МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СЛАБОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПОДСТАНОВОК И СТАЦИОНАРНЫХ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. Н. Лившиц

Целью работы является доказательство достаточного условия слабого перемешивания для широкого класса стационарных адических автоморфизмов, введенных в [1] и [2], и подстановочных автоморфизмов, метод основан на результатах [3].
Все пространства последовательностей снабжены слабой топологией.

Следуя [4, 6, 8], определим подстановочный автоморфизм.

1. Исходным объектом является совокупность слов $\mathcal{A} = \{A_i\}_1^n$ в алфавите $Z = \{1, \ldots, n\}$. По $\mathcal{A}$ строится матрица [4 — 6] $G_{\mathcal{A}} = (g_{ij})_{i, j=1}^n$, где $g_{ij} \geqslant 0$ — число вхождений символа j в слово A_i. В дальнейшем предполагается примитивность $G_{\mathcal{A}}$ (т. е. положительность некоторой степени) [7, с. 378].

Определим преобразование $\omega_{\mathcal{A}}$ множества всех конечных слов: $\omega_{\mathcal{A}}: \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Z^k \to \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Z^k$: $\omega_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_l) = A_{a_1}A_{a_2} \ldots A_{a_l}$,

где в правой части стоит соединение слов. Подстановкой называется *сужение* $\omega_{\mathcal{A}}|_Z$.

Назовем *порождающей четверкой* такую четверку натуральных чисел (i, j, m, n'), $i \leqslant n'$, $j + 1 \leqslant |A_i|$, что существуют символы a, b, c, $d \in Z$, такие, что: 1) c и d являются, соответственно, j и $j+1$ символами слова

A_i; 2) слово $\omega^m_{\mathscr{A}}c$ кончается на a и слово $\omega^m_{\mathscr{A}}d$ начинается на b; 3) $\omega^{n'}_{\mathscr{A}}(a)$ кончается на a и $\omega^{n'}_{\mathscr{A}}(b)$ начинается на b.

Порождающие четверки всегда существуют. Выберем какую-либо из них, и, пользуясь соответствующими ей a и b, определим *последовательность соединений слов*: $\{a\}\{b\}$; $\omega^{n'}_{\mathscr{A}}(\{a\})$ $\omega^{n'}_{\mathscr{A}}(\{b\})$; $\omega^{2n'}_{\mathscr{A}}(\{a\})\,\omega^{2n'}_{\mathscr{A}}(\{b\})$ и т. д. В каждом из соединений $\omega^{kn'}_{\mathscr{A}}(\{a\})\,\omega^{kn'}_{\mathscr{A}}(\{b\})$ пронумеруем символы таким образом, чтобы последний символ $\omega^{kn'}_{\mathscr{A}}(\{a\})$ имел номер 0. По определению a и b последовательность этих соединений — возрастающая в обе стороны последовательность слов, а ее объединение — бесконечная в обе стороны последовательность символов из Z. Обозначим ее через $x(i, j, m, n')$. Рассмотрим слабое замыкание (в пространстве всех бесконечных в обе стороны последовательностей) траектории $x(i, j, m, n')$ относительно двустороннего сдвига. Обозначим его через $X_{\mathscr{A}}$. *Автоморфизмом подстановки* будем называть сдвиг $T\colon X_{\mathscr{A}} \to X_{\mathscr{A}}$. При условии примитивности $G_{\mathscr{A}}$ $X_{\mathscr{A}}$ не зависит от выбора порождающей четверки. Известно, что T — строго эргодичен [5].

Определенный в [1, 2] стационарный автоморфизм или адическое преобразование, о котором речь идет ниже,— это тоже символическая динамическая система, однако с иным действием. Пусть снова $Z = \{1, \ldots, n\}$ — алфавит, $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ — матрица переходов. Будет считать, что все π_{ij} равны 0 или 1 и что Π примитивна. Адический автоморфизм действует в марковском компакте — пространстве Ω_Π бесконечных в одну сторону путей $x_0, x_1, \ldots, x_i \in Z$ $(i = 0, 1, \ldots)$ таких, что $\pi_{x_i x_{i+1}} = 1$. Действие описывается в [1] и [2].

2. По матрице Π адического преобразования строится совокупность слов, аналогичная совокупности слов, определяющей подстановку: $\mathscr{A}_\Pi = \{A_i\}_1^n$, где A_i' — слово, символы которого есть номера всех ненулевых символов i-го столбца матрицы Π, перечисляемые в порядке возрастания [3].

Подстановка, построенная по $\mathscr{A}_\Pi$, как и в п. 1, в широком классе случаев метрически изоморфна самому адическому преобразованию.

