. Справедливы неравенства

$$\sum_{(n)} t_k (J_{i^n}) \le d_k + e_k , \qquad (20)$$

$$t_k (J_{i^n}) \le (d_k' + e_k') \overline{J_{i^n}} . \qquad (21)$$

Доказательство. Поскольку $W(J_{i^n}, A_{i^k}) = 0$, если $\mu(T^n(A_{i^n}) \cap A_{i^k}) = 0$, то

$$t_k (J_{i^n}) = \sum_{(k)} \overline{J_{i^k}} W(J_{i^n}, A_{i^k}) \le \sum_{(k,i^n)} J_{i^k} W(J_{i^n}, A_{i^k}) +$$

$$+ \sum_{(k,\overline{i_n})} \overline{J_{i^k}}\, \overline{J_{i^n}}$$

и лемма следует из определения чисел $d_k, e_k, d_k', e_k'$.

Условимся записывать в виде $(i^l, i^n)$ элемент $I^{l+n}$, первые $l$ компонент которого образует $i^l \in I^l$, а последние $n$ - элемент $i^n \in I^n$

Лемма 4.9. Пусть $(\tilde{n})$ - произвольное подмножество $(n)$. Имеет место оценка

$$\sum_{(\tilde{n})} t_K(J_{i^n}\, p(f_{i^n})) \le \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(\tilde{n})} \sum_{(l)} t_K(J_{(i^l, i^n)}). \quad (2\ldots$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что если последовательность $g_s \in L_\infty$ сходится по мере к $g$, то

$W(g, A) \le \underline{\lim_{s\to\infty}} W(g_s, A)$ для любого $A \in \mathcal{M}$.

Пользуясь этим фактом, а также тем, что $p$ есть предел в $L_1$ ( а значит и по мере) средних $s^{-1}\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{(l)} J_{i^l}$, получаем:

$$\sum_{(\tilde{n})} t_K(J_{i^n}\, p(f_{i^n})) = \sum_{(\tilde{n})}\sum_{(K)} \overline{J_{i^K}}\, W(J_{i^n}\, p(f_{i^n}), A_{i^K}) =$$

$$= \sum_{(\tilde{n})}\sum_{(K)} \overline{J_{i^K}}\, W(\lim_{s\to\infty} s^{-1}\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{(l)} J_{i^l}(f_{i^n})\, J_{i^n}, A_{i^K}) =$$

$$= \sum_{(\tilde{n})}\sum_{(K)} \overline{J_{i^K}}\, W(\lim_{s\to\infty} s^{-1}\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{(l)} J_{(i^l, i^n)}, A_{i^K}) \le$$

$$\le \sum_{(\tilde{n})}\sum_{(K)} \overline{J_{i^K}}\, \underline{\lim_{s\to\infty}}\, W(s^{-1}\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{(l)} J_{(i^l, i^n)}, A_{i^K}) \le$$

$$\le \underline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{(\tilde{n})}\sum_{(K)} \overline{J_{i^K}}\, W(s^{-1}\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{(l)} J_{(i^l, i^n)}, A_{i^K}) \le$$

$$\le \underline{\lim_{s\to\infty}} \sum_{(\tilde{n})}\sum_{(K)} \overline{J_{i^K}}\, s^{-1}\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{(l)} W(J_{(i^l, i^n)}, A_{i^K}) \le$$

$$\le \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(\tilde{n})}\sum \overline{J_{i^K}} \sum_{(l)} W(J_{(i^l, i^n)}, A_{i^K}) = \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum\sum t_K(J_{(i^l, i^n)}).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.10. Справедливы оценки

$$\sum_{(m)} t_K(J_{im}\, p(f_{im})) \le d_K + l_K, \qquad (23)$$

$$t_K(J_{im}\, p(f_{im})) \le L(d_K' + l_K')\overline{J}_{im} \quad . \qquad (24)$$

Доказательство. По леммам 4.8 и 4.9.

$$\sum_{(m)} t_K(J_{im}\, p(f_{im})) \le \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(m)} \sum_{(l)} t_K(J_{(il,\,im)}) =$$

$$= \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(m+l)} t_K(J_{i(m+l)}) \le d_K + l_K \qquad \text{и}$$

$$t_K(J_{im}\, p(f_{im})) \le \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(l)} t_K(J_{(il,\,im)}) \le$$

$$\le (d_K' + l_K') \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(l)} \overline{J}_{(il,\,im)} \le (d_K' + l_K')\overline{J}_{im} \overline{\lim_{l\to\infty}} \sum_{(l)} \overline{J}_{il} \le$$

$$\le L(d_K' + l_K')\overline{J}_{im} \quad .$$

Лемма доказана.

Ниже будут использоваться следующие элементарные неравенства:

$$W(gh, A) \le W(g, A)\operatorname*{ess\,sup}_{x\in A}|h(x)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A}|g(x)|\, W(h, A),$$

$$W\left(\frac{1}{g}, A\right) \le \frac{W(g, A)}{\operatorname*{ess\,inf}_{x\in A}|g(x)|^2} \quad ,$$

Очевидными следствиями этих неравенств являются соотношения

$$t_K(gh) \le t_K(g)|h|_\infty + |g|_\infty t_K(h),\; t_K\left(\frac{1}{g}\right) \le t_K(g)\left|\frac{1}{g}\right|_\infty^2 \quad (25)$$

и

$$\sigma_\beta(gh) \le \sigma_\beta(g)|h|_\infty + |g|_\infty \sigma_\beta(h),\; \sigma_\beta\left(\frac{1}{g}\right) \le \sigma_\beta(g)\left|\frac{1}{g}\right|_\infty^2 \quad (26)$$

Лемма 4.11. Имеют место неравенства

$$\sum_{(n)} t_K(p_{in}) \le c_1^{-2} c_2 (L+1)(d_K + l_K), \qquad (27)$$

$$t_K(P_{in}) \le 2C_1^{-2} C_2 (d_k' + l_k') \overline{J_{in}}. \qquad (28)$$

**Доказательство**. Используя (25) и (14), получаем, что

$$t_K(P_{in}) = t_K\left(\frac{J_{in}\,p(f_{in})}{p}\right) \le t_K(J_{in}\,p(f_{in}))\left|\frac{1}{p}\right|_\infty + |J_{in}\,P(f_{in})|_\infty\, t_K\left(\frac{1}{p}\right) \le t_K(J_{in}\,p(f_{in}))\left|\frac{1}{p}\right|_\infty + |J_{in}\,P(f_{in})|_\infty \left|\frac{1}{p}\right|_\infty^2 t_K(p) \le C_1^{-2} C_2 [t_K(J_{in}\,p(f_{in})) + \overline{J_{in}}\, t_K(p)].$$

Применяя (23) при $m = n$ и $m = 0$ имеем:

$$\sum_{(n)} t_K(P_{in}) \le C_1^{-2} C_2 [(d_k + l_k) + L(d_k + l_k)] = C_1^{-2} C_2 (L+1)(d_k + l_k),$$

Точно так же, применяя (24), получим, что

$$t_K(P_{in}) \le 2C_1^{-2} C_2 L(d_k' + l_k') \overline{J_{in}}.$$

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 4.4**:

1. Утверждение, касающееся инвариантной меры, доказано в лемме 4.7.
2. Проверим сначала, что $\tau(0) < 1$. Поскольку $P_0 = E$, то

$$\tau(0) = \sup_{n \ge 0} |(I - P_0) V^n P_n|_W = \sup_{n \ge 0} |V^n P_n - E|_W =$$

$$= \sup_{n\geq 0} |V^n P_n|_W = \sup_{n\geq 0} \sup_{\substack{g\in L_\infty \\ W(g)\leq 1}} W(V^n P_n g) =$$

$$= \sup_{n\geq 1} \sup_{\substack{h\in L_\infty(\mathfrak{M}_n) \\ W(h)\leq 1}} W(V^n h).$$

Пусть $h\in L_\infty(\mathfrak{M}_n)$. Тогда $h=\sum_{(n)} a_{in}\chi_{in}$ ($a_{in}$ – постоянные), причём ряд сходится в $L_1$.

Последующие рассуждения относятся к двум точкам $x, y$ из некоторого множества меры 1, для всех точек $z$ которого выполнены соотношения $\sum_{(n)} p_{in}(z)=1$, $V^n h(z)=\sum_{(n)} J_{in}(z)h(f_{in}(z))$, а если $A_{in}$ – невырожденный квазиинтервал, то еще и неравенство $p_{in}(z)\geq \underline{p_{in}}$. Знак $\sum_{(n)}^{+}$ ($\sum_{(n)}^{-}$) означает суммирование по всем квазиинтервалам ранга $n$, для которых $p_{in}(x)\geq p_{in}(y)$ (соответственно, $p_{in}(x)< p_{in}(y)$).

Из упомянутых соотношений следует, что

$$V^n h(x)-V^n h(y)=\sum_{(n)} a_{in}(p_{in}(x)-p_{in}(y))=$$

$$=\sum_{(n)}^{+} a_{in}(p_{in}(x)-p_{in}(y))+\sum_{(n)}^{-} a_{in}(p_{in}(x)-p_{in}(y))\leq$$

$$\leq \sup_{(n)} a_{in}\sum_{(n)}^{+}(p_{in}(x)-p_{in}(y))+\inf_{(n)} a_{in}\sum_{(n)}^{-}(p_{in}(x)-p_{in}(y))=$$

$$=(\sup_{(n)} a_{in}-\inf_{(n)} a_{in})\sum_{(n)}^{+}(p_{in}(x)-p_{in}(y))=$$

$$=W(h)\sum_{(n)}^{+}(p_{in}(x)-p_{in}(y))\leq W(h)\Big(\sum_{(n)_0}(p_{in}(x)-\underline{p_{in}})+$$

$$+\sum_{(n)\setminus(n)_0} p_{in}(x)\Big)=W(h)\Big(1-\sum_{(n)_0}\underline{p_{in}}\Big)\leq W(h)\Big(1-C_1C_2^{-1}\sum_{(n)_0}\underline{J_{in}}\Big)\leq$$

$$\leq W(h)\Big(1-C_1C_2^{-1}C^{-1}\sum_{(n)_0}\overline{J_{i_n}}\Big)\leq W(h)\Big(1-C_1C_2^{-1}C^{-1}\sum_{(n)_0}\mu(A_{i_n})\Big)=$$

$$=W(h)\big(1-C_1C_2^{-1}C^{-1}q\big).$$

Таким образом,

$$\tau(0)\leq 1-C_1C_2^{-1}C^{-1}q<1 .$$

Установим теперь неравенство

$$\tau(k)\leq M(d_k+e_k). \qquad (29)$$

Поскольку согласно замечанию 4.4

$$|V^k(I-P_k)V^nP_{n+k}|_W\leq|V^k(I-P_k)V^nP_{n+k}|_\infty,$$

то достаточно оценить последнее выражение. Очевидно, что

$$|V^k(I-P_k)V^nP_{n+k}|_\infty=\sup_{|g|_\infty\leq1}|V^k(I-P_k)V^nP_{n+k}g|_\infty=$$

$$=\sup_{\substack{h\in L_\infty(\mathfrak{M}_{n+k})\\ |h|_\infty<1}}|V^k(I-P_k)V^nh|_\infty.$$

Пусть $h=\sum_{(n+k)}a_{i_{n+k}}\chi_{i_{n+k}}\in L_\infty$. Тогда

$$|V^k(I-P_k)V^nh|_\infty=\Big|\sum_{(n+k)}a_{i_{n+k}}V^k(I-P_k)V^n\chi_{i_{n+k}}\Big|_\infty\leq$$

$$\leq|h|_\infty\sum_{(n+k)}|V^k(I-P_k)V^n\chi_{i_{n+k}}|_\infty.$$

Запишем $i_{n+k}$ в виде $(i_n,i_k)$. Тогда $\chi_{i_{n+k}}=$ $=\chi_{i_n}U^n\chi_{i_k}$ и по лемме 4.6.

$$|V^k(I-P_k)V^nP_{n+k}|_\infty\leq\sum_{(n+k)}|V^k(I-P_k)\chi_{i_k}p_{i_n}|_\infty=$$

$$=\sum_{(n+k)}\Big|V^k\chi_{i_k}\Big(p_{i_n}-\frac{1}{P(A_{i_k})}\int_{A_{i_k}}p_{i_n}(t)P(dt)\Big)\Big|_\infty=$$

$$=\sum_{(n+k)}\Big|p_{i_k}\Big(p_{i_n}(f_{i_k})-\frac{1}{P(A_{i_k})}\int_{A_{i_k}}p_{i_n}(t)P(dt)\Big)\Big|_\infty\leq$$

$$\leq \sum_{(n+k)} \overline{P_{ik}}\, W(P_{in}, A_{ik}) \leq$$

$$\leq C_1^{-1} C_2 \sum_{(n+k)} \overline{J_{ik}}\, W(P_{in}, A_{ik}) \leq C_1^{-1} C_2 \sum_{(n)} t_k(P_{in})$$

Но по неравенству (27)

$$\sum_{(n)} t_k(P_{in}) \leq C_1^{-2} C_2 (L+1)(d_k + e_k)$$

и поэтому

$$\tau(k) \leq C_1^{-3} C_2^2 (L+1)(d_k + e_k) = M(d_k + e_k).$$

Утверждение 2 теоремы 4.4 вытекает теперь из условий

У и УI.

3. Докажем утверждение 3. Поскольку $T$, $\mathcal{L}$ и $P$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2 и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (\tau(k))^{\frac{1}{k}} \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} (M(d_k + e_k))^{\frac{1}{k}} \leq$$

$$\leq \max\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} d_k^{\frac{1}{k}},\ \overline{\lim_{k\to\infty}} e_k^{\frac{1}{k}}\right) < \beta^{-1};$$

то достаточно оценить $\rho_\beta(g)$:

$$\rho_\beta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W(V^k(I-P_k)g) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |V^k(I-P_k)g|_\infty =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Big| \sum_{(k)} \overline{P_{ik}} \Big[ g(\tau_{ik}) - \frac{1}{P(A_{ik})} \int_{A_{ik}} g(t) P(dt) \Big] \Big|_\infty \leq$$

$$\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_{(k)} \overline{P_{ik}}\, W(g, A_{ik}) \leq$$

$$\leq 2 C_1^{-1} C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_{(k)} \overline{J_{ik}}\, W(g, A_{ik}) =$$

$$= 2C_1^{-1}C_2\,\sigma_\beta(g).$$

Теорема 4.4 доказана.

