ЛЕНИНГРАДСКАЯ ВОЕННАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ КРАСНОЗНАМЁННАЯ
АКАДЕМИЯ имени А.Ф.МОЖАЙСКОГО

Лозановский Г.Я.

БАНАХОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(002 – функциональный анализ и теория функций)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Ленинград – 1972

СОДЕРЖАНИЕ

В в е д е н и е

Теория линейных полуупорядоченных пространств, иначе – теория линейных структур, является одним из основных разделов функционального анализа. Эта теория была построена в работах Л.В.Канторовича (см.Канторович[1]-[7]), относящихся к 1935-1937 гг. В этих работах дана аксиоматика линейных структур, изучены наиболее важные виды таких пространств, построена теория разного рода линейных операторов, действующих из одной линейной структуры в другую, и даны многочисленные приложения к ряду вопросов теории функций и функциональных уравнений. В дальнейшем теория Л.В.Канторовича получила плодотворное развитие в работах ленинградской школы полуупорядоченных пространств (Б.З.Вулих, А.Г.Пинскер, А.И.Юдин, Г.П.Акилов и их ученики; сюда же примыкают работы воронежского математика В.И.Соболева).

К теории линейных структур тесно примыкают исследования М.Г.Крейна о нормированных пространствах с выделенным в них конусом положительных элементов, начатые во второй половине тридцатых годов и продолженные в воронежской школе (М.А.Красносельский и его ученики)[x]. Отметим также исследования по теории топологических полуполей, интенсивно проводившиеся, начиная с конца пятидесятых годов (М.Я.Антоновский, В.Г.Болтянский, Т.А.Сарымсаков и их ученики).

Из иностранных учёных большую роль в развитии теории линейных структур сыграли, главным образом, японские (Х.Накано,

---

[x] По поводу связей между теориями Л.В.Канторовича и М.Г.Крейна см.(Вулих [6],[7]).

Т.Огасавара, И.Амемия, Т.Андо, К.Иосида, С.Какутани), а также американские (М.Стоун, Г.Биркгоф и др.). Значительное влияние на развитие теории оказали также работы голландского математика Г.Фрейденталя и венгерского математика Ф.Рисса.

Основными монографиями по теории линейных структур являются: (Канторович, Вулих, Пинскер [I]), (Вулих [6]), (Накано [I], [2], [3]). Некоторое отражение эта теория нашла в монографиях (Красносельский [I]), (Дэй [I]), (Данфорд, Шварц [I]), (Биркгоф [I]), (Бурбаки [I], [2]). Упомянем также монографии (Намиока [I]) и (Перессини [I]). Серия статей (Люксембург [I]) и (Люксембург, Заанен [I]), носящих в основном обзорный характер, содержит и известное число новых фактов, но в значительной степени искажает историю вопроса вследствие слабого знакомства авторов с работами советских математиков.

Мы будем в основном пользоваться терминологией монографии (Вулих [6]), которая несколько отличается от терминологии монографии (Канторович, Вулих, Пинскер [I]); основные сведения, относящиеся к терминологии, приведены в главе 0. Для удобства читателя в конце работы приводятся предметный указатель и указатель символов. Ссылки в диссертации делаются, по возможности, не на оригинальные работы, а на соответствующие монографии. Это относится, в частности, к работам (Канторович [I]–[8]), (Канторович, Вулих [I]), (Вулих [I]–[5]), (Пинскер [I]–[8]), которые в значительной степени отражены в монографиях (Канторович, Вулих, Пинскер [I]) и (Вулих [6]).

Важнейшей частью теории линейных структур (по крайней мере, с точки зрения классического функционального анализа) является ТЕОРИЯ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР. Дело не только в том, что многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются банаховыми структурами[x)], но и в том, что аксиоматика теории банаховых структур достаточно гибка и богата, а её аппарат достаточно разработан для того, чтобы эта теория могла служить мощным средством исследования указанных пространств.

Настоящая диссертация посвящена теории банаховых структур. В ней изучаются следующие вопросы: функции от элементов линейной структуры и реализация пространств регулярных функционалов (гл. I); преобразования банаховых структур с помощью вогнутых функций (гл. II); строение и линейно-топологические свойства банаховых структур (гл. III); строение и свойства пространства, сопряжённого к банаховой структуре, а также некоторых его подпространств (гл. IУ).

[x)] К их числу относятся пространства непрерывных функций на бикомпактах, классические пространства L^p, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича, Морри, пространства со смешанной нормой (см. Бенедек и Панзоне [I]), симметричные пространства измеримых функций (см. Семёнов [I], [2]), некоторые пространства операторов, различные пространства функций множества (мер), модулярные пространства (см. Накано [I]), многие пространства почти периодических функций, пространства Степанова (см. Левитан [I]), а также многие другие.

Напомним также, что всякое банахово пространство с безусловным базисом после эквивалентной перенормировки превращается в банахову структуру, если за конус положительных элементов в нём принять множество всех элементов, имеющих неотрицательные коэффициенты разложения по базису.

Перейдём теперь к конкретному содержанию работы. Основной текст состоит из четырёх глав, которым предшествует гл.0 "Предварительные сведения, терминология, обозначения". В конце диссертации имеется приложение "Об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$ ".

Глава I называется "Функции и функционалы в линейных структурах". Она состоит из двух параграфов. На материал этой главы, относящийся в основном к общей теории линейных структур, опираются последующие главы. В частности, результаты § 2 главы I являются ключом к главе II.

В § I главы I изучаются функции от элементов архимедова К-линеала. Это важное понятие было введено Л.В.Канторовичем. Оно является абстрактным аналогом понятия суперпозиции функций и играет важную роль как в самой теории линейных структур, так и в особенности в её приложениях. Например, оно, по существу, используется в теории меры (см.Бурбаки [2], гл.У, § 5) и в теории операторов. Это понятие исследовалось, в частности, в работах (Вулих [5],[6]), (Канторович, Вулих, Пинскер [1]), (Широхов [1],[2]), причём даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. Определение функции от элементов линейной структуры может быть основано как на представлении К-пространства в виде К-пространства разложений единицы, так и на представлении К-пространства с помощью вещественных непрерывных функций. Мы даём новое определение функции от элементов архимедова К-линеала (см.определения I.I.I и I.I.7), основанное на второй идее, которое общее известных ранее и, как нам кажется, проще и более приспособлено для приложений. Приведём наше определение для важнейшего случая (К-пространство-расширенное, функция - бэровская). Пусть W -расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, f - бэровская функция, определённая на R^n.

Не умаляя общности, можно считать, что $W = C_\infty(Q)$, где $Q = Q(W)$ - экстремально несвязный бикомпакт; $C_\infty(Q)$ - пространство всех вещественных непрерывных функций на Q, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$; $\mathbb{1}$ - функция, тождественно равная единице на Q (см. гл. 0 § 2). Фиксируем любые $x_1, x_2, \dots, x_n \in C_\infty(Q)$. Тогда (см. теорему I.I.3 и следствие I.I.4) существует единственный $x \in C_\infty(Q)$, такой что $x(q) = f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q))$ для всех $q \in Q$, кроме, может быть, некоторого подмножества первой категории из Q. Теперь полагаем $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{def}{=} x$. Тем самым, при нашем определении ВСЯКОЕ РАСШИРЕННОЕ К-ПРОСТРАНСТВО W ЗАМКНУТО ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ БЭРОВСКОЙ ФУНКЦИИ ОТ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ W; при прежних определениях функции от элементов К-линеала это имело место лишь при некоторых ограничениях на W. Из других результатов этого параграфа отметим теорему I.I.18, дающую необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный архимедов К-линеал X был замкнут относительно операции взятия непрерывной положительно однородной функции от элементов из X; заметим, что в работе (Вулих [5]), в которой исследовался этот вопрос, найдены лишь достаточные условия.

В § 2 гл. I строится реализация пространств регулярных функционалов. Полученные результаты (теоремы I.20.20, I.2.22 и I.2.23) относятся к числу главных результатов диссертации. Напомним, что для любой банаховой структуры E банахово сопряжённое E^* совпадает с K-пространством $\hat{E}$ регулярных функционалов на E (см. Вулих [6], Теорема IX.4.5). Поэтому построенная нами реализация пространства $\tilde{X}$ для произвольного K-пространства X является, в частности, и реализацией пространства E^* для произвольного банахова KN-пространства E. Тем самым, несмотря на то, что основным объектом этого параграфа является произвольное (не нормированное) K-пространство, результаты § 2 гл. I имеют самое непосредственное отношение к теме диссертации. Напомним, что пространство $\bar{X}$ вполне линейных функционалов на произвольном K-пространстве X допускает простое представление в виде дуального пространства X' (см. гл. 0 § 5). Вопрос же о сколько-нибудь "удобном" представлении пространства $\tilde{X}$ существенно более труден. До сих пор, насколько нам известно, за исключением хорошо известных классических случаев, такое представление было получено лишь для пространств X очень специального типа (см., например, Гретски [1] и Рао [1], [2]), причём методами, принципиально не допускающими обобщения на случай произвольного K-пространства X. Опишем теперь вкратце построенную нами реализацию. Пусть W – расширенное K-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, M – идеал ограниченных элементов в нём, X и Y – любые идеалы в W. Для $f \in \tilde{X}$, $u \in X_+$ полагаем $f_{(u)}(x) = f(xu), x \in M$.

Ясно, что $f_{(u)} \in \tilde{M}$. Произвольные функционалы $f \in \tilde{X}, g \in \tilde{Y}$ будем называть ДИЗЪЮНКТНЫМИ[x)] (обозначение: $f D g$), если функционалы $f_{(u)}$ и $g_{(v)}$ дизъюнктны в обычном смысле как элементы К-пространства $\tilde{M}$ для любых $u \in X_+, v \in Y_+$. На этом определении дизъюнктности функционалов, заданных на разных К-пространствах, основан наш метод построения реализации. Пусть в К-пространствах[xx)] $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ фиксированы произвольные единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно).

Т е о р е м а I.2.20. Существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X - компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, а R_X - изоморфизм К-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ на V_X, удовлетворяющая условиям:

1) Для любых $f \in \tilde{X}$ и $g \in \tilde{M}$ соотношения $f D g$ и $R_X f d g$ равносильны[xxx)].

2) $R_X(\mathbb{1}_1) = Pr_{V_X} \mathbb{1}_2$

Оператор R_X будем называть КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пространства $\tilde{X}$.

---

x) Подчеркнём, что о дизъюнктности f и g в обычном смысле говорить нельзя, ибо они не являются элементами одного и того же К-пространства.

xx) Если Z есть произвольное К-пространство, то через $\mathfrak{M}(Z)$ мы обозначаем его максимальное расширение.

xxx) То есть $(f D g) \Longleftrightarrow (|R_X f| \wedge |g| = 0)$. Заметим, что здесь $R_X f$ и g суть элементы одного и того же К-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно говорить об их дизъюнктности в обычном смысле.

Теорема 1.2.22. Пусть $f \in \widehat{X}$. Тогда компонента в $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$, порождённая элементом $R_X f$, совпадает с компонентой, порождённой множеством $\{f_{(u)} : u \in X_+\}$.

Теорема 1.2.23. Для любых $f \in \widetilde{X}, g \in \widetilde{Y}$ справедливо

$$(f D g) \Longleftrightarrow (R_X f \, d \, R_Y g).$$

Итак, рассматривая различные идеалы в одном и том же К-пространстве W, мы смогли погрузить соответствующие пространства регулярных функционалов в одно К-пространство $\mathfrak{M}(\widetilde{M})$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщённом смысле (D), переходят при погружении в элементы, дизъюнктные в обычном смысле.

Глава II называется "Преобразование банаховых структур с помощью вогнутых функций". Она состоит из восемнадцати параграфов; в §§ 1–6 приведены формулировки основных результатов, а в § 7–18 — их доказательства. В этой главе исследуется важная конструкция преобразования банаховых структур посредством вогнутых функций, введённая (для случая пространств измеримых функций) Кальдероном (см. Кальдерон [1]), и являющаяся широким обобщением известной конструкции пространств Орлича (см. Красносельский и Рутицкий [1]). Несмотря на довольно специальный характер, эта конструкция (по мнению автора диссертации) является весьма полезным средством исследования банаховых структур, особенно в тех ситуациях, когда одновременно рассматриваются несколько банаховых KN-пространств, являющихся идеалами в одном и том же К-пространстве. Например, в формулировках теорем 2.5.1, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 конструкция Кальдерона никоим образом не присутствует, но их доказательства основаны на её использовании. Наш метод исследования указанной конструкции принципиально отличается от метода Кальдерона: метод Кальдерона основан на теории аналитических функций комплексного переменного, а наш - на теории полуупорядоченных пространств, в особенности на аппарате канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанном в гл. I § 2. В этой главе к числу главных результатов диссертации относятся теоремы 2.2.8, 2.2.12, 2.3.4, 2.4.2, 2.4.5, 2.4.6, в которых исследуется конструкция Кальдерона, а также теоремы 2.5.1, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1, посвящённые её приложениям.

На протяжении всей главы II W есть произвольное расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$; M - идеал ограниченных элементов в нём; X_0 и X_1 суть банаховы КN-пространства, являющиеся идеалами в W ; s - произвольное число, такое что $0 < s < 1$.

В § 1 гл. II приведены основные определения и простейшие следствия из них. Через $\mathfrak{A}_2$ обозначаем множество всех вещественных, непрерывных, вогнутых функций $\varphi(\xi,\eta)$ на R^2_+ , удовлетворяющих условиям: $\varphi(\xi,0)=\varphi(0,\eta)=0$ при $\xi,\eta \geqslant 0$; $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi(\xi,\alpha)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta,\eta)=+\infty$ при $\xi,\eta>0$. Через $\mathfrak{A}_2^0$ обозначаем множество всех положительно однородных функций из $\mathfrak{A}_2$. Приведём теперь основное определение 2.1.7. Пусть $\varphi\in\mathfrak{A}_2$. Через $\varphi(X_0,X_1)$ обозначаем множество всех $x\in W$, таких что $|x| \le \lambda\varphi(|x_0|, |x_1|)$ для некоторого числа $\lambda \ge 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \le 1$ $(i = 0,1)$. Через $\|x\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. Так построенное пространство $(\varphi(X_0,X_1), \|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)})$ есть банахово KN-пространство и идеал в W. Если $\varphi(\xi,\eta) = \xi^{1-s}\eta^s$, то вместо $\varphi(X_0,X_1)$ пишем $X_0^{1-s}X_1^s$.

В § 2 гл.II строятся банахово сопряжённое и дуальное пространства к $X_0^{1-s}X_1^s$. Зафиксируем произвольно единицы в пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, $\mathfrak{M}(X_0^*)$, $\mathfrak{M}(X_1^*)$ и отождествим пространства X_0^*, X_1^* с их образами в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ при соответствующих канонических реализациях. Теперь X_0^*, X_1^* суть идеалы в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ и можно образовать пространство $(X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$ точно так же как пространство $X_0^{1-s}X_1^s$ строится из пространств X_0 и X_1. Тогда (см.теорему 2.2.8) в $\mathfrak{M}((X_0^{1-s}X_1^s)^*)$ единицу можно выбрать так, что после отождествления пространства $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ с его образом в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ при соответствующей канонической реализации, равенство $(X_0^{1-s}X_1^s)^* = (X_0^*)^{1-s}(X_1^*)^s$ будет иметь место по запасу элементов и по норме. Заметим, что в работе (Кальдерон [I]) с помощью векторнозначных аналитических функций получено некоторое представление пространства $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$ через X_0^* и X_1^*, но лишь при довольно тяжёлых ограничениях на X_0 и X_1 (в частности, требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в $X_0^{1-s}X_1^s$); в нашей же теореме 2.2.8 никаких ограничений на X_0 и X_1 не накладывается.

Далее, говоря о результатах гл.II, всюду будем считать, что в W существует фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой; через J обозначаем функционал, задающий норму на L.

Пусть X есть произвольное банахово K_N-пространство, являющееся идеалом в W, и пусть W_X -компонента в W, порождённая X. Пространство X', дуальное к X, состоит из всех $x' \in W_X$, таких что $xx' \in L$ для любого $x \in X$. Норма на X' определяется формулой

$$\| x' \|_{X'} = \sup \{ J(|xx'|) : x \in X, \ \| x \|_X \leq 1 \}, \ x' \in X'.$$

Следующая теорема о дуальных пространствах усиливает некоторые результаты работы (Крейн, Петунин, Семёнов [I]).

Т е о р е м а 2.2.12. Равенство $(X_0^{1-s} X_1^s)' = (X_0')^{1-s} (X_1')^s$ имеет место как по запасу элементов, так и по норме[x)].

В § 3 гл.II рассматривается частный случай основной конструкции - степенное преобразование нормы. Пусть X есть произвольное банахово K_N-пространство, p - произвольное число, такое что $1 < p < +\infty$. Зафиксируем в $\mathfrak{M}(X)$ произвольную единицу и положим $X_p = \{ x \in \mathfrak{M}(X) : |x|^p \in X \}$ и $\| x \|_{X_p} = (\| |x|^p \|_X)^{\frac{1}{p}}$ для $x \in X_p$. В теореме 2.3.4 приведены некоторые свойства пространства X_p; в частности, пространство $(X_p)^{**}$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X^*})_p$, где $\overline{X^*}$ есть пространство всех

---

x) Подчеркнём, что здесь как и в теореме 2.2.8 X_0 и X_1 - произвольные банаховы K_N-пространства, являющиеся идеалами в W; никаких ограничений на них не накладывается.

вполне линейных функционалов на X^*, а $(\overline{X^*})_\rho$ получается из $\overline{X^*}$ точно так же как X_ρ получается из X.

В § 4 гл.II изучаются пространства $\varphi(X_0,X_1)$ для произвольной $\varphi\in\mathfrak{A}_2$. В теореме 2.4.2 приводятся некоторые полезные свойства пространства $\varphi(X_0,X_1)$ для случая, когда $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$: например, если нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$ универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны, то этими же двумя свойствами обладает и норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$.

Пара функций (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$, называется согласованной, если

$$\left((\varphi_1(X_0,X_1))',\ \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}\right)=\left(\varphi_2(X_0',X_1'),\ \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}\right)$$

при всевозможных W, $\mathbb{1}(W), L, X_0, X_1$.

Пара функций (φ_1,φ_2), где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$, называется слабо согласованной, если равенство

$$(\varphi_1(X_0,X_1))'=\varphi_2(X_0',X_1')$$

имеет место по запасу элементов при всевозможных W, $\mathbb{1}(W)$, L, X_0, X_1.

Оказывается (теорема 2.4.5), что все согласованные пары суть $\varphi_1(\xi,\eta)=A\xi^{1-s}\eta^s$, $\varphi_2(\xi,\eta)=A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s$, где $A\in(0,+\infty)$, $s\in(0,1)$ – любые. Слабо согласованных пар существенно больше. Это те и только те пары, которые в определённом смысле эквивалентны парам вида $(\varphi,\hat{\varphi})$, где $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$ – произвольна, а

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)},\quad(\xi,\eta)\in R_+^2$$

(см. теорему 2.4.6).

Наконец, отметим теорему 2.4.1 о строении пространства $(\varphi(X_0, X_1))^*$. Эта теорема, носящая до известной степени технический характер, является ключом к остальным результатам этого параграфа и в её доказательстве преодолены основные идейные и технические трудности, связанные с получением упомянутых результатов.

В § 5 гл. II содержатся приложения результатов § 2 гл. II к общей теории банаховых структур.

Пусть X есть произвольное банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W.

Через X^*_{ant} обозначается множество всех АНТИНОРМАЛЬНЫХ функционалов на X, то есть $X^*_{ant} = \{ f \in X^* : |f| \wedge |h| = 0$ для любого $h \in \bar{X} \}$, где $\bar{X}$ есть пространство всех вполне линейных функционалов на X.

Т е о р е м а 2.5.1. Для любых $f \in X^*_{ant}$ и $g \in (X')^*_{ant}$ справедливо $f \, D \, g$, то есть f и g дизъюнктны в обобщённом смысле.

Т е о р е м а 2.5.3. 1) Для любого $z \in L$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in X$, $x' \in X'$, что $z = x x'$ и $\|z\|_L \geq (1 - \varepsilon) \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$.

2) Если норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна, то утверждение 1) допускает следующее усиление: для любого $z \in L$ найдутся такие $x \in X$, $x' \in X'$, что $z = x x'$ и $\|z\|_L = \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$.

В связи с теоремой 2.5.3 заметим, что если $z \in L$, $x \in X$, $x' \in X'$ и $z = x x'$, то $\|z\|_L \leq \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$ тривиальным образом.

Наконец, отметим следующий результат (см.теорему 2.5.5 и замечание 2.5.6): ВСЯКОЕ БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО X, ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ФУНДАМЕНТОМ В $S[0,1]$, ПУТЁМ УМНОЖЕНИЯ НА НЕКОТОРУЮ "ВЕСОВУЮ" ФУНКЦИЮ МОЖНО ПРЕВРАТИТЬ В ТАКОЕ ЖЕ ПРОСТРАНСТВО, НО "ЗАЖАТОЕ" МЕЖДУ $L^\infty[0,1]$ И $L^1[0,1]$. Точнее говоря, НАЙДЁТСЯ $y\in S[0,1], y>0$, ТАКОЙ ЧТО $L^\infty[0,1]\subset\{xy : x\in X\}\subset L^1[0,1]$.

В § 6 гл.II приведены два результата о банаховых пространствах с безусловными базисами, которые являются следствиями теоремы 2.5.3. Сформулируем один из них. Пусть E есть банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$; $\{f_k\}$ – биортогональная с $\{e_k\}$ система линейных непрерывных функционалов. ТОГДА (теорема 2.6.I) СУЩЕСТВУЕТ КОНСТАНТА $c>0$, ОБЛАДАЮЩАЯ СЛЕДУЮЩИМ СВОЙСТВОМ: ДЛЯ ЛЮБОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\lambda=\{\lambda_k\}\in\ell^1$ НАЙДУТСЯ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{u_k\},\{v_k\}$, ТАКИЕ ЧТО I) $u_k v_k=\lambda_k$ ПРИ ВСЕХ k; 2) РЯДЫ $\sum_k u_k e_k, \sum_k v_k f_k$ СХОДЯТСЯ ПО НОРМАМ ПРОСТРАНСТВ E И E^* К НЕКОТОРЫМ $x\in E$ И $f\in E^*$; 3) СПРАВЕДЛИВО НЕРАВЕНСТВО $\|\lambda\|_{\ell^1}\geqslant c\|x\|_E\cdot\|f\|_{E^*}$.

Глава III называется "О линейно-топологических свойствах банаховых структур". Она состоит из четырёх параграфов. Хорошо известно, что банахова топология КВ-линеала полностью определяется имеющимся в нём частичным упорядочением. Точнее говоря (см.теорему 0.3.I), любые две монотонные банаховы нормы, заданные на одном и том же К-линеале, – эквивалентны, то есть определяемые ими топологии совпадают. Напротив, банахова топология КВ-линеала несёт мало информации об его остальных свойствах. Дело в том, что если некоторое банахово пространство можно превратить в КВ-линеал путём введения в нём частичного упорядочения и эквивалентной перенормировки, то такое превращение обычно неединственно. Например, бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство можно превратить как в $L^2[0,1]$, так и в ℓ^2. Тем не менее, некоторые свойства частичного упорядочения в КВ-линеале всё же полностью определяются его банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является теорема Огасавара (см. теорему 0.3.8): КВ-линеал является КВ-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон. Полученные нами в этом направлении результаты (теоремы 3.I.2, 3.I.8, 3.2.I, 3.3.I и 3.4.I2) относятся к числу главных результатов диссертации.

Всюду в этой главе термины "изоморфизм", "сепарабельность", "подпространство" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств.

В § I гл. III изучается одно из важнейших свойств банаховых структур – непрерывность нормы (условие (A) Л.В.Канторовича). Доказана следующая

Т е о р е м а 3.I.2. Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) В X выполнено условие (A), то есть $(x_n \downarrow 0) \Longrightarrow (\|x_n\| \to 0)$;

(б) В X выполнено условие (u) Пелчиньского (см.

Пелчиньский [I]), то есть для любой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ в X существует такая последовательность $\{y_n\}$ в X, что $\sum_{n=1}^{\infty}|f(y_n)|<\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ для любого $f\in X^*$;

(в) В X нет подпространств изоморфных пространству ℓ^{∞};

(г) В X нет подпространств изоморфных пространству $C[0,1]$;

(д) В X нет подпространств изоморфных пространству Джеймса J (см. Дэй [I], стр. I23).

Заметим, что эквивалентность $(a)\Longleftrightarrow(b)$, являющаяся самым слабым из утверждений теоремы, приведена в работе (Андо [2]), но доказательство Андо содержит принципиальную ошибку.

Отметим также следующий результат этого параграфа: ВСЯКОЕ БАНАХОВО КN-ПРОСТРАНСТВО X, В КОТОРОМ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A), НО НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (B) Л.В.КАНТОРОВИЧА, НЕ ИЗОМОРФНО НИКАКОМУ СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ (теорема 3.I.8). Этот результат находит применение в теории пространств Марцинкевича и Орлича (см. теорему 3.I.II).

В § 2 гл. III доказана следующая

Т е о р е м а 3.2.I. Пусть X - банахово КN-пространство с тотальным $\overline{X}$. В предположении справедливости континуум гипотезы следующие утверждения эквивалентны:

(а) X -счётного типа:

(б) В X нет подпространства, изоморфного пространству ℓ^{∞}_{H}, где H есть множество мощности континуума;

(в) Существует такое множество $\mathfrak{X} \subset X^*$, что $\mathfrak{X}$ тотально на X и для любого $x \in X$ множество $\{f \in \mathfrak{X} : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

В § 3 гл. III дан критерий слабой * секвенциальной компактности единичного шара пространства X^* для произвольного банахова $K_\sigma N$-пространства X (теорема 3.3.I).

Наконец, в § 4 гл. III найдена линейно-топологическая характеризация пространства $\overline{X}^*$ всех вполне линейных функционалов на X^*, где X есть произвольный KN-линеал (теорема 3.4.12).