Для подстановки ниже будут описаны конструкции, ставящие ей в соответствие метрически изоморфные ей адические или обобщенные адические преобразования.

Зафиксировав подстановку (т. е. Z и $\mathcal{A}$), назовем *допустимой* всякую последовательность, принадлежащую пространству $X_{\mathcal{A}}$ (см. выше); $X_{\mathcal{A}} \ni x = \{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Будем говорить, что подстановка удовлетворяет условию ОДД — однозначной допустимой декодируемости, если всякая допустимая последовательность из $X_{\mathcal{A}}$ единственным образом представляется в виде объединения $\ldots A_{i_k} A_{i_{k+1}} \ldots$ такого, что $b_0 \in A_{i_0}$ и $\ldots i_k i_{k+1} \ldots$ тоже допустима. Последовательность $\ldots i_k i_{k+1} \ldots$ тоже имеет только одно допустимое декодирование по приведенному определению и т. д.

Вполне вероятно, что всякая нециклическая [6] подстановка такова (см. также [9, 10. 12]. Условие ОДД будет предполагаться выполненным.

По набору слов $\mathcal{A}$ строятся две динамические системы типа адического преобразования. Для каждого слова $A_i \in \mathcal{A}$ и любого входящего в него символа j пронумеруем все вхождения символа в том порядке, в каком они встречаются в слове $j^{(1)}, j^{(2)}, \ldots, j^{(k)}$. Символ с номером назовем *отмеченным* символом. Через $\Omega^1_{\mathcal{A}}$ обозначим пространство бесконечных в одну сторону последовательностей отмеченных символов (путей) вида $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots, y_s \in Z$ таких, что при каждом $s > 0$ отмеченный символ $y_{s-1}^{(i_{s-1})}$ соответствует i_{s-1}-му вхождению символа y_{s-1} в слово A_{y_s}.

Преобразование $T^1_{\mathcal{A}} : \Omega^1_{\mathcal{A}} \to \Omega^1_{\mathcal{A}}$ определяем следующим образом. Если $A_{y_1} = a_1, \ldots, a_r$ и символ, отвечающий $y_0^{(i_0)}$, имеет в слове A_{y_1} номер $s < r$, то $T^1_{\mathcal{A}}(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots) = a^j_{s+1}, y_1^{(i_1)}, y_2^{(i_2)}, \ldots$, где для символа a_{s+1} тоже отмечен номер его вхождения j. Если $s = r$, то пусть l — наименьший номер > 0 такой, что символ, отвечающий $y_l^{(i_l)}$, не является последним в слове $A_{y_{l+1}} = b_1, \ldots, b_{r'}$, а имеет в нем номер $s' < r'$ (для всех точек, кроме конечного множества $l < \infty$). Тогда

$$T^1_{\mathcal{A}}(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots) = z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_l^{(j)}, y_{l+1}^{(j_{l+1})}, y_{l+2}^{(j_{l+2})},$$

где $z_l = b_{s'+1}$ (j — тоже номер вхождения), каждый из z_i^1, $i < l$, является первым в слове $A_{z_{i+1}}$ ($A_{z_{i+1}}$ не зависит от номера вхождения z_{i+1} в следующее слово). С его помощью в пространстве путей можно определить частичное упорядочение, аналогичное лексикографическому в марковском компакте. Путь $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если существует $m > 0$ такое, что $\Gamma_1 = T_{\mathscr{A}}^{1m}\Gamma_2$. Ясно, что сравнимы таким же образом и конечные пути, имеющие одинаковую длину и одинаковый конец.

Пусть снова $\mathscr{A}$ определяет подстановку, и опишем два множества: $X'_{\mathscr{A}} \subset X_{\mathscr{A}}$ и $\Omega^{1'}_{\mathscr{A}} \subset \Omega^1_{\mathscr{A}}$, каждое из которых является дополнением счетного инвариантного множества, а также взаимнооднозначное соответствие между ними: $\varphi: X'_{\mathscr{A}} \to \Omega^{1'}_{\mathscr{A}}$; $T^1_{\mathscr{A}} \circ \varphi = \varphi \circ T$.

Пусть $U_{\mathscr{A}} \subset X_{\mathscr{A}}$ — множество всех $x(i, j, m, n')$, где (i, j, m, n') — порождающая четверка (см. определение подстановки). $U_{\mathscr{A}}$ конечно, хотя множество порождающих четверок счетно. $X'_{\mathscr{A}}$ определим как $X_{\mathscr{A}} - \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i(U_{\mathscr{A}})$, $\Omega''_{\mathscr{A}}$ — как множество таких путей $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots, y_k^{(i_k)}, \ldots$, где для бесконечного множества номеров k символ $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ — не первый в слове A_{y_k} и для бесконечного множества номеров k символ $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ — не последний в слове A_{y_k}.