Лемма 4.12. Условие IУ следует из Ш, если выполнено условие УП. Кроме того, из УП следует, что

$$\overline{J_{in}} \le CC_1^{-1}\tau^{-1}P(A_{in}). \qquad (30)$$

Доказательство. В силу условий Ш и УП

$$\sum_{(n)}\overline{J_{in}} \le C\sum_{(n)}\underline{J_{in}} \le C\sum_{(n)}\frac{1}{\mu(T^n(A_{in}))}\int_{T^n(A_{in})} J_{in}(x)\mu(dx) \le$$

$$\le C\tau^{-1}\sum_{(n)}\int_{T^n(A_{in})} J_{in}(x)\mu(dx) = C\tau^{-1}\sum_{(n)}\mu(A_{in}) = C\tau^{-1}.$$

Аналогично оценивается $\overline{J_{in}}$:

$$\overline{J_{in}} \le C\underline{J_{in}} \le C\frac{\mu(A_{in})}{\mu(T^n(A_{in}))} \le CC_1^{-1}\tau^{-1}P(A_{in})$$

Доказательство теоремы 4.5. Вследствие замечания 4.10 и леммы 4.12 в условиях теоремы 4.5 действительно содержатся условия теоремы 4.4. Согласно результатам § I и теореме 4.4, зафиксировав некоторое $\beta$ $(1 > \beta^{-1} > \max(\overline{\lim_{k\to\infty}} d_k^{1/k}, \overline{\lim_{k\to\infty}} e_k^{1/k}))$ получим, что

$$\|P^{n+k}g - \int_X g(x)P(dx)\|_\infty = \|V^n(V^k g) - \int_X V^k g(x)P(dx)\|_\infty \le Ae^{-\lambda n}\sigma_\beta(V^k g)$$

Оценим теперь $\sigma_\beta(V^k g)$. Пусть $g = \sum_{(k)} a_{ik}\chi_{ik}$. Тогда, применяя (28), а потом (20), находим, что

$$\sigma_\beta(V^k g) = \sigma_\beta\Big(\sum_{(k)} a_{ik}P_{ik}\Big) \le \sum_{(k)}|a_{ik}|\,\sigma_\beta(P_{ik}) =$$

$$= \sum_{(k)}|a_{ik}|\sum_{l=0}^{\infty}\beta^l t_l(P_{ik}) \le$$

$$\leq 2C_1^{-2}C_2\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\beta^l(d_l'+e_l')\Big)\sum_{(k)}|a_{ik}|\,J_{ik}\leq$$

$$\leq 2CC_1^{-3}C_2\,r^{-1}\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\beta^l(d_l'+e_l')\Big)\sum_{(k)}|a_{ik}|P(A_{ik})=B'|g|_1.$$

Остается положить $B=AB'$.

Следствие 4.4. (Обобщённая теорема Кузьмина). В условиях теоремы 4.4

$$\Big|\sum_{(n)}J_{in}\,g(f_{in})-p\int_X g(x)\mu(dx)\Big|_\infty\leq e^{-\lambda n}(A_1|g|_\infty+A_2\rho_\beta(g)).$$

В частности при $g=1$

$$\Big|\sum_{(n)}J_{in}-p\Big|_\infty\leq A_1e^{-\lambda n}.$$

Доказательство. Согласно свойству 1.6 оператора $V_\mu$

$$\Big|\sum_{(n)}J_{in}\,g(f_{in})-p\int_X g(x)\mu(dx)\Big|_\infty=\Big|V_\mu^n g-p\int_X g(x)\mu(dx)\Big|_\infty\leq$$

$$\leq|p|_\infty\Big|\frac{1}{p}V_\mu^n g-\int_X\frac{g(x)}{p(x)}P(dx)\Big|_\infty\leq$$

$$\leq C_2\Big|V^n\Big(\frac{g}{p}\Big)-\int_X\frac{g(x)}{p(x)}P(dx)\Big|_\infty\leq C_2Ae^{-\lambda n}\sigma_\beta\Big(\frac{g}{p}\Big).$$

Но согласно неравенствам (26) и оценке (23) при $m=0$

$$\sigma_\beta\Big(\frac{g}{p}\Big)\leq\sigma_\beta(g)\Big|\frac{1}{p}\Big|_\infty+|g|_\infty\,\sigma_\beta\Big(\frac{1}{p}\Big)\leq$$

$$\leq\sigma_\beta(g)\Big|\frac{1}{p}\Big|_\infty+\Big|\frac{1}{p}\Big|_\infty^2|g|_\infty\,\sigma_\beta(p)\leq$$

$$\leq C_1^{-1}\sigma_\beta(g)+C_1^{-2}|g|_\infty\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k t_k(p)\leq$$

$$\leq C_1^{-2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k(d_k+e_k)\Big)|g|_\infty+C_1^{-1}\sigma_\beta(g).$$

Следствие 4.5. Пусть $T$ и $\mathcal{L}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.4 и, кроме того, $\bigvee_{k=0}^{\infty}T^{-k}(\mathcal{L})=\mathfrak{M}$.

Тогда $T$ - точный эндоморфизм.

Утверждение вытекает из следствия 4.2.

В условиях теоремы 4.4 справедливы и прочие следствия теоремы 4.2, т.е. теорема 4.3 и следствие 4.1, касающиеся равномерного сильного перемешивания.

Следствие 4.6 (Плавное перемешивание). В условиях теоремы 4.5 для любых множеств $A \in \mathfrak{M}_k$, $B \in \mathfrak{M}^{k+n}$ при $n \geq 0$

$$|P(AB)-P(A)P(B)| \leq Ke^{-\lambda n} P(A)P(B).$$

Доказательство, использующее теорему 4.5, аналогично доказательству следствия 4.1.

Укажем теперь один результат, существенно облегчающий проверку условий III и VI[1].

Положим

$$\alpha(k) = \sup_{i \in I} \sup_{(k)} W(e_n J_i, A_{ik} \cap T(A_i)).$$

Теорема 4.6. Пусть выполнено условие I. Если $\alpha_0 < \infty$ и $\overline{\lim_{k\to\infty}} (\alpha_k)^{\frac{1}{k}} < 1$, то выполнены условия III. Если, кроме того, имеет место IV, то выполнено условие VII.

Доказательство. Пусть $i^n = (i_1, \ldots, i_n)$,

$$i^l = (i_{n-l+1}, \ldots, i_n) \quad (1 \leq l \leq n).$$

Поскольку справедливы включения $A_{i^n} \subset T^{-1}(A_{i^{n-1}}) \subset \ldots \subset T^{-(n-1)}(A_{i^1}), T^n(A_{i^n}) \subset T^{n-1}(A_{i^{n-1}}) \subset \ldots \subset T(A_{i^1})$, то, в силу того, что $f_{i^{n-l}}$ взаимно однозначно отображает $T^{(n-l)}(A_{i^{n-l}})$ на $A_{i^{n-l}}$, для произвольного квазиинтервала $A_{jk}$ имеют место соотношения

$$f_{i^{n-l}}(A_{jk} \cap T^n(A_{i^n})) =$$

$$= f_{i^{n-l}}(A_{jk} \cap T^{n-l}(A_{i^{n-l}})) \cap f_{i^{n-l}}(T^n(A_{i^n})) =$$

$$= A_{i^{n-e}} \cap T^{-(n-e)}(A_{j^k}) \cap J_{i^{n-e}}(T^n(A_{i^n})) =$$

$$= A_{(i^{n-e}, j^k)} \cap T^e(A_{i^n}) \subset A_{(i^{n-e}, j^k)} \cap T(A_{i^e}).$$

Поэтому

$$W(\ln J_{i^n}, A_{j^k} \cap T^n(A_{i^n})) =$$

$$= W\Big(\sum_{l=1}^{n} \ln J_{i_e}(J_{i^{n-e}}), A_{j^k} \cap T^n(A_{i^n})\Big) \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{n} W(\ln J_{i^e}, J_{i^{n-e}}(A_{j^k} \cap T^n(A_{i^n}))) \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{n} W(\ln J_{i_e}; A_{(i^{n-e}, j^k)} \cap T(A_{i_e})) \le \sum_{l=1}^{n} \alpha_{k+n-e} \le \sum_{S=K}^{\infty} \alpha_S$$

Заметим, что последовательность $\alpha_K$ убывает и все $\alpha_K$ конечны.

Пусть $\beta_K = \sum_{S=K}^{\infty} \alpha_S$. Очевидно, что $\overline{\lim_{K\to\infty}} (\beta_K)^{\frac{1}{K}} < 1$.

Поэтому

$$\frac{\overline{J_{i^n}}}{\underline{J_{i^n}}} = \exp W(\ln J_{i^n}, T^n(A_{i^n})) \le \exp \beta_0 = C$$

и условие Ш выполнено.

Положим для краткости $B = T^n(A_{i^n}) \cap A_{j^k}$

Тогда

$$W(J_{i^n}, T^n(A_{i^n}) \cap A_{j^k}) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in B} J_{i^n}(x) - \operatorname{ess\,inf}_{x\in B} J_{i^n}(x)$$

$$\le \overline{J_{i^n}} \left(1 - \frac{\operatorname{ess\,inf}_{x\in B} J_{i^n}(x)}{\operatorname{ess\,sup}_{x\in B} J_{i^n}(x)}\right) =$$

$$= \overline{J_{in}}\left(1-\exp\left\{\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B}\ln J_{in}(x)-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B}\ln J_{in}(x)\right\}\right)\le$$

$$\le \overline{J_{in}}\, W(\ln J_{in}B)\le \beta_K \overline{J_{in}},$$

и УI$^{1}$ выполнено, причём $e_K' \le L\beta_K$ .

Замечание 4.11. Пусть выполнены условия I, УП, $\alpha_0$ конечно и $\overline{\lim_{K\to\infty}}(\alpha_K)^{\frac{1}{K}}<1$. Сопоставляя теорему 4.6 и замечания 4.9 и 4.10, получаем, что тогда выполнены и условия III, IУ, УI и УI$^{1}$.

Если выполнено условие I, $\overline{\lim_{K\to\infty}}(\alpha_K)^{\frac{1}{K}}<1$, $\alpha_0$ конечно и все квазиинтервалы невырождены ( для этого достаточно, чтобы были невырождены все квазиинтервалы ранга I), то выполнены все условия П–УП, а также У$'$ и УI$'$, т.к. в силу невырожденности условия П, У, У$'$ и УП удовлетворяются автоматически.

## § 4. Некоторые одномерные преобразования

Чтобы показать, как в § 4 и § 5 будут применяться полученные нами результаты, снова обратимся к примеру 2 § 1.

Пример 2 (продолжение). В качестве $\mathrm{I}$ возьмём множество положительных целых чисел, при этом

$$A_i=\left(\frac{1}{i+1},\ \frac{1}{i}\right),\quad f_i=\frac{1}{i+x},$$

$$J_i(x)=|f_i'(x)|=\frac{1}{(i+x)^2},$$

$$p_i(x)=\frac{1+x}{1+\frac{1}{i+x}}\,J_i(x)=\frac{1+x}{(i+x)(i+x+1)}.$$

Все интервалы (приставка "квази" здесь кажется излишней) ранга 1 невырождены, поэтому невырождены все интервалы всех рангов. Далее, если $i^n = (i_1, \dots, i_n)$, то

$$f_{i^n}(x) = \cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \ddots \cfrac{1}{i_n + x}}} = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}},$$

$$A_{i^n} = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right), \quad \text{если } n \text{ чётно,}$$

$$A_{i^n} = \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right), \quad \text{если } n \text{ нечётно,}$$

$$J_{i^n}(x) = \frac{|q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n|}{(q_n + x q_{n-1})^2} = \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2},$$

$$p_{i^n}(x) = \frac{1+x}{1 + \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}} J_{i^n}(x) = \frac{1+x}{(q_n + x q_{n-1})(p_n + x p_{n-1} + q_n + x q_{n-1})}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \le \left|\frac{p_{i^n}}{J_{i^n}}\right| \le 2$$

и

$$\sup_{i \in I, x \in X} p_i(x) = \sup_{i \in I, x \in (0,1)} \frac{1+x}{(i+x)(i+x+1)} \le \frac{1}{2},$$

то

$$\sup_{(n)} J_{i^n} \le 2 \left(\sup_{i \in I, x \in X} p_i(x)\right)^n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Учитывая, что для интервалов длина и мера Лебега совпадают, имеем:

$$\sup_{(n)} \operatorname{diam}(A_{i^n}) = \sup_{(n)} \mu(A_{i^n}) = \sup_{(n)} \int_0^1 J_{i^n}(x)\mu(dx) \le 2^{-(n-1)}.$$

В сочетании с тем, что

$$\sup_{i \in I} \sup_{x \in X} \left|\frac{d}{dx} \ln J_i(x)\right| = 2 \sup_{i \ge 1} \sup_{x \in (0,1)} \frac{1}{i+x} \le 2,$$

Эта оценка показывает, что $\alpha_n \le 2^{-(n-2)}$.

Поскольку выполнение условий I и УП очевидно, то, согласно замечанию 4.11, выполнены все условия § 3.

Покажем, что $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathcal{L}) = \mathfrak{M}$ ( напомним, что $X$ - множество иррациональных чисел из (0,1), а $\mathfrak{M}$ - совокупность всех лебеговских подмножеств на (0,1), лежащих в $X$ ). Поскольку $\alpha_n \to 0$, то совокупность всех квазиинтервалов образует счётный базис топологии пространства $X$, индуцированной обычной метрикой. Таким образом, в $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathcal{L})$ содержатся все борелевские относительно $X$ множества или, что то же, все борелевские подмножества (0,1), лежащие в $X$. Отсюда следует доказываемое равенство.

Таким образом, к нашему примеру применимы все результаты § 3. В частности, $T$ - точный эндоморфизм (впервые это доказал В.А.Рохлин [19] ).

Перейдем к основным примерам этого параграфа.

## I. Теоретико-числовые преобразования Реньи

А.Реньи [33], изучая вопрос о представлении вещественных чисел последовательностями целых чисел, рассматривал обобщения примеров § 1. Ниже излагаются результаты Реньи и других авторов.

Предположим, что функция $f$ удовлетворяет либо условию A), либо условию B) :

A) $f(0)=1$, $f$ - неотрицательная, непрерывная и строго убывающая функция на $[1,M]$, причём $M>1$ - либо целое число, либо $+\infty$ , и $f(M)=0$. Пусть, кроме этого,

$$|f(t_2)-f(t_1)| \le |t_2-t_1|,$$

если $1 \le t_1 \le t_2 \le M$, и при некотором $\lambda$, $0<\lambda<1$,

$$|f(t_2)-f(t_1)| \le \lambda |t_2-t_1|,$$

если $1+f(2) \le t_1 \le t_2 \le M$ .

В) $f(0)=0$, $f$ - непрерывная и строго возрастающая функция на $[0,M]$, причем $M$ -либо целое число, либо $+\infty$, и $f(M)=1$. Пусть, кроме того,

$$f(t_2)-f(t_1) < t_2-t_1 ,$$

если $0 \le t_1 < t_2 < M$ .

