В. П. Хавин

Математика как источник определённости и неопределённости

Текст речи, произнесённой 4 июня 1993 года в университете Линчёпинга по поводу присвоения В. П. Хавину звания почётного доктора.

Дамы и господа!

Мне трудно полностью выразить свою благодарность за честь, которая была мне оказана приглашением выступить в этой аудитории. Так что я сразу перейду к предмету этой лекции, но перед тем как начать, я должен подчеркнуть, что её характер для меня необычен.

В отличие от лекций, обычно читаемых математиками, она не ставит своей задачей дать вам новые знания. Скорее, я выражу в ней некоторые чувства и определённое настроение. По техническим причинам я мог использовать при подготовке этой лекции лишь очень небольшое число источников. Этим объясняются избыточные отсылки к моему личному опыту и памяти, за которые я заранее приношу свои извинения.

«Определённость» кажется наиболее уместным словом для выражения того, что далёкие от математики люди думают о математике. Это мнение может быть подкреплено цитатами из знаменитых математиков, хотя в том, что математики думают и говорят о своей науке, никогда не было недостатка скептицизма. Однако нематематики никогда не сомневались, что математика — царство определённости. Это чувство прекрасно выражено в высказывании французского художника Жоржа Брака: «Искусство будоражит, наука возвращает уверенность» (если заменить слово «наука» на «математика»).

Это распространённое (и совершенно ошибочное) мнение определило мою судьбу. Именно благодаря ему я стал математиком.

В. П. Хавин с супругой В. А. Чеботарёвой в день торжественной церемонии в Линчёпингском университете

Решение было принято не мной, а моим отцом, филологом, которого я беспрекословно слушался в то время, хотя все мои математические успехи сводились к хорошим оценкам в школе. По своим естественным склонностям я бы, скорее, тоже стал филологом. Однако я закончил школу в 1950-м, в году, когда Сталин также заинтересовался филологией и написал книжку «Марксизм и вопросы языкознания». Этому событию, отпечатавшемуся в памяти всех людей моего поколения, предшествовали несколько политических кампаний, в ходе которых политики (иногда используя насилие) учили писателей, историков, музыкантов и литературных критиков, что хорошо, а что плохо.

Под впечатлением от этих событий мой отец запретил мне даже думать о гуманитарной стезе и *приказал* стать математиком. Теперь, 43 года спустя, я признателен ему за это рискованное решение. Однако он полностью заблуждался в том, что касается его главного аргумента, а именно поиска определённости.

Разумеется, политики едва ли могут предписывать математикам, какие теоремы им доказывать. И всё же, математика — наихудшее место для поиска уверенности и определённости. Напротив, она — царство неопределённости. Эта неопредёленность и её вредные и полезные стороны и являются предметом данной лекции.

Я начну с описания того, как приобретается и затем утрачивается успокаивающее чувство определённости, обычно приписываемое математике. Затем я перейду к обсуждению одного типа неопределённости, который я считаю полезным и который неизбежно порождается математическим мышлением.

Мои первые впечатления от математики полностью соответствовали мнению Брака.

Эта наука действительно давала уверенность. Я был очарован точностью и выразительными возможностями её языка. Математики — гораздо более тонкие, осторожные и, я бы сказал, нервные люди, чем кто бы то ни было, когда речь идет об употреблении слов. В отличие от других, они действительно обеспокоены *значением* слов, которые они говорят или пишут. Я был глубоко впечатлён способностью математического языка описать — исключительно точно и выразительно — огромное количество самых разнообразных концепций, от анализа до вероятности, от классической механики до квантовой, от экономики до лингвистики.

Убедительность математических доказательств казалась мне ошеломляющей и неколебимой, далеко превосходящей таковую в любой другой области, где существенную роль играет словесное убеждение, будь то физика, история или юриспруденция.