Если $x \in X'_{\mathscr{A}}$, $x = \ldots b_{-k}, \ldots, b_0, \ldots, b_k, \ldots$, то, как легко видеть, существует единственная (отвечающая последовательным допустимым декодированиям) последовательность элементов Z : $y_0, y_1, y_2, \ldots$, где $b_0 = y_0$, y_0 — символ слова $\omega_{\mathscr{A}}(y_1) = A_{y_1}$, y_k — символ слова $\omega_{\mathscr{A}}(y_{k+1}) = A_{y_{k+1}}$ и т. д., для бесконечного множества номеров k y_k — не первый символ $A_{y_{k+1}}$ и для бесконечного множества номеров k — не последний (в противном случае $x \in \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^i U_{\mathscr{A}}$). В качестве $\varphi(x)$ берем путь $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \ldots$ с фиксацией номеров вхождений символов y_k в слова $\omega(y_{k+1})$. Очевидно, что φ биективно и измеримо по любой вероятностной борелевской инвариантной мере. Из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение:

$T^1_{\mathscr{A}}$ имеет единственную борелевскую инвариантную вероятностную меру, и φ является метрическим изоморфизмом между T и $T^1_{\mathscr{A}}$.

Тем самым мы дали определение одноэргодичности для не всюду определенного отображения $T^1_{\mathscr{A}}$ (естественно обобщаемое для произвольных адических отображений). Специфично и определение минимальности — должна требоваться всюду плотность всех элементов разбиения на траектории, что в нашем случае имеет место.

Заметим, что для адического преобразования с матрицей П имеет место равенство $(\Omega_{\Pi}, T) = (\Omega^1_{\mathcal{A}_{\Pi}}, T^1_{\mathcal{A}_{\Pi}})$, которое можно считать попросту определением адического преобразования. Если подстановка с набором слов $\mathcal{A}_{\Pi}$ удовлетворяет требованию ОДД, то она метрически изоморфна (Ω_{Π}, T).

Определим теперь динамическую систему $T^2_{\mathcal{A}}\colon \Omega^2_{\mathcal{A}} \to \Omega^2_{\mathcal{A}}$, точнее, класс эквивалентных определяющих ее адических преобразований.

Пусть $N = \sum_1^n |A_i|$. Приведем элементы алфавита $Z' = \{1, \ldots, N\}$ во взаимно однозначное соответствие с множеством пар натуральных чисел вида (f, g), где $1 \leqslant f \leqslant n$, $1 \leqslant g \leqslant |A_f|$: $l \to \{f_l, g_l\}$, $1 \leqslant l \leqslant N$. К соответствию будем предъявлять единственное требование: для каждого $q : 1 \leqslant q \leqslant n$ на множестве $\{(q, s); 1 \leqslant s \leqslant |A_q|\}$ соответствие должно быть строго монотонным по s. Определим матрицу

$$\Pi = \{\pi_{ij}\}_{i,j=1}^N = \begin{cases} \pi_{ij} = 1, & \text{если в слове } A_{f_j} \text{ символом с номером } g_i \text{ является } f_i, \\ \pi_{ij} = 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве $\Omega^2_{\mathcal{A}}$ примем марковский компакт Ω_{Π}.

Динамическая система $T^2_{\mathcal{A}} : \Omega^2_{\mathcal{A}} \to \Omega^2_{\mathcal{A}}$ определяется как адическое преобразование марковского компакта Ω_{Π}. Это определение корректно, потому что с точностью до тривиального изоморфизма, являющегося гомеоморфизмом, наша динамическая система не зависит от выбора соответствия, определяющего П. Впрочем, можно считать, что мы имеем дело не с классом изоморфных динамических систем, а с адическим преобразованием, если в определении адического преобразования требовать упорядоченности не всего пространства состояний Z', а каждого из подмножеств вида $Y_q \subset Z'$: $y_q = \{s \in Z' \mid \pi_{sq} = 1\}$, $1 \leqslant q \leqslant N$. Ясно также, что все эти преобразования эквивалентны $T^1_{\mathcal{A}}\colon \Omega^1_{\mathcal{A}} \to \Omega^1_{\mathcal{A}}$.