Пусть $\varphi = f^{-1}$. Определим отображение $T:(0,1)\to[0,1)$ формулой

$$Tx = \{\varphi(x)\} ,$$

где $\{a\}$ - дробная доля числа $a$.

Положим $X=(0,1)\setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T^{-k}(0)$. Заметим, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T^{-k}(0)$ - счётное множество, т.к. все множества вида $T^{-1}(x)$ не более чем счётны.

В качестве I возьмем в случае А) числа $1,\ldots,M-1$, если $M<\infty$, и числа 1,2, ..., если $M=\infty$ , в случае В) - числа 0, ..., $M-1$, если $M<\infty$, и числа 0,1,..., если $M=\infty$ .

Пусть $\mathcal{L}$ - $\sigma$-алгебра, порожденная интервалами[1] $A_i$ с концами $f(i)$, $f(i+1)$, которые характеризуются тем, что

$$a_1(x)=[\varphi(x)]=i \quad \text{для} \quad x\in A_i .$$

---

1) Как и в примере 2, мы сохраняем это название для пересечений обычных интервалов с $X$ .

Функция $f_i$, определенная равенством $f_i(x)=f(i+x)$, отображает $X$ на $A_i$.

Далее, если $i^n=(i_1,\dots,i_n)\in I^n$, то

$$A_{i^n}=\bigcap_{k=0}^{n-1}T^{-k}(A_{i_k}),$$

$$f_{i^n}(x)=f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_n}(x)=$$

$$=f(i_1+f(i_2+\dots+f(i_n+x)\dots)).$$

Пусть при $k\geq 2$ $a_k(x)=a_{k-1}(Tx)$.

Очевидно, что $A_{i^n}$ - интервал с концами $f_{i^n}(0)$, $f_{i^n}(1)$, причём

$$A_{i^n}=\{x/x\in X,\ a_k(x)=i_k,\ 1\leq k\leq n\}.$$

Заметим, также, что $\bigcup_{k=1}^{n}T^{-k}(0)$ совпадает с множеством тех $t\in(0,1)$, которые являются концами интервалов ранга $n$.

Вследствие того, что $M$ - целое, все интервалы всех рангов невырождены.

Из условий, наложенных на $f$, вытекает, что все $f_i$ $(i\in I)$ абсолютно непрерывны, и, следовательно, $T$ несингулярно.[1] Очевидно также, что

$$J_{i^n}=|f'_{i^n}|.$$

В силу невырожденности всех интервалов приводимое ниже условие С) из работы Реньи совпадает с условием III § 3:

С) При некоторой постоянной $C>0$ для всех $n\geq 0$ и всех $i^n\in I^n$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|f'_{i^n}(x)|\leq C\operatorname{ess\,inf}_{x\in X}|f'_{i^n}(x)|.$$

---

1) Относительно меры Лебега $\mu$ на $X$.

Реньи доказал, что если выполнено одно из условий A),B) ( даже без предположения, что $M$ - целое), то для всех $x$

$$diam(A(a_1(x),\dots,a_n(x))\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует (см.пример 2), что $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{L})=\mathfrak{M}$ .

Если же выполнено еще и условие C), то для $T$ существует инвариантная мера $P$ с плотностью $\rho$ относительно $\mu$, причём

$$\frac{1}{C}\le\rho\le C \quad , \qquad (31)$$

А.Реньи в этих же условиях (мы будем называть их условиями Реньи) установил, что $T$ - эргодический эндоморфизм, а В.А.Рохлин [19] доказал более сильное утверждение о точности $T$ . Чан Винг Хьен [25] при довольно жёстких условиях получил аналог теоремы Кузьмина [24].

Как сейчас будет показано, при соответствующих предположениях к $T$ и $\mathcal{L}$ можно применить результаты § 3, причем в некоторых случаях C) можно вывести из других условий, которые проверять проще.

Оценим сначала величину $\delta_n$ определенную равенством

$$\delta_n=\sup_{(n)} diam(A_{i_n})=\sup_{(n)}\mu(A_{i_n}).$$

Оказывается, что при весьма широких условиях

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\delta_n)^{\frac{1}{n}}<1. \qquad (32)$$

Лемма 4.13. Соотношение (32) верно в следующих случаях:

1) если выполнено условие A),

2) если условие B) усилено требованием: при некотором $\lambda$ $(0<\lambda<1)$ и всех $x_1,x_2\in[0,M)$

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le\lambda|x_2-x_1|,$$

3) если выполнено условие B), $T$ имеет инвариантную меру, плотность $\rho$ которой удовлетворяет (31), и при некотором $C'>0$ для всех $i \in I$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in(0,1)} |f'(x+i)| \le C' \operatorname{ess\,inf}_{x\in(0,1)} |f'(x+i)|.\ ^{1)}$$

Доказательство. Рассмотрим указанные три случая.

1. Как показал Реньи [33], в этом случае

$$\delta_n \le \lambda^{[\frac{n}{2}]-1}.$$

2. Утверждение следует из оценки

$$\mu(A_{in}) = \int_0^1 J_{in}(x)\,\mu(dx) \le \int_0^1 (\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f'(x)|)^n \mu(dx) \le \lambda^n.$$

3. Заметим, что

$$\operatorname{ess\,inf}_{x\in X} p_j(x) = \operatorname{ess\,inf}_{x\in X} \frac{|f'(x+j)|\,\rho(f(x+j))}{\rho(x)} \geq \frac{1}{C^2C'}\mu(A_j)$$

и

$$\sup_{i\in I} \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} p_i(x) = \sup_{i\in I} \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} \Big(1-\sum_{(1)\setminus i} p_j(x)\Big) \le$$

$$\le \sup_{i\in I}\Big(1-\frac{1}{C^2C'}\sum_{(1)\setminus i}\mu(A_i)\Big) = 1-\frac{1}{C^2C'}\Big(1-\sup_{i\in I}\mu(A_i)\Big)=\lambda$$

Поскольку имеются по крайней мере 2 интервала ранга 1 ( это легко выводится из B) ), то

$$\sup_{i\in I} \mu(A_i) < 1,$$

и, следовательно, $\lambda<1$. Утверждение леммы вытекает теперь из оценки

$$\mu(A_{in}) \le C P(A_{in}) = C\int_X P_{in}(x)\,P(dx) \le C\lambda^n.$$

Лемма доказана.

Предположим теперь, что выполнены условия Реньи. Тогда $T$ и разбиение на интервалы ранга 1 удовлетворяют

---

1) Из изложенного выше ясно, что случай 3 реализуется, если выполнены условия B) и C).

условию I § 3. В самом деле, несингулярность $\Gamma$, как отмечалось, следует из абсолютной непрерывности $f$. Несингулярность же $f_i$ следует из того, что по условию С) $\underline{J_i} > 0$. Условие С), как отмечалось, совпадает с Ш. Вследствие невырожденности всех интервалов выполнены также условия П, IУ, У, У$^I$ и УП. Поэтому для применимости теоремы 4.4 достаточно установить, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty}(d_k)^{\frac{1}{k}} < 1$, а для применимости теоремы 4.5 - что $\varlimsup\limits_{k\to\infty}(d_k')^{\frac{1}{k}} < 1$.

Обсудим, как проверять выполнение этих условий.

Пусть $g$ - функция на $(0,1)$. Положим

$$V_p(g) = \sup\Big(\sum_{\tau=1}^{s} |g(t_\tau) - g(t_{\tau-1})|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

где $1 \le p < \infty$, а $\sup$ берётся по всем наборам точек $t_0, t_1, \ldots, t_\tau$ таким, что $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_\tau \le 1$. Тогда, если при некотором $p$ $(1 \le p < \infty)$ $V_p(g) < \infty$, то, полагая $p' = (1-p^{-1})^{-1}$ $(1 < p' \le \infty)$, получаем, что

$$t_k(g) = \sum_{(k)} \overline{J}_{ik} W(g, A_{ik}) \le \Big(\sum_{(k)} W^p(g, A_{ik})\Big)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \Big(\sum_{(k)} \overline{J}_{ik}^{\,p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le V_p(g)\Big(\sum_{(k)} \overline{J}_{ik}^{\,1+\frac{1}{p-1}}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le L^{\frac{1}{p'}} \times \big(\sup_{(k)} \overline{J}_{ik}\big)^{\frac{1}{p'(p-1)}} V_p(g) \le$$

$$\le C^{\frac{1}{p'}} \times C^{\frac{1}{p}} \delta_k^{\frac{1}{p}} V_p(g) = C\, \delta_k^{\frac{1}{p}} V_p(g).$$

При оценивании мы пользовались тем, что в нашем случае число $L$ из условия IУ можно взять равным С. Выражение

$\left(\sum_{(k)} J_{ik}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ при $p=1$ нужно понимать как $\overline{\sup_{(k)} J_{ik}}$.

Полезна также оценка

$$t_k(g) \le C \sup_{(k)} W(g, A_{ik}).$$

Пусть выполнены условия Реньи. Применяя найденные оценки и лемму 4.13, получаем такие результаты, усиливающие теоремы работ [25] и [3]:

1) Условия теоремы 4.4 выполнены в каждом из следующих случаев:

1 а) при некотором $p$ $(1 \le p < \infty)$

$$\sup_{n \ge 0} \sum_{(n)} V_p(J_{in}) < \infty,$$

1 б)

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left(\sup_{n \ge 0} \sum_{(n)} \sup_{(k)} W(J_{in}, A_{ik})\right)^{\frac{1}{k}} < 1.$$

2) Условия теоремы 4.5 выполнены, если выполнено хотя бы одно из неравенств:

2а) при некотором $p$ $(1 \le p < \infty)$

$$\sup_{n \ge 0, (n)} \frac{V_p(J_{in})}{J_{in}} < \infty,$$

2б)

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left[\sup_{n \ge 0, (n), (k)} \frac{W(J_{in}, A_{ik})}{J_{in}}\right]^{\frac{1}{k}} < 1.$$

Полученные выше оценки показывают также, что для функции $g \in L_\infty$ $\sigma_\beta(g) < \infty$ при достаточно малом $\beta > 1$, если выполнено одно из двух условий:

1) при некотором $p$ $(1 \le p < \infty)$

$$V_p(g) < \infty,$$

2) $$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left(\sup_{(k)} W(g, A_{ik})\right)^{\frac{1}{k}} < 1,$$

причём в случае 1) выполнено неравенство

$$\sigma_\beta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k t_k(g) \le C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \delta_k^{\,p}\right) V_p(g).$$

В приложениях могут встретиться трудности при проверке условий С), 1а), 1б), 2а), 2б), поскольку для этого нужно изучить поведение всех функций $J_{in}$ при всех $n \geqslant 0$. Применяя вторую часть замечания 4.11, получим, что выполнены все условия § 3, если выполнено условие А) или условие В) и, кроме того, для чисел $\alpha_k$, определенных равенством

$$\alpha_k = \sup_{i \in I} \sup_{(k)} W(\ln |f'(i+x)|, A_{ik}),$$

выполнены соотношения

$$\alpha_0 < \infty, \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} (\alpha_k)^{\frac{1}{k}} < 1. \text{ 1)}$$

В свою очередь, условия, наложенные на $\alpha_k$, выполнены, если функции $\ln |f'(i+x)| \ (i \in I)$ удовлетворяют на (0,1) условию Гёльдера с независящими от $i$ показателями и постоянными, и если, кроме того, $\overline{\lim_{k \to \infty}} (\delta_k)^{\frac{1}{k}} < 1$. Можно также предположить, что условие Гёльдера выполнено лишь внутри интервалов некоторого определённого ранга, но тогда нужно отдельно проверить неравенство $\alpha_0 < \infty$.

Поскольку соотношение $\overline{\lim_{k \to \infty}} (\delta_k)^{\frac{1}{k}} < 1$ имеет место в широком классе случаев (см. лемму 4.13), легко построить неограниченное количество преобразований, к которым применимы результаты § 3.

В заключение этого пункта рассмотрим один простой пример, к которому применимы изложенные методы проверки условий § 3.

Пример 3. Алгоритм Бойяи (см. [33] ).

Пусть $f(x) = \sqrt[m]{1+x} - 1$, $(0 \leq x \leq 2^m - 1)$, $m \geqslant 2$ — целое.

---

1) Условие $\alpha_0 < \infty$ обеспечивает, в частности выполнение условия I (точнее, несингулярность отображений $f_i$).

Тогда $I=\{0,1,\dots,2^m-2\}$. Выполнение условия В) очевидно т.к. $f$ строго возрастает и

$$f'(x)=\frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}\le\frac{1}{m}<1.$$

В силу этого же неравенства и леммы 4.13 ( случай 2 с $\lambda=m^{-1}$ )

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(\delta_k)^{\frac{1}{k}}<1.$$

Заметим, что функция

$$\ln f'(x)=(1-m^{-1})\ln(1+x)-m$$

удовлетворяет условию Липшица при $x\geq 0$.

Поэтому для нашего примера верны все утверждения § 3.

Можно, кроме того, доказать, что плотность $p$ инвариантной меры также удовлетворяет условию Липшица.

2. $\theta$ - разложения.

Пусть $\theta>1$. Положим $Tx=\{\theta x\}$, $\lambda_1(x)=[\theta x]$, $\lambda_n(x)=\lambda_{n-1}(\theta x)$ $(n>1)$. В качестве исходного разбиения пространства $X=[0,1)$ возьмём разбиение $X$ на интервалы $A_i$, определяемые соотношениями

$$A_i=\{x\mid x\in X,\ \lambda_1(x)=i\}.$$

Здесь $i\in I$, причём $I=\{0,1,\dots,[\theta]\}$, если $\theta$ - нецелое, и $I=\{0,1,\dots,\theta-1\}$, если $\theta$ - целое.

Чтобы не было необходимости постоянно различать эти два случая, мы в дальнейшем будем считать, что $\theta$ не является целым.

Целочисленный случай проще и, кроме того, он фактически уже нами изучен, т.к. $T$ является в этом случае преобразованием Реньи $cf(x)=\theta^{-1}x$.

Преобразование $Tx=\{\theta x\}$ изучалось рядом авторов. Так, Реньи [33] установил, что у $T$ имеется инвариантная мера с плотностью $p$, удовлетворяющей неравенствам

$$1-\theta^{-1}\le p\le \frac{1}{1-\theta^{-1}},$$

а также, что $T$ - эргодическое преобразование. В.А.Рохлин [19] доказал, что $T$ - точный эндоморфизм. А.О.Гельфонд [1] нашёл явную формулу для инвариантной меры и получил некоторые другие результаты (см.ниже).

Из равенства $T^{n+1}=TT^n$ следует, что интервалы ранга $n+1$ получаются из интервала $[\alpha,\beta)$ ранга $n$ посредством разбиения его точками вида $\alpha+k\theta^{-(n+1)}$, $k=1,2,\ldots$

Если $[\alpha,\beta)$ - произвольный интервал ранга $n$, то отображение $T^n$ на $[\alpha,\beta)$ линейно, равно $0$ в точке $\alpha$ и имеет угловой коэффициент $\theta^n$.