У этой особой определённости, предательски обволакивающей каждого молодого математика по мере того, как он постепенно открывает мир своей профессии, есть ещё одна составляющая. Это то, что каждый математик чувствует нутром независимо от того, признаёт он это или нет, и несмотря на вполне обоснованную критику со стороны логиков и философов. Это глубоко укоренившаяся внутренняя вера (или, скорее, ощущение), что существует особая математическая реальность, «твердая, как скала», согласно Харди, который восхвалял этот запредельный мир в своей книге «Апология математика», утверждая, что математическая реальность более реальна, чем физическая. Это вера, которая делает многих работающих математиков глухими к замечательным достижениям логики, предостерегающим от этого «наивного суеверия». Математик просто не может усомниться в существовании объектов, свойства которых он должен установить и которые оказывают ему вполне реальное сопротивление, лишающее его покоя и сна, сопротивление, которое он постоянно пытается преодолеть. Он воспринимает теоремы Гёделя и Коэна и критические замечания интуиционистов и конструктивистов со смешанным чувством уважения и смутной вины и полностью забывает их в своём ежедневном общении с упорно существующей математической реальностью.

Что касается меня, то я утратил определённость не из-за логики. Причина находилась на более низком, практическом и близком к земле уровне. Мои первые колебания могут быть выражены наивными детскими вопросами «Зачем?», «Какова цель математики?», «Что в ней хорошо и что плохо?», «Каковы критерии ценности?». Теперь я знаю, что на эти вопросы просто не существует ответов. Но тогда, в пятидесятые, я был сильно обеспокоен, когда стало ясно, что никто не может дать мне удовлетворительного ответа, который покончил бы с моими сомнениями. В конце концов, я вынужден был с этим смириться и просто продолжать жить и работать. Теперь я могу сказать, что математика, будучи прекрасной и чудесной наукой, в то же время подвержена и течениям моды, и культу власти. Её критерии ценности (по крайней мере те, что используются на практике) очень часто определяются рыночной конъюнктурой и во многом случайными, произвольными и иррациональными мнениями и вкусами. Я мог бы проиллюстрировать это печальное утверждение многими забавными примерами, к которым почти каждый математик мог бы добавить ряд своих. Упомяну вкратце лишь любопытную судьбу канторова множества, которое я выбрал как типичного представителя объектов, обычно именуемых «плохие множества» или «плохие функции». Для поколения моих учителей они символизировали прогресс. Я был воспитан в духе глубокого уважения к таким объектам и относящимся к ним идеям и методам. Но вскоре после окончания университета я убедился, что эти любимые объекты моих учителей практически вышли из употребления и стали признаком ретроградства. Стало модно говорить, что «плохих функций не существует». Само словосочетание «теория функций вещественной переменной» приобрело ругательный оттенок. В то время я часто слышал от своих коллег, что внимание, уделявшееся плохим множествам и функциям в 20-е и 30-е годы в России и Польше, было видом упадка и разложения, отвлекающего математику от её истинного предназначения, которое состоит в решении задач физического происхож-дения. Но что мы видим сегодня? Канторово множество опять в моде! Огромное количество людей просто помешаны на нём (и подобных ему объектах) и утверждают, что физика (да-да, именно физика!) без них просто погибнет. Печатаются и успешно продаются роскошные тома картинок. Канторово множество и его родственники получили новое имя: теперь они *фракталы,* и не *плохие,* а *прекрасные* (каждый слышал название «Красота фракталов»[*]). Разумеется, этот всплеск внимания связан с по-настоящему глубокими открытиями в теории динамических систем и новым пониманием хаоса. Гримасы тщеславия и моды, рыночные течения в математике сплетены с важным развитием мысли, лишь маскируя и искажая его. Это описание не противоречит хорошо известной метафоре, сравнивающей математику с оркестром, который, несмотря на то, что исполнители не

[*] Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер. Красота фракталов. Мир, 1993.

знают друг друга и разделены пространством и междисциплинарными барьерами, всё же играет в унисон божественную музыку, как если бы он управлялся невидимым Дирижером. Так оно и есть, но этот образ можно различить лишь издалека, и никто и никогда не видел нотных записей. Местонахождение Дирижера и его планы загадочны и никто, никакая группа, никакая организация не может притязать на его роль.

Однако в повседневной жизни математик часто оказывается в ситуации, когда он должен судить, принимать или отвергать. Те, чья обязанность принимать или отвергать статьи для печати или кандидатов на работу, заслуживают того, чтобы их пожалеть. Полное отсутствие формальных алгоритмических критериев выбора ставит их в крайне неприятное положение. Если ваш факультет получил 500 заявлений о приеме на работу, то нетрудно отсеять 450 из них разумным и обоснованным образом. Но что если у вас только два места и все остальные кандидаты — хорошие, серьёзные специалисты, но никто из них не Гаусс и не Гильберт? Тогда вы делаете умное лицо и заявляете, что некий класс пространств (любимая тема кандидата X) не так уж и интересен, или что теорема кандидата Y хороша, но её нельзя классифицировать как прорыв, в то время как теорема кандидата Z — несомненный прорыв, но число комплексных переменных равно единице, а это старомодно.