Именно, для любого нормированного пространства E через $(E^{**})^{\pi}$ обозначаем совокупность всех $F \in E^{**}$, таких что $\sum_{t \in T} F(f_t) = 0$ для любого семейства $\{f_t : t \in T\}$ в E^*, удовлетворяющего условиям:

(а) $\sum_{t \in T} |G(f_t)| < +\infty$ для любого $G \in E^{**}$;

(б) $\sum_{t \in T} f_T(x) = 0$ для любого $x \in E$.

Т е о р е м а 3.4.12. Для любого KN-линеала X справедливо равенство $\overline{X}^* = (X^{**})^{\pi}$.

Глава IУ называется "О (b)-сопряжённом пространстве к банаховой структуре и некоторых его подпространствах". Она состоит из шести параграфов. В этой главе рассматриваются разного рода вопросы, относящиеся к строению и свойствам (b)-сопряжённого пространства X^* к банаховому $K_\sigma N$-пространству X. Из результатов этой главы теоремы 4.I.4, 4.3.I и 4.6.4 относятся к числу главных результатов диссертации.

В § I гл. IУ изучаются вполне линейные функционалы на произвольном KN-пространстве X. Элемент $x \in X$ назовём сильным, если существует $f \in \overline{X} \cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$.

Теорема 4.I.4. Пусть X – KN-пространство с тотальным $\overline{X}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Норма в X универсально полунепрерывна;

(б) Для любого $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся сильный элемент $y \in X$, такой что $\|x - y\|_X < \varepsilon$;

(в) Для любого $x \in X_+$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся сильный элемент $y \in X$, такой что $(1-\varepsilon)x \leq y \leq (1+\varepsilon)x$;

(г) Для любого $x \in X_+$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся сильные элементы $y, z \in X$, такие что

$$(1-\varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1+\varepsilon)x.$$

Эта теорема является усилением одной важной теоремы Мори, Амемия, Накано (см. теорему 0.4.3).

В § 2 гл. IУ рассматриваются в основном анормальные функционалы. Введён и изучен новый класс анормальных функционалов ("локализованные функционалы"). Приведём определение локализованного функционала для случая K-пространства. Пусть X есть K-пространство, регулярный функционал f на X называется локализованным, если для любой компоненты $K \neq \{0\}$ пространства X найдётся такая компонента $K_1 \neq \{0\}$ в X, что $K_1 \subset K$ и $f(x) = 0$ для любого $x \in K_1$. Показано, в частности, что в наиболее важных случаях всякий анормальный функционал счётного типа – локализованный (теорема 4.2.I2). Понятие локализованного функционала неоднократно используется в §§ 4-6 этой главы.

В § 3 гл. IУ рассматриваются в основном особенности строения пространства X^* для того случая, когда X есть банахово $K_\sigma N$-пространство, не удовлетворяющее[x)] условию (A).

Т е о р е м а 4.3.I. Пусть X есть банахово $K_\sigma N$-пространство, в котором не выполнено условие (A), и пусть $Y = X^*_{ant}$. Тогда

(а) В Y нет слабой единицы;

(б) В Y существует множество ненулевых попарно дизъюнктных элементов, имеющее мощность континуума;

(в) Пространство $\bar{Y}$ не есть пространство счётного типа, более того, в $\bar{Y}$ существует порядково ограниченное множество ненулевых попарно дизъюнктных элементов, имеющее мощность континуума.

В этом же параграфе приведены два критерия (θ)-рефлексивности КВ-линеала (предложения 4.3.6 и 4.3.7), а также найдены критерии дискретности и непрерывности пространства X^* для произвольного банахова $K_\sigma N$-пространства X (теоремы 4.3.I2 и 4.3.I4). Отметим также следующий результат, являющийся усилением одного результата Т. Шимогаки (см. Шимогаки [I]):

---

x) В случае, когда X есть банахово $K_\sigma N$-пространство, удовлетворяющее условию (A), справедливо равенство $X^* = \bar{X}$, тем самым пространство X^* может быть отождествлено с дуальным пространством X'. Поэтому изучение свойств пространства X^* для случая, когда X удовлетворяет условию (A), есть задача существенно более простая, чем для случая, когда X условию (A) не удовлетворяет.

если X есть KB-линеал с тотальным $\bar{X}$ и если $\bar{\bar{X}}$ есть KB-пространство, то и X есть KB-пространство (теорема 4.3.8 и следствие 4.3.9).

В §§ 4 и 5 гл. IУ методами теории полуупорядоченных пространств изучаются (b)-сопряжённые пространства к пространствам Марцинкевича $M(\psi)$ и к пространствам со смешанной нормой $L^{(p,q)}$ (определения этих пространств приведены в гл. 0 § 6). В частности, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $M(\psi)^*$ и $\left(L^{(p,q)}\right)^*$ были KB-пространствами, пространствами счётного типа; показано, что все аномальные функционалы на $L^{(p,q)}$ - локализованные, но (в предположении справедливости континуум-гипотезы) на $M(\psi)$ могут существовать аномальные не локализованные функционалы (теоремы 4.4.2 и 4.5.I).

Наконец, в § 6 гл. IУ рассматривается задача проектирования банаховой структуры на её замкнутый идеал; при этом используется уже упоминавшееся понятие локализованного функционала. В частности, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением одного результата Т. Андо (см. Андо [3]).

Т е о р е м а 4.6.4. Пусть X есть банахово KN-пространство, $У$ - его замкнутый по норме идеал, удовлетворяющий условию (A). Если $У$ не является компонентой в X, то не существует банахова проектора[x)] из X на $У$.

---

x) Если X - произвольное KN-пространство, $У$ - любая его компонента, то банахов проектор из X на $У$ существует тривиальным образом (см. Вулих [5], гл. IУ, § 3).

В этом же параграфе получен ещё один результат отрицательного характера (теорема 4.6.1), который затем применяется к пространствам Орлича (теорема 4.6.2) и к пространствам со смешанной нормой (теорема 4.6.3).

В конце диссертации имеется приложение, в котором с помощью результатов гл.II доказана теорема об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s}X_1^s$, уточняющая основную теорему работы (Забрейко [1]).

Все результаты диссертации докладывались по мере получения на семинаре Б.З.Вулиха по полуупорядоченным пространствам при Ленинградском университете. Отдельные результаты диссертации докладывались также на заседаниях Ленинградского математического общества, на семинаре С.Г.Крейна по функциональному анализу при Воронежском университете и на семинаре Д.А.Райкова по топологическим векторным пространствам при Московском университете.

Основные результаты диссертации изложены в работах (Лозановский [4], [6]-[12], [15]-[18]). Некоторые вспомогательные сведения содержатся также в других работах автора, приведённых в списке литературы.

Глава 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ТЕРМИНОЛОГИЯ. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Множество всех натуральных чисел обозначается через N. Пустое множество обозначается через ϕ. Кардинальное число произвольного множества Γ обозначается через $\operatorname{Card} \Gamma$. Характеристическая функция подмножества A данного фиксированного множества E обозначается через χ_A. Если T есть топологическое пространство, то $C(T)$ означает множество всех вещественных непрерывных функций на T, при этом $C(T)$ может рассматриваться как линейное множество, линейная структура и т.д. Под БИКОМПАКТОМ или КОМПАКТОМ (оба термина используются как синонимы) понимается бикомпактное хаусдорфово пространство. Через R^n обозначается n-мерное вещественное арифметическое эвклидово пространство. Прочие термины и обозначения из теории множеств и общей топологии используются в смысле монографии (Александров [I]).

§ I. Общая теория линейных структур

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы в основном следуем монографии Б.З.Вулиха (см.Вулих [6]).

1. Под КОНУСОМ в линейном пространстве X , как обычно, понимается любое $K \subset X$, такое что $K \cap (-K) = \{0\}$ и для любых $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ справедливо $\alpha K + \beta K \subset K$.

К-ЛИНЕАЛОМ называется линейная структура (другие названия: векторная структура, векторная решётка, пространство Рисса).

K_σ -ПРОСТРАНСТВОМ называется условно σ -полный К-линеал, то есть такой К-линеал, в котором всякое счётное ограниченное сверху подмножество имеет верхнюю грань (точную верхнюю границу).

К-ПРОСТРАНСТВОМ называется условно полный К-линеал, то есть такой К-линеал, в котором всякое непустое ограниченное сверху подмножество имеет верхнюю грань.

Конус положительных элементов К-линеала X будем обозначать через X_+ , таким образом, $X_+ = \{x : x \in X,\ x \geqslant 0\}$.

ПОРЯДКОВЫМ ИНТЕРВАЛОМ в К-линеале X называется всякое множество вида $\{x \in X : x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$, где $x_1 \leqslant x_2$ (x_1, $x_2 \in X$).

Два элемента x, y К-линеала X называются ДИЗЪЮНКТНЫМИ (обозначение: $x \, d \, y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Два множества $E_1, E_2 \subset X$ называются ДИЗЪЮНКТНЫМИ ($E_1 \, d \, E_2$) , если любой элемент $x \in E_1$ дизъюнктен любому $y \in E_2$. Наконец, элемент $x \in X$ называется ДИЗЪЮНКТНЫМ с множеством $E \subset X$ ($x \, d \, E$) , если $x \, d \, y$ для любого $y \in E$.

Если E -произвольное множество из К-линеала X , то его ДИЗЪЮНКТНЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ называется множество E^d , состоящее из всех $x \in X$, дизъюнктных с множеством E .

Подмножество E К-линеала X называется ПОЛНЫМ в X, если $E^d = \{0\}$.

Линейное подмножество Y К-линеала X называется ЛИНЕЙНОЙ ПОДСТРУКТУРОЙ в X, если для любых $x, y \in Y$ справедливо $x \vee y,\ x \wedge y \in Y$.

Линейное подмножество Y К-линеала X называется ИДЕАЛОМ или НОРМАЛЬНЫМ ПОДЛИНЕАЛОМ в X (оба термина используются как синонимы), если $\forall x \in X\ \forall y \in Y (|x| \le |y| \Longrightarrow x \in Y)$.

Идеал Y К-линеала X называется ФУНДАМЕНТОМ в X, если он полон в X, то есть если $Y^d = \{0\}$.

Пусть X - К-линеал, $u \in X$. ГЛАВНЫМ ИДЕАЛОМ в X, порождённым элементом u, называется наименьший идеал в X, содержащий u. Он обозначается через X_u и состоит из всех $x \in X$, таких что $|x| \le \lambda |u|$ для некоторого $\lambda \in [0, +\infty)$.

Пусть X - произвольный К-линеал. КОМПОНЕНТОЙ в X называется всякое $Y \subset X$, являющееся дизъюнктным дополнением какого-нибудь $E \subset X$. Иными словами, множество $Y \subset X$ называется компонентой в X, если $Y = Y^{dd}$, где $Y^{dd} \stackrel{d}{=} (Y^d)^d$. Множество всех компонент К-линеала X будем обозначать через $\mathfrak{A}(X)$. Напомним, что $\mathfrak{A}(X)$ образует (по включению) полную булеву алгебру.

Если X есть архимедов К-линеал, то множество $Y \subset X$ является компонентой в X тогда и только тогда, когда Y есть идеал в X и выполнено следующее условие (называемое УСЛОВИЕМ ПРАВИЛЬНОСТИ): если $E \subset Y$ и в X существует $\sup E\ (\inf E)$, то $\sup E \in Y\ (\inf E \in Y)$.

ГЛАВНОЙ КОМПОНЕНТОЙ в К-линеале X, порождённой элементом $u \in X$, называется наименьшая компонента в X, содержащая u.

Множество компонент $X_\xi (\xi \in \Xi)$ К-линеала X называется ПОЛНЫМ в X, если в X не существует элемента, отличного от 0 и дизъюнктного с X_ξ при всех $\xi \in \Xi$.

Пусть X - К-линеал, $x \in X$, $Y \in \mathfrak{N}(X)$. Если x можно представить в виде $x = y + z$, где $y \in Y$, а $z \, d \, Y$, то y называется ПРОЕКЦИЕЙ элемента x на Y и обозначается $Pr_Y x$. При этом, если Y есть главная компонента, порождённая элементом $u \in X$, то проекцию x на Y обозначают также через $(u)x$.

Пусть x - произвольный элемент К-линеала X. ОСКОЛКОМ элемента x называется всякий $x' \in X$, являющийся проекцией x в какую-нибудь компоненту. Иными словами, x' называется осколком элемента x, если $(x - x') \, d \, x'$.

ЕДИНИЦЕЙ или СЛАБОЙ ЕДИНИЦЕЙ в произвольном К-линеале (оба термина используются как синонимы) называется всякий элемент $u \geq 0$, такой что $x \wedge u > 0$ для любого $x > 0 (x \in X)$. Если в К-линеале X фиксирована какая-нибудь единица, то её, как правило, будем обозначать через $\mathbb{1}(X)$, или, если это не может вызвать недоразумений, просто через $\mathbb{1}$ (возможно с индексами).

Пусть X - К-линеал с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Элемент $e \in X$ называется ЕДИНИЧНЫМ, если он является осколком элемента $\mathbb{1}$, то есть если $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Совокупность всех единичных элементов называется БАЗОЙ К-линеала X и обозначается $\mathfrak{E}(X)$.

Единица $\mathbb{1}$ в К-линеале X называется СИЛЬНОЙ, если для любого $x \in X$ существует $\lambda \in [0, +\infty)$ такое, что $|x| \leq \lambda \mathbb{1}$.

К-линеал, содержащий слабую единицу, называется К-ЛИНЕАЛОМ С ЕДИНИЦЕЙ.

Архимедов К-линеал с сильной единицей называется К-ЛИНЕАЛОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Пусть X есть K_σ-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. СЛЕДОМ элемента $x \in X$ (обозначается e_x) называется проекция единицы $\mathbb{1}$ на главную компоненту в X, порождённую элементом x. Таким образом, $e_x = (x) \mathbb{1}$.

Элемент x К-линеала X будем называть ЭЛЕМЕНТОМ СЧЁТНОГО ТИПА, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктных, положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счётно. К-ЛИНЕАЛОМ СЧЁТНОГО ТИПА называется К-линеал, все элементы которого счётного типа. Иными словами, К-линеал X называется К-линеалом счётного типа, если всякое ограниченное подмножество попарно дизъюнктных его элементов, отличных от 0, не более, чем счётно.

2. Пусть X – произвольный К-линеал, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – направление в X. Запись $x_\alpha \uparrow$ означает, что это направление монотонно возрастает, то есть что $x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in A)$. Запись $x_\alpha \uparrow x$, где $x \in X$, означает, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup\{x_\alpha : \alpha \in A\} = x$. Двойственным образом определяется запись $x_\alpha \downarrow$ и $x_\alpha \downarrow x$. Пусть теперь $x_\alpha \geq 0$

при всех $\alpha \in A$. Запись $x_\alpha \uparrow$ означает, что $x_\alpha \uparrow$ и x_{α_1} есть осколок элемента x_{α_2} при всех $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 (\alpha_1, \alpha_2 \in A)$. Запись $x_\alpha \uparrow x$, где $x \in X$, означает, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup\{x_\alpha : \alpha \in A\} = x$. Двойственным образом определяется запись $x_\alpha \downarrow$ и $x_\alpha \downarrow x$.

Последовательность $x_n \in X (n \in \mathbb{N})$ называется (0) - СХОДЯЩЕЙСЯ к элементу $x \in X$ (обозначение: $x_n \xrightarrow{(0)} x$), если существуют последовательности $y_n, z_n \in X (n \in \mathbb{N})$, такие что $y_n \downarrow x$, $z_n \uparrow x$ и $z_n \leq x_n \leq y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Направление $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в X называется (0) -СХОДЯЩИМСЯ к элементу $x \in X$ (обозначение: $x_\alpha \xrightarrow{(0)} x$), если существуют направления $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ в X, удовлетворяющие условиям: $y_\beta \downarrow x$, $z_\gamma \uparrow x$ и для любых $\beta_0 \in B$, $\gamma_0 \in \Gamma$ найдётся $\alpha_0 \in A$, такое что $z_{\gamma_0} \leq x_\alpha \leq y_{\beta_0}$ при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Пусть X есть архимедов К-линеал. Последовательность $x_n \in X (n \in \mathbb{N})$ называется (r) -СХОДЯЩЕЙСЯ к элементу $x \in X$ или СХОДЯЩЕЙСЯ С РЕГУЛЯТОРОМ к x (обозначение: $x_n \xrightarrow{(r)} x$), если найдётся $z \in X_+$, называемый РЕГУЛЯТОРОМ СХОДИМОСТИ, такой что $|x - x_n| \leq \varepsilon_n z$ $(n \in \mathbb{N})$, где $\varepsilon_n \in [0, +\infty)$ и $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Последовательность $x_n \in X (n \in \mathbb{N})$ называется (r) -ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ, если найдутся $z \in X_+$ и последовательность $\varepsilon_n \in [0, +\infty) (n \in \mathbb{N})$, такие что: $|x_m - x_n| \leq \varepsilon_n z$ при всех $m \geq n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ и $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Архимедов К-линеал X называется (r) -ПОЛНЫМ, если всякая (r) -фундаментальная последовательность его элементов оказывается (r) -сходящейся. (r) -полные К-линеалы изучались, например, в работе (Векслер [1]).

Пусть X - архимедов К-линеал, E - произвольное подмножество в X. Множество E называется (τ)-ЗАМКНУТЫМ в X, если из того что $x_n \in E\,(n \in \mathcal{N}), x_n \xrightarrow{(\tau)} x \in X$ следует, что $x \in E$.

Напомним следующий известный факт. Пусть X - архимедов К-линеал, Y - его идеал. Для того чтобы факторлинеал X/Y был архимедов, необходимо и достаточно, чтобы Y был (τ)-замкнут в X (о понятии факторлинеала см., например, Биркгоф [I]).

3. Для произвольного архимедова К-линеала X через $\hat{X}$ обозначается его К-ПОПОЛНЕНИЕ по Дедекинду-Юдину (см. Вулих [6], стр.125-130), которое получается обычным методом сечений. Мы всегда будем считать, что X содержится в $\hat{X}$ естественным образом как линейная подструктура.

4. K_σ-пространство с единицей называется РАСШИРЕННЫМ, если в нём всякое счётное множество попарно дизъюнктных элементов ограничено (и, следовательно, имеет супремум и инфимум). Для того чтобы К-пространство было расширенным, необходимо и достаточно, чтобы в нём всякое (а не только счётное) множество попарно дизъюнктных элементов было ограничено. МАКСИМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ К-пространства X обозначается через $\mathfrak{M}(X)$; $\mathfrak{M}(X)$ является расширенным К-пространством, содержащим X в качестве фундамента.

5. Пусть X есть расширенное K_σ-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Известно (см. Вулих [6], гл.V § 8), что в X естественным образом определена операция умножения элементов, превращающая X в полуупорядоченное кольцо.

Б.З.Вулихом было введено понятие обратного элемента в полуупорядоченном пространстве (см.Вулих [I-4]).

Именно, пусть $x \in X$. Тогда существует и единственен элемент $y \in X$, такой что $e_y = e_x$ и произведение $xy = e_x$. Этот элемент y называется элементом, ОБРАТНЫМ по отношению к x, и обозначается через x^{-1}.

Заметим, что операция умножения элементов и понятие обратного элемента в расширенном K_σ-пространстве с фиксированной единицей приобретают весьма простой и наглядный смысл, если воспользоваться реализацией упомянутого пространства на соответствующем бикомпакте (см.следующий параграф).

6. Аддитивный и однородный функционал f на К-линеале X называется ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ (обозначение: $f \geqslant 0$), если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in X_+$.

§ 2. Реализация линейных структур

1. Бикомпакт Q называется ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫМ или ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ, если замыкание всякого открытого множества из Q – открыто-замкнуто[x)].

Бикомпакт Q называется КВАЗИЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫМ или КВАЗИЭКСТРЕМАЛЬНЫМ, если замыкание всякого открытого типа F_σ множества из Q – открыто-замкнуто.

До конца этого пункта пусть Q есть произвольный квазиэкстремальный бикомпакт.

---

x) Множество называется ОТКРЫТО-ЗАМКНУТЫМ, если оно одновременно является как открытым, так и замкнутым.

Через $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех вещественных непрерывных функций на Q, которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. В множестве $C_\infty(Q)$ естественным образом вводятся алгебраические операции, например, для любых $x_1, x_2 \in C_\infty(Q)$ их сумма $x_1 + x_2$ есть такой элемент $x \in C_\infty(Q)$, что $x_1(t) + x_2(t) = x(t)$ для всех $t \in Q$, таких что x_1, x_2, x конечны в точке t (указанный элемент x существует и единствен). При естественном частичном упорядочении $C_\infty(Q)$ оказывается расширенным K_σ-пространством. Если Q -экстремальный бикомпакт, то $C_\infty(Q)$ есть расширенное K-пространство.

Через $\Omega = \Omega(Q)$ будем обозначать совокупность всех множеств вида $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, где A - открыто-замкнуто, а B - первой категории в Q. Известно, что Ω есть σ-алгебра множеств, Ω содержит все бэровские подмножества[x)] из Q, и фактор-алгебра алгебры Ω по σ-идеалу всех подмножеств первой категории из Q изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств бикомпакта Q (см., например, Сикорский [I], гл.II). Через $\mathcal{L}(Q)$ будем обозначать совокупность всех вещественных функций, заданных (с точностью до множества первой категории) на Q, измеримых относительно σ-алгебры Ω, и могущих принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах первой категории. Две функции $x, y \in \mathcal{L}(Q)$ будем называть ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ, если они различаются лишь на множестве первой кате-

---

x) Если Q - экстремальный бикомпакт, то Ω содержит даже все борелевские подмножества из Q.

тории в Q . Совокупность $\dot{\mathfrak{F}}(Q)$ всех классов эквивалентности отождествима с $C_\infty(Q)$ в следующем смысле: каждая функция $x\in C_\infty(Q)$ содержится в некотором классе эквивалентности из $\dot{\mathfrak{F}}(Q)$ и обратно, каждый класс эквивалентности из $\dot{\mathfrak{F}}(Q)$ содержит единственную функцию из $C_\infty(Q)$ (см., например, Сикорский [I], § 44).

2. Пусть Q -квазиэкстремальный бикомпакт, $x\in C_\infty(Q)$. НОСИТЕЛЕМ элемента x (обозначение: Q_x) будем называть замыкание в Q множества $\{t\in Q: x(t)\neq 0\}$. Ясно, что множество Q_x - открыто-замкнуто.

3. До конца этого параграфа пусть W есть расширенное K_6-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Через $Q=Q(W)$ будем обозначать стоунов квазиэкстремальный бикомпакт булевой алгебры $\mathfrak{E}(W)$. Для любого $e\in\mathfrak{E}(W)$ через Q^e будем обозначать соответствующее ему открыто-замкнутое подмножество в Q .

Следующая хорошо известная теорема есть основной факт теории представлений линейных структур.

Т е о р е м а 0.2.1. (См., например, Вулих [6], стр.151). Существует и притом единственный изоморфизм K_6-пространства W на K_6-пространство $C_\infty(Q)$, переводящий каждый $e\in\mathfrak{E}(W)$ в характеристическую функцию множества Q^e .

Указанный изоморфизм мы будем называть ПЕРВОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пары $(W,\mathbb{1})$.

Так как $C_\infty(Q)$ и $\dot{\mathfrak{F}}(Q)$ в указанном ранее смысле можно отождествить, то изоморфизм, о котором говорится в теореме 0.2.1. естественным образом порождает некоторый изоморфизм пространства W на $\mathfrak{P}(Q)$. Этот последний изоморфизм мы будем называть ВТОРОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пары (W, Ω).

§ 3. Нормированные структуры

1. Если X и Y суть пара линейных пространств, находящаяся в двойственности, то $\sigma(X,Y)$ и $\sigma(Y,X)$ означают слабые топологии на X и Y, соответственно, определяемые заданной двойственностью (см. Бурбаки [1], стр. 197, определение 1).

Сопряжённое к нормированному пространству E обозначается через E^*. Топология $\sigma(E^*, E)$ на E^* называется слабой* топологией. Под (b)-ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ на E понимается элемент пространства E^*, под (b)-ПОПОЛНЕНИЕМ пространства E понимается его обычное пополнение по норме, под (b)-СХОДИМОСТЬЮ последовательности элементов из E понимается сходимость по норме, и т.д.

Так как термин "рефлексивность" используется в теории векторных структур как синоним термина "рефлексивность в смысле Накано", то во избежание недоразумений, говоря о рефлексивности в смысле теории линейных топологических пространств мы будем использовать термин "(b)-РЕФЛЕКСИВНОСТЬ", принятый в монографии Б.З.Вулиха (см. Вулих [6]).

Если E и F – нормированные пространства, то совокупность всех линейных непрерывных операторов из E в F

будем обозначать через $H_b(E \to F)$.

Пусть E - произвольное линейное множество, T - некоторое множество аддитивных и однородных функционалов на E. Говорят, что T - ТОТАЛЬНО на E, если для любого $x \neq 0$ $(x \in E)$ существует $f \in T$, такой что $f(x) \neq 0$.

2. Под KN-ЛИНЕАЛОМ или НОРМИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ понимается К-линеал, являющийся нормированным пространством с МОНОТОННОЙ НОРМОЙ, то есть такой нормой, что

$$\forall x, y \in X \left(|x| \le |y| \Longrightarrow \|x\| \le \|y\|\right).$$

(b) - полный, то есть полный по норме, KN-линеал называется КВ-ЛИНЕАЛОМ или БАНАХОВОЙ СТРУКТУРОЙ.

Если KN-линеал одновременно является К-пространством (K_σ-пространством), то он называется KN-ПРОСТРАНСТВОМ ($K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВОМ).

Для (b)-полных KN-пространства и $K_\sigma N$-пространства особых терминов не вводится.

Теорема 0.3.1. (См. Накано [I], стр. 134, теорема 30.28). Пусть на К-линеале X заданы две монотонные банаховы нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Тогда они эквивалентны, то есть существуют константы $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 \|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le C_2 \|\cdot\|_1$.

Эта теорема Х.Накано показывает, что банахова топология КВ-линеала полностью определяется имеющимся в нём порядком.