Отсюда следует, что $\beta-\alpha\le\theta^{-n}$, а образ $[\alpha,\beta)$ относительно $T^n$ есть интервал $[0,T^n\beta)$.

Пусть $[\alpha,\beta)$ - произвольный интервал ранга $n$. Покажем с помощью индукции, что $T^n([\alpha,\beta))$ есть один из интервалов $[0,T^k 1)$ $(0\le k\le n)$.

При $n=0$ и $n=1$ это очевидно. Совершим переход от $n$ к $n+1$. Интервал $A_{i_{n+1}}$ ранга $n+1$ однозначно представим в виде $A_{i_1}\cap T^{-1}(A_{i_n})$, где $A_{i_1}=[\alpha_1,\beta_1)$ - интервал ранга 1, а $A_{i_n}=[\alpha_n,\beta_n)$ - интервал ранга $n$. Очевидно, что

$$T^{n+1}(A_{i_{n+1}})=T^n(T(A_{i_1}\cap T^{-1}(A_{i_n})))=T^n(A_{i_n}\cap TA_{i_1})=T^n(A_{i_n}\cap[0,\gamma)),$$

где $\gamma$ - одно из чисел $T^0 1, T^1 1$.

Поэтому $T^{n+1}(A_{i^{n+1}})$ совпадает с интервалом $T^n(A_{i^n})$, если $\gamma \geq \beta_n$, и с интервалом $[0, T^n\gamma)$, если $\alpha_n < \gamma < \beta_n$, ( случай $\gamma \leq \alpha_n$ не может реализоваться, т.к. тогда $A_{i^{n+1}} = \Lambda$ ) и наше утверждение доказано.

Как мы покажем сейчас, преобразование $T$ пространства $X$ с мерой Лебега $\mu$ и разбиение на интервалы ранга 1 удовлетворяют условиям теоремы 4.4.

Установим сначала некоторые соотношения, которые нам потребуются. Из очевидной формулы

$$S = \frac{\lambda_1(S)}{\theta} + \frac{TS}{\theta}$$

справедливой для всех $S \in [0,1]$, с помощью индукции получаем, что

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k(S)}{\theta^k} + \frac{T^n S}{\theta^n},$$

откуда ясно, что для $S \in [0,1]$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(S)}{\theta^k}, \tag{33}$$

причём

$$\left| S - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k(S)}{\theta^k} \right| \leq \frac{1}{\theta^n}.$$

До конца этого параграфа символом $\chi_t$ будет обозначаться характеристическая функция интервала $[0,t)$.

Перейдем к проверке условий § 3. Выполнение условия I очевидно. Поскольку

$$J_{i^n} = \frac{\chi_{T^n(A_{i^n})}}{\theta^n} = \frac{\chi_{T^k 1}}{\theta^n},$$

где $0 \leq k \leq n$, то условие III также выполнено, причём $\overline{J_{i^n}} = \underline{J_{i^n}} = \theta^{-n}$, а $C = 1$.

Очевидно, существует самое большее один интервал ранга $k$, пересекающийся как с $T^n(A_{i^n})$, так и с $X \setminus T^n(A_{i^n})$, т.е. интервал ранга $k$, для которого правый конец интервала

$T^u(A_{iu})$ - внутренняя точка. Поэтому $d_k' \le \theta^{-k}$ и условие У$^{\text{I}}$ выполнено.

Поскольку $W(J_{iu}, A_{ik}) = 0$, если $A_{ik} \subset T^u(A_{iu})$, то $e_k = e_k' = 0$ и выполнены условия УI и УI!

Осталось проверить условия II и IУ ( условие У, согласно замечанию 4.10, следует из У и IУ ).

Проще всего это сделать, пользуясь явной формулой для плотности инвариантной меры, предложенной А.О.Гельфондом [1]. Согласно Гельфонду, плотность $p$ определяется формулой

$$p(x) = \frac{\rho(x)}{\tau},$$

где

$$\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_{T^k 1}}{\theta^k}, \quad \tau = \int_0^1 \rho(x)\mu(dx).$$

Проверим, что мера с плотностью $p$ инвариантна.

Согласно 1.3, достаточно проверить, что

$$V_\mu \rho = \rho .$$

Поскольку для $t \in [0,1]$

$$V_\mu \chi_t = \frac{\lambda_1(t)}{\theta} + \frac{\chi_{Tt}}{\theta},$$

то, с учётом (39) при $s = 1$

$$V_\mu \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_\mu \chi_{T^k 1}}{\theta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1(T^k 1)}{\theta^{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_{T^{k+1} 1}}{\theta^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(1)}{\theta^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_{T^k 1}}{\theta^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_{T^k 1}}{\theta^k} = \rho$$

Из доказанного следует, что $V_\mu^u \rho = \rho$ при всех $u \geqslant 0$.

Заметим, что

$$1 \le \rho \le \frac{\theta}{\theta - 1} .$$

Поэтому при всех $n \geq 0$

$$V_\mu^n 1 \leq V_\mu^n \rho = \rho \leq \frac{\theta}{\theta-1}$$

и

$$V_\mu^n 1 \geq \frac{\theta-1}{\theta} V_\mu^n \rho = \frac{\theta-1}{\theta}\rho \geq \frac{\theta-1}{\theta}.$$

Поскольку

$$V^n 1 = \sum_{(n)} J_{in} = \sum_{(n)} \frac{1}{\theta^n} \chi_{T^n(A_{in})},$$

а $\chi_{T^n(A_{in})}$ - убывающая функция, т.к. $T^n(A_{in})$ есть интервал вида $[0, \gamma)$, то

$$\sum_{(n)} \bar{J}_{in} = \sum_{(n)} J_{in}(0) = V^n 1(0) \leq \frac{\theta}{\theta-1}$$

и, следовательно, выполнено IУ.

Заметим теперь, что соотношения

$$\lim_{x\to 1} \chi_{T^n(A_{in})}(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} \chi_{T^n(A_{in})}(x) = 1$$

характеризуют, соответственно, вырожденные и невырожденные интервалы ранга $n$, и поэтому мера объединения всех невырожденных интервалов ранга $n$ ( каждый такой интервал имеет меру $\theta^{-n}$) равна

$$\lim_{x\to 1} V^n 1(x) \geq \frac{\theta-1}{\theta},$$

что завершает проверку условий теоремы 4.4.

Заметим также, что $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\varepsilon) = \mathfrak{M}$, поскольку длина интервала ранга $n$ не превосходит $\theta^{-n}$.

Поэтому $T$ - точный эндоморфизм ( результат В.А.Рохлина [19] ).

Теорема 4.5 применима, если выполнено условие УП, которое можно в нашем случае сформулировать так:

$0$ не является точкой сгущения для тех членов последовательности $T^k 1$ $(k \geq 0)$, которые отличны от $0$.

Нетрудно показать, что это условие и необходимо для того, чтобы выполнялось заключение теоремы 4.5. Хотя это условие, по-видимому, может не выполняться для некоторых $\theta$ автор не имеет соответствующих примеров.

С другой стороны, это условие выполнено, если среди чисел $T^k 1\ (k \geqslant 0)$ лишь конечное число различных. Как показал А.О.Гельфонд [1], для этого необходимо, чтобы число $\theta$ было алгебраическим, и достаточно, чтобы оно было числом Пизо.

Итак, если $\theta$ - число Пизо, то применима теорема 4.5.

§ 5. Преобразование Якоби-Перрона.

Пусть $Q^s$ ($\bar{Q}^s$) - открытый ( соответственно, замкнутый) единичный куб в $R^s$ $(s \geqslant 2)$.

Определим отображение $T: Q^s \to \bar{Q}_s$ формулой

$$T(x) = T(x_1, x_2, \dots, x_s) = \left(\left\{\frac{x_2}{x_1}\right\}, \left\{\frac{x_3}{x_1}\right\}, \dots, \left\{\frac{1}{x_1}\right\}\right)$$

Определим также на $Q^s$ вектор - функцию $a^1$ равенством

$$a^1(x) = a^1(x_1, \dots, x_s) = \left(\left[\frac{x_2}{x_1}\right], \dots, \left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$$

и положим при $n \geqslant 1$

$$a^{n+1}(x) = a^n(Tx).$$

Значения этих функций - целочисленные векторы $(k_1, \dots, k_s)$, у которых $0 \leq k_r \leq k_s\ (1 \leq r \leq s-1)$, $k_s \geqslant 1$. Множество таких векторов обозначим $I$.

Пусть $i = (k_1, \dots, k_s) \in I$. Рассмотрим множество

$$A_i = \{x \mid x \in Q^s,\ a^1(x) = i\}.$$

Оно выделяется в $Q^s$ неравенствами

$k_1 x_1 \le x_2 < (k_1+1)x_1, \ldots, k_{s-1}x_1 \le x_s < (k_{s-1}+1)x_1, k_s x_1 \le 1 < (k_s+1)x_1;$

На этом множестве $T$ задаётся формулой

$$T(x) = \left(\frac{x_2}{x_1} - k_1, \ldots, \frac{x_s}{x_1} - k_{s-1}, \frac{1}{x_1} - k_s\right).$$

Если $k_r < k_s$ для всех $r$ $(1 \le r < s)$, то образ $\tilde{A}_i$ содержит $Q^s$ и описывается неравенствами

$$0 \le y_1 < 1, \ldots, 0 \le y_r < 1,$$

если же $k_{r_1} = k_{r_2} = \ldots = k_{r_l} = k_s$ $(r_1 < r_2 < \ldots < r_l < s)$, а все остальные компоненты $i$ меньше, чем $k_s$, то, кроме того,

$$y_{r_1} < y_s, \ldots, y_{r_l} < y_s .$$

$T$ диффеоморфно отображает внутренность $A_i'$ множества $\tilde{A}_i$ на внутренность его образа, при этом модуль якобиана равен $x_1^{-(s+1)}$. Поскольку граница множества $\tilde{A}_i$, имеет меру $0$ (имеется в виду $s$ - мерная мера Лебега, обозначаемая буквой $\mu$), то отсюда следует, что $T$ несингулярно.

Отображение $f_i : T(\tilde{A}_i) \to \tilde{A}_i$, обратное отображению $T$, определяется формулой

$$f_i(x) = \left(\frac{1}{k_s + x_s}, \frac{k_1 + x_1}{k_s + x_s}, \ldots, \frac{k_{s-1} + x_{s-1}}{k_s + x_s}\right),$$

Якобиан $f_i$ равен $\pm (k_s + x_s)^{-(s+1)}$

Пусть $i^n = (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$. Положим

$$A_{i^n}' = A_{i_1}' \cap T^{-1}(A_{i_2}') \ldots \cap T^{-(n-1)}(A_{i_n}'),$$

$$f_{i^n} = f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n} .$$

Положим также $i^{n-1} = (i_2, \ldots, i_n) \in I^{n-1}$.

Используя соотношение

$$A_{i^n}' = A_{i_1}' \cap T^{-1}(A_{i_2}' \cap \ldots \cap T^{-(n-2)}(A_{i_n}')) =$$

$$= A_{i_1}' \cap T^{-1}(A_{i^{n-1}}') = f_i(TA_i' \cap A_{i^{n-1}}'),$$

легко по индукции доказать, что $A'_{i^n}$ и $T^n(A'_{i^n})$ - открытые связные множества, а $f_{i^n}: T^n(A'_{i^n}) \to A'_{i^n}$ - диффеоморфизм.

Мы покажем сейчас, что если $A'_{i^n}$ непусто, то $T^n(A'_{i^n})$ является пересечением какой-то совокупности [1] множеств

$$B_{r,r'} \ (1 \leq r < r' \leq s),$$ где

$$B_{r,r'} = \{x \mid x \in Q^s,\ x_r < x_{r'}\}.$$

Это утверждение верно при $n=1$ (см. описание множеств $T(A'_i)$), причём в этом случае $r' = s$. Совершим переход от $n$ к $n+1$.

Учитывая, что $T$ взаимно однозначно на $A'_i$ $(i \in I)$ и считая, что $i^n = (i_1, \ldots, i_n)$, $i^{n+1} = (i_1, \ldots, i_{n+1})$, получаем:

$$T^{n+1}(A'_{i^{n+1}}) = T(T^n(A'_{i^n} \cap T^{-n}(A'_{i_{n+1}}))) =$$

$$= T(A'_{i_{n+1}} \cap T^n(A'_{i^n})) = T(A'_{i_{n+1}} \cap \bigcap_{m=1}^{p} B_{r_m, r'_m}) =$$

$$= T(\bigcap_{m=1}^{p} (A'_{i_{n+1}} \cap B_{r_m, r'_m})) = \bigcap_{m=1}^{p} T(A'_{i_{n+1}} \cap B_{r_m, r'_m}).$$

Теперь нам достаточно установить, что $T(A'_i \cap B_{r,r'})$ является множеством указанного вида для всех $i \in I$, если $A'_i \cap B_{r,r'} \neq \Lambda$.

Пусть сначала $r > 1$. Если при этом $k_{r-1} < k_{r'-1}$, т.е. $[x_r \mid x_1] < [x_{r'} \mid x_1]$ для всех $x \in A'_i$, то, очевидно,

1) Если эта совокупность пуста, то пересечение совпадает с $Q^s$.

$A'_i \subset B_{r,r'}$ и $T(A'_i \cap B_{r,r'}) = T(A'_i)$. Если же $k_{r-1} > k_{r'-1}$, то $[x_r|x_1] > [x_{r'}|x_1]$ и $A'_i \cap B_{r,r'} = \Lambda$, что противоречит предположению. При $k_{r-1} = k_{r'-1}$ справедливо равенство

$$T(A'_i \cap B_{r,r'}) = B_{r-1,r'-1} \cap T(A'_i).$$

Пусть, наконец, $r=1$. Тогда, как и в первых двух случаях либо $A'_i \subset B_{1,r'}$ (если $k_{r'-1} = [x_{r'}|x_1] \geq 1$), либо $A'_i \cap B_{1,r'} = \Lambda$ (если $k_{r'-1} = [x_{r'}|x_1] = 0$), и наше утверждение доказано.

Положим теперь $Z_0 = \bar{Q}^s \setminus Q^s$, $Z_{k+1} = T^{-1}(Z_k)$ $(k \geq 0)$, $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$. Поскольку $\mu(Z_0) = 0$ и $T$ несингулярно, то $\mu(Z) = 0$, $Z_1$ совпадает с дополнением в $Q^s$ к объединению всех (открытых) множеств $A'_i$ $(i \in I)$, поэтому $\bigcup_{k=1}^{n} Z_k$ совпадает с дополнением в $Q^s$ к объединению всех множеств $A'_{in}$. Более внимательные (но не нужные нам) рассмотрения показывают, что $\bigcup_{k=1}^{n} Z_k$, а, следовательно, и $Z$, является пересечением с $Q^s$ счётного множества гиперплоскостей.