Я не критикую. Мне нечего предложить взамен. Я лишь описываю. В таких ситуациях невозможно избежать субъективных заключений, основанных на личных вкусах. Единственное, чего можно было бы избежать, — это претензия на то, что вы обладаете объективной истиной и исходите из сверхнаучных соображений.

Я вспоминаю лекцию П. С. Александрова, знаменитого тополога, которую он прочитал в Ленинграде в конце 60-х. Она называлась «Критерии значимости в математике». Александров проанализировал три критерия: приложимость, модность и сложность — лишь для того, чтобы отвергнуть их все. Взамен он предложил нечто очень неопределённое, что он назвал «чувством нового горизонта». Это весьма далеко от алгоритмического решения. Но всё же я предпочитаю такой подход ужасной практике, при которой суждение о работе выносится в соответствии с тем, в каком журнале она опубликована. Вот уж и впрямь весьма алгоритмический подход, к тому же освобождающий вас от необходимости читать математические тексты — занятия, требующего концентрации, времени и усилий.

Так обстоит дело с критериями ценности в математике и пониманием её целей и необходимости. Это — неопределённость в её чистейшей и крайне неприятной форме.

Но, чтобы закончить на оптимистической ноте, обратимся теперь к полезному виду неопределённости, внутренне присущему математике и противостоящему её (неопределённости) злокачественным формам.

Математику часто и заслуженно превозносят за её приложения к другим наукам. Невозможно отрицать это достоинство математики, само существование которой всегда определялось (и продолжает определяться) сложным взаимодействием внешних и внутренних двужущих сил. Но я хочу подчеркнуть не приложения, а способность математики создавать здравые и разумные *сомнения* и *неопределённость* — вещи, которые редки, но абсолютно необходимы в наши дни. В этой связи мы вновь могли бы вспомнить выдающиеся достижения логиков, но я предпочту сосредоточиться на гораздо более элементарных, почти школьных вещах.

Любой математик, в отличие (к сожалению) от большинства других людей, знает, что не всё, что имеет название, существует в действительности. Более того, это знание впиталось в его плоть и кровь. Математики *профессионально* озабочены вопросами существования. И это касается не только существования *объектов* (решений, функций или множеств с заданными свойствами), но и существования методов решения, когда искомый алгоритм должен удовлетворять определенным требованиям.

Нормальные люди, не прошедшие тренировку в этой школе профессионального сомнения, встретив любую задачу, редко подозревают, что она может быть неразрешима. Они просто начинают её решать. Это нормально. И это ужасно. Рассмотрим следующий ряд эквивалентных проектов: давайте разделим угол на три равные части с помощью циркуля и линейки; давайте построим вечный двигатель, или же «социализм»; давайте покончим с инфляцией и безработицей.

Математика содержит в себе мощный отрезвляющий заряд, предписывающий исключительную осторожность, с которой следует относиться к таким воззваниям. Создавая и распространяя разумные сомнения и неопределённость, математика способна охладить и умерить многие виды опасного и заразного энтузиазма.

В 60-е стало модно насмехаться над школьными задачами на построение циркулем и линейкой («Почему циркуль и линейка, а не что-то еще?»). Главными насмешниками, кажется, были те же люди, что создавали кошмарные школьные учебники геометрии, где аксиомы векторного пространства предшествовали понятиям треугольника и круга. Есть несколько убедительных аргументов в защиту задач на построение циркулем и линейкой, но я подчеркну лишь один из них: так уж вышло, что именно эти древние задачи послужили материалом для множества открытий, внесших огромный вклад в культуру, одно из которых должно быть внедрено в массовое сознание и стать притчей во языцех: НЕ ВСЯКУЮ ЗАДАЧУ МОЖНО РЕШИТЬ. Это основная причина для включения таких задач в школьную программу. Они могут быть объяснены любому школьнику и любой школьнице и оказывают благотворное педагогическое влияние.