3. Пусть X - архимедов К-линеал ограниченных элементов с фиксированной сильной единицей $\mathbb{1}$. Под ЕСТЕСТВЕННОЙ НОРМОЙ на X будем понимать норму, задаваемую формулой

$$\|x\| = \min\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda \mathbb{1}\},\ x \in X.$$

Если в X указанным способом введена норма, то X называется $K\mathcal{N}$-ЛИНЕАЛОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

КВ-ЛИНЕАЛОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ называется (b)-полный $K\mathcal{N}$-линеал ограниченных элементов.

$K\mathcal{N}$-линеал ограниченных элементов, который одновременно является К-пространством (K_σ-пространством), называется $K\mathcal{N}$-ПРОСТРАНСТВОМ ($K_\sigma\mathcal{N}$-ПРОСТРАНСТВОМ) ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Пусть теперь X – произвольный архимедов К-линеал, $u \in X$. Через $\|\cdot\|_{X_u}$ или $\|\cdot\|_u$ будем обозначать норму на X_u, задаваемую формулой

$$\|x\|_u = \min\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda |u|\},\ x \in X_u.$$

4. Норма в $K\mathcal{N}$-линеале X называется ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ, если из того, что последовательность $0 \leq x_n \uparrow x \in X$, следует, что $\|x_n\| \to \|x\|$.

Норма в $K\mathcal{N}$-линеале X называется УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ, если из того, что направление $0 \leq x_\alpha \uparrow x \in X$ следует, что $\|x_\alpha\| \to \|x\|$.

Если X есть $K\mathcal{N}$-пространство счётного типа, то полунепрерывность нормы в X эквивалентна её универсальной полунепрерывности.

5. Норма в $K\mathcal{N}$-линеале X называется НЕПРЕРЫВНОЙ, если она удовлетворяет следующему условию:

(A) если последовательность $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\| \to 0$.

Если X есть $K_\sigma\mathcal{N}$-пространство и в X выполнено условие (A), то в X выполнено и следующее условие, являющееся усилением условия (A):

(A') если направление $x_\alpha \downarrow 0$, то $\|x_\alpha\| \to 0$.

Теорема 0.3.2. (См. Огасавара [I]). Если X есть сепарабельное банахово $K_\sigma N$-пространство[x)], то в X выполнено условие (A).

Предложение 0.3.3. (См. Огасавара [I]). Для того чтобы в банаховом $K_\sigma N$-пространстве X было выполнено условие (A), необходимо и достаточно, чтобы каждый порядковый интервал в X был слабо компактен.

Лемма 0.3.4 (см. Андо [I]). Пусть X есть банахово $K_\sigma N$-пространство, в котором не выполнено условие (A). Тогда найдётся последовательность $u_n \in X_+ (n \in N)$, удовлетворяющая следующим условиям: I) $u_i \wedge u_j = 0$ при $i \neq j$; 2) существует $\sup_n u_n \in X$; 3) $\inf_n \|u_n\| > 0$.

6. Норма в KN-линеале X называется МОНОТОННО ПОЛНОЙ, если она удовлетворяет следующему условию:

(B) если последовательность $x_n \in X_+$ такова, что $x_n \uparrow$ и $\sup_n \|x_n\| < \infty$, то существует $\sup_n x_n \in X$.

Норма в KN-линеале X называется УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНОЙ, если она удовлетворяет следующему условию:

(B') если направление $x_\alpha \in X_+$ таково, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$, то существует $\sup_\alpha x_\alpha \in X$.

Если X есть KN-пространство, максимальное расширение которого есть K-пространство счётного типа, то монотонная полнота нормы в X эквивалентна её универсальной монотонной полноте.

---

x) На протяжении всей работы термин "сепарабельность" используется исключительно в смысле теории нормированных (точнее - метрических) пространств, а не в смысле теории полуупорядоченных пространств.

Т е о р е м а 0.3.5. (См. Амемия [1]). Всякое $K_\sigma N$ - пространство с монотонно полной нормой - (δ) -полно.

Следующее предложение хорошо известно.

П р е д л о ж е н и е 0.3.6. Пусть X и Y суть банаховы KN -пространства, причём Y есть идеал в X и норма $\|\cdot\|_Y$ полунепрерывна и монотонно полна (не требуется, чтобы норма на Y была сужением нормы $\|\cdot\|_X$). Тогда единичный шар $\{y \in Y : \|y\|_Y \leq 1\}$ пространства Y есть замкнутое по норме подмножество в X .

7. Условия (A) и (B) , рассмотренные в п.п.5 и 6, были введены Л.В.Канторовичем. Они играют чрезвычайно важную роль в теории банаховых структур. С их помощью определяется один из важнейших классов банаховых структур - пространства Канторовича - Банаха или КВ-пространства.

О п р е д е л е н и е 0.3.7. КВ-ПРОСТРАНСТВОМ называется $K_\sigma N$ -пространство, в котором норма удовлетворяет условиям (A) и (B) .

Иными словами, КВ-пространство - это $K_\sigma N$ -пространство с непрерывной и монотонно полной нормой.

Всякое КВ-пространство полно по норме и является К-пространством счётного типа. Норма в КВ-пространстве всегда универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Следующая теорема принадлежит в основном Огасавара (см. Огасавара [1]; см.также Лозановский [3]).

Т е о р е м а 0.3.8. Для любого КВ-линеала X следующие утверждения эквивалентны:

(a) X есть КВ-пространство;

(б) X слабо секвенциально полон, то есть всякая слабо фундаментальная последовательность элементов из X оказывается слабо сходящейся к некоторому элементу из X ;

(в) в X не существует подпространства, изоморфного в смысле теории линейных топологических пространств пространству c_0 всех сходящихся к 0 числовых последовательностей;

(г) если последовательность $x_n \in X (n \in N)$ такова, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ для любого $f \in X^*$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ безусловно сходится[x)] в нормированной топологии пространства X .

Определение 0.3.9. КВ-пространство X называется КВ-ПРОСТРАНСТВОМ С АДДИТИВНОЙ НОРМОЙ или ПРОСТРАНСТВОМ ТИПА (L), если для любых $x, y \in X_+$ справедливо $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

КВ-пространство с аддитивной нормой мы обычно будем обозначать буквой L .

Если L есть КВ-пространство с аддитивной нормой, то функционал J на L, определяемый формулой

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L , \; x \in L$$

будем называть ФУНКЦИОНАЛОМ, ЗАДАЮЩИМ НОРМУ на L .

Ясно, что $0 \leq J \in L^*$.

8. Пусть X - произвольный K^N-линеал. Полагаем $X^*_+ = \{f \in X^* : f \geq 0\}$. Мы всегда будем считать, что порядок на X^* определяется конусом X^*_+ . Пространство X^* есть

---

x) Определение безусловной сходимости ряда в нормированном пространстве см. (Дэй [I], гл. IУ § I).

банахово KN -пространство с универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной нормой.

9. Определение 0.3.10. (Канторович, Вулих, Пинскер [I], стр.355). KN -линеал X называется КВАЗИРАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫМ, если существует такое $\eta > 0$, что для всякой пары дизъюнктных положительных элементов x_1 и x_2 из X с $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ имеет место неравенство $\|x_1 + x_2\| \leq 2 - \eta$

Теорема 0.3.11. Пусть X - квазиравномерно выпуклый KN -линеал. Тогда $X^*, X^{***}, \ldots, X^{(2n+1)}, \ldots$ суть КВ-пространства.

Эта теорема, принадлежащая Ю.А.Абрамовичу, вытекает из результатов работы (Лозановский [I3]).

I0. Пусть X - произвольный KN -линеал. Если в его (b) -пополнении (то есть пополнении по норме) ввести порядок, приняв в качестве положительных элементов (b) -пределы последовательностей из X_+, то оно становится КВ-линеалом, содержащим X в качестве линейной подструктуры (см. Вулих [6], стр.197).

Пусть X - произвольный KN -линеал. Его К-пополнение $\hat{X}$ становится KN -пространством, если на нём ввести норму следующим образом:

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = \inf\{\|x\|_X : |\hat{x}| \leq x \in X\}, \ \hat{x} \in \hat{X}.$$

Заметим, что $\|x\|_{\hat{X}} = \|x\|_X$ для любого $x \in X$. Норма $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ называется ЕСТЕСТВЕННЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ нормы $\|\cdot\|_X$ с X на $\hat{X}$.

Если норма $\|\cdot\|_X$ - банахова, то и норма $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ - банахова (см. Вулих, Лозановский [I]).

§ 4. Функционалы в линейных структурах

I. В этом пункте X есть произвольный архимедов К-линеал.

Через $\tilde{X}$ обозначается множество всех РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ на X, то есть функционалов, представимых в виде разности двух линейных положительных функционалов. По теореме Л.В.Канторовича $\tilde{X}$ является К-пространством при естественном частичном упорядочении. К-пространство $\tilde{X}$ называется ПРОСТРАНСТВОМ ПРИСОЕДИНЁННЫМ к X.

Функционал $f \in \tilde{X}$ называется ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫМ, если он (0)-непрерывен по направлениям, то есть если из того, что направление $x_\alpha \xrightarrow{(0)} x$ в X следует, что $f(x_\alpha) \to f(x)$. Множество всех вполне линейных функционалов на $\tilde{X}$ обозначается через $\bar{X}$; оно является компонентой в $\tilde{X}$. $\bar{X}$ называется СОПРЯЖЁННЫМ (или СОПРЯЖЁННЫМ В СМЫСЛЕ НАКАНО) ПРОСТРАНСТВОМ к X. По каждому $x \in X$ можно построить функционал $F_x \in \bar{\bar{X}}$ по формуле

$$F_x(f) = f(x),\ f \in \bar{X}. \qquad (*)$$

К-пространство X с тотальным $\bar{X}$ называется РЕФЛЕКСИВНЫМ (или РЕФЛЕКСИВНЫМ В СМЫСЛЕ НАКАНО), если второе сопряжённое К-пространство $\bar{\bar{X}}$ исчерпывается функционалами вида F_x, определяемыми по формуле $(*)$.

Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНОРМАЛЬНЫМ, если существует такой фундамент Φ в X, что $f(x) = 0$ для любого $x \in \Phi$. Множество всех анормальных функционалов на X обозначается через $\tilde{X}_{an}$; оно является идеалом в $\tilde{X}$.

Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНТИНОРМАЛЬНЫМ, если он дизъюнктен всем вполне линейным функционалам. Множество всех антинормальных функционалов на X обозначается через $\tilde{X}_{ant}$; оно является компонентой в $\tilde{X}$.

Известно, что $\tilde{X}_{an}$ есть фундамент в $\tilde{X}_{ant}$, но, вообще говоря, $\tilde{X}_{an} \neq \tilde{X}_{ant}$. Следующая теорема даёт достаточное условие для совпадения классов анормальных и антинормальных функционалов.

Т е о р е м а 0.4.1. Пусть X есть архимедов К-линеал, в котором существует фундамент Y с тотальным $\bar{Y}$. Тогда $\tilde{X}_{an} = \tilde{X}_{ant}$. В частности, это равенство справедливо для любого архимедова К-линеала X с тотальным $\bar{X}$.

Эта теорема легко следует из (Люксембург [I], ХУА, теорема 50.4), но, по существу, в неявном виде содержится уже в монографии (Канторович, Вулих, Пинскер [II]).

2. Если X есть KN-линеал, то X^* есть идеал в $\tilde{X}$. Для любого КВ-линеала X имеет место равенство $X^* = \tilde{X}$.

Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{an} = X^* \cap \tilde{X}_{an}$, $X^*_{ant} = X^* \cap \tilde{X}_{ant}$.

Т е о р е м а 0.4.2. (Люксембург, Заанен [I], XII, теорема 37.1). Для любого KN-линеала X множество $X^* \cap \bar{X}$ есть фундамент в $\bar{X}$; если $\bar{X}$ тотально на X, то и $X^* \cap \bar{X}$ тотально на X.

Т е о р е м а 0.4.3. (Мори, Амемия, Накано [I]). Для любого $K\mathcal{N}$-пространства X с тотальным $\overline{X}$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) норма в X универсально полунепрерывна;

(б) для любого $x\in X$ справедливо равенство

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f\in X^*\cap\overline{X},\ \|f\|\leq 1\}.$$

Следующее предложение вытекает из теоремы 0.4.3.

П р е д л о ж е н и е 0.4.4. Пусть X - $K\mathcal{N}$-пространство с тотальным $\overline{X}$, причём $\|\cdot\|_X$ универсально монотонно полна. Тогда X рефлексивно в смысле Накано и на X существует монотонная норма $\|\cdot\|_X^0$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_X$, которая одновременно универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна. Можно принять

$$\|x\|_X^0 = \sup\{|f(x)| : f\in\overline{X},\ \|f\|\leq 1\},\ x\in X.$$

П р е д л о ж е н и е 0.4.5. Пусть X - КВ-линеал, Y - его замкнутый по норме фундамент, причём $\|\cdot\|_Y$ есть сужение $\|\cdot\|_X$ на Y. Для любого $f\in\overline{Y}$ существует единственный $g\in\overline{X}$, такой что сужение $g|_Y = f$. При этом $\|f\|_{Y^*} = \|g\|_{X^*}$. Тем самым отображение $\overline{Y}\ni f\to g\in\overline{X}$ есть алгебраический и порядковый изоморфизм и изометрия $\overline{Y}$ на $\overline{X}$.

Это предложение хорошо известно.

3. Т е о р е м а 0.4.6. Пусть X - $K_\sigma\mathcal{N}$-пространство ограниченных элементов. Если последовательность $f_n\in X^*(n\in\mathbb{N})$ слабо * сходится к $f\in X^*$, то она и слабо сходится к f,

Эта теорема является переформулировкой известного результата о совпадении слабой и слабой* сходимостей для последовательностей мер на квазиэкстремально несвязном бикомпакте (см. Гротендик [I] и Сивер [2]).

Следующая теорема доказана в работе (Лозановский [5]) и впоследствии передоказана в работе (Шефер [I]).

Т е о р е м а 0.4.7. Пусть X — произвольное K_σ-пространство, K — произвольная компонента в $\tilde{X}$. Если последовательность $f_n \in K \; (n \in N)$ такова, что для любого $x \in X$ существует конечный $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, то $f \in K$.

§ 5. Представление вполне линейных функционалов. Дуальные пространства

I. Под ПРОСТРАНСТВОМ С МЕРОЙ, как обычно, будет пониматься тройка (T, Σ, μ), где T — некоторое множество, Σ — некоторая σ-алгебра его подмножеств, μ — неотрицательная счётно-аддитивная мера на Σ, могущая, возможно, принимать и значение $+\infty$.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой. Через $S = S(T, \Sigma, \mu)$ будет обозначаться множество всех классов попарно эквивалентных функций, заданных (с точностью до множества меры 0) на T, измеримых относительно Σ и могущих принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах меры 0. Подчеркнём, что элементы множества $S(T, \Sigma, \mu)$ суть не отдельные функции, а классы функций.

Прочие термины из теории меры будут использоваться в смысле монографии (Халмош [I]).

Напомним, что для любого пространства с мерой (T,Σ,μ) множество $S(T,\Sigma,\mu)$ есть расширенное K_σ-пространство; если мера μ σ-конечна, то $S(T,\Sigma,\mu)$ есть расширенное К-пространство счётного типа.

Для любого пространства с мерой (T,Σ,μ) и любого $1\leq p\leq+\infty$ через $L^p(\mu)$ или $L^p(T,\Sigma,\mu)$ обозначается обычное лебегово пространство, состоящее из всех $x\in S(T,\Sigma,\mu)$, таких что $\|x\|=\left(\int_T |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$ при $1\leq p<+\infty$ и $\|x\|= = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in T}|x(t)|<+\infty$ при $p=+\infty$.

2. В этом пункте Q есть произвольный квазиэкстремальный бикомпакт. Через $\Omega=\Omega(Q)$ и $\dot{\mathcal{L}}(Q)$ обозначаются те же объекты, что и в § 2.

Определение 0.5.I. Пусть μ есть неотрицательная счётно-аддитивная мера на σ-алгебре множеств Ω. Мера μ называется НОРМАЛЬНОЙ, если выполнены условия:

1) $\mu(A)>0$ для любого открыто-замкнутого $A\neq\emptyset$;

2) если A открыто-замкнуто и $\mu(A)=+\infty$, то существует открыто-замкнутое множество $A_1\subset A$, такое что $0<\mu(A_1)<+\infty$;

3) $\mu(B)=0$ для любого множества B первой категории.

Следующие результаты, по существу, содержатся в монографии (Канторович, Вулих, Пинскер [I]) и в работах (Вулих, Лозановский [2]), (Какутани [I], [2]), (Люксембург и Заанен [I], заметка XII), (Келли [I]).

Т е о р е м а 0.5.2. Если на Q существует нормальная мера μ, то $S(Q,\Omega,\mu)=\dot{\mathcal{L}}(Q)$. Тем самым, в этом случае $C_\infty(Q)$ естественным образом можно отождествить с $S(Q,\Omega,\mu)$. Кроме того, в этом случае всякое подмножество первой категории из Q нигде не плотно в Q.

Т е о р е м а 0.5.3. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) на Q существует нормальная мера;

(б) в $C_\infty(Q)$ существует фундамент с тотальным множеством вполне линейных функционалов;

(в) в $C_\infty(Q)$ существует фундамент, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой;

(г) для любого KN-пространства X, являющегося фундаментом в $C_\infty(Q)$, пространство $\bar{X}$ тотально на X.

Т е о р е м а 0.5.4. (а) Пусть L - КВ-пространство с аддитивной нормой, являющееся фундаментом в $C_\infty(Q)$, J -функционал, задающий норму на L. Для $E=A\Delta B\in\Omega$, где A открыто-замкнуто, а B первой категории, полагаем $\mu(E)=\|\chi_A\|_L$ при $\chi_A\in L$ и $\mu(E)=+\infty$ при $\chi_A\notin L$. Тогда μ есть нормальная мера на Q и $J(x)=\int_Q x\,d\mu$ для $x\in L$. При этом, если $C_\infty(Q)$ отождествить с $S(Q,\Omega,\mu)$ (см. теорему 0.5.2), то $L=L^1(Q,\Omega,\mu)$.

(б) Обратно, всякая нормальная мера на Q может быть получена указанным в пункте (а) способом.

3. В этом пункте: W — расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$; L — фиксированное КВ-пространство с аддитивной нормой, являющееся фундаментом [x] в W ; J — функционал, задающий норму на L ; X — произвольный идеал в W ; W_X — компонента в W , порождённая X .

Определение 0.5.5. Пространство

$$X' \overset{def}{=} \{x' \in W_X : xx' \in L \quad \text{для любого} \quad x \in X\}$$

называется ДУАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ к X .

Ясно, что X' есть идеал в W .

По каждому $x' \in X'$ можно построить функционал $f_{x'}$ на X по формуле

$$f_{x'}(x) = J(xx'), x \in X.$$

Этот функционал $f_{x'} \in \overline{X}$.

Следующая теорема приведена в работах (Лозановский [4]), (Райс [I]) и (Вулих, Лозановский [2]), но, по существу, в замаскированном виде встречалась и раньше.

Теорема 0.5.6. Отображение

$$X' \ni x' \longrightarrow f_{x'} \in \overline{X}$$

есть алгебраический и порядковый изоморфизм К-пространства X' на К-пространство $\overline{X}$.

Таким образом, дуальное пространство X' естественным образом можно отождествить с сопряжённым по Накано пространством $\overline{X}$.

---

[x] Мы предполагаем здесь, что указанное пространство L существует.

О п р е д е л е н и е 0.5.7. Если X есть банахово $K\mathcal{N}$-пространство, то норма $\|\cdot\|_{X'}$ на X', задаваемая формулой

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{J(|xx'|) : x\in X, \|x\|_X \le 1\}, \; x'\in X',$$

называется ДУАЛЬНОЙ НОРМОЙ по отношению к $\|\cdot\|_X$.

Ясно, что $\|x'\|_{X'} = \|f_{x'}\|_{X^*}$ для любого $x'\in X'$.

П р е д л о ж е н и е 0.5.8. Если X есть произвольный идеал в W, причём $\bar{X}$ тотально на X, то $X\subset X''$. Равенство $X = X''$ имеет место тогда и только тогда, когда К-пространство X рефлексивно в смысле Накано.

Это предложение очевидно.

Т е о р е м а 0.5.9. Пусть X есть банахово $K\mathcal{N}$-пространство, являющееся идеалом в W. Тогда

(а) $X\subset X''$ и $\|x\|_{X''} \le \|x\|_X$ для любого $x\in X$;

(б) равенство $\|x\|_{X''} = \|x\|_X$ для любого $x\in X$ имеет место тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_X$ универсально полунепрерывна;

(в) равенство $X = X''$ по запасу элементов имеет место тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_X$ универсально монотонно полна.

Первое утверждение теоремы легко следует из предложения 0.5.8. Два других утверждения вытекают из теоремы 0.4.3 и предложения 0.4.4.

З а м е ч а н и е 0.5.10. Рассмотрим следующий важный частный случай. Пусть (T,Σ,μ) - пространство с σ-конечной мерой, $W = S(T,\Sigma,\mu)$. В этом случае всегда будем считать, что $\mathbb{1}$ есть класс попарно эквивалентных функций, содержащий χ_T, и что $L = L^1(T, \Sigma, \mu)$. Пусть X – произвольный фундамент в $S(T, \Sigma, \mu)$. Тогда дуальное пространство

$$X' = \{x' \in S(T, \Sigma, \mu) : \int_T |x x'| d\mu < \infty \text{ для любого } x \in X\}.$$

Общий вид вполне линейного функционала на X даётся формулой

$$f(x) = \int_T x x' d\mu, \ x \in X,$$

где x' – произвольный элемент из X'.

§ 6. Специальные пространства

В каждом из пространств, рассматриваемых в этом параграфе, частичное упорядочение – естественное.

1. Пространства R^n, $C(T)$ (T – топологическое пространство), $S(T, \Sigma, \mu)$ и $L^p(T, \Sigma, \mu)$ ((T, Σ, μ) – пространство с мерой, $1 \le p \le +\infty$) – определены ранее.

Если (T, Σ, μ) есть отрезок $[0,1]$ с лебеговой мерой, то вместо $S(T, \Sigma, \mu)$ и $L^p(T, \Sigma, \mu)$ будем писать $S[0,1]$ и $L^p[0,1]$.

2. Пусть Γ – произвольное множество.

а) Через s_Γ обозначается пространство всех вещественных функций на Γ.

б) Через ℓ^p_Γ обозначается пространство всех $x \in s_\Gamma$, таких что $\|x\|_{\ell^p_\Gamma} = \left[\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty$ $(1 \le p < +\infty)$.

в) Через ℓ^∞_Γ обозначается пространство всех $x \in s_\Gamma$, таких что $\|x\|_{\ell^\infty_\Gamma} = \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < +\infty$.

г) Через c_Γ обозначается подпространство в ℓ_Γ^∞, состоящее из всех $x \in \ell_\Gamma^\infty$, удовлетворяющих следующему условию: существует число $\lambda = \lambda(x)$, такое что для любого числа $\varepsilon > 0$ неравенство $|x(\gamma) - \lambda| < \varepsilon$ выполняется для всех $\gamma \in \Gamma$, кроме, может быть, конечного их числа. Норма в c_Γ индуцирована из ℓ_Γ^∞.

д) Через $(c_0)_\Gamma$ обозначается подпространство в c_Γ, состоящее из всех $x \in c_\Gamma$, для которых число $\lambda(x) = 0$.

3. Если $\Gamma = N$ (множество всех натуральных чисел), то вместо s_Γ, ℓ_Γ^p, c_Γ, $(c_0)_\Gamma$ будем писать s, ℓ^p, c, c_0.

4. В терминологии и обозначениях из теории пространств Орлича мы полностью следуем монографии (Красносельский, Рутицкий [I]).

5. ПРОСТРАНСТВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ (см. Бенедек, Панзоне [I]). Пусть $1 \le p, q \le +\infty$. Пространство $L^{(p,q)}$ состоит из всех функций $x(t_1, t_2)$, определённых и измеримых на квадрате $\{(t_1, t_2) : 0 \le t_1, t_2 \le 1\}$, для которых $\|x\|_{L^{(p,q)}} < +\infty$, где

$$\|x\|_{L^{(p,q)}} = \begin{cases} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |x(t_1,t_2)|^p dt_1 \right)^{\frac{q}{p}} dt_2 \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \le p, q < +\infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{0 \le t_2 \le 1} \left(\int_0^1 |x(t_1,t_2)|^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \le p < +\infty,\ q = +\infty, \\ \left(\int_0^1 \left(\operatorname{vrai\,sup}\limits_{0 \le t_1 \le 1} |x(t_1,t_2)| \right)^q dt_2 \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } p = +\infty,\ 1 \le q < +\infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{(t_1, t_2)} |x(t_1,t_2)|, & \text{если } p = q = +\infty. \end{cases}$$

6. СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (см. Семёнов [1], [2]).

Банахово KN-пространство X, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, называется СИММЕТРИЧНЫМ пространством, если из того, что $x \in X$, $y \in S[0,1]$, $|x|$ и $|y|$ равноизмеримы[x)], следует, что $y \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

П р е д л о ж е н и е 0.6.1. Пусть X — симметричное пространство, не совпадающее по запасу элементов с $L^\infty[0,1]$. Пусть X_0 есть замыкание (по норме) множества $L^\infty[0,1]$ в X. Тогда в X_0 выполнено условие (A), но, если $X \neq X_0$, в X_0 не выполнено условие (B).

Это предложение хорошо известно.

7. Пусть ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0,1]$ функция, такая что $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ при $t>0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\psi(t)}=0$.

Для $x \in S[0,1]$ через x^* обозначается НЕВОЗРАСТАЮЩАЯ ПЕРЕСТАНОВКА функции $|x|$, то есть x^* есть невозрастающая функция, равноизмеримая с функцией $|x|$.

а) ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА $\Lambda(\psi)$ (см. Лоренц [1]) состоит из всех $x \in S[0,1]$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^*(t)\, d\psi(t) < +\infty .$$

б) ПРОСТРАНСТВО МАРЦИНКЕВИЧА $M(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0,1]$, для которых

---

x) Функции $x, y \in S[0,1]$ называются РАВНОИЗМЕРИМЫМИ, если для любого $a \in (-\infty, +\infty)$ справедливо $\mu\{t\in[0,1] : x(t)>a\} = \mu\{t\in[0,1] : y(t)>a\}$, где μ — мера Лебега на $[0,1]$.