Положим $X = Q^s \setminus Z = \bar{Q}^s \setminus (Z_0 \cup Z)$. Тогда $T$ отображает $X$ на себя (в частности, на $X$ определены все степени $T$). Действительно, из соотношений

$$T(X) = T(Q^s \setminus T^{-1}(\bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k)) = T(Q^s) \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k$$

и того, что $T(Q^s) \supset Q^s$ следует, что

$$T(X) \supset Q^s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k = Q^s \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k = Q^s \setminus Z = X$$

и

$$T(X) \subset \bar{Q}^s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k = Q^s \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k = Q^s \setminus Z = X.$$

Положим $A_{in} = X \cap A'_{in}$. Поскольку $T^n(A_{in}) = T^n(A'_{in}) \cap X$, то множество $T^n(A_{in})$ определяется в $X$ теми же неравенствами, что и множество $T^n(A'_{in})$ в $Q^s$.

Мы покажем, что для преобразования $T$ пространства $X$ с мерой Лебега $\mu$ и исходного разбиения пространства $X$ на множества $A_i$ $(i \in I)$ выполнены все условия § 3.

Выполнение условия I следует из того, что отображение $T$, рассматриваемое на $A_i$, является сужением диффеоморфизма $T: A'_i \to T(A'_i)$ на множество $A_i$, имеющее полную меру в $A'_i$.

Будем считать, что $X$ снабжено евклидовой метрикой. Положим

$$\delta_n = \sup_{(n)} \operatorname{diam} \tilde{A}_{in} .$$

Как будет показано в приложении к § 5,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\delta_n)^{\frac{1}{n}} < 1. \qquad (34)$$

Поскольку для $x \in T^n(A_i)$

$$\ln J_i(x) = -(s+1) \ln(k_s + x_s)$$

и

$$A_{in} \subset A'_{in} \subset \tilde{A}_{in},$$

то $\ln J_i$ удовлетворяет на $T(A_i)$ условию Липшица с постоянной $s+1$ (напомним, что $k_s \geq 1$ ) и поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\alpha_n)^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(\sup_{i\in I} \sup_{(n)} W(\ln J_i, A_{in} \cap T(A_i))\Big)^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \big((s+1)\delta_n\big)^{\frac{1}{n}} < 1 .$$

Согласно изложенному выше, для всякого квазиинтервала $A_{in}$ $T^n(A_{in})$ есть пересечение какого-то числа множеств $B_{r,r'}$ $(r < r') \subset X$ и содержит поэтому множество

$$\{x \mid x \in X,\ x_1 < x_2 < \ldots < x_s\} . \qquad (35)$$

Отсюда вытекает выполнение условия УП при $\tau = (S!)^{-1}$. Пользуясь замечание 4.11, получаем, что выполнены условия Ш, 1У, У1 и У1$'$. Остается проверить выполнение условий П и У (или У$'$, поскольку выполнено 1У).

Проверим выполнение условия П. Рассмотрим квазиинтервал $A_{\hat{i}}$ ранга 1, где $\hat{i} = (1, 2, \ldots S)$. Он, очевидно, невырожден, т.к. $K_r < K_S$, если $1 \leq r < S$. Точки $A_{\hat{i}}$ удовлетворяют неравенствам

$$1 < \frac{x_2}{x_1} < 2 < \frac{x_3}{x_1} < \ldots < (S-1) < \frac{x_S}{x_1} < S < \frac{1}{x_1} < S+1$$

Отсюда ясно, что $A_{\hat{i}}$ содержится в множестве (35), и поэтому для произвольного квазиинтервала $A_{i^n}$ справедливо включение

$$T^n(A_{i^n}) \supset A_{\hat{i}} \quad .$$

Покажем, что квазиинтервал $A_{i^n} \cap T^{-n}(A_{\hat{i}})$ ранга $n+1$ невырожден. В самом деле,

$$T^{n+1}(A_{i^n} \cap T^{-n}(A_{\hat{i}})) = T(A_{\hat{i}} \cap T^n(A_{i^n})) =$$

$$= T(A_{\hat{i}}) = X.$$

С другой стороны, т.к. $A_{\hat{i}} \subset T^n(A_{i^n})$, то

$$\mu(A_{i^n} \cap T^{-n}(A_{\hat{i}})) = \int_{A_{\hat{i}} \cap T^n(A_{i^n})} J_{i^n}(x)\,\mu(dx) \geqslant$$

$$\geqslant \underline{J_{i^n}}\,\mu(A_{\hat{i}}) \geqslant C^{-1}\mu(A_{\hat{i}})\,\overline{J_{i^n}} \geqslant$$

$$\geqslant C^{-1}\mu(A_{\hat{i}}) \int_{T^n(A_{i^n})} J_{i^n}\,\mu(dx) = C^{-1}\mu(A_{\hat{i}})\,\mu(A_{i^n}).$$

Поэтому мера объединения всех невырожденных квазиинтервалов ранга $n+1$ не меньше, чем

$$\sum_{(n)} \mu(A_{i^n} \cap T^{-n}(A_{\hat{i}}) \geq C^{-1}\mu(A_{\hat{i}}),$$

и условие II выполнено.

Покажем, что выполнено условие У$'$. Поскольку

$$\bar{J}_{ik} \leq C\, \underline{J_{ik}} \leq C\, \frac{\int_{T^k(A_{ik})} J_{ik}(x)\mu(dx)}{\mu(T^k(A_{ik}))} \leq S_1' C\mu(A_{ik}),$$

то нам достаточно, зафиксировав некоторый квазиинтервал $A_{i^n}$ ранга $n$, оценить меру тех квазиинтервалов ранга $k$, которые пересекаются с множеством $T^n(A_{i^n})$, но в нем не содержатся. Из описания множеств $T^n(A_{i^n})$ следует, что объединение этих квазиинтервалов содержится в объединении (не зависящем от $i^n$ и $n$) $\delta_k$ - окрестностей всех подмножеств $Q^s$, определенных равенствами $x_r = x_{r'}$ $(1 \leq r < r' \leq S)$. Ясно, что мера этого объединения не превосходит $2\sqrt{2}\, C_S^2\, \delta_k$. Применяя оценку (34), получаем, что условие У$'$ выполнено.

Из соотношения (34) следует также, что $\bigvee_{k=0}^{\infty} T^{-k}(\mathcal{L}) = \mathfrak{M}$ ($\mathcal{L}$ - $\sigma$-алгебра, порожденная квазиинтервалами ранга 1, $\mathfrak{M}$ - лебеговская $\sigma$-алгебра). Доказательство этого факта такое же, как и в примере 2 (см. § 4).

Таким образом, для $T$ справедливы все результаты § 3.

Можно получить некоторую информацию о плотности $\rho$ инвариантной меры, явный вид которой неизвестен. Согласно следствию 4.4 $\rho$ является равномерным пределом сумм $\sum_{(n)} J_{i^n}$. Каждая из функций $J_{i^n}$ непрерывна внутри $T^n(A'_{i^n})$, как модуль якобиана гладкого отображения $f_{i^n}$.

Рассмотрим самое крупное разбиение куба $Q^s$, из целых элементов которого можно составить все множества $B_{r,r'}$ $(1 \le r < r' \le s)$, а значит и все пересечения конечных систем из множеств $B_{r,r'}$ и их дополнений. Как следует из описания множеств $T^n(A'_{i^n})$, каждый элемент этого разбиения либо содержится в $T^n(A'_{i^n})$, либо не пересекается с этим множеством. Поскольку $J_{i^n} = 0$ на $Q^s \setminus T^n(A'_{i^n})$, то все $J_{i^n}$ непрерывны внутри каждого элемента указанного разбиения. Это же верно для сумм $\sum_{(n)} J_{i^n}$, мажорируемых рядами $\sum_{(n)} J_{i^n}$, и для равномерного предела $\rho$ этих сумм. Итак, $\rho$ непрерывна внутри элементов разбиения, осуществляемого гиперплоскостями $x_r = x_{r'}$.

Весьма правдоподобно, что внутри элементов этого разбиения $\rho$ гладка или по крайней мере удовлетворяет условию Липшица. Один из возможных подходов к этим вопросам требует достаточно сильной оценки норм матриц Якоби отображений $f_{i^n}$, равномерной по квазиинтервалам ранга $n$. Получить эту оценку, по-видимому, не так просто. С другой стороны, $\rho$ имеет разрывы в $Q^s$. Очевидно, что они должны располагаться на гиперплоскостях $x_r = x_{r'}$.

Докажем наличие разрывов. Пусть, напротив, $p$ непрерывна в $Q^S$. Если $x^0=(x_1^0,\dots,x_s^0)$ - такая точка из $Q^S$, что $x_{\tau_0}=x_s$, а других случаев равенства координат нет, то из описания множеств $T(A_i')$ следует, что существуют два множества $I_1\subset I$ и $I_2\subset I$ со свойствами:

1) $I_1\subset I_2$, $I_1\neq I_2$,

2) если $N$ - любая достаточно малая окрестность $x_0$,

$N_1=N\cap\{x/x\in Q^S, x_{\tau_0}>x_s\}$, $N_2=N\cap\{x/x\in Q^S, x_{\tau_0}<x_s\}$, то $I_1$ ($I_2$) совпадает со множеством тех $i\in I$, для которых $T(A_i')\supset N_1$ ( соответственно, $T(A_i')\supset N_2$ ).

Поэтому, если $x_1\in N_1$, $x_2\in N_2$, то

$$V_\mu p(x_2)-V_\mu p(x_1)=\sum_{i\in I_2} J_i(x_2)p(f_i(x_2))-$$
$$-\sum_{i\in I_1} J_i(x_1)p(f_i(x_1))\geqslant\sum_{i\in I_1}[J_i(x_2)p(f_i(x_2))-$$
$$-J_i(x_1)p(f_i(x_1))]+C_1\sum_{i\in I_2/I_1}\underline{J_i},$$

В силу непрерывности $p$ первое слагаемое стремится к $0$, когда $N$ стягивается к $x^0$, откуда следует, что $V_\mu p$ - разрывная функция. Таким образом, предположение о непрерывности $p$ и равенстве $V_\mu p=p$ противоречат друг другу.

Здесь уместно сделать несколько замечаний об истории вопроса. Первым метрической теорией алгоритмов Якоби стал заниматься, по-видимому, Ф.Швайгер (см. [35] - [41] ), в работах которого установлено существование инвариантной меры, эргодичность, а затем точность $T$ , рассматривались и некоторые другие вопросы.

Ф.Швайгер [41] , а затем М.Уотермен [44] доказывали аналог теоремы Кузьмина ( см. следствие 4.4) для преобразования Якоби при $s=2$. В [44] рассмотрен и более общий случай. Последующие замечания относятся также и к нему.

Упомянутые теоремы дают оценку порядка $(e^{-\lambda\sqrt{n}}+\delta_{[\sqrt{n}]})$, причём $\delta_n$ эти авторы не оценивают. Доказательство весьма близко к рассуждениям Кузьмина [24], что приводит к некорректности: оценивая производные функции $V_u^n g$ ($g$ - гладкая функция), авторы не учитывают, что этого мало для оценки колебания, т.к. $V_u^n g$ может иметь разрывы ( этого явления нет в одномерном случае, который изучал Кузьмин). Кроме того в этих теоремах накладываются условия на неизвестную плотность $\rho$ - требуется, чтобы она имела ограниченные производные на всём $R^S$. Однако мы видели, что $\rho$ даже не непрерывна. Заметим, что "теорема Кузьмина" из [44] содержит и другие серьезные недочёты, а доказательство подобной теоремы из работы [42], посвященной многомерным обобщениям преобразований Реньи, целиком основано на недоразумении. Внеся в формулировки этих теорем надлежащие уточнения, можно доказать их с помощью результатов § 3, получив при этом лучшие, чем в [42] и [44], оценки.

Приложение к § 5.

Здесь будет доказано соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\delta_n)^{\frac{1}{n}} < 1, \qquad (34')$$

где

$$\delta_n = \sup_{(n)} \operatorname{diam}(\tilde{A}_{in}).$$

**Лемма 4.14.** Пусть $b_0, b_1, \ldots$ - последовательность вещественных чисел, причём при всех $n \geq 0$ выполнено соотношение

$$b_{n+s+1} = \sum_{l=0}^{s} \lambda_l^n b_{n+l}, \qquad (36)$$

где $s$ - некоторое целое число, и, кроме того,

$$\sum_{l=0}^{s} \lambda_l^n = 1, \quad \lambda_l^n \geq 0 \quad (n \geq 0,\ 0 \leq l \leq s),$$

$$\lambda_s^n \geq \delta > 0.$$

Положим

$$M_n = \max_{0 \leq l \leq s} b_{n+l} = \sup_{l \geq 0} b_{n+l}, \quad m_n = \min_{0 \leq l \leq s} b_{n+l} = \inf_{l \geq 0} b_{n+l}$$

Тогда

$$M_n - m_n \leq (1-\delta^s)^{-(1-\frac{1}{s})} (1-\delta^s)^{\frac{n}{s}} (M_0 - m_0).$$

Доказательство. Рассмотрим числа $b_{n+s}, b_{n+s+1}, \ldots,$ $b_{n+2s}$. Применяя $l$ раз формулу (35), мы можем представить каждое из чисел $b_{n+s+l}$ $(0 \leq l \leq s)$ в виде выпуклой комбинации

$$b_{n+s+l} = \sum_{m=0}^{s} M_m^l b_{n+m},$$

где

$$M_s^l \geq \delta^l \geq \delta^s.$$

Тогда

$$M_{n+s} - m_{n+s} = \max_{0 \leq l, l' \leq s} (b_{n+s+l} - b_{n+s+l'}) =$$

$$= \max_{0 \leq l, l' \leq s} \sum_{m=0}^{s} (M_m^l - \mu_m^{l'}) b_{n+m}.$$

Обозначим через $\sum^{+}(\sum^{-})$ суммирование по тем значениям $m$, для которых $\mu_m^{e} - \mu_m^{e'} \geq 0$ ( соответственно, $\mu_m^{e} - \mu_m^{e'} < 0$ ). Тогда

$$\sum_{m=0}^{s} (\mu_m^{e} - \mu_m^{e'}) b_{n+m} = \sum{}^{+} (\mu_m^{e} - \mu_m^{e'}) b_{n+m} +$$

$$+ \sum{}^{-} (\mu_m^{e} - \mu_m^{e'}) b_{n+m} \leq M_n (1 - \sum{}^{+} \mu_m^{e'} - \sum{}^{-} \mu_m^{e}) +$$

$$+ m_n (\sum{}^{-} \mu_m^{e} + \sum{}^{+} \mu_m^{e'} - 1) = (M_n - m_n)[1 - (\sum{}^{+} \mu_m^{e'} + \sum{}^{-} \mu_m^{e})]$$

$$\leq (M_n - m_n)(1 - \delta^{s}).$$

Таким образом,

$$M_{n+s} - m_{n+s} \leq (1 - \delta^{s})(M_n - m_n) .$$

Поскольку $M_{k+1} \leq M_k$, $m_k \geq m_{k+1}$, то $M_{k+1} - m_{k+1} \leq$ $\leq M_k - m_k$ и

$$M_n - m_n \leq M_{s[\frac{n}{s}]} - m_{s[\frac{n}{s}]} \leq (1 - \delta^{s})^{[\frac{n}{s}]} (M_0 - m_0) \leq$$

$$\leq (1 - \delta^{s})^{-(1-\frac{1}{s})} (1 - \delta^{s})^{\frac{n}{s}} (M_0 - m_0) .$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству соотношения (37).