Познакомившись с процедурой деления угла на две равные части, совершенно естественно задуматься о делении на три. Почему бы и нет? Эти задачи так похожи! Неразрешимость последней глубоко неочевидна. И всё же, она неразрешима, и это можно строго *доказать*. Математика изобилует результатами такого сорта, когда что-то представляется вполне достижимым, но в конце концов оказывается невозможным. Однако, отрицая возможность найти или сделать что-нибудь, математика часто предоставляет утешение в виде *приближённых* решений и алгоритмов *оптимизации*, предлагая идеологию *компромисса*.

Человек, воспитанный в этом духе, едва ли присоединится к толпе, вопящей, как сумасшедшая, «Свобода, равенство, братство» лишь для того, чтобы начать массовые убийства сразу после. Несложное рассуждение приведёт его к заключению, что составляющие этой триады просто несовместимы друг с другом и лучше поискать что-нибудь приблизительное, но осуществимое.

Веками общим стремлением человечества было уловить и зафиксировать всё в наборе *понятий*, создать всеохватывающую и всеобъясняющую систему мышления. Разве неясно сегодня, что это возможно только для относительно банальных вещей? Действительная сложность мира может быть описана только *приблизительно,* и это описание не обойдётся одними *понятиями*, ему необходимы *образы*.

Математика является источником огромного числа образов, не менее выразительных, чем образы поэзии. Проникнув в ваше сердце, они могут повлиять на ваше восприятие мира.

Мне хочется упомянуть в связи с этим два высказывания, одно принадлежит знаменитому социологу, а другое — юмористу. «Многие из величайших достижений человечества являются не результатом сознательно направляемого мышления, и тем более не продуктом согласованных усилий многих индивидуумов, а результатом процесса, в котором каждый играет роль не вполне понятную даже ему самому»[*]. Вторая цитата гораздо короче: «Ни одна снежинка в лавине не чувствует ответственности за происходящее»[*]. Но, на мой взгляд, тщетность и безнадежность индивидуальных усилий вряд ли можно выразить с большей силой, чем это делает следующая «теорема неопределённости»: значение интеграла Лебега не зависит от значений интегрируемой функции на любом наперёд заданном множестве нулевой меры.

Эта теорема является откровенным и неприкрытым

* Фон Хайек

** Ежи Лец

выражением бессмысленности таких понятий, как *причина*, *вина* и *ответственность,* в применении к результатам достаточно массового, интегрального характера. Между тем, каждого русского путешественника без конца спрашивают: «Что Вы думаете о Горбачёве или Ельцине?», как будто эти конкретные люди (или кто-нибудь ещё) могли вызвать огромные, космических масштабов изменения, происходящие в России, или управлять ими. Возвращаясь к «проклятым вопросам» математики («Зачем?», «Что хорошо, а что плохо?»), мы можем вновь сослаться на приведённую выше теорему как на поучительный образ. Результаты работы математического сообщества в любой момент времени до Второй мировой войны ещё можно было представить как СУММУ индивидуальных усилий. К концу 60-х число слагаемых стало практически бесконечным (хотя, вероятно, всё же счетным). Однако к настоящему моменту сумма заведомо превратилась в интеграл. Я думаю, что это лебеговский интеграл индивидуальных усилий, и, хотя можно привести доводы в пользу наличия в соответствующей мере бесконечного числа точечных нагрузок, я бы скорее предположил *непрерывную* сингулярную составляющую без различимых отдельных точек. Во всяком случае, давайте согласимся, что такой образ имеет право на существование.

Одно это уже может снизить накал страстей и ослабить запретительные тенденции. Никто не может и не обязан чувствовать или брать на себя ответственность за математику как целое. Её смысл, её послание так же непостижимы, как жизнь. Она — интеграл, а пристрастия, навеянные модой, — суета сует.

Яркие образы, несущие мощный выразительный заряд, связаны также с аналитическими функциями и их антиподами — так называемыми «плохими функциями». Создатели Анализа обладали глубоким внутренним убеждением, что все функции — аналитические (ещё даже до того, как возник сам этот термин). Это убеждение было поколеблено в результате «спора о струне» в конце XVIII столетия. Однако, хотя и в более слабой форме, этот образ мысли продолжал держаться и в XIX веке. «Природа нуждается лишь в аналитических функциях» — таким было здоровое, основополагающее мнение людей, верящих в Бога, предопределённость и предсказуемость Бытия. Свойство, драматически отличающее аналитическую функцию от «плохой», — это *единственность*.