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0<h\le 1} \frac{\int_0^h x^*(t)\,dt}{\psi(h)} < +\infty .$$

Через $M_0(\psi)$ обозначается замыкание (по норме) множества $L^\infty[0,1]$ в $M(\psi)$.

Следующее предложение хорошо известно (см. Семёнов [1],[2]).

Предложение 0.6.2.

1) $\Lambda(\psi)$ есть KB-пространство;

2) в $M_0(\psi)$ выполнено условие (A) , но не выполнено условие (B) ;

3) равенства $(\Lambda(\psi))' = M(\psi), (M_0(\psi))' = (M(\psi))' = \Lambda(\psi)$ имеют место как по запасу элементов, так и по норме.

Глава I

ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУРАХ

В этой главе (в отличие от трёх последующих глав) основным обьектом является не банахова структура, а произвольная (вообще говоря, не нормированная) линейная структура. Результаты этой главы существенно используются в последующих (особенно в гл.II).

В § I гл.I изучаются функции от элементов K-линеала. Это понятие, введённое Л.В.Канторовичем, играет важную роль в теории полуупорядоченных пространств и особеню в её приложениях. В частности (см., например, гл.II), на понятии функции от элементов линейной структуры основываются многие конструкции, связанные с преобразованиями одних банаховых структур в другие. Полезно оно и в теории меры (см., например, Бурбаки [2], гл.У, § 5). Это понятие исследовалось, в частности, в работах (Вулих [5],[6]), (Канторович, Вулих, Пинскер [I]), (Крейн М.Г. и Крейн С.Г. [2]), (Широхов [I],[2]), причём даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. Мы даём новое определение функции от элементов архимедова K-линеала (см.определения I.I.I и I.I.7), которое общее известных ранее и, как нам кажется, более приспособлено для приложений. Показано, в частности, что всякое расширенное K-пространство W замкнуто относительно операции взятия бэровской функции от элементов из W (теорема I.1.3 и следствие I.1.4); при прежних определениях функции от элементов K-линеала это имело место лишь при дополнительных ограничениях на W. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный архимедов K-линеал X был замкнут относительно операции взятия непрерывной положительно однородной функции от элементов из X (теорема I.1.18); отметим, что в работе (Вулих [5]), в которой исследовался этот вопрос, найдены лишь достаточные условия.

Пространство $\overline{X}$ вполне линейных функционалов на произвольном K-пространстве X допускает простое представление в виде дуального пространства X' (см.гл.0 § 5). Вопрос же о сколько-нибудь "удобном" представлении пространства $\tilde{X}$ регулярных функционалов на X оказывается существенно более трудным. До сих пор, насколько нам известно, за исключением хорошо известных классических случаев, такое представление было получено лишь для пространств X очень специального типа (см., например, Гретски [I] и Рао [I], [2]), причём методами, принципиально не допускающими обобщения на случай произвольного K-пространства X. В § 2 гл.I строится реализация пространства $\tilde{X}$ для произвольного K-пространства X в виде идеала в максимальном расширении пространства мер на стоуновом бикомпакте булевой алгебры $\mathfrak{U}(X)$ и показывается, что в определённом смысле эта реализация определяется единственным образом. Построенная нами реализация (см.теоремы I.2.20, I.2.22 и I.2.23) является одним из главных результатов диссертации. Отметим, что эта реализация оказалась очень удобной при описании сопряжённых пространств к пространствам, полученным с помощью конструкции Кальдерона (см.гл.II).

§ I. Функции от элементов линейной структуры

I. Пусть W – расширенное К-пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$. $Q = Q(W)$ – стоунов экстремальный бикомпакт булевой алгебры $\mathfrak{E}(W)$, $h: W \to C_\infty(Q)$ – первая классическая реализация пары $(W, \mathbb{1})$. Фиксируем произвольные $n \in N$, множество $\mathbb{T} \subset R^n$ и элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in W$. Положим $H = \{q \in Q : (hx_1(q), hx_2(q), \dots, hx_n(q)) \in \mathbb{T}\}$. Будем дополнительно предполагать, что $Q \setminus H$ есть множество первой категории в Q . Это условие, разумеется, выполнено автоматически, если $\mathbb{T} = R^n$.

Определение I.I.I. Пусть $f \in S_{\mathbb{T}}$ и $z \in W$ таковы[x], что существует множество $\mathcal{P} \subset H$, обладающее следующими свойствами:

а) $Q \setminus \mathcal{P}$ первой категории в Q ;

б) для любой точки $q \in \mathcal{P}$ справедливо $f(hx_1(q), hx_2(q), \dots, hx_n(q)) = hz(q)$.

Тогда полагаем $f_{\mathbb{1}}^{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{def}{=} z$.

Заметим, что, очевидно, этим определением элемент $f_{\mathbb{1}}^{W}(x_1, x_2, \dots x_n) \in W$ определён однозначно.

---

x) Напомним, что $S_{\mathbb{T}}$ есть множество всех вещественных функций на $\mathbb{T}$.

О п р е д е л е н и е I.I.2. Через $\mathcal{X} = \mathcal{X}(T; x_1, x_2, \dots, x_n)$ обозначим множество всех таких $f \in S_T$, для которых существует $f_{\Pi}^{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$.

Т е о р е м а I.I.3. а) $C(T) \subset \mathcal{X}$;

б) если $f_K \in \mathcal{X}\,(K \in N)$ и для любого $t \in T$ существует конечный $\lim\limits_{K \to \infty} f_K(t) = f(t)$, то $f \in \mathcal{X}$ и

$$(f_K)_{\Pi}^{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{(0)} f_{\Pi}^{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ в } W.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что если Q_1 есть плотное подмножество в Q и $x \in C(Q_1)$, то существует единственный $z \in C_\infty(Q)$, такой что сужение $z|_{Q_1} = x$. Это следует, например, из того, что всякое плотное подмножество в Q является C^*-вложенным в Q (см. Гиллман, Джерисон [I], стр. 96, 6М2). Далее нам удобно отождествить W с $C_\infty(Q)$. Докажем а). Пусть $f \in C(T)$. Примем $\mathcal{P} = H$ и положим $x(q) = f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)), q \in \mathcal{P}$. Так как $x \in C(\mathcal{P})$ и $\mathcal{P}$ плотно в Q, то существует единственный $z \in C_\infty(Q)$, такой что $z|_{\mathcal{P}} = x$. Ясно, что $f_{\Pi}^{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) = z$. Докажем б). Пусть $(f_K)_{\Pi}^{W}(x_1, x_2, \dots, x_n) = z_K$. Пусть $\mathcal{P}_K \subset H$ таково, что $Q \setminus \mathcal{P}_K$ первой категории в Q и $f_K(x_1(q), \dots, x_n(q)) = z_K(q)$ при $q \in \mathcal{P}_K$. Положим $\mathcal{P} = \bigcap\limits_{K=1}^{\infty} \mathcal{P}_K$. Ясно, что $Q \setminus \mathcal{P}$ первой категории в Q. Воспользуемся теоремой 2.33, гл. XIII из (Канторович, Вулих, Пинскер [I]) и дополнениями, сделанными в процессе её доказательства. Так как при всех $q \in \mathcal{P}$ существует конечный $\lim\limits_{K \to \infty} z_K(q)$ и $Q \setminus \mathcal{P}$ первой категории в Q, то в W существует $(0)\text{-}\lim z_K = z$. Но $z_K(q) \to z(q)$ при всех $q \in \mathcal{P}_0$, где $Q \setminus \mathcal{P}_0$ первой категории в Q. Положим $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}$.

Тогда $Q \setminus \mathcal{P}'$ первой категории в Q и $f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)) = z(q)$ при всех $q \in \mathcal{P}'$. Отсюда по определению $f_{1\!\!1}^W(x_1, \dots, x_n) = z$. Теорема доказана.

Следствие I.I.4. Множество $\mathcal{H}(T; x_1, \dots, x_n)$ содержит все бэровские функции на T. Таким образом, ДЛЯ ЛЮБОГО РАСШИРЕННОГО К-ПРОСТРАНСТВА W С ФИКСИРОВАННОЙ ЕДИНИЦЕЙ $1\!\!1$, ЛЮБОЙ БЭРОВСКОЙ ФУНКЦИИ f НА R^n И ЛЮБЫХ $x_1, x_2, \dots, x_n \in W$ СУЩЕСТВУЕТ ЭЛЕМЕНТ[x] $f_{1\!\!1}^W(x_1, \dots, x_n) \in W$.

Замечание I.I.5. Нетрудно переформулировать определение I.I.I. в терминах второй классической реализации. Ограничимся важнейшим частным случаем. Пусть $W = \dot{\mathcal{L}}(Q)$, причём $1\!\!1$ есть элемент из $\dot{\mathcal{L}}(Q)$, содержащий x_Q. Пусть f – бэровская функция на R^n. Для $x \in \mathcal{L}(Q)$ пусть $\dot{x} \in \dot{\mathcal{L}}(Q)$ означает соответствующий класс. Возьмём любые $\dot{x}_k \in \dot{\mathcal{L}}(Q)$ и выберем по представителю $x_k \in \dot{x}_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Положим $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где справа написана обычная суперпозиция функций. Ясно, что $z \in \mathcal{L}(Q)$, ибо "внешняя" функция – бэровская, а "внутренние" функции – измеримы, и что $f_{1\!\!1}^W(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \dot{z}$.

Замечание I.I.6. Пусть $(\mathcal{D}, \Sigma, \mu)$ – пространство с σ-конечной мерой и $W = S(\mathcal{D}, \Sigma, \mu)$ с естественной единицей. Пусть f есть бэровская функция на R^n, $x_1, x_2, \dots, x_n \in W$. Тогда $f_{1\!\!1}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где справа написана обычная суперпозиция бэровской функции и (классов) измеримых функций $x_1, x_2, \dots, x_n$.

---

[x] Это утверждение обобщается на расширенные K_σ-пространства; на доказательстве мы не останавливаемся, так как этот факт нам не потребуется далее.

Перейдём теперь к определению функции от элементов произвольного архимедова K-линеала.

Определение I.I.7. Пусть X — архимедов K-линеал, $W=\mathfrak{M}(\hat{X})$ и в W фиксирована единица $\mathbb{1}$. Пусть $n\in N, T\subset R^n, f\in S_T$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Если существует $f_{\mathbb{1}}^W(x_1,\dots,x_n)\in W$, то полагаем $f_{\mathbb{1}}^X(x_1,\dots,x_n)\overset{def}{=} f_{\mathbb{1}}^W(x_1,\dots,x_n)$.

Подчеркнём, что $f_{\mathbb{1}}^X(x_1,\dots,x_n)$ есть элемент W, а, вообще говоря, не X.

2. Особо остановимся на положительно однородных функциях от элементов K-линеала.

Определение I.I.8. Через $CH(R^n)$ обозначаем множество всех положительно однородных непрерывных функций на R^n.

Лемма I.I.9. (Вулих [5]). Пусть X — архимедов K-линеал и в $W=\mathfrak{M}(\hat{X})$ фиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$. Тогда для любых $n\in N, f\in CH(R^n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ справедливо $f_{\mathbb{1}_1}^X(x_1,\dots,x_n)=f_{\mathbb{1}_2}^X(x_1,\dots,x_n)\in\hat{X}$. Поэтому в случае $f\in CH(R^n)$ вместо $f_{\mathbb{1}}^X(x_1,\dots,x_n)$ мы будем писать просто $f^X(x_1,\dots,x_n)$, опуская иногда и верхний индекс.

Далее нам понадобится несколько вспомогательных предложений.

Лемма I.I.10. Пусть B — бикомпакт и пусть конечное множество функций $\{d_k\}_{k=1}^m\subset C(B)$ разделяет точки из B. Тогда для любого $z\in C(B)$ существует $f\in CH(R^{m+1})$, такая что $f(d_1, d_2,\dots, d_m, e)=z$, где $e=\chi_B$ и слева написана обычная суперпозиция непрерывных функций.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что B есть замкнутое подмножество в R^m, причём $d_k(t)=t_k$, где $t=(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ есть произвольная точка из B $(k=1,\ldots,m)$. Возьмём ограниченную функцию $g\in C(R^m)$, такую что $g|_B = z$, и для $t=(t_1,\ldots,t_m,t_{m+1})\in R^{m+1}$ положим

$$f(t)=\begin{cases} t_{m+1}\, g\left(\frac{t_1}{t_{m+1}},\frac{t_2}{t_{m+1}},\ldots,\frac{t_m}{t_{m+1}}\right) & \text{при } t_{m+1}\neq 0\\ 0 & \text{при } t_{m+1}=0.\end{cases}$$

Ясно, что $f\in CH(R^{m+1})$ и $f(d_1,\ldots,d_m,e)(t)=g(t_1,\ldots,t_m)=z(t)$ при всех $t=(t_1,\ldots,t_m)\in B$. Лемма доказана.

Лемма I.I.II. Пусть X К-пространство, Y – его идеал, $n\in N$, $f\in CH(R^n)$. Тогда для любых $y_1,y_2,\ldots,y_n\in Y$ справедливо $f^X(y_1,\ldots,y_n)=f^Y(y_1,\ldots,y_n)$.

Справедливость леммы I.I.II прямо следует из определений I.I.1, I.I.7 и леммы I.I.9.

Лемма I.I.I2. Пусть X – К-пространство, Y – его линейная подструктура, $u\in Y_+$, причём $Y=Y_u$, то есть u есть сильная единица в Y. Пусть B есть бикомпакт, H – линейная подструктура в $C(B)$, разделяющая точки из B, γ есть изоморфизм Y на H, такой что $\gamma u=\chi_B$ (указанные B,H,γ существуют в силу теоремы Крейнов-Какутани, см. Вулих [6], гл. УП, § 5). Пусть теперь $n\in N$, $f\in CH(R^n)$ и $y_1,y_2,\ldots,y_n\in Y$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(а) $f^X(y_1,\ldots,y_n)\in Y$;

(б) Суперпозиция $f(\gamma y_1,\gamma y_2,\ldots,\gamma y_n)\in H$.

При этом, если выполнены эквивалентные условия (а), (б), то $f^X(y_1,\dots,y_n)=\gamma^{-1}f(\gamma y_1,\dots,\gamma y_n)$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $X=X_u$, это следует из леммы I.I.II. Пусть Q — стоунов экстремальный бикомпакт булевой алгебры $\mathfrak{A}(X)$ и пусть π есть изоморфизм K-пространства X на K-пространство $C(Q)$, такой что $\pi u=\chi_Q$. Пусть Z есть замыкание Y в X по u-норме, то есть по норме

$$\|x\|_u=\min\{\lambda\geq 0:|x|\leq\lambda u\},\ x\in X.$$

Тогда Z есть KB-линеал ограниченных элементов, причём γ продолжается до изоморфизма γ_1 K-линеала Z на K-линеал $C(B)$. Ясно, что существует непрерывное отображение δ бикомпакта Q на бикомпакт B, такое что $(\pi z)(q)=(\gamma_1 z)(\delta q)$ для любого $z\in Z$ и любой точки $q\in Q$. Обозначим через δ^* отображение $C(B)$ в $C(Q)$, задаваемое формулой

$$(\delta^*x)(q)=x(\delta q),\ q\in Q,$$

где $x\in C(B)$. Заметим, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi|_Z"'] \arrow[dr, "\gamma_1"] & \\ C(Q) & & C(B) \arrow[ll, "\delta^*"] \end{tikzcd}$$

очевидно, коммутативна, то есть $\pi|_Z=\delta^*\gamma_1$.

Докажем теперь, что (а) $\Rightarrow$ (б). Положим для краткости $\bar{y}=(y_1,\dots,y_n)$, $f(\bar{y})=f^X(y_1,\dots,y_n)$. Фиксируем $p\in B$ и найдём $q\in Q$, такую что $\delta q=p$. Тогда имеем

$$(\gamma f(\bar{y}))(p)=(\gamma_1 f(\bar{y}))(p)=(\gamma_1 f(\bar{y}))(\delta q)=(\delta^*\gamma_1 f(\bar{y}))(q)=$$

$$=(\pi f(\bar{y}))(q)=(f(\pi\bar{y}))(q)=f(\pi\bar{y}(q))=f(\delta^*\gamma_1\bar{y}(q))=$$

$$= f(\gamma_1 \bar{y}(\delta q)) = f(\gamma_1 \bar{y}(p)) = f(\gamma \bar{y}(p)) = (f(\gamma \bar{y}))(p).$$

Так как точка $p \in B$ – любая, то $\gamma f(\bar{y}) = f(\gamma \bar{y})$. Следовательно, $f(\gamma \bar{y}) \in H$, причём $f(\bar{y}) = \gamma^{-1} f(\gamma \bar{y})$.

Докажем, что (б) $\Longrightarrow$ (а). Пусть $f(\gamma \bar{y}) \in H$. Найдётся $z \in Y$, такой что $\gamma z = \gamma_1 z = f(\gamma \bar{y})$. Тогда для любого $q \in Q$ имеем $(\pi z)(q) = (\delta^* \gamma_1 z)(q) = (\gamma_1 z)(\delta q) =$

$$= (f(\gamma \bar{y}))(\delta q) = f((\gamma_1 \bar{y})(\delta q)) = f((\delta^* \gamma_1 \bar{y})(q)) = f((\pi \bar{y})(q)) = (f(\pi \bar{y}))(q).$$

Следовательно, $\pi z = f(\pi \bar{y})$. Отсюда $z = \pi^{-1} f(\pi \bar{y})$, то есть $z = f(\bar{y})$. Тем самым $f(\bar{y}) \in Y$. Лемма доказана.

Л е м м а I.I.13. В условиях леммы I.I.12, если Y_u полно по норме $\|\cdot\|_u$, то эквивалентные условия (а), (б) выполнены.

Действительно, в этом случае $H = C(B)$, тем самым выполнено условие (б).

Л е м м а I.I.14. Пусть X К-пространство, Y – его линейная подструктура, $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$. Положим $u = |y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|$. Тогда найдётся последовательность $v_k \in Y\ (k \in N)$, которая сходится к $f^X(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в X с регулятором u.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Z есть множество всех элементов из X, которые являются (τ)-пределами последовательностей из Y_u с регулятором сходимости u. Тогда $Z = Z_u$ полно по норме $\|\cdot\|_u$, и остаётся применить лемму I.I.13. Лемма доказана.

Вводимый далее класс "квази (τ) -полных" К-линеалов, как нам кажется, представляет интерес не только в связи с рассмотрением функций от элементов К-линеала, но заслуживает внимание и сам по себе.

Определение I.I.I5. Пусть X - архимедов К-линеал, $x_1, x_2, \dots x_n \in X$. Пусть Y есть линейная подструктура в X, порождённая множеством $\{x_k\}_{k=1}^{n}$, и пусть $u = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$. Ясно, что $Y \subset X_u$. Через $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем обозначать замыкание Y в X_u по норме $\|\cdot\|_u$.

Определение I.I.I6. Архимедов К-линеал X будем называть КВАЗИ (τ) -ПОЛНЫМ, если для любого $n \in N$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ К-линеал $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полон по норме $\|\cdot\|_u$, где $u = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Замечание I.I.I7. Ясно, что всякий архимедов (τ) - полный К-линеал будет и квази (τ) -полным. В каждом из следующих трёх примеров К-линеал, обозначенный через X, квази (τ) - полон, но, вообще говоря, не является (τ) -полным.

(а) Пусть B -бикомпакт и точка $t_0 \in B$. За X принимаем линейную подструктуру в $C(B)$, состоящую из всех таких $x \in C(B)$, что x постоянна в некоторой окрестности точки t_0.

(б) Пусть Ξ - бесконечное множество индексов и для каждого $\xi \in \Xi$ T_ξ есть некоторое топологическое пространство. Пусть $T = \prod_{\xi \in \Xi} T_\xi$ есть обычное топологическое произведение. Будем говорить, что функция $x \in C(T)$ зависит лишь от конечного числа координат, если существует конечное множество $\Xi_0 \subset \Xi$, обладающее следующим свойством:

если $t = \{t_\xi\} \in T$, $t' = \{t'_\xi\} \in T$ и $t_\xi = t'_\xi$ при всех $\xi \in \Xi_0$, то $x(t) = x(t')$.

За X принимаем линейную подструктуру в $C(T)$, состоящую из всех таких $x \in C(T)$, что x зависит лишь от конечного числа координат.

(в) Пусть B – произвольный бикомпакт. За X принимаем множество всех функций, заданных, непрерывных и ограниченных на плотных открытых подмножествах в B (с естественным отождествлением).

Связь понятия квази $(?)$-полноты с понятием функции от элементов K-линеала выясняется в следующей теореме.

Теорема 1.1.18. ДЛЯ ЛЮБОГО АРХИМЕДОВА K-ЛИНЕАЛА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ.

(а) ДЛЯ ЛЮБОГО $n \in N$, ЛЮБОЙ $f \in CH(R^n)$ И ЛЮБЫХ $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ СПРАВЕДЛИВО $f^X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$.

(б) X КВАЗИ $(?)$-ПОЛОН.

Доказательство. Справедливость $(б) \Rightarrow (а)$ прямо вытекает из леммы 1.1.14. Докажем $(а) \Rightarrow (б)$. Фиксируем $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ и полагаем $u = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$. Найдётся бикомпакт B, линейная подструктура H в $C(B)$, разделяющая точки из B, и изоморфизм γ K-линеала $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на K-линеал H, такие что $\gamma u \neq \chi_B$. Ясно, что семейство $\{\gamma x_k\}_{k=1}^{n}$ разделяет точки из B.

Возьмём произвольный $z \in C(B)$. В силу леммы 1.1.10 существует $f \in CH(R^{n+1})$, такая что $f(\gamma x_1, \gamma x_2, \dots, \gamma x_n, \gamma u) = z$. По условию $f^X(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = w \in X$. В силу леммы I.I.14 $w \in X(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Наконец, в силу леммы I.I.12 $\gamma w = z$. Итак, $H = C(B)$. Поэтому $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полон по норме $\|\cdot\|_u$. Теорема доказана.

3. В следующей теореме даются достаточные условия для того, чтобы значения непрерывной (но уже не обязательно положительно однородной) функции от элементов K-линеала принадлежали этому K-линеалу. Введём следующее обозначение. Для $f \in C(R^n)$ и $0 < a < +\infty$ полагаем

$$r(f, a) = \sup\{|f(x)| : x \in R^n, \|x\|_{R^n} \le a\},$$

$$r(f) = \varlimsup_{a \to +\infty} \frac{r(f, a)}{a}.$$

Т е о р е м а I.I.19. ПУСТЬ X - АРХИМЕДОВ КВАЗИ (r)-ПОЛНЫЙ K-ЛИНЕАЛ С ЕДИНИЦЕЙ $\mathbb{1}$. Пусть $n \in N, f \in C(R^n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ БЫЛО $f_{\mathbb{1}}^X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, ДОСТАТОЧНО ВЫПОЛНЕНИЕ ОДНОГО ИЗ СЛЕДУЮЩИХ УСЛОВИЙ:

(а) $r(f) = 0$.

(б) $r(f) < +\infty$ и X ЕСТЬ K-ПРОСТРАНСТВО.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть выполнено (а). Для $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in R^{n+1}$ положим

$$g(t) = \begin{cases} t_{n+1} f\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}, \frac{t_2}{t_{n+1}}, \dots, \frac{t_n}{t_{n+1}}\right) & \text{при } t_{n+1} \ne 0 \\ 0 & \text{при } t_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Из $r(f) = 0$ следует, что $g \in CH(R^{n+1})$, ибо это условие обеспечивает непрерывность g на гиперплоскости $t_{n+1} = 0$ в

R^{n+1} (непрерывность в остальных точках и положительная однородность g очевидны). Пусть $W = \mathfrak{M}(\hat{X})$. Тогда очевидно $f_{\mathbb{1}}^{W}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^{W}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mathbb{1})$. Следовательно, $f_{\mathbb{1}}^{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mathbb{1}) \in X$ в силу теоремы I.I.18. Пусть выполнено (б). Из $\tau(f) < +\infty$ следует, что $|f_{\mathbb{1}}^{X}(x_1, \ldots, x_n)| \leq$ $\leq c(|x_1| + \ldots + |x_n| + \mathbb{1})$, где $c > 0$ — некоторое число. Поэтому $f_{\mathbb{1}}^{X}(x_1, \ldots, x_n) \in X$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I.I.20. Из результатов Б.З.Вулиха [5] следует, что в теореме I.I.19 к числу условий, обеспечивающих справедливость $f_{\mathbb{1}}^{X}(x_1, \ldots, x_n) \in X$, можно добавить также и следующие:

(в) $\mathbb{1}$ есть сильная единица в X.

(г) К-линеал X — максимальный (см. Вулих [5], стр. 384).

(д) $X_{\mathbb{1}}$ полно по норме $\|\cdot\|_{\mathbb{1}}$. X — внутренне нормален (см. Вулих [5], стр. 378) и $\tau(f) < +\infty$.

4. Вернёмся опять к случаю положительно однородных непрерывных функций. Следующее предложение прямо следует из лемм I.I.12 и I.I.14 и теоремы I.I.18.

П р е д л о ж е н и е I.I.21. Пусть X — архимедов К-линеал, Y и Z — его линейные подструктуры, являющиеся квази (τ)-полными К-линеалами. Тогда для любых $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $w_1, w_2, \ldots, w_n \in Y \cap Z$ справедливо $f^{Y}(w_1, w_2, \ldots, w_n) =$ $= f^{Z}(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in Y \cap Z$.