Сначала нам придётся вывести явную формулу для $f_{i^n}$.

Пусть $i^n = (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, причём $i_m = (k_1^m, \ldots, k_s^m)$, $(1 \leq m \leq n)$. Пусть также $f_{i^n, r}$ обозначает $r$-ую компоненту вектор - функции $f_{i^n}$ $(1 \leq r \leq s)$.

Сначала рассмотрим случай $n = 1$. Если $i^1 = i = (k_1, \ldots, k_s)$, то, согласно изложенному выше,

$$f_{i,1} = \frac{1}{k_s + x_s}, \quad f_{i,r}(x) = \frac{k_{r-1} + x_{r-1}}{k_s + x_r} \quad (2 \leq r \leq s). \quad (37)$$

Определим числа $\omega^m_{q,r}$ $(1\le q, r\le s+1, 0\le m\le n)$ равенствами

$$\omega^0_{q,q}=1\,(1\le q\le s+1),\ \omega^0_{q,r}=0\,(1\le q, r\le s+1, q\ne r),$$
$$\omega^m_{q,r}=\omega^{m-1}_{q,r+1}\quad(1\le q\le s+1, 1\le r\le s, 1\le m\le n), \tag{38}$$
$$\omega^m_{q,s+1}=\omega^{m-1}_{q,1}+\sum_{r=1}^{s}K_r^m\omega^{m-1}_{q,r+1}\quad(1\le q\le s+1, 1\le m\le n)$$

С помощью индукции, используя (37) и соотношение $f_{(i_1,\dots,i_n)}=f_{(i_1,\dots,i_{n-1})}f_{i_n}$, легко проверить, что при $n\geq 0$

$$f_{i_n,q}(x)=\frac{\sum_{r=1}^{s}\omega^n_{q,r}x_r+\omega^n_{q,s+1}}{\sum_{r=1}^{s}\omega^n_{s+1,r}x_r+\omega^n_{s+1,s+1}}. \tag{39}$$

Обозначим через $R^s_+$ подмножество $R^s$, состоящее из всех векторов с неотрицательными компонентами. Тогда из включений

$$\tilde{A}_{i_n}=f_{i_n}(T^n(\tilde{A}_{i_n}))\subset f_{i_n}(R^s_+)\subset\prod_{q=1}^{s}f_{i_n,q}(R^s_+)$$

следует, что

$$\delta_n\le\sqrt{s}\,\sup_{(n)}\max_{1\le q\le s}\left(\sup_{x\in R^s_+}f_{i_n,q}(x)-\inf_{x\in R^s_+}f_{i_n,q}(x)\right).$$

Но из формулы (39) и неотрицательности $\omega^n_{q,r}$ следует, что $f_{i_n,q}(R^s_+)$ совпадает с выпуклой оболочкой чисел $\frac{\omega^n_{q,r}}{\omega^n_{s+1,r}}$ $(1\le r\le s+1)$ и поэтому

$$\sup_{x\in R^s_+}f_{i_n,q}(x)=\max_{x\in R^s_+}f_{i_n,q}(x)=\max_{1\le r\le s+1}\frac{\omega^n_{q,r}}{\omega^n_{s+1,r}},$$
$$\inf_{x\in R^s_+}f_{i_n,q}(x)=\min_{x\in R^s_+}f_{i_n,q}(x)=\min_{1\le r\le s+1}\frac{\omega^n_{q,r}}{\omega^n_{s+1,r}}$$

Кроме того, согласно (38) при $n \geqslant S$

$$\omega^{n}_{q,r} = \omega^{n+r-s-1}_{q,s+1}, \quad \omega^{n}_{s+1,r} = \omega^{n+r-s-1}_{s+1,s+1} \quad (1 \le r \le s+1). \tag{40}$$

Поэтому при $n \geqslant S$

$$\delta_n \le \sqrt{s}\, \sup_{i^n \in I^n} \max_{1 \le q \le s} \left( \max_{n-s \le m \le n} \frac{\omega^{m}_{q,s+1}}{\omega^{m}_{s+1,s+1}} - \min_{n-s \le m \le n} \frac{\omega^{m}_{q,s+1}}{\omega^{m}_{s+1,s+1}} \right),$$

или, если заменить $n$ на $n+s$, то при $n \geqslant 0$

$$\delta_{n+s} \le \sqrt{S}\, \sup_{i^{n+s} \in I^{n+s}} \max_{1 \le q \le s} \left( \max_{0 \le \ell \le s} \frac{\omega^{n+\ell}_{q,s+1}}{\omega^{n+\ell}_{s+1,s+1}} - \min_{1 \le \ell \le s} \frac{\omega^{n+\ell}_{q,s+1}}{\omega^{n+\ell}_{s+1,s+1}} \right). \tag{41}$$

Но, согласно (38) и (40),

$$\frac{\omega^{m+s+1}_{q,s+1}}{\omega^{m+s+1}_{s+1,s+1}} = \frac{\omega^{m+s}_{q,1} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{m+s+1} \omega^{m+s}_{q,r+1}}{\omega^{m+s}_{s+1,1} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{m+s+1} \omega^{m+s}_{s+1,s+1}} =$$

$$= \frac{\omega^{m}_{q,s+1} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{m+s+1} \omega^{m+r}_{q,s+1}}{\omega^{m}_{s+1,s+1} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{m+s+1} \omega^{m+r}_{s+1,s+1}} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{s} \lambda_\ell^m \frac{\omega^{m+\ell}_{q,s+1}}{\omega^{m+s}_{s+1,s+1}},$$

где

$$\lambda_0^m = \frac{\omega^{m}_{s+1,s+1}}{\omega^{m}_{s+1,s+1} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{m+s+1} \omega^{m+r}_{s+1,s+1}},$$

$$\lambda_\ell^m = \frac{K_\ell^{m+s+1} \omega^{m+\ell}_{s+1,s+1}}{\omega^{m}_{s+1,s+1} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{m+s+1} \omega^{m+r}_{s+1,s+1}}, \quad (1 \le \ell \le S),$$

Очевидно, что $\lambda_l^m \geqslant 0$, $\sum_{l=0}^{s} \lambda_l^m = 1$. Поскольку при всех $n \geqslant 0$ $K_r^n \leq K_s^n$ $(1 \leq r \leq s)$, $K_s^n \geqslant 1$ и

$$\omega_{s+1,s+1}^{n+1} = \omega_{s+1,1}^{n} + \sum_{r=1}^{s} K_r^{n+1} \omega_{s+1,r+1}^{n} \geqslant$$

$$\geqslant K_s^{n+1} \omega_{s+1,s+1}^{n} \geqslant \omega_{s+1,s+1}^{n},$$

то

$$\lambda_l^m \leq \lambda_s^m, \quad (0 < l \leq s).$$

Следовательно,

$$\lambda_s^m \geqslant \frac{1}{s+1}.$$

Применяя лемму 4.14 к $b_n = \dfrac{\omega_{q,s+1}^{n}}{\omega_{s+1,s+1}^{n}}$ получаем, что

$$\delta_{n+s} \leq \sqrt{s}\left(1 - \frac{1}{(s+1)^s}\right)^{-(1-\frac{1}{s})} \left(1 - \frac{1}{(s+1)^s}\right)^{\frac{n}{s}} \max_{1 \leq q \leq s} \max_{0 \leq l, l' \leq s} \left(\frac{\omega_{q,s+1}^{l}}{\omega_{s+1,s+1}^{l}} - \frac{\omega_{q,s+1}^{l'}}{\omega_{s+1,s+1}^{l'}}\right)$$

Поскольку $(0, \ldots, 0)$ содержится в замыкании $T^n(A_{i_n})$ и $\dfrac{\omega_{q,s+1}^{l}}{\omega_{s+1,s+1}^{l}} = f_{i}^{l,q}(0, \ldots, 0) \in [0, 1]$, то при всех $n \geqslant 0$

$$\delta_{n+s} \leq \sqrt{s}\left(1 - \frac{1}{(s+1)^s}\right)^{-(1-\frac{1}{s})} \left(1 - \frac{1}{(s+1)^s}\right)^{\frac{n}{s}}$$

и

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (\delta_n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 - \frac{1}{(s+1)^s}\right)^{\frac{1}{s}} < 1.$$

Замечание 4.12. Выше ничего не говорилось об алгоритме Якоби - Перрона, как о способе аппроксимации. Остановимся на этом вопросе. Пусть для $x \in Q^s$ определено $T^n$. Положим $i^n(x) = (a^1(x), \ldots, a^n(x))$.

В качестве $n$ -го приближения для вектора $x$ берётся вектор

$$f_{i_{n}(x)}(0) = \left( \frac{\omega^{n}_{1,s+1}(x)}{\omega^{n}_{s+1,s+1}(x)}, \ldots, \frac{\omega^{n}_{s,s+1}(x)}{\omega^{n}_{s+1,s+1}(x)} \right).$$

Поскольку $x = f_{i_{n}(x)}(T^{n}x)$, то

$$|x - f_{i_{n}(x)}(0)| \le diam\,|f_{i_{n}(x)}(T^{n}(A_{i_{n}(x)}))| \le \delta_{n}.$$

Соотношение

$$f_{i_{n}(x)}(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} x \qquad (42)$$

без оценки скорости сходимости получил Перрон [32] (см. также [44] ). При этом он указал некоторый способ разумно определить $T$ и $a^{1}$ на всём $\overline{Q^{s}}$, благодаря чему (42) у него доказано для всех $x \in \overline{Q^{s}}$.

Рассуждения, использованные в этом приложении, в основном заимствованы из работы Перрона. Исключение составляет лемма 4.14, при доказательстве которой использован иной, чем у Перрона, метод. Эта лемма усиливает соответствующую лемму Перрона, доказавшего сходимость последовательности $\delta_{n}$ при тех же, что и у нас, условиях, но не оценивавшего скорость этой сходимости.

# ГЛАВА V.

## ПОВЕДЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОБРАЗУЮЩИХ СТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС

### § 1. Введение и обозначения

Пусть $\xi_n$ - стационарный в узком смысле случайный процесс, причём $E\xi_n=0$, $E\xi_n^2<\infty$. Имеется много результатов, позволяющих применять к подобным процессам, удовлетворяющим тем или иным условиям слабой зависимости, предельные теоремы теории вероятностей. Обычно в этих теоремах требуется, чтобы

$$E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty. \qquad (1)$$

Это условие в принципе можно проверить без привлечения теории стационарных в узком смысле процессов (достаточно получить некоторые оценки для спектральной функции). Иногда, однако, такие оценки получить не удается, в то время как косвенным путем все же можно доказать соотношение (1).

Введём некоторые обозначения.

Пусть $\xi_n$ - стационарный процесс с дискретным временем, заданный на вероятностном пространстве $X$ с $\sigma$- алгеброй событий $\mathfrak{M}$ и вероятностной мерой $P$. Предполагается, что либо $1\le n<\infty$, либо $-\infty<n<\infty$. В первом случае, мы будем говорить об одностороннем процессе, во втором - о двустороннем. Далее, предполагается, что существует такой эндоморфизм $T$ пространства $(X,\mathfrak{M},P)$, что $\xi_{n+1} = \xi_n(T)$. Это условие, как было объяснено в главе 1, не содержит ограничений на конечномерные распределения процесса $\xi_n$.

Пусть $k \le \ell$ - целые числа. Мы обозначаем через $\mathfrak{M}_k^\ell$ $\sigma$- алгебру, порожденную функциями $\xi_n$ при $k \le n \le \ell$. Положим далее, $\mathfrak{M}_k^\infty = \bigvee_{k \le \ell < \infty} \mathfrak{M}_k^\ell$, $\mathfrak{M}_\infty^\infty = \bigwedge_{1 \le k < \infty} \mathfrak{M}_k^\infty$, $\mathfrak{M}_{-\infty}^\ell = \bigvee_{-\infty < k \le \ell} \mathfrak{M}_k^\ell$, $\mathfrak{M}_{-\infty}^{-\infty} = \bigwedge_{-\infty < \ell \le 1} \mathfrak{M}_{-\infty}^\ell$ и $\mathfrak{M}_{-\infty}^\infty = \bigvee_{-\infty < k < \infty} \mathfrak{M}_k^\infty$. Последние три обозначения относятся к случаю двустороннего процесса.

$H(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ - некоторая $\sigma$- алгебра множеств, обозначает гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом и измеримых относительно $\mathcal{L}$. Если $H_1$ - некоторое подпространство $H(\mathfrak{M})$, то $\overset{\circ}{H}_1$ - подпространство $H_1$, состоящее из функций с нулевым средним.

Далее, через $\mathcal{L}_k^\ell$ $(-\infty \le k \le \ell \le \infty)$ обозначена замкнутая в $H(\mathfrak{M})$ линейная оболочка функций $\xi_n (k \le n \le \ell)$, а через $H_k^\ell$ - пространство $H(\mathfrak{M}_k^\ell)$.

Равенство $Uf(x) = f(Tx)$ $(f \in H(\mathfrak{M}))$ определяет в $H(\mathfrak{M})$ изометрический линейный оператор. $\mathcal{L}_{-\infty}^\infty$- инвариантное подпространство оператора $U$. Сужение $U$ на $\mathcal{L}_{-\infty}^\infty$ обозначается через $\overline{U}$. Заметим, что $\overline{U}$ - унитарный оператор, если процесс $\xi_n$ - двусторонний. Исходным путем для нас послужит следующая теорема [1])

---

1) Формулировка теоремы здесь немного изменена по сравнению с [13]. Соотношение $g \in \mathcal{L}_1^\infty$ в [13] не доказывается, но оно следует из слабой замкнутости сильно замкнутого подпространства $\mathcal{L}_1^\infty$.

(доказательство см. в [13], стр.411 ).

Теорема В.П.Леонова. Пусть $\xi_n$ - стационарный в широком смысле случайный процесс. Пусть, кроме того, $R_n = E\xi_{n+1}\xi_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $DS_n = ES_n^2$.