Всё прошлое и всё будущее процесса, описываемого аналитической функцией, полностью определяется его ходом на протяжении одной секунды или даже одной миллионной доли секунды. Этот математический образ способен порождать смешанные эмоции. Аналитическая функция может служить символом высшего совершенства, как любимая мелодия или поэтическая строка. Начав с первых нот или слов, уже невозможно где-то отклониться от классического образца. Но в то же время аналитичность — это и суровый приговор, неумолимое наказание, которое невозможно оспорить. Если аналитическая кривая $y=f(t)$ совпадает с параболой $y=t^2$ на интервале (0,1), то эти две кривые обречены совпадать везде, и нет никакой возможности выбора. Есть нечто очень знаменательное в нежелании классиков старой школы принять возможность представления «произвольной» функции в виде суммы тригонометрического ряда и рассматривать такое представление как «формулу». Ведь все функции, задаваемые формулами, должны быть аналитическими и не могут меняться произвольным образом!

Упомянутые выше колебания моды относительно «плохих» и «хороших» функций в некотором смысле воспроизводят старый «спор о струне». Несмотря на свою расплывчатость, изобилие понятий, не определённых должным образом, абсурдные утверждения и личные предубеждения, этот спор отражает нечто весьма важное. Люди делятся на две категории. Первые верят (или чувствуют), что мир описывается аналитическими функциями. Для вторых всё на свете выражается функциями, измеримыми по Лебегу. В любой момент поведение последних абсолютно непредсказуемо и, следовательно, может быть (в принципе) изменено любым желаемым образом. Так что вторая точка зрения влечёт *уверенность:* эти люди чувствуют себя хозяевами мира. Разумеется, никакая дискуссия здесь немыслима. Мы имеем дело не с ясными утверждениями, которые можно доказать или опровергнуть, а с двумя противоположными психологическими подходами к реальности, двумя несовместимыми взглядами на мир.

Я осмелюсь выразить свою глубоко личную, непроверяемую и недоказуемую убеждённость в аналитичности мира. Хаотическое поведение есть результат взаимодействия бесчисленного множества аналитических процессов. Это иррациональное чувство обусловлено и некоторыми строго доказанными математическими утверждениями. Как бы дико ни выглядела функция от временной переменной, она всё равно является суммой ряда из многочленов или разностью граничных значений двух аналитических функций.

Я привёл эти элементарные примеры, чтобы показать, как столь знакомые каждому математику понятия могут приучить к благородной привычке сомневаться и укрепить чувство полезной неопределённости.

Эта хвалебная песнь неопределённости и сомнению, которую я теперь заканчиваю, в наши дни не является чем-то необычным. Настроение, которое я пытался выразить, распространяется всё больше и больше, подтачивая определённость и самоуверенность обуянных гордыней вождей, затрудняя политикам возможность управлять массами с помощью дешёвых лозунгов, лишённых какого бы то ни было реального содержания.

Уже послав название этой лекции профессору Хедбергу, я купил в Монреальском аэропорту выпуск газеты «Le Monde» за 21 апреля со статьёй Эдгара Морена, французского социалиста, озаглавленной «Упадок социалистической мысли», и был поражён следующими строчками (никогда бы не подумал, что смогу найти что-нибудь полезное для этой лекции в газете!): «По мнению Маркса, наука — это *источник определённости*. Но сегодня мы знаем, что науки дают только *локальную определённость* и что теории научны лишь постольку, поскольку они допускают опровержения, то есть не являются *определёнными*. А в том, что касается фундаментальных вопросов, научное познание проваливается в бездну *неопределённостей*. По Марксу, научная *определённость* не оставляла места философским вопросам к теории. Сегодня мы видим, что научный прогресс только возвращает основные философские вопросы к жизни».

Взгляды, которые я выразил в этой лекции, становятся всё более и более общим местом, как видно уже из того, что они часто появляются даже в средствах массовой информации. Чем более очевидными и общепринятыми они станут, тем больше надежды на то, что мир в конце концов станет лучше и отношения между людьми — человечнее. И я надеюсь, что опыт, накопленный в математике, наряду с опытом повседневной практики, истории, философии, естественных наук, религии и искусства, сыграет свою роль в том, чтобы восприятие мира с позиций полезной неопределённости стало действительно общепринятым.

Перевод с английского Ф. Л. Назарова