О п р е д е л е н и е I.I.22. Пусть X — архимедов квази (τ)-полный К-линеал, Y — его идеал. Будем говорить, что Y ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАМКНУТ в X, если при всех $n \in N$,

$f \in CH(R^n)$ и всех $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \in X$, удовлетворяющих условию

$$x_i - x'_i \in Y \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{I.1}$$

справедливо

$$f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f^X(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in Y.$$

Теорема I.I.23. Пусть X – архимедов квази (r)-полный К-линеал, Y его (r)-замкнутый идеал, ω – канонический гомоморфизм X на факторлинеал[x)] X/Y. Тогда

(а) Y функционально замкнут в X;

(б) факторлинеал X/Y квази (r)-полон;

(в) при всех $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ справедливо

$$\omega(f^X(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f^{X/Y}(\omega x_1, \omega x_2, \ldots, \omega x_n). \tag{I.2}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что Y квази (r)-полон. Действительно, для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ из условия следует, что $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = X(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, откуда вытекает, что $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ есть КВ-линеал ограниченных элементов. Докажем (а). Пусть $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n \in X$ удовлетворяют условию (I.1), $f \in CH(R^n)$. Положим $u = |x_1| + \ldots + |x_n| + |x'_1| + \ldots + |x'_n|$, $Z = X(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$, $V = Y \cap Z$. Так как Z полно по норме $\|\cdot\|_u$, то существует бикомпакт B и изоморфизм γ К-линеала Z

---

x) Из (r)-замкнутости Y в X следует, что факторлинеал X/Y архимедов.

на $C(B)$, такой что $\gamma u = \chi_B$. Так как V, очевидно, замкнуто в Z по норме $\|\cdot\|_u$, то γV есть замкнутый идеал в $C(B)$. Следовательно, существует замкнутое подмножество B_1 в B, такое что $\gamma V = \{x \in C(B) : x|_{B_1} = 0\}$. В силу (I.I) имеем $x_i - x_i' \in V$ $(i = 1,\dots,n)$, откуда $(\gamma x_i)(p) = (\gamma x_i')(p)$ во всех точках $p \in B_1$ $(i = 1,\dots,n)$. Отсюда ясно, что $f(\gamma x_1,\dots,\gamma x_n) - f(\gamma x_1',\dots,\gamma x_n') \in \gamma V$, то есть $\gamma^{-1} f(\gamma x_1,\dots,\gamma x_n) - \gamma^{-1} f(\gamma x_1',\dots,\gamma x_n') \in V$, то есть $f(x_1,\dots,x_n) - f(x_1',\dots,x_n') \in V$. Докажем (б). Возьмём произвольные $z_1,\dots,z_n \in X/y$. Пусть $x_i \in X$ таковы, что $\omega x_i = z_i$ $(i = 1,\dots,n)$. По условию $X(x_1,\dots,x_n)$ есть КВ-линеал ограниченных элементов с сильной единицей $u = |x_1| + \dots + |x_n|$. Без труда проверяется, что его образ $\omega(X(x_1,\dots,x_n))$ есть КВ-линеал ограниченных элементов с сильной единицей[x)] $\omega u = |z_1| + \dots + |z_n|$, причём этот образ есть линейная подструктура в X/y. Обозначим $\mathcal{U} = X/y$. Так как $\mathcal{U}(z_1,\dots,z_n) \subset \omega(X(x_1,\dots,x_n))$, то $\mathcal{U}(z_1,\dots,z_n)$ есть КВ-линеал ограниченных элементов с сильной единицей $|z_1| + \dots + |z_n|$. Докажем (в). Фиксируем $n \in N$. Пусть $\mathcal{D} = \{(t_1,\dots,t_n) \in R^n : |t_1| + \dots + |t_n| = 1\}$. Для $f \in CH(R^n)$ полагаем $f^* = f|_{\mathcal{D}}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех $f \in CH(R^n)$, таких что для любых $x_1,\dots,x_n \in X$ справедливо (I.2). Наконец, положим $\mathfrak{A}^* = \{f^* : f \in \mathfrak{A}\}$. Ясно, что $\mathfrak{A}^*$ есть линейное подмножество в

---

x) Мы воспользовались здесь следующим хорошо известным (и без труда проверяемым) фактом. Пусть E_1 – КВ-линеал ограниченных элементов с фиксированной сильной единицей u, E_2 – архимедов К-линеал, ω – линейное отображение E_1 на E_2, являющееся структурным гомоморфизмом. Тогда ωu есть сильная единица в E_2, причём E_2 с этой сильной единицей и нормой $\|\cdot\|_{\omega u}$

$C(\mathfrak{D})$. Так как ω сохраняет конечные супремумы и инфимумы, то $\mathfrak{U}^*$ есть линейная подструктура в $C(\mathfrak{D})$. Заметим, что $\mathfrak{U}^*$ содержит все константы и что функции из $\mathfrak{U}^*$ разделяют точки из $\mathfrak{D}$, ибо все координатные функции пространства R^n содержатся в $\mathfrak{U}$. Наконец, $\mathfrak{U}^*$ замкнуто в $C(\mathfrak{D})$ по обычной равномерной норме. В силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса из сказанного следует, что $\mathfrak{U}^* = C(\mathfrak{D})$, откуда $\mathfrak{U} = CH(R^n)$. Теорема доказана.

§ 2. Реализация пространств регулярных функционалов

I. Установим сначала некоторые вспомогательные предложения.

О п р е д е л е н и е I.2.I. Пусть X - архимедов К-линеал, Y - его идеал, $f \in \tilde{X}$, $g = f/_Y$. Функционал f называется МИНИМАЛЬНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ g с Y на X, если для любого $x \in X_+$ справедливо
$f_+(x) = \sup\{g_+(y) : 0 \leq y \leq x, y \in Y\}$ и $f_-(x) = \sup\{g_-(y) : 0 \leq y \leq x, y \in Y\}$.

Если X - архимедов К-линеал, Y - его идеал, то полагаем:
$$\tilde{X}_Y = \{f \in \tilde{X} : f/_Y = 0\}.$$

Если X - KN-линеал, Y - его идеал с нормой, индуцированной из X, то полагаем
$$X^*_Y = \{f \in X^* : f/_Y = 0\}.$$

Л е м м а I.2.2. Пусть X - архимедов К-линеал, Y - его идеал. Функционал $f \in \tilde{X}$ совпадает с минимальным распространением на X своего сужения $f/_Y$ тогда и только тогда, когда $f\, d\, \tilde{X}_Y$.

Л е м м а 1.2.3. Пусть X -KN -линеал, Y - его идеал с нормой, индуцированной из X. Функционал $f \in X^*$ совпадает с минимальным распространением на X своего сужения $f|_Y$ тогда и только тогда, когда $f \, d \, X_Y^*$. Положим $Tf = f|_Y, f \in (X_Y^*)^d$. Отображение T есть линейный и структурный изоморфизм К-пространства $(X_Y^*)^d$ на К-пространство Y^*.

Эти две леммы, разумеется, хорошо известны, см., например, (Люксембург и Заанен [I], заметка IX, теоремы 30.3 и 30.7).

Напомним, что если X - произвольное К-пространство, то $\mathfrak{N}(X)$ означает булеву алгебру его компонент.

Л е м м а 1.2.4. Пусть W_1 и W_2 - расширенные К-пространства, $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ - единицы в них, T_1 - фундамент в W_1, T_2 - идеал в W_2 и пусть B - изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{N}(T_1)$ на булеву алгебру $\mathfrak{N}(T_2)$. Тогда существует единственная пара (R,V), где V - компонента в W_2, а R - изоморфизм К-пространства W_1 на V, удовлетворяющая условиям:

1) $R(\mathbb{1}_1) = Pr_V \mathbb{1}_2$;

2) $R(H) \cap T_2 = B(H \cap T_1)$ для любой компоненты $H \in \mathfrak{N}(W_1)$.

Эта лемма очевидна: за V нужно принять компоненту в W_2, порождаемую множеством T_2, и учесть, что по условию базы К-пространств W_1 и V изоморфны.

2. В этом пункте: W - расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, X - любой его идеал, $M = W_{\mathbb{1}}$ - идеал ограниченных элементов из W. Введём некоторые обозначения.

Пусть $f \in \hat{X}, u \in X_+$. Положим для любого $x \in M$

$$f_{(u)}(x) = f(xu).$$

Ясно, что $f_{(u)} \in \tilde{M}$, а оператор $A_{(u)}$ из $\tilde{X}$ в $\tilde{M}$, определяемый формулой $A_{(u)} f = f_{(u)}$, линеен и положителен.

Л е м м а I.2.5. Пусть $E \subset \tilde{X}$ и в $\tilde{X}$ существует $g = \sup E$. Тогда $A_{(u)} g = \sup\{A_{(u)} f : f \in E\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $x \in M_+$ имеем

$$(A_{(u)} g)(x) = g(xu) = \sup_{\substack{z_1+\ldots+z_n = xu, \\ z_1,\ldots,z_n \geq 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{f_1(z_1)+\ldots+f_n(z_n)\} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1+\ldots+x_n = x, \\ x_1,\ldots,x_n \geq 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{f_1(x_1 u)+\ldots+f_n(x_n u)\} = \sup_{\substack{x_1+\ldots+x_n = x_1 \\ x_1,\ldots,x_n \geq 0, \\ f_1,\ldots,f_n \in E}} \{(f_1)_{(u)}(x_1)+\ldots+$$

$$+(f_n)_{(u)}(x_n)\} = (\sup_{f \in E} A_{(u)} f)(x).$$

С л е д с т в и е I.2.6. (а) $|A_{(u)} f| = A_{(u)}(|f|)$ (очевидно).

(б) Если $A_{(u)} f \geq 0$, то существует $g \geq 0 \,(g \in \tilde{X})$ для которого $A_{(u)} f = A_{(u)} g$ [x].

Действительно, достаточно положить $g = |f|$.

Л е м м а I.2.7. Образ пространства $\tilde{X}$ при отображении $A_{(u)}$ есть идеал в $\hat{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы I.2.5 $A_{(u)}(\tilde{X})$ – линейная подструктура в $\hat{M}$. Пусть $0 \leq \varphi < \psi$, где $\psi \in A_u(\tilde{X})$, $\varphi \in \hat{M}$. Существует такой $f \in \tilde{X}_+$, что $\psi = A_{(u)} f$. Для любого $x \in X_u$ положим $h(x) = \varphi(xu^{-1})$ (ясно, что $xu^{-1} \in M$). Тогда

---

[x] Ясно, что оператор $A_{(u)}$ может не быть взаимно однозначным.

$h \in \tilde{X}_u$, и, если $x \in X_u^+$, то $h(x) = \varphi(xu^{-1}) \le \psi(xu^{-1}) = f_{(u)}(xu^{-1}) = f(x)$. Таким образом, $0 \le h \le f|_{X_u}$. Обозначим через ℓ минимальное распространение функционала h с X_u на X: $\ell \le f$. При этом, если $x \in M$, то $xu \in X_u$ и $\ell_{(u)}(x) = \ell(xu) = h(xu) = \varphi(x)$, то есть $\ell_{(u)} = \varphi$ или $\varphi = A_{(u)}\ell$. Тем самым $\varphi \in A_{(u)}(\tilde{X})$.

Следствие I.2.8. Если $u, v \in X_+$ и $u \le v$, то

$$A_{(u)}(\tilde{X}) \subset A_{(v)}(\tilde{X}).$$

Действительно, из определения операторов $A_{(u)}$ и $A_{(v)}$ сразу следует, что $A_{(u)} \le A_{(v)}$, а тогда требуемое включение вытекает сразу из леммы I.2.7.

Лемма I.2.9. Если $f \in \tilde{X}$, то $f = 0$ тогда и только тогда, когда $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$.

Доказательство. Ясно, что если $f = 0$, то $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$. Обратно, если $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$, то, беря $x = \mathbb{1}$, мы получим, что $f(u) = f_{(u)}(\mathbb{1}) = 0$ при любом $u \in X_+$, то есть $f = 0$.

Лемма I.2.10. Если $f, g \in \tilde{X}$, то следующие утверждения равносильны:

(а) $f \, d \, g$;

(б) $A_{(u)}f \, d \, A_{(u)}g$ при любом $u \in X_+$;

(в) $A_{(u)}f \, d \, A_{(v)}g$ при любых $u, v \in X_+$.

Доказательство. (а) $\Longrightarrow$ (в). Используя лемму I.2.5 и следствие I.2.6, имеем $|A_{(u)}f| \wedge |A_{(v)}g| =$

$$= A_{(u)}|f| \wedge A_{(v)}|g| \le A_{(u \vee v)}|f| \wedge A_{(u \vee v)}|g| = A_{(u \vee v)}(|f| \wedge |g|) = 0.$$

(в) $\Longrightarrow$ (б). Очевидно.

(б) $\Longrightarrow$ (а). Имеем $A_{(u)}(|f| \wedge |g|) = |A_{(u)}f| \wedge |A_{(u)}g| = 0$, а тогда $|f| \wedge |g| = 0$ по лемме I.2.9.

Введём множество $B(\tilde{X}) = \bigcup_{u\in X_+} A_{(u)}(\tilde{X})$. Как объединение семейства идеалов из $\tilde{M}$, направленного по включению (см. лемму I.2.7 и следствие I.2.8), $B(\tilde{X})$ – тоже идеал в $\tilde{M}$. Аналогично, для любой компоненты $H\in \mathfrak{A}(\tilde{X})$ полагаем $B(H) = \bigcup_{u\in X_+} A_{(u)}(H)$.

Лемма I.2.II. Если H_1 и H_2 – две взаимно дополнительные компоненты К-пространства $\tilde{X}$, то $B(H_1)$ и $B(H_2)$ – взаимно дополнительные компоненты К-пространства $B(\tilde{X})$.

Доказательство. Множества $B(H_1)$ и $B(H_2)$ дизъюнктны по лемме I.2.I0. Произвольный $h\in B(\tilde{X})$ представим в виде $h = A_{(u)}f$, где $f\in \tilde{X}, u\in X_+$. Положим $f_1 = Pr_{H_1}f$, $f_2 = Pr_{H_2}f$. Тогда $h_i = A_{(u)}f_i \in B(H_i), (i=1,2)$, а $h = h_1 + h_2$. Отсюда уже сразу следует, что $B(H_1)$ и $B(H_2)$ – компоненты и при этом взаимно дополнительные.

Следствие I.2.I2. (а) Если $H_1 d H_2 (H_1, H_2 \in \mathfrak{A}(\tilde{X}))$, то $B(H_1) d B(H_2)$.

(б) Если $H_1 \neq H_2$, то $B(H_1) \neq B(H_2)$.

Лемма I.2.I3. Пусть Y – идеал в X, $g\in \tilde{Y}_+$, и пусть существует минимальное распространение функционала g на X, которое мы обозначим через f. Тогда

I) $f_{(v)} = g_{(v)}$ для любого $v\in Y_+$;

2) множества $\mathcal{G}_1 = \{f_{(u)} : u\in X_+\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{g_{(v)} : v\in Y_+\}$ порождают в $\tilde{M}$ одну и ту же компоненту.

Доказательство. I) Для любого $x\in M$ и $v\in Y_+$ имеем $g_{(v)}(x) = g(xv) = f(xv) = f_{(v)}(x)$.

2) Из I) следует, что $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$. Для фиксированного $u\in X_+$

Так как $g_{(v)} \leq f_{(u)}$ для любого $g_{(v)} \in G$, то $\sup G$ в $\tilde{M}$ существует. Обозначим его временно через φ. Теперь достаточно доказать, что $f_{(u)}(x) = \varphi(x)$ для любого x из базы $\mathfrak{C}(M)$, поскольку линейные комбинации единичных элементов образуют в M множество, плотное относительно сходимости с регулятором. Но $\varphi(x) = \sup\limits_{0 \leq v \leq u,\, v \in Y} g_{(v)}(x) = \sup\limits_{0 \leq v \leq u,\, v \in Y} g(xv) = \sup\limits_{0 \leq y \leq xu,\, y \in Y} g(y) = f(xu) = f_{(u)}(x)$, и лемма доказана.

Лемма I.2.14. Для произвольной компоненты Z из K-пространства $B(\tilde{X})$ существует такая компонента $H \in \mathfrak{A}(\tilde{X})$, что $B(H) = Z$.

Доказательство. Положим $H = \bigcap\limits_{v \in X_+} A^{-1}_{(v)}(Z)$ и проверим, что H – требуемая компонента. Ясно, что H – компонента в $\tilde{X}$ и что $B(H) \subset Z$ [x]. Пусть $g \in Z_+$. Тогда существуют такие $\varphi \in \tilde{X}_+$, $u \in X_+$, что $\varphi_{(u)} = A_{(u)}\varphi = g$. Идеал X_u обозначим для краткости через Y и построим минимальное распространение f функционала $\psi = \varphi|_Y$ на всё X. Тогда $f_{(u)} = \varphi_{(u)} = g$. Проверим, что $f \in H$. Это значит, что $f_{(v)} \in Z$ при любом $v \in X_+$. По предыдущей лемме достаточно проверить, что $\psi_{(w)} \in Z$ при любом $w \in Y_+$. Но для любого $w \in Y_+$ существует такое число $\lambda \geq 0$, что $w \leq \lambda u$. А тогда $\psi_{(w)} \leq \psi_{(\lambda u)} = \lambda \psi_{(u)} = \lambda \varphi_{(u)} = \lambda g \in Z$ и $\psi_{(w)} \in Z$.

Из лемм I.2.II и I.2.14 (см. также следствие I.2.12) сразу следует, что отображение B есть изоморфизм между булевыми алгебрами компонент K-пространств $\tilde{X}$ и $B(\tilde{X})$.

---

x) Напоминаем, что оператор $A_{(u)}$ сохраняет грани.

Напомним, что максимальное расширение произвольного К-пространства $\mathcal{U}$ обозначается через $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$.

Л е м м а 1.2.15. Пусть в К-пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ зафиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно). Тогда существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X – компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, а R_X – изоморфизм К-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ на V_X, удовлетворяющая условиям:

1) $R_X(\mathbb{1}_1) = Pr_{V_X}\mathbb{1}_2$;

2) $R_X(H) \cap B(\tilde{X}) = B(H \cap \tilde{X})$ для любой $H \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}(\tilde{X}))$.

Лемма вытекает из леммы 1.2.4. При этом заметим, что V_X – компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, порождённая множеством $B(\tilde{X})$.

3. Теперь мы введём понятие дизъюнктности для регулярных функционалов, заданных на различных идеалах одного и того же расширенного К-пространства. Пусть W – расширенное К-пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$, X и Y – любые его идеалы, $M = W_{\mathbb{1}}$ – идеал ограниченных элементов.

О п р е д е л е н и е 1.2.16. Пусть $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$. Будем говорить, что f и g дизъюнктны ($f D g$), если $f(u)\, d\, g(v)$ в К-пространстве $\tilde{M}$ для любых $u \in X_+, v \in Y_+$.

Из леммы 1.2.10 видно, что в случае, когда $X = Y$, дизъюнктность в новом обобщённом смысле равносильна обычной. Отметим также, что если $g = 0$, то $f D g$ для любого $f \in X$.

Л е м м а 1.2.17. Для любого множества $\mathcal{P} \subset \tilde{Y}$ совокупность $H = \{f : f \in \tilde{X}, f D g$ для любого $g \in \mathcal{P}\}$ – компонента в $\tilde{X}$.

Доказательство. Обозначим через E дизъюнктное дополнение в К-пространстве $\tilde{M}$ к множеству всех функционалов $g_{(v)}$, где $g \in \mathcal{P}$, $v \in Y_+$. Тогда E – компонента в $\tilde{M}$. Но $H = \bigcap_{u \in X_+} A^{-1}_{(u)}(E)$, и тем самым H – компонента в $\tilde{X}$.

Лемма I.2.18. Если $f \in \hat{X}, g \in \tilde{M}$, то соотношение $f D g$ равносильно тому, что $f_{(u)} d g$ для любого $u \in X_+$.

Доказательство. Если $f D g$, то $f_{(u)} d g_{(v)}$ для любых $u \in X_+$, $v \in M_+$. В частности, беря $v = \mathbb{1}$, получим $g_{(v)} = g$ и, следовательно, $f_{(u)} d g$. Обратно, пусть $f_{(u)} d g$ для любого $u \in X_+$. Если $v \in M_+$, то $v \le c\mathbb{1}$ при некотором c, а тогда $|g_{(v)}| = |g|_{(v)} \le c|g|$. Следовательно, $|f_{(u)}| \wedge |g_{(v)}| \le |f_{(u)}| \wedge c|g| = 0$.

Лемма I.2.19. Пусть $\mathcal{P} \subset \tilde{X}$, а H – компонента в $\tilde{X}$, порождённая множеством $\mathcal{P}$. Тогда множество $L = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(\mathcal{P})$ порождает в $B(\tilde{X})$ компоненту $B(H)$.

Доказательство. Обозначим через Z компоненту в $B(\tilde{X})$, порождённую множеством L. Тогда $Z \subset B(H)$. Из доказательства леммы I.2.14 видно, что $B^{-1}(Z) = \bigcap_{u \in X_+} A^{-1}_{(u)}(Z)$, и потому $\mathcal{P} \subset B^{-1}(Z)$. Отсюда сразу вытекает, что $H \subset B^{-1}(Z)$ или $B(H) \subset Z$, а тем самым $Z = B(H)$.

4. Переходим к основным теоремам о реализации пространств регулярных функционалов. По-прежнему W – расширенное К-пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$, X и Y – любые его идеалы, $M = W_{\mathbb{1}}$ – идеал ограниченных элементов. В К-пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ зафиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно).

Теорема 1.2.20. Существует единственная пара (R_X, V_X), где V_X - компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, а R_X - изоморфизм К-пространства $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ на V_X, удовлетворяющая условиям:

1) для любых $f \in \tilde{X}$ и $g \in \tilde{M}$ соотношения fDg и $R_X f dg$ равносильны;

2) $R_X(\mathbb{1}_1) = P_{V_X} \mathbb{1}_2$.

Определение 1.2.21. Оператор R_X из теоремы 1.2.20 будем называть КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пространства $\tilde{X}$, или, точнее, канонической реализацией пары $(\tilde{X}, \mathbb{1}_1)$.

Доказательство теоремы 1.2.20. Мы покажем, что требуемым условиям удовлетворяет пара (R_X, V_X) из леммы 1.2.15. В проверке нуждается только условие 1).

Пусть $f \in \tilde{X}, g \in \tilde{M}$, H - компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{X})$, порождённая функционалом f, $H_1 = H \cap \tilde{X}$. Из леммы 1.2.17 следует, что соотношения fDg и $H_1 Dg$ x) равносильны. Последнее, по лемме 1.2.18, равносильно тому, что $h_{(u)} dg$ для любых $h \in H_1$ и $u \in X_+$, то есть тому, что $B(H_1) dg$. Это же, в свою очередь, по лемме 1.2.15, равносильно соотношению $R_X(H) dg$. Но так как R_X - изоморфизм, то $R_X(H)$ - компонента в V_X, порождённая функционалом $R_X f$.

Теперь докажем, что требуемая пара - единственная. Пусть (R'_X, V'_X) - ещё одна пара, удовлетворяющая условиям теоремы; H и H_1 имеют прежний смысл. Тогда соотношения $R_X f dg$ и $R'_X f dg (f \in \tilde{X}, g \in \tilde{M})$ равносильны, а потому множества $R_X(H_1)$

---

x) Это значит, что hDg для любого $h \in H_1$.

и $R'_X(H_1)$ порождают в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ одну и ту же компоненту, то есть $R_X(H)=R'_X(H)$ для любой компоненты H из $\mathfrak{M}(\tilde{X})$. В частности, $V'_X = R'_X(\mathfrak{M}(\hat{X})) = R_X(\mathfrak{M}(\hat{X})) = V_X$. Кроме того, $R'_X(H)\cap B(\tilde{X}) = B(H\cap\hat{X})$, поскольку R_X обладает этим свойством (см. лемму I.2.15), а тогда единственность R_X вытекает из леммы I.2.15.

Теорема I.2.22. Пусть $f\in\tilde{X}$. Тогда компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, порождённая элементом $R_X f$, совпадает с компонентой, порождённой множеством $\{f_{(u)}: u\in X_+\}$.

Доказательство. Из теоремы I.2.20 и леммы I.2.18 следует, что соотношения $f_{(u)} d g$ при любом $u\in X_+$ и $R_X f d g (g\in\hat{M})$ равносильны. Отсюда уже сразу вытекает, что дизъюнктные дополнения в $\mathfrak{M}(\hat{M})$ к элементу $R_X f$ и к множеству $\{f_{(u)}: u\in X_+\}$ совпадают, следовательно, совпадают и указанные в теореме компоненты.

Теорема I.2.23. Если $f\in\hat{X}, g\in\hat{Y}$, то соотношения fDg и $R_X f d R_Y g$ равносильны.

Доказательство. По определению соотношение fDg равносильно тому, что $f_{(u)} d g_{(v)}$ при любых $u\in X_+, v\in Y_+$. Последнее же, по теореме I.2.22, равносильно дизъюнктности функционалов $R_X f$ и $R_Y g$ x).

Таким образом, рассматривая различные идеалы в одном и том же K-пространстве W, мы смогли погрузить пространства, присоединённые к ним, в одно K-пространство $\mathfrak{M}(M)$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщённом смысле D,

x) Так как дизъюнктность двух множеств равносильна дизъюнктности порождаемых ими компонент.

переходят при погружении в элементы, дизъюнктные в обычном смысле.

Налагая на X и Y некоторые дополнительные ограничения, докажем ещё одну теорему.

Теорема 1.2.24. Пусть X – KN-пространство, Y – его идеал с нормой, индуцированной из X, и в $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ выбрана единица $\mathbb{1}_1$. Тогда в $\mathfrak{M}(\tilde{Y})$ можно выбрать единицу $\mathbb{1}_2$ так, что при канонической реализации пространств $\tilde{X}$ и $\hat{Y}$ будут выполнены следующие условия:

1) $R_Y(Y^*)$ – компонента в $R_X(X^*)$;

2) если $f \in X^*$, $\varphi = f|_Y$, то $R_Y \varphi$ есть проекция элемента $R_X f$ на $R_Y(Y^*)$.