Тогда либо $\lim\limits_{n\to\infty} DS_n = \infty$, либо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} DS_n < \infty$ причём последний случай имеет место тогда и только тогда, когда $\xi_1$ можно представить в виде

$$\xi_1 = \overline{U}g - g, \quad g \in \mathcal{L}_1^\infty. \qquad (2)$$

Таким образом, если $\xi_n$ удовлетворяет условиям этой теоремы и доказано, что уравнение (2) неразрешимо, то $DS_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

## § 2. Исследование основного уравнения

Теорема 5.1. Пусть $\xi_n$ - двусторонний стационарный в узком смысле случайный процесс, $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 < \infty$. Пусть далее,

$$\mathfrak{M}_{-\infty}^{c} \wedge \mathfrak{M}_1^\infty = \mathfrak{N},^{2)} \qquad (3)$$

процесс эргодичен [1] и $R_n = E\xi_{n+1}\xi_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда, если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} DS_n < \infty$, то $\xi_n = 0$.

Доказательство. Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} DS_n < \infty$, то из теоремы Леонова следует, что

---

1) Это значит, что если $\eta \in H_{-\infty}^{\infty}$, $U\eta = \eta$, то $\eta = const$.

2) Напомним, что так обозначается тривиальная $\sigma$-алгебра.

$$\xi_1 = Uf - f, \quad f \in \mathcal{L}_1^{\infty}.$$

Из той же теоремы, примененной к процессу $\xi_{-n}$, следует, что

$$\xi_1 = U^{-1}g - g = U(-U^{-1}g) - (-U^{-1}g), \quad g \in \mathcal{L}_{-\infty}^{1}.$$

Таким образом, функции $f$ и $-U^{-1}g$ являются решениями уравнения

$$\xi_1 = Uh - h.$$

Вследствие эргодичности разность любых двух решений этого уравнения должна быть постоянной. В частности

$$f = -U^{-1}g + \mathrm{const}.$$

Заметим теперь, что $f$ и $U^{-1}g$, как и все элементы пространства $\mathcal{L}_{-\infty}^{\infty}$, имеют равные $0$ интегралы по мере $P$. Вследствие этого

$$f = -U^{-1}g.$$

Поскольку $g \in \mathcal{L}_{-\infty}^{1}$, $U^{-1}g \in \mathcal{L}_{-\infty}^{0}$, то $f \in \mathcal{L}_{-\infty}^{0}$. Но, с другой стороны, $f \in \mathcal{L}_1^{\infty}$. Итак, $f \in \mathcal{L}_{-\infty}^{0} \cap \mathcal{L}_1^{\infty}$. Из очевидных включений $\mathcal{L}_{-\infty}^{0} \subset H_{-\infty}^{0}$, $\mathcal{L}_1^{\infty} \subset H_1^{\infty}$ следует, что $f \in H_{-\infty}^{0} \cap H_1^{\infty} = H(\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}) \cap H(\mathfrak{M}_1^{\infty}) =$

$$= H(\mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \cap \mathfrak{M}_1^{\infty}) = H(\mathfrak{N}).$$

В сочетании с соотношением $Ef = 0$ это означает, что $f = 0$, поэтому и $\xi_1 = 0$.

Замечание 5.1. Пусть для некоторой постоянной $c > 0$ и для любых множеств $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$, $B \in \mathfrak{M}_1^{\infty}$ выполнено неравенство

$$P(A \cap B) \geq c P(A) P(B). \qquad (4)$$

Если, кроме того, $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 < \infty$, то выполнены все условия теоремы 5.1.

Доказательство. Проверим, что $R_1 \to 0$. Докажем сначала, что $\mathfrak{M}_{-\infty}^{-\infty} = \mathfrak{N}$, т.е. что $\xi_n$ — регулярный процесс ( см [13] ).

Пусть ~~множество~~ $D \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{-\infty} = \bigwedge_{-\infty < k < 1} \mathfrak{M}_{-\infty}^{k}$.

Т.к. $\bigvee_{-\infty < \ell < \infty} \mathfrak{M}_{\ell}^{\infty} = \mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое $\ell$ и множество $D_\varepsilon \in \mathfrak{M}_{\ell}^{\infty}$ такое, что

$$P(D \Delta D_\varepsilon) < \varepsilon$$ ( $\Delta$ - симметрическая разность).

Тогда выполнены не равенства

$$\varepsilon \geq P(\bar{D} \wedge D_\varepsilon) \geq c\, P(\bar{D}) P(D_\varepsilon) \geq$$

$$\geq c(1 - P(D))(P(D) - \varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует равенство

$$(1 - P(D))P(D) = 0, \text{ т.е. } \mathfrak{M}_{-\infty}^{-\infty} = \mathfrak{N}.$$

Как известно, регулярные процессы имеют спектральную плотность [13, стр.385] и, следовательно,

$$R_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Эргодичность также следует из регулярности (см. [13] ).

Проверим, наконец, что $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \wedge \mathfrak{M}_{1}^{\infty} = \mathfrak{N}$.

Пусть $E \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \wedge \mathfrak{M}_{1}^{\infty}$. Тогда

$$0 = P(E \wedge \bar{E}) \geq c\, P(E) P(\bar{E})$$

и доказательство закончено.

Замечание 5.2. Если заменить (4) более слабым предположением: соотношения $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$, $B \in \mathfrak{M}_{1}^{\infty}$, $P(A)P(B) > 0$ влекут $P(A \wedge B) > 0$, то равенство (3) по-прежнему легко проверяется, но неясно, будут ли выполнены остальные условия теоремы 5.1.

Следующая теорема, содержащая некоторую информацию о решении уравнения (2), является обобщением теоремы 5.1.

Теорема 5.2. Пусть $\xi_n$ - двусторонний стационарный в узком смысле процесс. Пусть, далее, при некотором $k\geq 0$ $\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}\wedge\mathfrak{M}_{1}^{\infty}=\mathfrak{M}_{1}^{k}$ ( если $k=0$, то $\mathfrak{M}_{1}^{k}=\mathfrak{N}$ по определению). Пусть $\eta_1$ - функция, измеримая относительно $\mathfrak{M}_{1}^{k+1}$, $E\eta_1=0$, $E\eta_1^2<\infty$, причём соответствующий случайный процесс $\eta_n=U^{n-1}\eta_1$ эргодичен и $E\eta_1\eta_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Тогда, если $\varliminf\limits_{n\to\infty} D(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n)<\infty$, то $\eta_1=Uf-f$, причём $f\in H_1^k$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1 и поэтому опускается.

Замечание 5.3. Пусть для некоторых постоянных $C\geq c>0$ и произвольных множеств $A\in\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$, $B\in\mathfrak{M}_{1}^{\infty}$ выполняется неравенства

$$CP(A)P(B)\geq P(A\wedge B)\geq cP(A)P(B). \qquad (5)$$

Тогда выполнены все условия теоремы 5.2 ( кроме предположений о моментах) при любом $k\geq 0$.

Действительно, как показано в замечании 5.1, правое из неравенств (5) влечет регулярность процесса $\xi_n$. Поскольку процесс $\eta_n$ зависит лишь от конечного числа функций $\xi_l$, он также регулярен. Как указывалось в замечании 5.1, отсюда следует эргодичность и соотношение $E\eta_1\eta_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Осталось проверить равенство $\mathfrak{M}_{-\infty}^{k}\wedge\mathfrak{M}_{1}^{\infty}=\mathfrak{M}_{1}^{k}$. Его можно записать в виде

$$(\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}\vee\mathfrak{M}_{1}^{k})\wedge(\mathfrak{M}_{k+1}^{\infty}\vee\mathfrak{M}_{1}^{k})=\mathfrak{M}_{1}^{k}. \qquad (6)$$

Введем на $\sigma$ - алгебре $\mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$ новую вероятностную меру $\widetilde{P}$ следующим образом: сначала положим $\widetilde{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ если $A_1 \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}, A_2 \in \mathfrak{M}_1^{k}, A_3 \in \mathfrak{M}_{k+1}^{\infty}$, затем по аддитивности определим $\widetilde{P}$ на конечных объединениях непересекающихся множеств, каждое из которых имеет вид $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Тем самым $\widetilde{P}$ определена на некоторой алгебре ~~множеств~~, содержащей $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}, \mathfrak{M}_1^{k}$ и $\mathfrak{M}_{k+1}^{\infty}$, причём для любого ~~множеств~~ $A$ из этой алгебры выполнены неравенства

$$C^2 \widetilde{P}(A) \geq P(A) \geq C^{-2} \widetilde{P}(A).$$

Из правого неравенства следует, что $\widetilde{P}$ счётно-аддитивна на указанной алгебре и может быть, следовательно, продолжена на $\mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$ с сохранением неравенства. Поскольку меры $P$ и $\widetilde{P}$ имеют общие множества меры 0, все фигурирующие в (6) $\sigma$ - алгебры одни и те же для мер $P$ и $\widetilde{P}$. Поэтому нам осталось доказать следующую лемму.

Лемма 5.1. Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ - независимые в совокупности $\sigma$ - алгебры вероятностного пространства $X$. Положим $\mathfrak{M}_4 = (\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2) \wedge (\mathfrak{M}_2 \vee \mathfrak{M}_3)$. Тогда $\mathfrak{M}_4 = \mathfrak{M}_2$

Доказательство. Пусть $\chi_A$ - характеристическая функция множества $A$. Тогда, используя известные свойства условного математического ожидания и включение $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_4$, имеем; если $A_1 \in \mathfrak{M}_1,\ A_2 \in \mathfrak{M}_2,\ A_3 \in \mathfrak{M}_3$;

$$P_{\mathfrak{M}_4}(\chi_{A_1}\chi_{A_2}\chi_{A_3}) = P_{\mathfrak{M}_4} P_{\mathfrak{M}_2 \vee \mathfrak{M}_3}(\chi_{A_1}\chi_{A_2}\chi_{A_3}) =$$

$$= P(A_1) P_{\mathfrak{M}_4}(\chi_{A_2}\chi_{A_3}) = P(A_1) P_{\mathfrak{M}_4} P_{\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2}(\chi_{A_2}\chi_{A_3}) =$$

$$= P(A_1)P(A_3)P_{\mathfrak{M}_4}(\chi_{A_2}) = P(A_1)P(A_3)P_{\mathfrak{M}_2}(\chi_{A_2}) =$$

$$= P_{\mathfrak{M}_2}(\chi_{A_1}\chi_{A_2}\chi_{A_3}).$$

Тем самым операторы условных математических ожиданий относительно $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_4$ совпадают на множестве функций, линейная оболочка которого плотна в пространстве суммируемых функций, измеримых относительно $\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2 \vee \mathfrak{M}_3$.

Т.к. указанные операторы ограничены, то на этом пространстве они совпадают. Отсюда немедленно следует совпадение соответствующих $\sigma$ - алгебр. Лемма доказана.

Напомним, что эндоморфизм $T$ вероятностного пространства $(X, \mathfrak{M}, P)$ называется точным, если $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$. Точные эндоморфизмы эргодичны [19], а любой случайный процесс вида $\xi_n = U^{n-1}\xi_1$ регулярен в том смысле, что $\mathfrak{M}_\infty^\infty = \mathfrak{N}$. Если $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 < \infty$, то $E\xi_1\xi_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ [13] и по теореме § 1 соотношение $\varliminf\limits_{n\to\infty} D(S_n) < \infty$ эквивалентно разрешимости уравнения $\xi_1 = Ug - g \quad (g \in H(\mathfrak{M}))$. Заметим, что из эргодичности $T$ следует, что решение этого уравнения единственно, если потребовать дополнительно, чтобы $g \in H(\mathfrak{M})$ ( т.е. чтобы $Eg = 0$).

Пусть $V$ - оператор, сопряженный с оператором $U$. Этот оператор можно определить равенством

$$\int_A Vf(x)P(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x)P(dx), \quad A \in \mathfrak{M} . \qquad (7)$$

Свойства этого оператора изучались в § 1 главы 4. Ниже мы будем ими пользоваться.

Теорема 5.3. Пусть $f\in_0 H(\mathfrak{M})$, $T$ - точный эндоморфизм. Уравнение $f=U_g-g$ имеет решение $g\in_0 H(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда сходится в $H(\mathfrak{M})$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}V^k f$ и его сумма измерима относительно $T^{-1}(\mathfrak{M})$. При этом $g=\sum\limits_{k=1}^{\infty}V^k f$.

Доказательство. Пусть $f=U_g-g$, $g\in H_0(\mathfrak{M})$. Тогда $f=U_g-VU_g=h-Vh$, где $h=U_g\in_0 H(\mathfrak{M})$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{n}V^k f=h-V^{n+1}h.$$

По свойству 1.13 оператора $V$ правая часть равенства сходится к $h$ в метрике $H(\mathfrak{M})$. Т.к. $h(x)=U_g(x)=g(Tx)$, то $h$ измерима относительно $T^{-1}(\mathfrak{M})$. Кроме того,

$$g=VU_g=Vh=\sum_{k=1}^{\infty}V^k f.$$

Обратно, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}V^k f=h$ измерима относительно $T^{-1}(\mathfrak{M})$, то найдется такая функция $g\in_0 H(\mathfrak{M})$, что $h=U_g$. Отсюда $f=h-Vh=U_g-g$. Теорема доказана.

Замечание 5.4. Результаты этого параграфа, относящиеся к случаю $H(\mathfrak{M})=L_2(X)$ можно с соответствующими изменениями перенести на случай пространств $L_p$, $1<p<\infty$.

## § 3. Примеры.

1. Пусть $\xi_k$ $(-\infty<k<\infty)$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Пусть $f=F(\xi_1,\dots,\xi_n)$ - случайная величина, причём $Ef^2<\infty$. Если $f=g(\dots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\dots)-g(\dots,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\dots)$ и $Eg^2(\dots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\dots)<\infty$, то $g$ есть функция $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$.

Это утверждение вытекает из теоремы 5.2 и замечания 5.2.

2. Здесь будут указаны некоторые применения теоремы 5.3 §2 к метрической теории цепных дробей. Мы будем использовать сведения, полученные в § 1 главы 4 (пример 2) и в § 4 той же главы (продолжение примера 2).

Оператор $V$, соответствующий преобразованию $T$, записывается в виде

$$Vh(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1+x}{(k+x)(k+x+1)}. \tag{8}$$

Как показано в § 4 главы 4, если $Eh=0$, $v_p(h)<\infty$, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le x\le 1}|V^k h(x)|\le C\theta^k v_p(h), \tag{9}$$

где $C$ и $\theta<1$ - абсолютные постоянные, а символ $v_p(h)$ обозначает $p$ - вариацию функции $h$ $(1\le p<\infty)$.

Ниже приводится два признака неограниченности дисперсий.

а) Пусть $f\in {}_0H(\mathfrak{M})$ и $v_p(Vf)<\infty$.

Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty}D\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f\right)<\infty$, то по теореме 3 § 2 $f=Ug-g$, причём $g=\sum\limits_{k=1}^{\infty}V^k f$. В силу (9) $g$ ограничена, $Ug$ также ограничена, значит ограничена и функция $f$. Итак, если $f\in {}_0H(\mathfrak{M})$, $v_p(Vf)<\infty$, $f$ неограничена, то $D\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}U^k f\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

б) Пусть теперь $f\in {}_0H(\mathfrak{M})$, $f$ непрерывна внутри

всех интервалов $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ $(k=1,2,\ldots)$ и имеет конечные односторонние пределы на их концах, ряд (8) при $h=f$ равномерно сходится и $v_p(Vf)<\infty$.
Тогда $Vf$ непрерывна на $[0,1]$. Оператор $V$ переводит непрерывные на $[0,1]$ функции в такие же. Отсюда и из (9) следует, что $g=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} V^k f$ непрерывна на $[0,1]$.
Если $\lim_{n\to\infty} D\left(\sum_{k=0}^{n} U^k f\right)<\infty$, то почти всюду на $[0,1]$ выполнено равенство

$$f(x)=g(Tx)-g(x).$$

Т.к. $T$ непрерывно внутри интервалов $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, то все три функции непрерывны в этих интервалах и равенство имеет место для всех $x\neq\frac{1}{k}$ $(k=1,2,\ldots)$.
С другой стороны, правая часть обращается в $0$ внутри каждого интервала в точке $x_k$, для которой $a_n(x_k)=k$ $(n=1,2,\ldots)$ - неподвижной точке преобразования $T$.
Отсюда $f(x_k)=0$ $(k=1,2,\ldots)$.

Установленный только что факт позволяет утверждать, что если $f\in{}_0H(\mathfrak{M})$ и $f$ постоянна на интервалах $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, то из того, что $\lim_{n\to\infty} D\left(\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right)<\infty$, следует, что $f=0$ с вероятностью 1. Но функции, постоянные на указанных интервалах и только такие функции, могут быть записаны в виде $F(a_1(x))$, где $a_1(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$.

Итак, если $F(a_1(x))\in{}_0H(\mathfrak{M})$, $F(a_1(x))\not\equiv 0$, то

$$\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1} F(a_k(x))\right)^2 p(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \qquad (10)$$

где $a_k(x)=a_{k-1}(Tx)$ при $k>1$.

Ниже из других соображений будет получен более общий результат.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x) = -\ln x + \int_0^1 \ln x\, p(x)\, dx. \qquad (11)$$

Поскольку

$$V_1(Vf) \le \sup_{0\le x\le 1} \left|\frac{d}{dx} Vf(x)\right| \le$$

$$\le \sup_{0\le x\le 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|\frac{1+x}{(k+x)^2(k+x+1)}\right| + \left|\frac{(k+x)(k+x+1)-(2k+2x+1)(x+1)}{(k+x)^2(k+x+1)^2}\right| \ln(k+x)\right) < \infty,$$

то любой из двух приведенных выше признаков показывает, что

$$D\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \qquad (12)$$

Функция (11) тесно связана с изучаемой в метрической теории чисел последовательностью $\ln q_n(x)$.

Покажем, что $\left|\ln q_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(T^k x)\right| < C$,
где $C$ – постоянная, не зависящая от $x$ и $n$.
Как известно [24, стр.72], справедливо равенство

$$x = \frac{p_n(x) + p_{n-1} T^n x}{q_n(x) + q_{n-1}(x) T^n x},$$

откуда

$$T^n x = \frac{x q_n(x) - p_n(x)}{p_{n-1}(x) - x q_{n-1}(x)}.$$

Далее, используя известные соглашения относительно смысла чисел $p_{-1}$ и $q_{-1}$, имеем

$$\prod_{k=0}^{n-1} T^k x = |x q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)|,$$

$$q_n(x) \prod_{k=0}^{n-1} T^k x = q_n(x) q_{n-1}(x) \left|x - \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)}\right|.$$

В силу известных оценок [24, стр.16,23]

$$\frac{1}{q_{n-1}(x)(q_n(x)+q_{n-1}(x))} \le \left| x - \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)} \right| \le \frac{1}{q_{n-1}(x)q_n(x)}$$

мы находим, что

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\frac{q_{n-1}(x)}{q_n(x)}} \le q_n(x)\prod_{k=0}^{n-1} T^k x \le 1.$$

Логарифмируя, получаем нужную нам оценку. Обозначим $f(T^k x)$ через $f_k$. Тогда

$$\left| E^{\frac{1}{2}}(\ln q_n - E\ln q_n)^2 - E^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f_k\Big)^2 \right| \le$$

$$\le E^{\frac{1}{2}}\Big(\ln q_n - E\ln q_n - \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Big)^2 \le$$

$$\le \sup_{0\le x\le 1} \left|\ln q_n(x) - E\ln q_n - \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x)\right| \le 2C.$$

Тем самым доказано, что

$$E(\ln q_n - E\ln q_n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \qquad (13)$$

Замечание 5.5. Нетрудно показать, что в рассмотренных в этом пункте случаях выполнено соотношение

$$D\Big(\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\Big) = \sigma^2 n + O(1) \qquad (n\to\infty).$$

Это можно вывести из того, что $R_k = (U^k f, f)$ стремится к $0$ экспоненциально быстро.

Действительно, в силу (9) имеем

$$(U^k f, f) = (f, V^k f) \le E^{\frac{1}{2}} f^2 \cdot E^{\frac{1}{2}} (V^k f)^2 \le$$

$$\le C\theta^{k-1} V_p(Vf) \cdot E^{\frac{1}{2}} f^2.$$

Отсюда ясно, что соотношения $D\Big(\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\Big)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и $\sigma > 0$ равносильны.

Замечание 5.6. Для определённого класса эндоморфизмов Реньи (см. § 4 главы 4) соотношение (9) выполняется при тех же условиях на функцию $h$. Признак а) применим также и к этим эндоморфизмам. Если, кроме того, $f'$ непрерывна ($f$ - функция, участвовавшая в определении $T$), то, согласно следствию 4.4, $\rho$ также непрерывна и оператор $V$ переводит непрерывные функции в непрерывные. В этом случае применим признак б).

Замечание 5.7. Можно сформулировать некое утверждение, являющееся чисто метрическим аналогом признака б), не использующее топологии на $X$ и существования неподвижных точек и применимое, например, к преобразованиям § 3 главы 4. Оно имеет ряд полезных приложений (например, к $\theta$ - разложениям из § 4 главы 4). Мы не приводим это утверждение из-за его громоздкости.

3. Здесь мы применим теоремы 5.1 и 5.2 к преобразованиям Реньи (см. § 4 главы 4). В качестве основного случайного процесса мы возьмём последовательность $a_k$, где

$$a_1(x)=[f^{-1}(x)],\quad a_{k+1}(x)=a_k(Tx).$$

В условиях Реньи выполнены неравенства

$$CP(A)P(B)\geq P(A\cap B)\geq cP(A)P(B),$$

где $C\geq c>0$ - некоторые постоянные, $A\in\mathfrak{M}_1^n, B\in\mathfrak{M}_{n+1}^\infty$ $(n\geq 1)$, причём все $\sigma$ - алгебры строятся по процессу $a_k$ [1])

---

1) В § 4 главы 4 эти $\sigma$-алгебры обозначались, соответственно, через $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{M}^n$.

Покажем, что, если $g$ измерима относительно $\mathfrak{M}_1^{k+1}$, $Eg=0$, $Eg^2<\infty$, то $E\left(\sum_{l=0}^{n-1} U^l g\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ тогда и только тогда, когда $g=Uh-h$, $h\in H_1^k$. В частности, для $k=0$ это означает, что $g=0$.

Непосредственно сослаться на замечание 5.3 § 2 нельзя, т.к. наш процесс односторонний. Но, как следует из известной теоремы Колмогорова о продолжении мер, существует стационарный в узком смысле случайный процесс $a_n'(-\infty<n<\infty)$ имеющий те же конечномерные распределения при $n\geqslant 1$, что и процесс $a_n$. Неравенства (5) можно установить, используя стационарность и аппроксимацию $\sigma$ - алгебры $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$ $\sigma$ - алгебрами $\mathfrak{M}_n^0$, $n<0$.

Замечание 5.8. Если $T$ - эндоморфизм Якоби-Перрона ( см. § 5 главы 4) или эндоморфизм, определяемый формулой $Tx=\theta x-[\theta x]$ ( см. § 4 и главы 4), то можно показать, что если $f\in L_2$, $Ef=0$ и $f$ измерима относительно $\mathcal{L}$, то соотношения $f=Ug-g$, $g\in L_2$ и $f=0$ равносильны.

Для этого, как и выше, нужно перейти к двустороннему процессу, а затем установить, что выполнено (3), уточнив для этого рассуждения из замечания 5.1. При этом нужно воспользоваться тем, что любое измеримое множество можно аппроксимировать объединениями невырожденных квазиинтервалов различных рангов.

В заключение отметим, что утверждения, касающиеся

$\ln q_n$ и $F(a_n)$, впервые формулировал В.Дёблин [29]. Его доказательства, насколько известно автору, не опубликованы.

Как сообщил автору И.А.Ибрагимов, содержащееся в [10] доказательство соотношения (13) ошибочно. Результаты этой главы возникли из попытки исправить эту ошибку.

Соотношение (12) неявно использовано в [30]. О.Штаккельберг [43] доказал закон повторного логарифма для $F(a_n(x))$, предполагая выполненным (10).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А.О., Об одном общем свойстве систем счисления, ИАН СССР, сер.матем., 23(1959), 809-814.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Введение в теорию случайных процессов, Физматгиз, 1965.
3. Гордин М.И., О случайных процессах, порожденных теоретико-числовыми эндоморфизмами, Докл.АН СССР, 182, № 5 (1968), 1004-1006.
4. Гордин М.И., Давыдов Ю.А., Ибрагимов И.А., Солев В.Н., Стационарные процессы: предельные теоремы, условия регулярности. Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, сб.докладов, Новосибирск, 1969.
5. Гордин М.И., О центральной предельной теореме для стационарных процессов, Докл. АН СССР, 188, № 4 (1969), 739-741.
6. Давыдов Ю.А., О сходимости распределений, порождённых стационарными случайными процессами, Теор. вероятн. и её примен., 13, 4(1968), 730-737.
7. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ИЛ, 1962.
8. Добрушин Р.Л., Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теор. вероятн. и её примен., I, 1 № 1 (1956), 72-89; II, 1, № 4 (1956), 365-425.
9. Дуб Дж.Л., Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.

10. Ибрагимов И.А., Одна теорема из метрической теории цепных дробей, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 1(1960), 55-69.

11. Ибрагимов И.А., Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов, Теор.вероятн., и её примен. 7, № 4(1962), 361-392.

12. Ибрагимов И.А., Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин, Теор. вероятн. и её прим., 8, 1(1963), 83-89.

13. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В., Независимые и стационарно связанные величины, Физматгиз, 1965.

14. Кузьмин Р.О., К метрической теории непрерывных дробей, Уч.зап., ЛГУ, сер.мат., вып.15 (1948).

15. Леонов В.П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964.

16. Прохоров Ю.В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятн. и её примен., 1, 2(1956), 177-238.

17. Резник М.Х., Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов, Теория вероятн. и её примен., XIII, 4,(1968).

18. Розанов Ю.А., Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963.

19. Рохлин В.А., Точные эндоморфизмы пространства Лебега, Изв. АН СССР, сер.матем., 25(1961), 499-530.

20. Синай Я.Г., Центральная предельная теорема для геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, Докл. АН СССР, 133, № 6 (1960), 1303-1306.

21. Синай Я.Г., О предельных теоремах для стационарных процессов, Теор.вероятн. и её примен., 7, № 2(1962), 213-219.

22. Синай Я.Г., Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой, Докл. АН СССР, 147, № 4(1962), 797-800.

23. Халмош П.Р., Лекции по эргодической теории, М., ИЛ, 1959.

24. Хинчин А.Я., Цепные дроби, Физматгиз, М., 1961.

25. Чан Винг Хьен, Центральная предельная теорема для стационарных процессов, порожденных теоретико-числовыми эндоморфизмами, Вестн. Московск. университета, сер. I, № 5 (1963), 28-34.

26. Billingsley P. The Lindeberg –Lévy theorem for martingales, Proc. Amer. Math. Soc., I2(I961), 788-792.

27. Billingsley P., Convergence of probalibity mesures, J. Wiley, New York, 1968.

28. Burkholder D.L., Martingale transforms, Annals of Math. statist., v.37, № 6(I966).

29. Doeblin W., Remarques sur la theorie métrique des fractions continues, Comp. Math. 7 (I940),353-37I.

30. Kinney I.K., Pitcher T.S., On the distribution of lengths of fundamental intervals for $f$- expansions. Препринт.

3I. Lévy P., Sur les lois de probabilité dont dépendént les quotients complets et incomplets d'une fraction continue, Bull. Soc. Math., 57 (I929), I78-I94.

32. Perron O., Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Ketterbruchalgorithmus., Math. Annalen, 64(I907), I-76.

33. Renyi A., Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta math. Acad. sci hungar. 8(I957), 477-493.

34. Rosenblatt M., A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc, Nat. Acad. Sci, USA, 42, N I, (I956), 43-47.

35. Schweiger F., Geometrische und elementare metrische Sätze über den Jacobischen Algoruthmus, Sitzungsber. Akad. Wien, math.-naturwiss. Klasse, Abt. II, I73(I964), 59-92.

36. Schweiger F., Metrische Sätze über den Jacobischen Algorithmus, Monatsh. Math., 69(I965), 243-255.

37. Schweiger F., Ergodische theorie des Jacobischen Algorithmus, Acta Arithm., II(I966), 45I-460.

38. Schweiger F., Existenz eines invarianten Masses beim Jacobischen Algorithmus, Acta Arithm., I2(I967), 263-268.

39. Schweiger F., Mischungseigenschaften und entropie beim Jakobischen Algorithmus, J. Reine Angew. Math., 229(I968), 50-56.

40. Schweiger F., Induzierte Masse und Jacobischer Algorithmus, Acta Arithm., I3(I968), 4I9-422.

4I. Schweiger F., Ein Kuzminischer Satz über den Jakobischen Algorithmus, J. Reine Angew. Math., 232(I968), 35-40

42. Schweiger F., Metrische theorie einer klasse Zahlentheoretischer transformationen, Acta Arithm., I5(I968), I-I8.

43. Stackelberg O.P., On the low of the iterated logarithm for continued fractions, Duke Math. Journ., vol. 33, N 4(I966).

44. Waterman M.S., Some ergodic properties of multi-dimensional F - expansions, Michigan State Univ, I969. Препринт.