Пусть T — подстановочный автоморфизм, построенный по подстановке, определяемой набором слов $\mathcal{A}$, или адический автоморфизм, определяемый матрицей П. Обозначим через $f_T(t)=t^n-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i t^i$ характеристический полином матрицы $G_{\mathscr{A}}$ (соответственно матрицы П). Дальнейшие рассуждения будут проводиться для случая (более общего) преобразования $T^1_{\mathscr{A}}\colon \Omega^1_{\mathscr{A}}\to\Omega^1_{\mathscr{A}}$, являющегося при выполнении ОДД обобщенным адическим представлением подстановочного преобразования.

Сформулируем очевидное утверждение. Пусть $P_1 = y_0^{(i_0)},\ldots,y_l$ и $P_2=z_0^{(j_0)},\ldots,z_l$ — два пути длины l, причем

$$y_0=z_0,\quad y_l=z_l,\quad P_1<P_2. \tag{1}$$

Определим последовательность натуральных чисел $N_m(P_1, P_2)$ следующим образом: для любой принадлежащей $\Omega^1_{\mathscr{A}}$ последовательности (пути) $x_0^{(s_0)},\ldots,x_m^{(s_m)}$, $y_0^{(i_0)},\ldots,y_0^{(i_0)},\ldots,y_l^{(i_l)},\ x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})},\ldots$ имеет место

$$T^{N_m(P_1,P_2)}(x_0^{(s_0)},\ldots,x_m^{(s_m)},y_0^{(i_0)},\ldots,y_l^{(i_l)},x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})},\ldots)=$$
$$=x_0^{(s_0)},\ldots,x_m^{(s_m)},z_0^{(j_0)},\ldots,z_l^{(j_l)},x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})},\ldots$$

Ясно, что от выбора x_i число $N_m(P_1, P_2)$ не зависит. Наше утверждение состоит в том, что $N_m(P_1, P_2)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N_{m+n}(P_1,P_2)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i N_{m+i}(P_1,P_2).$$

Сформулируем основную теорему работы.

ТЕОРЕМА. *Пусть для подстановочного автоморфизма T с условием ОДД (для стационарного адического или обобщенного адического преобразования) все корни характеристического полинома $f_T(t)$ лежат вне круга $B=\{z \mid |z|<1\}$ и существуют два пути P_1, P_2 одинаковой длины с условием* (1) *такие, что ни для какого номера m_0 при $m>m_0$ все $N_m(P_1, P_2)$ в совокупности не имеют общего делителя, большего единицы. Тогда соответствующий автоморфизм обладает слабым перемешиванием.*

Доказательство теоремы. Теорема вытекает из приводимых ниже предложения и леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если последовательность целых чисел N_m удовлетворяет рекуррентному соотношению $N_{m+n}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i N_{m+i}$, где α_i — рациональные коэффициенты полинома $t^i-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i t^i$ с корнями по модулю $\geqslant 1$, и не существует такого номера m_0, начиная с которого все*

N_m в совокупности имеют общий делитель >1, то не существует и такого нецелого λ, что

$$e^{2\pi i N_m \lambda} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1.$$

При доказательстве случай с рациональным λ рассматривается с помощью условия отсутствия общего делителя N_m, случай с иррациональным — по аналогии с [11, с. 166].

А именно, $N_m\lambda$ — последовательность, удовлетворяющая тому же рекуррентному соотношению; начиная с некоторого места, ему же удовлетворяет последовательность $\beta_m \to 0$, где $\beta_m = -R_m + N_m\lambda$ (R_m — ближайшее целое к $N_m\lambda$), что противоречит предположению о корнях полинома.

ЛЕММА. *Если строго эргодическая подстановка (стационарный адический автоморфизм) с условием ОДД имеет собственное значение* $e^{2\pi i\lambda}$ *и* P_1, P_2 *— два пути одинаковой длины, удовлетворяющие* (1), *то*

$$e^{2\pi i N_m(P_1, P_2)\lambda} \to 1, \quad m\to\infty.$$

Доказательство леммы. Из совместимости инвариантной меры с топологической структурой $\Omega^1_{\mathscr{A}}$ вытекает утверждение — аналог теоремы о «точках плотности» теории функций вещественной переменной.