Доказательство. Используя обозначения, введённые в начале параграфа, рассмотрим множество $X_Y^* = \{f : f \in X^*, f|_Y = 0\}$. Положим $\mathcal{U} = (X_Y^*)^d$ и будем считать $\mathfrak{M}(X^*)$ (соответственно $\mathfrak{M}(Y^*)$) компонентой в $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ (соответственно в $\mathfrak{M}(\tilde{Y})$), а $\mathfrak{M}(X_Y^*)$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ – компонентами в $\mathfrak{M}(X^*)$. То отображение T, которое было введено в лемме 1.2.3, будем считать продолженным до изоморфизма K-пространства $\mathfrak{M}(\mathcal{U})$ на K-пространство $\mathfrak{M}(Y^*)$. Выберем единицу $\mathbb{1}_2$ в $\mathfrak{M}(\tilde{Y})$ так, что

$$Pr_{\mathfrak{M}(Y^*)} \mathbb{1}_2 = T(Pr_{\mathfrak{M}(\mathcal{U})} \mathbb{1}_1). \qquad (2.1)$$

Докажем, что

$$R_X T^{-1} = R_Y|_{\mathfrak{M}(Y^*)}. \qquad (2.2)$$

Пусть $f \in Y^*, q \in \tilde{\mathfrak{M}}$. Тогда соотношения

$$q\, d\, R_X T^{-1} f \quad \text{и} \quad q\, d\, R_Y f \qquad \text{равносильны.} \qquad (2.3)$$

Действительно, по теореме I.2.22 первое из них равносильно соотношению

$$q\, d\, (T^{-1} f)_{(u)} \quad \text{для любого } u \in X_+ , \qquad (2.4)$$

а второе – тому, что

$$q\, d\, f_{(v)} \quad \text{для любого } v \in Y_+ , \qquad (2.5)$$

Легко видеть, что если $T^{-1} f \geqslant 0$, то $T^{-1} f$ – минимальное распространение функционала f с Y на X [x]. Поэтому применима лемма I.2.I3, и множества функционалов $\{(T^{-1} f)_{(u)} : u \in X_+\}$ и $\{f_{(v)} : v \in Y_+\}$ порождают в $\tilde{\mathfrak{M}}$ одну и ту же компоненту. Следовательно, соотношения (2.4) и (2.5) равносильны, и (2.3) доказано.

Из (2.3) видно, что $R_X T^{-1}(H) = R_Y(H)$ для любой компоненты $H \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}(Y^*))$. В частности,

$$R_X T^{-1}(\mathfrak{M}(Y^*)) = R_Y(\mathfrak{M}(Y^*)). \qquad (2.6)$$

Далее, из (2.I) вытекает, что

$$R_X T^{-1}(Pr_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1\!\!1_2) = R_X(Pr_{\mathfrak{M}(u)} 1\!\!1_1).$$

Следовательно, это единичный элемент в $\mathfrak{M}(\tilde{\mathfrak{M}})$, а тогда, в силу (2.6), он совпадает с $R_Y(Pr_{\mathfrak{M}(Y^*)} 1\!\!1_2)$. Из всего сказанного и вытекает (2.2)[xx].

---

[x] Ясно, что минимальное распространение (b) – линейного функционала (b) – линейно, а $T^{-1} f$ определяется однозначно.

[xx] Если A и B – два изоморфных отображения расширенного K-пространства E_1 на расширенное K-пространство E_2 , причём $A(H) = B(H)$ для любой компоненты H из E_1 ,

Далее, имеем $R_Y(Y^*) = R_X(T^{-1}(Y^*)) = R_X(u)$, и потому $R_Y(Y^*)$ – компонента в $R_X(X^*)$.

Пусть теперь $f \in X^*$, $\varphi = f|_Y$. Положим $\psi = f - T^{-1}\varphi$. Тогда $\psi \in X^*_Y$, а $R_X f = R_X T^{-1}\varphi + R_X\psi = R_Y\varphi + R_X\psi$. Но $R_X\psi \, d \, R_X u = R_Y(Y^*)$, а потому $R_Y\varphi$ – проекция функционала $R_X f$ на $R_Y(Y^*)$.

З а м е ч а н и е I.2.25. В условиях теоремы I.2.24 $R_Y(\tilde{Y})$ не обязано быть компонентой в $R_X(\tilde{X})$ ни при каком выборе единиц. Достаточно рассмотреть $X = L^1[0,1]$, $Y = L^\infty[0,1]$.

5. В этом пункте будут изложены некоторые дополнительные сведения о канонической реализации, которые нам понадобятся в главе II. По-прежнему W – расширенное К-пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$. X – любой его идеал. $M = W_{\mathbb{1}}$ – идеал ограниченных элементов. В К-пространствах $\mathfrak{M}(\tilde{X})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ зафиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно). Пусть R_X есть каноническая реализация пространства $\tilde{X}$. Естественным образом считаем, что $\mathfrak{M}(\bar{M})$ и $\mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$ суть компоненты в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, порождённые $\bar{M}$ и $\tilde{M}_{ant}$ соответственно.

П р е д л о ж е н и е I.2.26. Для любого $f \in \tilde{X}$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) $f \in \bar{X}$;

(б) $f_{(u)} \in \bar{M}$ при всех $u \in X_+$;

(в) $R_X f \in \mathfrak{M}(\bar{M})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) $\Longrightarrow$ (б). Если направление $x_\alpha \downarrow 0$ $(\alpha \in A)$ в M, то $u x_\alpha \downarrow 0$ в X, поэтому $f_{(u)}(x_\alpha) = f(u x_\alpha) \to 0$ при всех $u \in X_+$. Эквивалентность (б) $\Longleftrightarrow$ (в) есть следствие теоремы I.2.22. Докажем (б) $\Longrightarrow$ (а). Пусть направление $x_\alpha \downarrow 0$ $(\alpha \in A)$ в X. Можно считать, что существует $u \in X_+$, такой что $x_\alpha \leq u$ при всех $\alpha \in A$. Тогда $u^{-1} x_\alpha \downarrow 0$ в M, поэтому $f(x_\alpha) = f_{(u)}(u^{-1} x_\alpha) \to 0$.

П р е д л о ж е н и е 1.2.27. Для любого $f \in \tilde{X}$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) $f \in \tilde{X}_{ant}$;

(б) $f_{(u)} \in \tilde{M}_{ant}$ при всех $u \in X_+$;

(в) $R_X f \in \mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) $\Longrightarrow$ (в). Допустим, что $f \in \tilde{X}_{ant}$, но $R_X f \notin \mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$. Тогда существует $H \in \mathfrak{M}(\bar{M})$, такой что $0 < H \leq |R_X f| = R_X |f|$. Найдётся $h \in \tilde{X}$, такой что $R_X h = H$. Ясно, что $0 < h \leq |f|$. Остаётся заметить, что в силу предложения 1.2.26 $h \in \bar{X}$, что невозможно. Эквивалентность (б) $\Longleftrightarrow$ (в) есть следствие теоремы 1.2.22. Докажем (в) $\Longrightarrow$ (а). Так как $R_X f \in \mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$, то $R_X f \, d \, \mathfrak{M}(\bar{M})$. Тогда в силу предложения 1.2.26 будет $R_X f \, d \, R_X g$, то есть $f \, d \, g$, для любого $g \in \bar{X}$. Тем самым $f \in \tilde{X}_{ant}$.

Введём теперь следующее обозначение. Пусть V есть К-пространство и $f \in \bar{V}_+$, тогда V_f есть его компонента существенной положительности.

Л е м м а 1.2.28. Для любых $f \in \bar{X}_+$, $g \in \bar{M}_+$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) $f D g$;

(б) функционалы $f|_{X \cap M}$ и $g|_{X \cap M}$ дизъюнктны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для краткости

$V=X\cap M$, $F=f|_V$, $G=g|_V$. Так как $\{F_{(u)}: u\in V_+\}\subset\{f_{(u)}: u\in X_+\}$, $\{G_{(v)}: v\in V_+\}\subset\{g_{(v)}: v\in M_+\}$, то в силу теоремы 1.2.22 из $f D g$ следует, что $F D G$, то есть что $F d G$. Обратно, пусть $F d G$. Тогда $V_F\cap V_G=\{0\}$. Но $V_G=M_g\cap V$. Следовательно, $V_F\cap M_g=\{0\}$, поэтому $F_{(u)}\, d\, g_{(v)}$ для любых $u\in V_+$, $v\in M_+$. Тем самым $F D g$. Но f есть минимальное распространение F на X. Из леммы 1.2.13 тогда следует, что $f D g$. Лемма доказана.

Предложение 1.2.29. Пусть X не просто идеал, но фундамент в W и пусть $\bar{M}$ тотально на M. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) $\bar{X}$ тотально на X;

(б) $R_X(\bar{X})$ есть фундамент в $\mathfrak{M}(\bar{M})$.

Доказательство. Положим $V=X\cap M$. Пусть $\bar{X}$ тотально на X. Допустим, что $R_X(\bar{X})$ не есть фундамент в $\mathfrak{M}(\bar{M})$. Тогда существует $g\in\bar{M}$, такой что $g>0$ и $g D\bar{X}$. Из леммы 1.2.28 теперь следует, что на $M_g\cap X$ аннулируются все функционалы $f\in\bar{X}$. Противоречие. Утверждение (а) $\Longrightarrow$ (б) доказано. Пусть теперь $R_X(\bar{X})$ есть фундамент в $\mathfrak{M}(\bar{M})$. Допустим, что $\bar{X}$ не является тотальным на X. Тогда существует компонента K в X, такая что $K\neq\{0\}$ и каждый $f\in\bar{X}$ аннулируется на K. Возьмём произвольный $g\in M$, такой что $g>0$ и $M_g\cap X\subset K$. Из леммы 1.2.28 тогда следует, что $\bar{X} D g$, тем самым $R_X(\bar{X})$ не есть фундамент в $\mathfrak{M}(\bar{M})$. Противоречие. Предложение доказано.

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР С ПОМОЩЬЮ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

Глава II построена несколько иначе, чем другие главы, а именно: в §§ 1–6 приведены формулировки основных результатов, а в §§ 7–18 – их доказательства.

В работе Кальдерона [1] была введена конструкция, позволяющая по заданным банаховым KN-пространствам X_0 и X_1, являющимся идеалами в некотором расширенном K-пространстве[x)] W, и вогнутой функции $\varphi(\xi, \eta)$, удовлетворяющей определённым условиям, образовать новое банахово KN-пространство $\varphi(X_0, X_1)$, являющееся идеалом в W (см. определение 2.1.7). Указанная конструкция является широким обобщением известной конструкции пространств Орлича (см. Красносельский и Рутицкий [1]).

Глава II посвящена изучению этой важной конструкции. Наш метод принципиально отличается от метода Кальдерона: метод Кальдерона основан на теории аналитических функций комплексного переменного, а наш метод основан на теории полуупорядоченных пространств и в особенности на аппарате канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанном в главе I § 2.

---

x) В работе Кальдерона рассматривался только случай $W = S(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) есть пространство с σ-конечной мерой.

В этой главе к числу главных результатов диссертации относятся: теорема 2.2.8 (о строении пространства $(X_0^{1-s}X_1^s)^*$), теорема 2.2.12 (о строении пространства $(X_0^{1-s}X_1^s)'$), теорема 2.3.4 (о степенном преобразовании нормы), теорема 2.4.2 (о свойствах пространства $\varphi(X_0,X_1)$), теоремы 2.4.5 и 2.4.6 (о дуальных пространствах к пространствам типа $\varphi(X_0,X_1)$).

Несмотря на довольно специальный характер конструкции Кальдерона, с помощью её свойств, установленных в §§ I–4, удалось получить некоторые результаты, относящиеся к общей теории банаховых структур (теоремы 2.5.I, 2.5.3 и 2.5.5) и к теории банаховых пространств с безусловными базисами (теорема 2.6.I). Эти теоремы тоже относятся к числу главных результатов диссертации.

§ I. Основные определения и простейшие следствия из них

I. Определение 2.I.I. $\mathfrak{A}_2$ есть множество всех вещественных функций $\varphi(\xi,\eta)$, удовлетворяющих условиям:

а) Область определения φ есть R^2_+ и φ непрерывна (по совокупности аргументов) на R^2_+ ;

б) φ – вогнута, то есть

$$\varphi(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2,\lambda\eta_1+(1-\lambda)\eta_2)\geq\lambda\varphi(\xi_1,\eta_1)+(1-\lambda)\varphi(\xi_2,\eta_2)$$

при всех $\lambda\in(0,1)$ и всех $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)\in R^2_+$;

в) $\varphi(\xi,0)=\varphi(0,\eta)=0$ при всех $\xi,\eta\geq 0$; (I.I)

г) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi(\xi,\alpha)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta,\eta)=+\infty$ при всех $\xi,\eta>0$. (I.2)

Из определения 2.1.1 прямо следует, что любая функция $\varphi(\xi,\eta)\in\mathfrak{A}_2$ удовлетворяет также следующим условиям:

д) для любого $\xi>0$ функция $\varphi(\xi,\cdot)$ строго возрастает на $[0,+\infty)$;

е) для любого $\eta>0$ функция $\varphi(\cdot,\eta)$ строго возрастает на $[0,+\infty)$;

ж) $\varphi(\xi,\eta)>0$ при всех $\xi,\eta>0$.

Определение 2.1.2. $\mathfrak{A}_2^0$ есть множество всех положительно однородных функций из $\mathfrak{A}_2$.

Важным примером функции класса $\mathfrak{A}_2^0$ является функция $\xi^{1-s}\eta^s$, где $0<s<1$. Она существенно используется в дальнейших построениях.

Определение 2.1.3. Для $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$ полагаем

$$\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)},\ (\xi,\eta)\in\mathbb{R}_+^2 . \qquad (1.3)$$

Следующее предложение будет доказано в § 7 п.1.

Предложение 2.1.4. Пусть $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$. Тогда $\hat{\varphi}\in\mathfrak{A}_2^0$, причём $\hat{\hat{\varphi}}=\varphi$.

Между функциями из $\mathfrak{A}_2^0$ и N -функциями[x)] в смысле Красносельского и Рутицкого [1] существует тесная связь.

Предложение 2.1.5. (а) Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций. Для $\xi,\eta\geqslant0$ положим

---

x) Напомним, что функция $M(\xi)$, определённая на $(-\infty,+\infty)$, называется N -функцией, если она непрерывна, выпукла, чётна и удовлетворяет следующим условиям: $M(\xi)>0$ при $\xi>0$; $\lim\frac{M(\xi)}{\xi}=0$; $\lim\frac{M(\xi)}{\xi}=+\infty$.

$$\varphi(\xi,\eta)=\begin{cases}0 & \text{при } \eta=0\\ \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) & \text{при } \eta>0.\end{cases} \tag{I.4}$$

Тогда $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$, причём

$$\hat\varphi(\xi,\eta)=\begin{cases}0 & \text{при } \xi=0\\ \xi N^{-1}(\eta\xi^{-1}) & \text{при } \xi>0.\end{cases} \tag{I.5}$$

Здесь и всюду далее $M^{-1}(\xi)$ и $N^{-1}(\xi)$ суть функции, обратные к $M(\xi)$ и $N(\xi)$, рассматриваемым при неотрицательных значениях аргумента.

(б) Обратно, для любой $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$ найдётся единственная N-функция $M(\xi)$ такая, что справедливо (I.4). Именно, $M(\xi)$ есть чётное продолжение на $(-\infty,+\infty)$ функции, обратной к функции $\varphi(\xi,1)$.

Доказательство см. в § 7 п.I.

Заметим, что если $\varphi(\xi,\eta)=\xi^{1-s}\eta^{s}$, где $0<s<1$, то $\hat\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{s^s(1-s)^{1-s}}\cdot\xi^{1-s}\eta^{s}$ и соответствующие по (I.4) и (I.5) N-функции суть $M(\xi)=|\xi|^{\frac{1}{1-s}}$, $N(\xi)=s(1-s)^{\frac{1-s}{s}}|\xi|^{\frac{1}{s}}$. Действительно, взяв в (I.4) $\eta=1$, получаем $M^{-1}(\xi)=\varphi(\xi,1)=\xi^{1-s}$, откуда $M(\xi)=|\xi|^{\frac{1}{1-s}}$. Но (см. Красносельский и Рутицкий [I], стр. 25) N-функции $M_1(\xi)=(1-s)|\xi|^{\frac{1}{1-s}}$ и $N_1(\xi)=s|\xi|^{\frac{1}{s}}$ – дополнительны друг к другу. Следовательно (см. Красносельский и Рутицкий [I], стр. 23), для любых чисел $a,b>0$ N-функции $aM_1(b\xi)$ и $aN_1\left(\frac{\xi}{ab}\right)$ тоже дополнительны друг к другу. Взяв $a=\frac{1}{1-s}$, $b=1$, получим $M(\xi)=aM_1(b\xi)$, откуда $N(\xi)=aN_1\left(\frac{\xi}{ab}\right)=$ $=\frac{1}{1-s}N_1((1-s)\xi)=\frac{s}{1-s}(1-s)^{\frac{1}{s}}|\xi|^{\frac{1}{s}}=s(1-s)^{\frac{1-s}{s}}|\xi|^{\frac{1}{s}}$. Отсюда $N^{-1}(\xi)=\frac{1}{s^s(1-s)^{1-s}}\xi^{s}$ теперь по (I.5) получаем $\hat\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{s^s(1-s)^{1-s}}\xi^{1-s}\eta^{s}$.

2. Определение 2.1.6. На протяжении всей главы II W есть произвольное расширенное K-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$, X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся идеалами в W. В тех случаях, когда на $W, \mathbb{1}(W), X_0, X_1$ будут накладываться какие-нибудь дополнительные ограничения, эти ограничения будут каждый раз особо оговариваться. Полагаем $M = W_{\mathbb{1}(W)}$ – пространство ограниченных элементов (см.гл.0 § 1).

Напомним, что $X_0 \cap X_1$ и $X_0 + X_1 = \{x_0 + x_1 : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$ суть идеалы в W, и что они оказываются банаховыми KN-пространствами, если на них ввести следующие нормы:

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}, x \in X_0 \cap X_1, \tag{1.6}$$

$$\|x\|_{X_0+X_1} = inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, |x_0| + |x_1| = |x|\}, x \in X_0 + X_1 \tag{1.7}$$

Определение 2.1.7. Пусть $\varphi \in \mathcal{O}\!\!\iota_2$. Через $\varphi(X_0, X_1)$ обозначаем множество всех таких $x \in W$, что

$$|x| \leq \lambda \varphi(|x_0|, |x_1|) \tag{1.8}$$

для некоторого числа $\lambda \geq 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ $(i = 0, 1)$. Через $\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в (1.8).

Предложение 2.1.8. Пусть $\varphi \in \mathcal{O}\!\!\iota_2$. Тогда $\varphi(X_0, X_1)$ есть идеал в W и с нормой $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ есть банахово KN-пространство.

Доказательство см.в § 7 п.2.

Если функция $\varphi(\xi,\eta)=\xi^{1-s}\eta^{s}$, где $0<s<1$, то пространство $\varphi(X_0,X_1)$ будем обозначать просто через $X_0^{1-s}X_1^{s}$. Таким образом, пространство $X_0^{1-s}X_1^{s}$ состоит из всех $x\in W$, таких что

$$|x| \le \lambda |x_0|^{1-s}|x_1|^{s} \tag{1.9}$$

для некоторого числа $\lambda>0$ и каких-нибудь $x_i\in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i}\le 1$ $(i=0,1)$. При этом $\|x\|_{X_0^{1-s}X_1^{s}}$ есть инфимум всех возможных λ в (1.9).

Предложение 2.1.9. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{A}_2$. Тогда

(а) Равенство

$$(\varphi_1(X_0,X_1),\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0,X_1)})=(\varphi_2(X_0,X_1),\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0,X_1)}) \tag{1.10}$$

при всевозможных W, $\mathfrak{A}(W)$, X_0,X_1 имеет место только тогда, когда $\varphi_1=\varphi_2$.

(б) Равенство

$$\varphi_1(X_0,X_1)=\varphi_2(X_0,X_1) \tag{1.11}$$

по запасу элементов при всевозможных W, $\mathfrak{A}(W)$, X_0,X_1 имеет место тогда и только тогда, когда существуют числа $c_1,c_2>0$, такие что

$$c_1\varphi_2\le\varphi_1\le c_2\varphi_2 \tag{1.12}$$

Кроме того, если это условие выполнено, то

$$c_1\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}\le\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0,X_1)}\le c_2\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}. \tag{1.13}$$

Доказательство см. в § 7 п. 3.

О п р е д е л е н и е 2.1.10. Функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$ эквивалентны, если для некоторых $c_1, c_2 > 0$ справедливо (1.12).

З а м е ч а н и е 2.1.11. Пусть (T, Σ, μ) – пространство с вполне σ -конечной мерой, $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ и пусть $M(\xi)$ есть N -функция, соответствующая φ в силу предложения 2.1.5. Примем $W = S(T, \Sigma, \mu), X_0 = L^1(T, \Sigma, \mu), X_1 = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Тогда $(\varphi(X_0, X_1), \|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)})$ есть обычное пространство Орлича с нормой Люксембурга, построенное по N -функции $M(\xi)$ (см. Красносельский и Рутицкий [1]). Действительно, для любого $x \in S$ имеем

$$\{\lambda > 0 : |x| \le \lambda \varphi(|x_0|, |x_1|) \text{ для некоторых } x_0 \in L^1, x_1 \in L^\infty \text{ с } \|x_0\|_{L^1} \le 1, \|x_1\|_{L^\infty} \le 1\} =$$

$$= \{\lambda > 0 : |x| \le \lambda \varphi(|x_0|, \chi_T) \text{ для некоторого } x_0 \in L^1 \text{ с } \|x_0\|_{L^1} \le 1\} =$$

$$= \{\lambda > 0 : |x| \le \lambda M^{-1}(x_0) \text{ для некоторого } x_0 \in L^1 \text{ с } \|x_0\|_{L^1} \le 1\} =$$

$$= \{\lambda > 0 : M\left(\frac{|x|}{\lambda}\right) \in L^1, \left\|M\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)\right\|_{L^1} \le 1\}.$$

Таким образом, рассматриваемая конструкция является обобщением конструкции пространств Орлича.

§ 2. О пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$.

На протяжении этого параграфа s есть число, такое что $0 < s < 1$. Обозначим для краткости $X_s = X_0^{1-s} X_1^s$.

1. Напомним (см. гл. I § 2), что для $f \in (X_i)^*, u \in X_i$ $(i = 0, 1, s)$ через $f_{(u)}$ обозначается функционал на M, действующий по формуле

$$f_{(u)}(x) = f(xu),\ x \in M.$$

При построении пространства $(X_0^{1-s} X_1^s)^*$ важную роль играет следующее предложение.

Предложение 2.2.1. Для любых $f \in (X_0)^*_+$, $g \in (X_1)^*_+$ существует единственный $h \in (X_s)^*_+$, такой что

$$h_{(u^{1-s} v^s)} = (f_{(u)})^{1-s} (g_{(v)})^s \text{ для всех } u \in (X_0)_+,\ v \in (X_1)_+ . \tag{2.1}$$

Здесь $(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$ есть значение функции $\xi^{1-s}\eta^s$ на элементах $f_{(u)}, g_{(v)}$ К-пространства $\tilde{M}$ (см.гл.I § I).

Доказательство см.§ 9 п.2.

Определение 2.2.2. Пусть f, g, h из предложения 2.2.1. Полагаем

$$f^{1-s} g^s \overset{def}{=} h. \tag{2.2}$$

Замечание 2.2.3. Вообще говоря, $f^{1-s}g^s$ в (2.2) есть только обозначение. О функции от элементов К-пространства здесь говорить не приходится, ибо f и g суть элементы двух различных К-пространств $(X_0)^*$ и $(X_1)^*$. Рассмотрим, однако, частный случай, когда $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Тогда $X_0 \cap X_1$ плотно в X_s. Следовательно, $(X_0)^*, (X_1)^*$ и $(X_s)^*$ естественным образом вкладываются в $(X_0 \cap X_1)^*$. Тогда f, g и h можно считать элементами одного и того же К-пространства $(X_0 \cap X_1)^*$, и h есть значение функции $\xi^{1-s}\eta^s$ на элементах f и g К-пространства $(X_0 \cap X_1)^*$. Сказанное будет доказано далее, см.§ 9 п.3.

Пусть до конца параграфа в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ фиксирована какая-нибудь единица $\mathbb{1}(\mathfrak{M}(\tilde{M}))$. Выберем пока произвольно единицы $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_s$ в пространствах $\mathfrak{M}((X_0)^*), \mathfrak{M}((X_1)^*)$ и $\mathfrak{M}((X_s)^*)$, соответственно, и рассмотрим соответствующие канонические реализации (гл.I, § 2).

$$R_i : \mathfrak{M}((X_i)^*) \longrightarrow \mathfrak{M}(\tilde{M}) \quad (i=0,1,s).$$

О п р е д е л е н и е 2.2.4. Для $i=0,1,s$ через $\mathcal{E}_i$ обозначим базу пространства $\mathfrak{M}((X_i)^*)$, то есть $\mathcal{E}_i = \{e : e \in \mathfrak{M}((X_i)^*), e \wedge (\mathbb{1}_i - e) = 0\}$. Полагаем $E_i = \mathcal{E}_i \cap (X_i)^*$ $(i=0,1,s)$.

О п р е д е л е н и е 2.2.5. Будем говорить, что единица $\mathbb{1}_s$ ПОДЧИНЕНА единицам $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$, если для любых $e_0 \in E_0, e_1 \in E_1$ справедливо $e_0^{1-s} e_1^s \in E_s$. Здесь $e_0^{1-s} e_1^s$ понимается в смысле определения 2.2.2.

П р е д л о ж е н и е 2.2.6. ПУСТЬ $\mathbb{1}_0$ И $\mathbb{1}_1$ ВЫБРАНЫ ПРОИЗВОЛЬНО. ТОГДА СУЩЕСТВУЕТ И ЕДИНСТВЕННА ЕДИНИЦА $\mathbb{1}_s$, ПОДЧИНЁННАЯ ЕДИНИЦАМ $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$. ПРИ ЭТОМ

$$\mathbb{1}_s = \sup\{e_0^{1-s} e_1^s : e_0 \in E_0, e_1 \in E_1\} \quad \text{в} \quad \mathfrak{M}((X_s)^*). \qquad (2.3)$$

Доказательство см.в § 10 п.2.

Пусть до конца параграфа фиксированы произвольные единицы $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$ и пусть единица $\mathbb{1}_s$ подчинена им.

П р е д л о ж е н и е 2.2.7. ДЛЯ ЛЮБЫХ $f \in (X_0)^*_+, g \in (X_1)^*_+$ СПРАВЕДЛИВО

$$R_s(f^{1-s} g^s) = [R_0(f)]^{1-s} [R_1(g)]^s. \qquad (2.4)$$

ЗДЕСЬ $f^{1-s} g^s$ СЛЕВА ПОНИМАЕТСЯ В СМЫСЛЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ 2.2.2, А В ПРАВОЙ ЧАСТИ СТОИТ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $\xi^{1-s}\eta^s$ НА ЭЛЕМЕНТАХ $R_0(f), R_1(g)$ К-ПРОСТРАНСТВА $\mathfrak{M}(\tilde{M})$.

Доказательство см. в § 10 п. 3.

Отождествим теперь (для простоты записи) пространства $(X_0)^*, (X_1)^*, (X_s)^*$ с их образами $R_0((X_0)^*), R_1((X_1)^*), R_s((X_s)^*)$ при канонических реализациях. Тогда эти пространства суть идеалы в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$. Теперь из пространств $(X_0)^*, (X_1)^*$ можно образовать пространство $((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s$ точно так же как $X_0^{1-s} X_1^s$ строится из пространств X_0, X_1.

Т е о р е м а 2.2.8. ПУСТЬ ПО-ПРЕЖНЕМУ ЕДИНИЦЫ $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$ ВЫБРАНЫ ПРОИЗВОЛЬНО, А ЕДИНИЦА $\mathbb{1}_s$ ПОДЧИНЕНА ИМ. ТОГДА РАВЕНСТВО

$$(X_s)^* = ((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s \tag{2.5}$$

ИМЕЕТ МЕСТО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Доказательство см. в § 11.

По поводу теоремы 2.2.8 заметим следующее. В работе Кальдерона [I] с помощью векторнозначных аналитических функций получено некоторое представление пространства $(X_s)^*$ через $(X_0)^*$ и $(X_1)^*$, но лишь при довольно тяжёлых ограничениях на X_0 и X_1 (в частности, требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в X_s). В нашей же теореме 2.2.8 никаких дополнительных ограничений на X_0 и X_1 не накладывается.

2. Следующие предложения описывают некоторые полезные свойства рассматриваемой конструкции.

П р е д л о ж е н и е 2.2.9. ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ В X_s БЫЛО ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A), НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ ДЛЯ ЛЮБЫХ $f \in (X_0)^*_{ant}, g \in (X_1)^*_{ant}$ БЫЛО $f D g$.

Доказательство см. в § 12 п. I.

С л е д с т в и е 2.2.10. Если в одном из пространств X_0, X_1 выполнено условие (A), то в X_S тоже выполнено условие (A).

Действительно, пусть, например, в X_0 выполнено условие (A), тогда (Вулих [6], гл.IX, § 4) $(X_0)^*_{ant} = \{0\}$ и применимо предложение 2.2.9[x].

Т е о р е м а 2.2.11. ПУСТЬ ОДНО ИЗ ПРОСТРАНСТВ X_0, X_1, А ТАКЖЕ ОДНО ИЗ ПРОСТРАНСТВ $\bar{X}_0, \bar{X}_1$ СУТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВА. ТОГДА X_S (θ)-РЕФЛЕКСИВНО.

Доказательство см.в § 12 п.3.

В работе Кальдерона [I] показано, что если одно из пространств X_0, X_1 (θ)-рефлексивно, то и X_S (θ)- рефлексивно. Это утверждение существенно слабее нашей теоремы 2.2.11. Действительно, пусть, например, X_0 - (θ)- рефлексивно. Тогда в силу теоремы Огасавара (см.Вулих [6], стр. 294) X_0 и $\bar{X}_0$ суть КВ-пространства, и применима теорема 2.2.11.

3. До конца этого параграфа будем предполагать, что в W существует фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Через J обозначаем функционал, задающий норму на L, то есть

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \tag{2.6}$$

Напомним (гл.0 § 5), что если X есть банахово KN-пространство и идеал в W, то дуальное пространство X' со-

---

x) Заметим, впрочем, что следствие 2.2.10 нетрудно доказать и элементарно, исходя только из определения пространства X_S.

стоит из всех $x' \in W$, таких, что x' принадлежит компоненте в W, порождённой X, и

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{J(|xx'|) : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < +\infty . \qquad (2.7)$$

Теорема 2.2.12. Равенство

$$(X_0^{1-s} X_1^s)' = ((X_0)')^{1-s}((X_1)')^s \qquad (2.8)$$

имеет место как по запасу элементов, так и по норме.

Доказательство см. в § 12 п. 2.

Заметим, что теорема 2.2.12 является усилением некоторых результатов С.Г.Крейна, Ю.И.Петунина и Е.М.Семёнова (см. Крейн, Петунин, Семёнов [I], § 5).

§ 3. О степенном преобразовании нормы

Пусть X есть банахово KN-пространство, $p \in (1, +\infty)$ — некоторое число. Фиксируем в $\mathfrak{M}(X)$ какую-нибудь единицу $\mathbb{1} = \mathbb{1}(\mathfrak{M}(X))$ и пусть $Y = \mathfrak{M}(X)_{\mathbb{1}}$ есть порождённое ею KN-пространство ограниченных элементов в $\mathfrak{M}(X)$.

Определение 2.3.1. Полагаем

$$X_p = \{x \in \mathfrak{M}(X) : |x|^p \in X\}, \qquad (3.1)$$

$$\|x\|_{X_p} = (\||x|^p\|_X)^{\frac{1}{p}} \text{ для } x \in X_p . \qquad (3.2)$$

Предложение 2.3.2. $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ есть банахово KN-пространство и фундамент в $\mathfrak{M}(X)$. Более того

$$X_p = X^{1-s} Y^s , \text{ где } s = \frac{p-1}{p} , \qquad (3.3)$$

причём равенство имеет место как по запасу элементов, так и по норме.

Действительно, для любого $x \in \mathfrak{M}(X)$ имеем, очевидно[x]

$$\inf\{\lambda>0: |x| \leq \lambda u^{1-s} v^s, \text{ где } u \in X_+, \|u\|_X \leq 1, v \in Y_+, \|v\|_Y \leq 1\} =$$

$$= \inf\{\lambda>0: |x| \leq \lambda u^{1-s} \mathbb{1}^s, \text{ где } u \in X_+, \|u\|_X \leq 1\} =$$

$$= \inf\{\lambda>0: |x| \leq \lambda u^{\frac{1}{p}}, \text{ где } u \in X_+, \|u\|_X \leq 1\} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{при } x \notin X_p \\ \|x\|_{X_p} & \text{при } x \in X_p . \end{cases}$$

Это предложение показывает, что даваемая определением 2.3.I конструкция есть частный случай конструкции, изучаемой в предыдущем параграфе.

З а м е ч а н и е 2.3.3. Пространство $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ зависит от выбора единицы $\mathbb{1}(\mathfrak{M}(X))$. Однако пространства, получающиеся при различном выборе указанной единицы, оказываются алгебраически и порядково изоморфными и изометричными. Сказанное будет доказано в § 13 п.I.

Т е о р е м а 2.3.4. (а) Пространство $(X_p)^*$ есть КВ-пространство.

(б) Пространство X_p (b)-рефлексивно тогда и только тогда, когда X есть КВ-пространство.

(в) Пространство $(X_p)^{**}$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X^*})_p$, где $\overline{X^*}$ есть сопряжённое в смысле Накано к банахову сопряжённому X^*, а $(\overline{X^*})_p$ получается из $\overline{X^*}$ согласно определению 2.3.I.

---

x) Мы, как обычно, считаем, что инфимум пустого подмножества множества $(-\infty, +\infty)$ равен $+\infty$.

Доказательство см. в § 13 п.2.

Заметим, что в работе (Крейн, Семёнов, Петунин [1], следствие 5.1) дано лишь достаточное условие (b)-рефлексивности пространства X_ρ : для того чтобы X_ρ было (b)-рефлексивно, достаточно, чтобы X было (b)-рефлексивно. Это утверждение является тривиальным следствием нашей теоремы 2.3.4б, ибо всякое (b)-рефлексивное X является КВ-пространством по теореме Огасавара (см. Вулих [5], стр. 294).

Следствие 2.3.5. Пространство $(X_\rho)^{****}$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{\overline{X^*}}^*)_\rho$.

Следствие 2.3.6. Пусть норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна и пусть $\overline{X}$ тотально на X. Тогда пространство X_ρ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X_\rho})^*$.

Действительно, ясно, что норма в X_ρ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна и что $\overline{X_\rho}$ тотально на X_ρ. Кроме того, $\overline{X_\rho}$ есть КВ-пространство в силу теоремы 2.3.4а, откуда $(\overline{X_\rho})^* = \overline{\overline{X_\rho}}$. Остаётся применить теорему 0.5.9.

§ 4. О пространствах типа $\varphi(X_0, X_1)$.

Напомним (см. определение 2.1.6), что всюду в главе II W означает произвольное расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$, $M = W_{\mathbb{1}(W)}$ – соответствующее K^N-пространство ограниченных элементов, X_0 и X_1 суть банаховы KN-пространства, являющиеся идеалами в W.

I. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, $X = \varphi(X_0, X_1)$. Ясно, что $X_0 \cap X_1 \subset X$. Через X^*_{min} будем обозначать совокупность всех $F \in X^*$ таких, что F есть минимальное распространение на X своего сужения $F|_{X_0 \cap X_1}$ (см. определение I.2.I). Тогда X^*_{min} естественно вкладывается как идеал в $(X_0 \cap X_1)^*$, если каждому $F \in X^*_{min}$ сопоставить его сужение на $X_0 \cap X_1$. Аналогично, если $X_0 \cap X_1$ плотно в X_i $(i=0,1)$ по норме, то, сопоставив каждому $f \in X_i^*$ его сужение на $X_0 \cap X_1$, мы получим вложение X_i^* в $(X_0 \cap X_1)^*$. В этом случае, вложив X_0^* и X_1^* в $(X_0 \cap X_1)^*$, можно (см. определение 2.I.7) образовать пространство $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$, являющееся идеалом в $(X_0 \cap X_1)^*$.

Теорема 2.4.I. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, $X = \varphi(X_0, X_1)$ и пусть $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Тогда после указанного вложения X^*_{min}, X_0^* и X_1^* в $(X_0 \cap X_1)^*$ справедливо равенство

$$X^*_{min} = \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*) \tag{4.1}$$

по запасу элементов и

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \le \|F\|_{X^*} \le 2\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \text{ при } F \in X^*_{min}. \tag{4.2}$$

Если вдобавок $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (I.4) и (I.5) удовлетворяют Δ_2-условию (см. Красносельский и Рутицкий [I], стр. 35) при всех значениях аргумента, то $X_0 \cap X_1$

$$X^*_{min} = X^*. \tag{4.3}$$

Доказательство см. в § 14.

2. Далее в этом параграфе нигде не требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно по норме в X_0 или X_1, но будем до конца этого параграфа предполагать, что в W имеется фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой.

Теорема 2.4.2. Пусть $\varphi \in \mathfrak{N}_2^0$, $X = \varphi(X_0, X_1)$.

(а) Если нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0,1)$ универсально монотонно полны, то этим же свойством обладает норма $\|\cdot\|_X$.

(б) Пусть нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$ универсально монотонно полны и универсально полунепрерывны. Тогда этими же двумя свойствами обладает и норма $\|\cdot\|_X$. При этом для любого $x \in X_+$ существуют $x_i \in (X_i)_+$, такие что $\|x_i\|_{X_i} \le 1$ $(i = 0,1)$ и $x \le \lambda \varphi(x_0, x_1)$, где $\lambda = \|x\|_X$. Иными словами, в этом случае среди чисел λ из определения 2.1.7 существует наименьшее.

(в) Пусть нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0,1)$ универсально полунепрерывны и пусть N - функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (1.4) и (1.5) (см. предложение 2.1.5) удовлетворяют Δ_2 -условию при всех ξ. Тогда и норма $\|\cdot\|_X$ универсально полунепрерывна.

Доказательство см. в § 15.

Замечание 2.4.3. В частности, в случае, когда $\varphi(\xi,\eta) = \xi^{1-s}\eta^s$ $(0 < s < 1)$, из универсальной полунепрерывности норм $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0,1)$ следует, что и норма $\|\cdot\|_{X_0^{1-s}X_1^s}$ универсально полунепрерывна. Однако, если на функцию $\varphi \in \mathfrak{N}_2^0$ не накладывать никаких ограничений, то из универсальной полунепрерывности норм $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i = 0,1)$ НЕ следует полунепрерывность нормы $\|\cdot\|_X$. Таким образом, в последнем утверждении теоремы 2.4.2 сделанное ограничение на функцию φ отбросить нельзя. Соответствующий пример приведён в § 15 (см. пример 2.15.5).

3. Определение 2.4.4. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$.

(а) Пара (φ_1, φ_2) называется СОГЛАСОВАННОЙ, если

$$\left((\varphi_1(X_0,X_1))', \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}\right) = \left(\varphi_2(X_0',X_1'), \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}\right) \quad (4.4)$$

при всевозможных W, $\mathbb{I}(W)$, L, X_0, X_1.

(б) Пара (φ_1, φ_2) называется СЛАБО СОГЛАСОВАННОЙ, если

$$(\varphi_1(X_0,X_1))' = \varphi_2(X_0',X_1') \quad (4.5)$$

по запасу элементов при всевозможных W, $\mathbb{I}(W)$, L, X_0, X_1.

Следующие две теоремы дают исчерпывающее описание всех согласованных и слабо согласованных пар.

Теорема 2.4.5. (а) Для любых $A \in (0,+\infty)$, $s \in (0,1)$ положим

$$\varphi_1(\xi,\eta) = A\xi^{1-s}\eta^s,\ \varphi_2(\xi,\eta) = A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s \text{ при } (\xi,\eta)\in R_+^2 . \quad (4.6)$$

Тогда пара (φ_1, φ_2) – согласована.

(б) Обратно, для любой согласованной пары (φ_1, φ_2) найдутся $A \in (0,+\infty)$, $s \in (0,1)$, такие что справедливо (4.6).

Доказательство см. в § 16.

Теорема 2.4.6. (а) Для любой $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$ пара $(\varphi, \hat{\varphi})$ слабо согласована. При этом

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0',X_1')} \le \|\cdot\|_{(\varphi(X_0,X_1))'} \le 2\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0',X_1')} \quad (4.7)$$

при всевозможных W, $\mathbb{I}(W)$, L, X_0, X_1

(б) Обратно, пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_2$ и пара (φ_1, φ_2) слабо согласована. Тогда существует $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0$, такая что φ эквивалентна φ_1, а $\hat{\varphi}$ эквивалентна φ_2 (см.определение 2.1.10).

Доказательство см.в § 17.

З а м е ч а н и е 2.4.7. Неравенство (4.7) является неулучшаемым в следующем смысле: пусть числа $c_1, c_2 > 0$ таковы, что

$$c_1 \|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leq c_2 \|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')} \quad (4.8)$$

при всевозможных $\varphi \in \mathfrak{A}_2^0, W, \mathbb{1}(W), L, X_0, X_1$. Тогда $c_1 \leq 1, c_2 \geq 2$.

Действительно, возьмём произвольное $s \in (0,1)$ и примем $\varphi(\xi, \eta) = \xi^{1-s}\eta^s$. Тогда $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \dfrac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} \cdot \xi^{1-s}\eta^s$. Но в силу теоремы 2.4.5 пара $(\xi^{1-s}\eta^s, \xi^{1-s}\eta^s)$ – согласована. Отсюда следует, что

$$c_1 \|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')} = c_1 s^s(1-s)^{1-s} \|\cdot\|_{(X_0')^{1-s}(X_1')^s} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} =$$

$$= \|\cdot\|_{(X_0')^{1-s}(X_1')^s} \leq c_2 \|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0', X_1')} = c_2 s^s(1-s)^{1-s} \|\cdot\|_{(X_0')^{1-s}(X_1')^s}.$$

Поэтому $c_1 \leq \dfrac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} \leq c_2$. Остаётся заметить, что $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} = 1$ и что при $s = \dfrac{1}{2}$ будет $\dfrac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} = 2$.

§ 5. Приложения к общей теории банаховых структур

По-прежнему W есть произвольное расширенное К-пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$. В этом параграфе будем дополнительно предполагать, что в W имеется фундамент L, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Через J обозначаем функционал, задающий норму на L. Напомним, что $M = W_{\mathbb{1}(W)}$ есть K^N-пространство ограниченных элементов из W.

Через L_2 обозначаем пространство, полученное из L применением определения 2.3.1 с $p = 2$, то есть

$$L_2 = \{x \in W : x^2 \in L\}, \tag{5.1}$$

$$\|x\|_{L_2} = (\|x^2\|_L)^{\frac{1}{2}} \text{ для } x \in L_2 . \tag{5.2}$$

Наконец, всюду в этом параграфе через X обозначено произвольное банахово K^N-пространство, являющееся фундаментом в W. Подчеркнём, что никаких дополнительных ограничений на X мы не накладываем.

1. Т е о р е м а 2.5.1. Для любых $f \in X^*_{ant}$ и $g \in (X')^*_{ant}$ справедливо

$$f D g . \tag{5.3}$$

Доказательство см. в § 18.

В связи с теоремой 2.5.1 естественно возникает следующий вопрос. Пусть Y есть произвольный (уже не обязательно нормированный) фундамент в W, такой что $\bar{Y}$ тотально на Y, и пусть $f \in \tilde{Y}_{ant}$, $g \in (\tilde{Y}')_{ant}$. Будет ли справедливо соотношение $f D g$? Несложные примеры показывают, что указанное соотношение может не иметь места. Тем самым теорема 2.5.I не допускает непосредственного обобщения на ненормированный случай.

Теорема 2.5.2. РАВЕНСТВО

$$X^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}} = L_2 \qquad (5.4)$$

СПРАВЕДЛИВО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Доказательство см в § I8.

Прежде чем формулировать следующую теорему, заметим, что если $z \in L$, $x \in X$, $x' \in X'$ и $z = xx'$, то справедливо следующее неравенство, обычно называемое неравенством Гёльдера: $\|z\|_L \le \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$. Сказанное, разумеется, очевидно, в силу самого определения нормы $\|\cdot\|_{X'}$.

Теорема 2.5.3. 1) ДЛЯ ЛЮБОГО $z \in L$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $x \in X$, $x' \in X'$, ЧТО $z = xx'$ И

$$\|z\|_L \ge (1-\varepsilon)\|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}.$$

2) ЕСЛИ НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНА И УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНА, ТО УТВЕРЖДЕНИЕ I) ДОПУСКАЕТ СЛЕДУЮЩЕЕ УСИЛЕНИЕ: ДЛЯ ЛЮБОГО $z \in L$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $x \in X$, $x' \in X'$, ЧТО $z = xx'$ И $\|z\|_L = \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$.

Доказательство см. в § I8.

Некоторые другие результаты, дополняющие теорему 2.5.3, приведены в гл. IУ § I п. 2.

Замечание 2.5.4. В формулировке утверждения 2) теоремы 2.5.3 требование универсальной полунепрерывности и универсальной монотонной полноты нормы на X нельзя опустить.

Приведём соответствующий пример. Полагаем: $W = s$ (обычное пространство всех последовательностей вещественных чисел), $L = \ell^1$, $X = c_0$. Тогда, очевидно, $X' = \ell^1$. Возьмём произвольный элемент пространства $L = \ell^1$, у которого бесконечное множество координат отлично от нуля. Легко видеть, что его нельзя разложить в такое произведение, о котором говорится в утверждении 2) теоремы 2.5.3, но для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение, гарантируемое утверждением I) этой теоремы.

2. Так как X есть произвольное банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в W, то, вообще говоря, X не содержится в L и не содержит M. Однако справедлива следующая

Т е о р е м а 2.5.5. Пусть $\mathfrak{A}(W) \in L$, то есть $M \subset L$. Тогда существует такой $y \in W_+$, что

$$M \subset X[y] \subset L, \qquad (5.5)$$

где

$$X[y] = \{xy : x \in X\}.$$

Доказательство см. в § 18.

З а м е ч а н и е 2.5.6. Введём на $X[y]$ норму, положив

$$\|x\|_{X[y]} = \|xy^{-1}\|_X .$$

Тогда $X[y]$ становится банаховым K^N-пространством, являющимся фундаментом в W, которое алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству X. Таким образом, например, любое банахово K^N-пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, путём умножения на некоторую "весовую" функцию, можно превратить в такое же пространство, но "зажатое" между $L^\infty[0,1]$ и $L^1[0,1]$

§ 6. Приложения к банаховым пространствам с безусловными базисами

Две теоремы о банаховых пространствах с безусловными базисами, приводимые в этом параграфе, являются следствиями теоремы 2.5.3 и будут доказаны в § 18.

Всюду в этом параграфе E есть произвольное банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$; $\{f_k\}$ — есть биортогональная с $\{e_k\}$ система линейных непрерывных функционалов[x)].

Т е о р е м а 2.6.1. ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА E С БЕЗУСЛОВНЫМ БАЗИСОМ $\{e_k\}$ СУЩЕСТВУЕТ КОНСТАНТА $c>0$, ОБЛАДАЮЩАЯ СЛЕДУЮЩИМ СВОЙСТВОМ: ДЛЯ ЛЮБОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\lambda=\{\lambda_k\}\in\ell^1$ НАЙДУТСЯ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{u_k\}, \{v_k\}$, ТАКИЕ ЧТО

1) $u_k v_k=\lambda_k$ ПРИ ВСЕХ k;

2) РЯДЫ $\sum\limits_k u_k e_k$, $\sum\limits_k v_k f_k$ СХОДЯТСЯ ПО НОРМАМ ПРОСТРАНСТВ E И E^* К НЕКОТОРЫМ $x\in E$ И $f\in E^*$;

3) СПРАВЕДЛИВО НЕРАВЕНСТВО

$$\|\lambda\|_{\ell^1}\geqslant c\|x\|_E\cdot\|f\|_{E^*}.$$

Введём следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2.6.2. Будем говорить, что базис $\{e_k\}$ удовлетворяет условию ($\bigstar$), если из того, что $\{a_k\},\{b_k\}\in S, |a_k|\leq|b_k|$ при всех k и ряд $\sum\limits_k b_k e_k$ сходится, следует, что $\|\sum\limits_k a_k e_k\|_E\leq\|\sum\limits_k b_k e_k\|_E$.

x) В терминологии из теории базисов в банаховых пространствах мы следуем Дэю (см. Дэй [1], гл. IV).

Хорошо известно, что для любого банахова пространства E с безусловным базисом $\{e_k\}$ существует эквивалентная перенормировка, после которой базис $\{e_k\}$ будет удовлетворять условию $(\bigstar)$.

Теорема 2.3.8. ПУСТЬ БАЗИС $\{e_k\}$ ОГРАНИЧЕННО ПОЛОН (см. Дэй [1], стр. 119) И УДОВЛЕТВОРЯЕТ УСЛОВИЮ $(\bigstar)$. ТОГДА ДЛЯ ЛЮБОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\lambda = \{\lambda_k\} \in \ell^1$ НАЙДУТСЯ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{u_k\}, \{v_k\}$, ТАКИЕ ЧТО

1) $u_k v_k = \lambda_k$ ПРИ ВСЕХ k;

2) РЯД $\sum_k u_k e_k$ СХОДИТСЯ ПО НОРМЕ К НЕКОТОРОМУ $x \in E$, А РЯД $\sum_k v_k f_k$ СЛАБО* СХОДИТСЯ К НЕКОТОРОМУ $f \in E^*$;

3) $\|\lambda\|_{\ell^1} = \|x\|_E \cdot \|f\|_{E^*}$.

§ 7. Доказательства предложений 2.1.4, 2.1.5, 2.1.8, 2.1.9. Вспомогательные сведения о вогнутых функциях и банаховых структурах

1. В этом пункте будут доказаны предложения 2.1.4 и 2.1.5.