Пусть $C \subset \Omega^1_{\mathscr{A}}$ — измеримое множество $\mu(C) > 0$. Тогда для почти всякой точки x существует последовательность цилиндрических множеств $V_1^x > \ldots > V_j^x > \ldots \ni x$, отвечающих путям, начинающимся в момент 1, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C \cap V_n^x)/\mu V_n^x = 1.$$

Из этого утверждения следует, что если U — собственная функция автоморфизма T с собственным значением $e^{2\pi i\lambda}$, то для произвольных положительных последовательностей $\varepsilon_k \to 0$, $\delta_k \to 0$ можно выбрать последовательность множеств A_k, $\mu(A_k) > 0$, и цилиндров B_k таких, что колебание функции U на $A_k \leqslant \varepsilon_k$ и

$$\mu(\tilde{B}_k \cap A_k)/\mu A_k > 1 - \delta_k.$$

Из примитивности $G_{\mathscr{A}}$ и свойств меры μ следует существование таких констант $D > 0$ и $M > 0$, что если Y_{m,P_i} — множество таких x, для которых координаты с $m+2$

по $m+l+2$ образуют путь P_i $(i=1, 2)$, то для любых n_1, n_2 с $n_2-n_1>M$ и любого пути B длины n_1 $\mu\,(Y_{n_2, P_i}\cap \tilde{B})\geqslant D\mu\tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — цилиндрическое множество, соответствующее B.

Отсюда и из определения $N_m(P_1, P_2)$ следует, что если для цилиндра B_k длина пути, его порождающего, суть N_k и $D>2\delta_k$, то при $m>N_k+M$ $|\,e^{2\pi i N_m(P_1, P_2)\lambda}-1\,|\leqslant\varepsilon_k$.

Лемма и тем самым теорема доказаны.

В качестве примера может быть рассмотрена подстановка $0\to 001$ $1\to 10110$ из работы [4], где несколько иной метод эквивалентной подстановки не дал возможности установить слабое перемешивание. Теорема настоящей работы применима для этого и наряду с методом [4] для других примеров [4]. Достаточно взять пути $P_1=0^10$ и $P_2=0^20$. В этом случае [4]

$$N_m(P_1, P_2)=\frac{1}{3}(2\cdot 4^n+1)\ (\text{корни } f_T(t) \text{ суть } 1 \text{ и } 4).$$

Результаты о дискретном спектре подстановок (полученные несколько иным методом), из которых вытекает аналогичная теорема о слабом перемешивании, содержатся в работе [12], вышедшей, когда статья была сдана в печать. Методом, описанным в статье, может быть доказано и утверждение из [12] (полученное независимо автором) о том, что всякая измеримая собственная функция почти всюду совпадает с непрерывной функцией. Непрерывная собственная функция строится также путем продолжения с всюду плотной траектории с учетом аргумента о том, что сходимость в вышедоказанной лемме экспоненциальна, и очевидного для примитивной матрицы существования натурального M такого, что для любых двух бесконечных путей вида

$$x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{n'}^{(i_{n'})}, y_1^{(k_1)}, y_2^{(k_2)}, \ldots,$$

$$x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{n'}^{(i_{n'})}, z_1^{(l_1)}, z_2^{(l_2)}, \ldots$$

существуют две последовательности натуральных чисел N_k, L_k, $N_{k-1}<L_k<N_k<L_{k+1}$, $|N_{k+1}-N_k|$, $|L_{k+1}-L_k|<$

$< M$, и путь

$$x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{n'}^{(i_{n'})}, t_1^{(r_1)}, t_2^{(r_2)}, \ldots \in \Omega^1_{\mathscr{A}},$$
$$t_{N_k} = y_{N_k}, t_{L_k} = z_{L_k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ленинградское научно-производственное объединение медицинской лабораторной техники

Поступило 28.04.86
Переработанный вариант 11.04.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вершик А. М.' Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 3. С. 526—529.

[2] Вершик А. М. Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 72—82.

[3] Лившиц А. Н. О спектрах адических преобразований марковских компактов // УМН. 1987. Т. 42, вып. 3. С. 189—190.

[4] Dekking F. M., Keane M. Mixing properties of substitutions // ZFW, 1978. V. 42. P. 23—33.

[5] Michel P. Coincidence values and spectra of substitutions // ZFW. 1978. V. 42. P. 205—207.

[6] Kamae T. A topological invariant of substitution minimal sets // Journ. Math. Soc. of Japan. 1972. V. 24, № 2. P. 285—305.

[7] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

[8] Gottshalk W. H. Substitutions minimal sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. P. 467—491.

[9] Martin J. C. Substitution minimal flows // Amer. Journ. of Math. 1971. V. 93, № 2. P. 503—526.

[10] Martin J. C. Minimal flows arising from substitutions of non-constant length // Math. Syst. Theor. March. 1973. V. 7, № 1. P. 73—82.

[11] Касселс Дж. В. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.

[12] Host B. Valeurs propres des sustemes dynamiques difinies par des substitutions de longeur variable // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1986. V. 6. P. 529—540.