Лемма 2.7.1. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций. Для $\xi, \eta \geq 0$ положим

$$\varphi(\xi,\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta = 0 \\ \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) & \text{при } \eta > 0 \end{cases}, \quad \psi(\xi,\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi = 0 \\ \xi N^{-1}(\eta\xi^{-1}) & \text{при } \xi > 0 \end{cases}. \tag{7.1}$$

Тогда $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_2^0$ и $\psi = \hat{\varphi}$, $\varphi = \hat{\psi}$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что правые части равенств (7.1) получаются одно из другого перестановкой функций $M(\xi)$ и $N(\xi)$ и аргументов ξ и η. Поэтому достаточно только доказать, что $\varphi \in \mathfrak{N}_2^0$ и $\psi = \hat{\varphi}$. Пусть

$(\xi_0,\eta_0)\in R^2_+$, покажем, что φ непрерывна в точке (ξ_0,η_0). Если $\eta_0>0$, то это очевидно. Пусть теперь $\eta_0=0$. Тогда для любой точки $(\xi,\eta)\in R^2_+$ и любого числа $\lambda>1$ в силу неравенства Юнга (Красносельский и Рутицкий [I], стр. 24) имеем

$$|\varphi(\xi,\eta)-\varphi(\xi_0,\eta_0)|=\varphi(\xi,\eta)=\eta M^{-1}(\xi\eta^{-1})=\eta\left[\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot M^{-1}(\xi\eta^{-1})\right]\le\eta\left[N(\lambda)+\right.$$
$$\left.+M\left(\frac{1}{\lambda}\cdot M^{-1}(\xi\eta^{-1})\right)\right]\le\eta\left[N(\lambda)+\frac{1}{\lambda}M(M^{-1}(\xi\eta^{-1}))\right]=\eta N(\lambda)+\xi\lambda^{-1} \text{ при } \eta>0.$$

Отсюда ясно, что φ непрерывна в точке (ξ_0,η_0). Итак, φ непрерывна на R^2_+. Для доказательства вогнутости φ достаточно убедиться, что $\varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)\ge\frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_1,\eta_1)+\varphi(\xi_2,\eta_2)\right]$ при всех $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)\in R^2_+$, таких что $\eta_1,\eta_2>0$. Используя вогнутость функции $M^{-1}(\xi)$, имеем $\varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=$

$$=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\cdot M^{-1}\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{\eta_1+\eta_2}\right)=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\cdot M^{-1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\cdot\frac{\xi_1}{\eta_1}+\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\cdot\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)\ge\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\left[\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\cdot M^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)+\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\cdot M^{-1}\left(\frac{\xi_2}{\eta_2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_1,\eta_1)+\varphi(\xi_2,\eta_2)\right].$$

Итак, φ – вогнута. Равенства $\varphi(\xi,0)=\varphi(0,\eta)=0$ при всех $\xi,\eta\ge0$ – очевидны. Также очевидно, что $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta,\eta)=+\infty$ при всех $\eta>0$, ибо $\lim\limits_{\xi\to+\infty}M^{-1}(\xi)=+\infty$. Далее, так как $\lim\limits_{\xi\to0}\frac{M^{-1}(\xi)}{\xi}=+\infty$, то $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\varphi(\xi,\alpha)=+\infty$ при всех $\xi>0$. Таким образом, $\varphi\in\mathfrak{M}_2$. Положительная однородность φ очевидна, поэтому $\varphi\in\mathfrak{M}^0_2$. Осталось доказать, что $\psi=\hat{\varphi}$. Покажем сначала, что $\varphi(\alpha,\beta)\psi(\xi,\eta)\le\alpha\xi+\beta\eta$ при всех $\alpha,\beta,\xi,\eta\ge0$. Это очевидно, если $\alpha\beta\xi\eta=0$. Если же $\alpha\beta\xi\eta\ne0$, то в силу неравенства Юнга имеем $\varphi(\alpha,\beta)\psi(\xi,\eta)=\beta M^{-1}(\alpha\beta^{-1})\xi N^{-1}(\eta\xi^{-1})\le$
$\le\beta\xi\left[M(M^{-1}(\alpha\beta^{-1}))+N(N^{-1}(\eta\xi^{-1}))\right]=\alpha\xi+\beta\eta$. Из доказанного неравенства следует, что

$$\psi(\xi,\eta) \le \inf_{\alpha,\beta>0} \frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)}, \quad (\xi,\eta)\in R^2_+. \tag{7.2}$$

Докажем, что в (7.2) имеет место равенство. Если $\xi=0$ или $\eta=0$, то это тривиально (фиксируем один из аргументов α или β, а другой устремляем к $+\infty$). Пусть $\xi,\eta>0$. Положим $u=N^{-1}(\eta\xi^{-1})$. Существует $x>0$, такой что $M(x)=ux-N(u)$ (см. Красносельский и Рутицкий [I], стр. 24). Положим $\beta=1$, $\alpha=M(x)$. Тогда $\eta=\xi N(u)$, следовательно,

$$\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\varphi(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha\xi+\eta}{\varphi(\alpha,1)}=\frac{[ux-N(u)]\xi+\xi N(u)}{M^{-1}(\alpha)}=\frac{ux\xi}{x}=u\xi=\psi(\xi,\eta).$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2.1.5. Из леммы 2.7.1 прямо следует (а). Докажем (б). Единственность требуемой N-функции очевидна. Так как $\varphi(\xi,1)$ строго возрастает на $[0,+\infty)$ и $\lim_{\xi\to+\infty}\varphi(\xi,1)=+\infty$, то она имеет однозначную обратную функцию на $[0,+\infty)$. Пусть $M(\xi)$ есть чётное продолжение на $(-\infty,+\infty)$ упомянутой обратной функции. Очевидно, что $M(\xi)$ непрерывна и выпукла на $(-\infty,+\infty)$, строго возрастает на $[0,+\infty)$, $M(0)=0$, $\lim_{\xi\to+\infty}M(\xi)=+\infty$. Кроме того, $\lim_{\xi\to+\infty}\frac{M(\xi)}{\xi}=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\eta}{\varphi(\eta,1)}=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\varphi(1,\eta^{-1})}=+\infty$, $\lim_{\xi\to 0}\frac{M(\xi)}{\xi}=\lim_{\eta\to 0}\frac{\eta}{\varphi(\eta,1)}=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\varphi(1,\eta^{-1})}=0$. Таким образом, $M(\xi)$ есть N-функция. Остаётся заметить, что при всех $\xi,\eta>0$

$$\eta M^{-1}(\xi\eta^{-1})=\eta\varphi(\xi\eta^{-1},1)=\varphi(\xi,\eta).$$

Наконец, предложение 2.1.4 есть очевидное следствие леммы 2.7.1 и предложения 2.1.5.

2. Доказательство предложения 2.1.8. Положим для краткости $X=\varphi(X_0,X_1)$. Ясно, что из $x\in X$, $y\in W, |y|\le|x|$ следует, что $y\in X$ и $\|y\|_X\le\|x\|_X$. Пусть теперь $y_1,y_2\in X$. Покажем, что

$$y_1+y_2\in X \quad \text{и} \quad \|y_1+y_2\|_X\le\|y_1\|_X+\|y_2\|_X. \tag{7.3}$$

Пусть $\|y_i\|_X=\lambda_i$ $(i=1,2)$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$. Тогда $|y_i|\le(\lambda_i+\varepsilon)\varphi(x_0^i,x_1^i)$ для подходящих $x_0^i\in X_0, x_1^i\in X_1$ с $\|x_0^i\|_{X_0}\le 1$, $\|x_1^i\|_{X_1}\le 1$ $(i=1,2)$. В силу вогнутости φ имеем

$$|y_1+y_2|\le(\lambda_1+\varepsilon)\varphi(x_0^1,x_1^1)+(\lambda_2+\varepsilon)\varphi(x_0^2,x_1^2)=(\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon)\Big[\frac{\lambda_1+\varepsilon}{\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon}\cdot\varphi(x_0^1,x_1^1)+$$

$$+\frac{\lambda_2+\varepsilon}{\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon}\cdot\varphi(x_0^2,x_1^2)\Big]\le(\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon)\varphi\Big(\frac{\lambda_1+\varepsilon}{\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon}\cdot x_0^1+$$

$$+\frac{\lambda_2+\varepsilon}{\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon}\cdot x_0^2,\ \frac{\lambda_1+\varepsilon}{\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon}\cdot x_1^1+\frac{\lambda_2+\varepsilon}{\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon}\cdot x_1^2\Big).$$

Отсюда легко следует (7.3). Положительная однородность функционала $\|\cdot\|_X$ – очевидна. Таким образом, уже установлено, что X есть идеал в W и $\|\cdot\|_X$ есть монотонная полунорма на X. Пусть теперь $x\in X_+$ и $\|x\|_X=0$. Покажем, что $x=0$. Для каждого $n\in N$ найдём $x_i^n\in(X_i)_+$ с $\|x_i^n\|_{X_i}\le 1$ $(i=0,1)$, такие что $x\le n^{-1}\varphi(x_0^n,x_1^n)$. Но $n^{-1}\varphi(x_0^n,x_1^n)\le\varphi(n^{-1}x_0^n,n^{-1}x_1^n)$ в силу вогнутости φ, а $\varphi(n^{-1}x_0^n,n^{-1}x_1^n)\xrightarrow{(0)}0$ по теореме об (0) –непрерывности функций (Канторович, Вулих, Пинскер [1], стр.148), поэтому $x=0$. Осталось проверить полноту X по норме. Напомним (Абрамович [1]), что KN –пространство

Y полно по норме, если из того, что $y_n \in Y_+ (n \in N)$ попарно дизъюнктны и $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y < +\infty$, следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (0)– сходится в Y. Пусть $x_n \in X_+ (n \in N)$ попарно дизъюнктны и $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < +\infty$, докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (0) – сходится в X. Положим $\|x_n\|_X = \lambda_n$. Можно считать, что $\lambda_n < \frac{1}{2}$ при всех n. Имеем $x_n \leq 2\lambda_n \varphi(x_0^n, x_1^n)$ для подходящих $x_i^n \in (X_i)_+$ с $\|x_i^n\|_{X_i} \leq 1$ $(i = 0,1)$. Можно, очевидно, считать, что $0 x_n D = 0 x_0^n D = 0 x_1^n D$ $(n \in N)$. Положим $x^i = \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_n x_i^n$ $(i = 0,1)$, где сумма ряда понимается по отношению к сходимости по норме. Тогда при всех $K \in N$ имеем $\sum_{n=1}^{K} x_n \leq \sum_{n=1}^{K} 2\lambda_n \varphi(x_0^n, x_1^n) \leq$

$$\leq \sum_{n=1}^{K} \varphi(2\lambda_n x_0^n, 2\lambda_n x_1^n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{K} 2\lambda_n x_0^n, \sum_{n=1}^{K} 2\lambda_n x_1^n\right) \leq \varphi(x^0, x^1),$$

поэтому существует $\sup_K \sum_{n=1}^{K} x_n \in X$.

Предложение 2.1.8 доказано.

3. Лемма 2.7.2. Пусть $\mathcal{Y}$ есть совокупность всех KN-пространств ограниченных элементов, являющихся фундаментами в S и пусть $\varphi_1 \varphi_2 \in \mathfrak{N}_2$ таковы, что для любых $X_0, X_1 \in \mathcal{Y}$ справедливо равенство

$$\varphi_1(X_0, X_1) = \varphi_2(X_0, X_1) \tag{7.4}$$

по запасу элементов. Тогда φ_1 и φ_2 эквивалентны (см. определение 2.1.10).

Доказательство. Нужно доказать существование констант $C_1, C_2 > 0$, таких что справедливо (1.12) из § 1. Достаточно, очевидно, доказать существование C_1. Допустим противное. Найдутся последовательности $\lambda_n > 0, \mu_n > 0$ $(n \in N)$, такие, что $n\varphi_1(\lambda_n, \mu_n) \leq \varphi_2(\lambda_n, \mu_n)$. Обозначим $\lambda = \{\lambda_n\}$,

$\mu = \{\mu_n\}$. Примем $X_0 = s_\lambda, X_1 = s_\mu$. Тогда $\varphi_i(X_0, X_1) = s_{\varphi_i(\lambda,\mu)}$ $(i=0,1)$. Остаётся заметить, что $\varphi_2(\lambda,\mu) \in \varphi_2(X_0, X_1)$, но $\varphi_2(\lambda,\mu) \notin \varphi(X_0,X_1)$. Противоречие.

Доказательство предложения 2.1.9.

(а) Пусть $\xi > 0, \eta > 0$ – любые. Примем $W = X_0 = X_1 = R^1$ по запасу элементов, $\mathbb{1}(W) = 1$, $\|x\|_{X_0} = \frac{|x|}{\xi}$, $\|x\|_{X_1} = \frac{|x|}{\eta}$. Тогда $\|x\|_{\varphi_1(X_0,X_1)} = \frac{|x|}{\varphi_1(\xi,\eta)}$, $\|x\|_{\varphi_2(X_0,X_1)} = \frac{|x|}{\varphi_2(\xi,\eta)}$, откуда $\varphi_1(\xi,\eta) = \varphi_2(\xi,\eta)$. Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$. Докажем (б). Если (I.II) имеет место по запасу элементов при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), X_0, X_1$, то φ_1 и φ_2 эквивалентны в силу леммы 2.7.2. Пусть теперь $c_1, c_2 > 0$ таковы, что выполнено (I.12) из § 1. Тогда для $x \in W, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1$ из $|x| \le \lambda\varphi_1(|x_0|,|x_1|)$ следует $|x| \le (\lambda c_2)\varphi_2(|x_0|,|x_1|)$, а из $|x| \le \lambda\varphi_2(|x_0|,|x_1|)$ следует $|x| \le \left(\frac{\lambda}{c_1}\right)\varphi_1(|x_0|,|x_1|)$. Поэтому при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), X_0, X_1$ справедливо (I.II) по запасу элементов и выполнено неравенство (I.I3). Предложение 2.1.9 доказано.

4. Лемма 2.7.3. Пусть вещественная функция g на $(0, +\infty)$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) g абсолютно непрерывна в любом конечном промежутке;

(б) $g(t) > 0$ при всех $t \in (0,+\infty)$, $g(1) = 1$;

(в) для любых $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$ справедливо

$$\frac{\beta g(\alpha x)}{g(\beta x)} + \frac{(1-\beta) g[(1-\alpha)y]}{g[(1-\beta)y]} \le 1. \qquad (7.5)$$

Тогда существует $\rho \in [0,1]$ такое, что $g(t) \equiv t^{\rho}$ при всех $t \in (0,+\infty)$.

Доказательство. Пусть T – множество всех $t \in (0,+\infty)$, в которых существует обыкновенная конечная производная $g'(t)$. Зафиксируем $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$. Положим $f(t) = \frac{g(2tt_1)}{2g(t_1)} + \frac{g[2(1-t)t_2]}{2g(t_2)}$ $(0<t<1)$. Взяв в (7.5) $\alpha = t, \beta = \frac{1}{2}, x = 2t_1, y = 2t_2$, видим, что $f(t) \leq 1$ при всех $t \in (0,1)$. С другой стороны, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Следовательно, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, то есть $\frac{t_1 g'(t_1)}{g(t_1)} - \frac{t_2 g'(t_2)}{g(t_2)} = 0$. Таким образом, функция $\frac{tg'(t)}{g(t)}$ постоянна на T. Пусть $\frac{tg'(t)}{g(t)} = \rho$ при всех $t \in T$. В силу абсолютной непрерывности функции g отсюда следует, что $g(t) = ct^{\rho}$, где $c = const$. Так как $g(1) = 1$, то $c = 1$. Наконец, из (B) имеем $\alpha^{\rho}\beta^{1-\rho} + (1-\alpha)^{\rho}(1-\beta)^{1-\rho} \leq 1$ при всех $\alpha, \beta \in (0,1)$, откуда $\rho \in [0,1]$.

Лемма доказана. Заметим, что функция $g(t) = t^{\rho}$ $(0 \leq \rho \leq 1)$ удовлетворяет условиям леммы.

5. Лемма 2.7.4. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций, удовлетворяющих Δ_2-условию при всех $\xi \geq 0$, и пусть φ из (1.4). Тогда существует число $b > 2$, такое что

$$\varphi(\xi,\eta) \leq \varphi\left(\frac{1}{2}b\xi, \frac{1}{2}\eta\right), \varphi(\xi,\eta) \leq \varphi\left(\frac{1}{2}\xi, \frac{1}{2}b\eta\right) \text{ при } \xi,\eta \geq 0. \quad (7.6)$$

Доказательство. По условию существуют константы $k > 2$, $l > 1$, такие что $M(2\xi) \leq kM(\xi), M(\xi) \leq \frac{1}{2l}M(l\xi)$ при всех $\xi \geq 0$ (см. Красносельский и Рутицкий [1], стр. 38, 39). Положим $b = max\{k, 2l\}$. Так как $M(2\xi) \leq kM(\xi)$, то

$2M^{-1}(\xi) \le M^{-1}(k\xi)$, а так как $M(\xi) \le \frac{1}{2l} M(l\xi)$, то $M^{-1}(2l\xi) \le$ $\le l M^{-1}(\xi)$. Если $\xi = 0$ или $\eta = 0$, то $\varphi(\xi,\eta) = 0$ и требуемые неравенства выполнены. Пусть $\xi, \eta > 0$, тогда

$$\varphi\left(\frac{1}{2}b\xi, \frac{1}{2}\eta\right) \ge \varphi\left(\frac{1}{2}k\xi, \frac{1}{2}\eta\right) = \frac{1}{2}\eta M^{-1}(k\xi\eta^{-1}) \ge \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) = \varphi(\xi,\eta) \quad \text{и}$$
$$\varphi\left(\frac{1}{2}\xi, \frac{1}{2}b\eta\right) \ge \varphi\left(\frac{1}{2}\xi, l\eta\right) = l\eta M^{-1}\left(\frac{1}{2}\xi l^{-1}\eta^{-1}\right) \ge \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) = \varphi(\xi,\eta).$$

Лемма доказана.

6. Л е м м а 2.7.5. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций и пусть функция φ вычислена по формуле (1.4). Тогда для любых $u, v \in W_+$ справедливы равенства

$$\varphi(u,v) = vM^{-1}(uv^{-1}),\ \hat{\varphi}(u,v) = uN^{-1}(vu^{-1}). \tag{7.7}$$

Напомним, что u^{-1} есть элемент из W , такой что $e_u = e_{u^{-1}} = uu^{-1}$, где e_u есть след элемента u , то есть e_u есть проекция $\mathfrak{A}(W)$ на главную компоненту в W , порождённую u . Напомним также, что $M^{-1}(\xi)$ есть функция, обратная к $M(\xi)$, рассматриваемой при неотрицательных значениях аргумента.

Справедливость леммы 2.7.5 прямо следует из определения функции от элементов К-пространства (см. определение 1.1.1).

Л е м м а 2.7.6. Пусть $M(\xi)$ – N -функция и пусть φ вычислена по формуле (1.4). Пусть $u, v, w \in W_+$, причём $w \le \varphi(u,v)$. Положим $u' = vM(wv^{-1})$. Тогда $u' \le u$ и $w = \varphi(u', v)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Имеем $u' = vM(wv^{-1}) \le$ $\le vM(\varphi(u,v)v^{-1}) = vM(vM^{-1}(uv^{-1})v^{-1}) = u,\ \varphi(u',v) = vM^{-1}(vM(wv^{-1})v^{-1}) = w.$ Лемма доказана.

7. Л е м м а 2.7.7. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций и пусть функция φ вычислена по формуле (1.4). Через $M'(\xi)$ обозначаем правую производную от $M(\xi)$. Пусть $u, v \in W_+$, причём $e_u = e_v$. Положим

$$w = M'(M^{-1}(uv^{-1})),\ x = w^{-1},\ y = N(w)w^{-1}. \qquad (7.8)$$

Тогда

$$\varphi(u,v) = xu + yv,\ \hat{\varphi}(x,y) = e_u. \qquad (7.9)$$

Здесь e_u есть след элемента u.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем (см. Красносельский и Рутицкий [1], стр. 24)

$$\xi M'(\xi) = M(\xi) + N(M'(\xi)) \text{ при всех } \xi > 0. \qquad (7.10)$$

Теперь, используя лемму 2.7.5 и замечание 1.1.5, находим

$$\varphi(u,v) = vM^{-1}(uv^{-1}) = vw^{-1}wM^{-1}(uv^{-1}) = vw^{-1}M'(M^{-1}(uv^{-1}))M^{-1}(uv^{-1}) =$$
$$= vw^{-1}[M(M^{-1}(uv^{-1})) + N(M'(M^{-1}(uv^{-1})))] = vw^{-1}[uv^{-1} + N(w)] =$$
$$= w^{-1}u + N(w)w^{-1}v = xu + yv.$$

Аналогично,

$$\hat{\varphi}(x,y) = \hat{\varphi}(w^{-1}, N(w)w^{-1}) = w^{-1}N^{-1}(N(w)w^{-1}w) = w^{-1}w = e_w = e_u.$$

Лемма доказана.

8. Л е м м а 2.7.8. Пусть Y – KN-пространство, Y_1 – его фундамент, плотный в Y по норме. Тогда для любого $x \in Y_+$ существует последовательность $x_n \in Y_1$, такая что $0 \le x_n \uparrow x$ и $\|x - x_n\|_Y \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y_n \in Y_1\ (n \in N)$, $0 \le y_n \uparrow x$, $\|x - y_n\|_Y \to 0$. Тогда найдутся $y_n', y_n'' \in (Y_1)_+\ (n \in N)$, такие что $y_n' \wedge y_n'' = 0, y_n' + y_n'' = y_n, 0 y_n' 0 y_n \le \frac{1}{2} 0 y_n' 0 x, 0 y_n'' 0 y_n \ge \frac{1}{2} 0 y_n'' 0 x$. Положим $x_n'' = 0 y_n'' 0 x$. Так как $x_n'' \le 2 y_n$, то $x_n'' \in Y_1$. Из $0 \le x - x_n'' \le 2(x - y_n)$ следует, что $\| x - x_n'' \|_Y \to 0$. Остаётся положить $x_n = x_1'' \vee x_2'' \vee \ldots \vee x_n'' (n \in N)$. Лемма доказана.

9. Лемма 2.7.9. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N-функций, удовлетворяющих Δ_2-условию при всех значениях аргумента и пусть φ из (1.4). Пусть Y_i есть замкнутый по норме идеал в X_i, причём $\| \cdot \|_{Y_i}$ есть сужение нормы $\| \cdot \|_{X_i}$ на Y_i $(i = 0, 1)$. Положим $X = \varphi(X_0, X_1), Y = \varphi(Y_0, Y_1)$. Тогда

$$\| y \|_Y = \| y \|_X \quad \text{при всех } y \in Y, \tag{7.11}$$

где $\| \cdot \|_Y = \| \cdot \|_{\varphi(Y_0, Y_1)}$, $\| \cdot \|_X = \| \cdot \|_{\varphi(X_0, X_1)}$.

Доказательство. Фиксируем $y \in \varphi(Y_0, Y_1)$, пусть $\| y \|_X = \lambda$. Ясно, что $\| y \|_Y \ge \lambda$. Нужно доказать, что $\| y \|_Y \le \lambda$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $y \in Y$, то существуют $y_i \in (Y_i)_+$ $(i = 0, 1)$, такие что

$$|y| \le (\lambda + \varepsilon) \varphi(y_0, y_1). \tag{7.12}$$

Так как $\| y \|_X = \lambda < \lambda + \varepsilon$, то существуют $x_i \in (X_i)_+$, такие что $\| x_i \|_{X_i} \le 1$ $(i = 0, 1)$ и

$$|y| \le (\lambda + \varepsilon) \varphi(x_0, x_1). \tag{7.13}$$

Возьмём произвольное $m \in N$ и применим лемму 2.7.4 к (7.12), получим

$$|y| \le (\lambda + \varepsilon) \varphi\left(\frac{y_0}{2^m}, \left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_1 \right), \tag{7.14}$$

$$|y| \leq (\lambda+\varepsilon)\varphi\left(\left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_0, \frac{y_1}{2^m}\right). \tag{7.15}$$

Из (7.13) и (7.14) следует

$$|y| \leq (\lambda+\varepsilon)\varphi\left(x_0 \vee \frac{y_0}{2^m}, x_1 \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_1\right). \tag{7.16}$$

Теперь из (7.16) и (7.15) следует, что

$$|y| \leq (\lambda+\varepsilon)\varphi\left(\left(x_0 \vee \frac{y_0}{2^m}\right) \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_0, \left(x_1 \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_1\right) \vee \frac{y_1}{2^m}\right). \tag{7.17}$$

Положим $z_0 = \left(x_0 \vee \frac{y_0}{2^m}\right) \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_0$, $z_1 = \left(x_1 \wedge \left(\frac{b}{2}\right)^m \cdot y_1\right) \vee \frac{y_1}{2^m}$.

Ясно, что $z_0 \in Y_0$, $z_1 \in Y_1$, причём $\|z_0\|_{Y_0} \leq \|x_0\|_{X_0} + \left\|\frac{y_0}{2^m}\right\|_{Y_0} \leq$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^m}\|y_0\|_{Y_0}, \quad \|z_1\|_{Y_1} \leq \|x_1\|_{X_1} + \left\|\frac{y_1}{2^m}\right\|_{Y_1} \leq 1 + \frac{1}{2^m} \cdot \|y_1\|_{Y_1}.$$

Отсюда видно, что, взяв достаточно большое m, будем иметь $\|z_i\|_{Y_i} \leq 1+\varepsilon$ $(i=0,1)$. Поэтому $\|y\|_Y \leq (\lambda+\varepsilon)(1+\varepsilon)$.
Тем самым $\|y\|_Y \leq \lambda$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.
Лемма доказана.

§ 8. Некоторые леммы о пространствах непрерывных функций

Всюду в этом параграфе K означает произвольный бикомпакт, то есть бикомпактное хаусдорфово пространство, $rca(K)$ – пространство всех вещественных регулярных счётно аддитивных функций множества, определённых на σ-алгебре всех борелевских множеств из K (см. Данфорд и Шварц [1], стр. 262). Полагаем $rca^+(K) = \{\mu \in rca(K) : \mu \geq 0\}$, то есть $rca^+(K)$ есть пространство всех регулярных борелевских мер на K.

Для $\mu\in rca^+(K)$ через $L^1(\mu)$ обозначается пространство всех (классов) функций на K, суммируемых по мере μ. Напомним классическую теорему Рисса об общем виде линейного функционала (см. Данфорд и Шварц [I], стр. 288): между $C(K)^*$ и $rca(K)$ существует изометрический изоморфизм, сохраняющий отношение порядка, при котором соответственные элементы $f\in C(K)^*$ и $\mu\in rca(K)$ связаны соотношением

$$f(x)=\int_K x\,d\mu,\ x\in C(K). \tag{8.1}$$

Если $\mu\in rca(K)$, то через f_μ мы будем обозначать соответствующий функционал, если же $f\in C(K)^*$, то через μ_f обозначаем соответствующий элемент из $rca(K)$.

I. Лемма 2.8.I. (См., например, Бурбаки [2], гл. У, § 5, теорема 2).

Пусть $f\in C(K)^*_+$ и пусть $C^f(K)^*$ есть главная компонента в $C(K)^*$, порождённая f. Для любого $g\in C(K)^*$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) $g\in C^f(K)^*$;

(б) существует $\rho\in L^1(\mu_f)$, такая что $g(x)=\int_K x\rho\,d\mu_f$, $x\in C(K)$.

2. В этом пункте пусть $\varphi\in\mathfrak{M}^0_2$ и пусть $f,g\in C(K)^*_+$. Рассмотрим $\varphi(f,g)\in C(K)^*$, то есть значение функции $\varphi(\xi,\eta)$ на элементах f и g К-пространства $C(K)^*$. В следующей лемме даётся описание $\varphi(f,g)$ как функционала на $C(K)$.

Лемма 2.8.2. Пусть $\mu\in rca^+(K)$ и $\rho,q\in L^1(\mu)$, таковы, что[x)]

x) Указанные μ,ρ,q всегда существуют, например, можно принять $\mu=\mu_f+\mu_g$, $\rho=\frac{d\mu_f}{d\mu}$, $q=\frac{d\mu_g}{d\mu}$.

$$f(x)=\int_K xp\,d\mu,\ g(x)=\int_K xq\,d\mu,\ x\in C(K). \qquad (8.2)$$

Тогда

$$\varphi(f,g)(x)=\int_K x\varphi(p,q)\,d\mu,\ x\in C(K). \qquad (8.3)$$

Доказательство. Пусть Y есть главная компонента в $rca(K)$, порождённая μ. Сопоставив каждому элементу из Y соответствующий функционал на $C(K)$, мы получим изоморфизм К-пространства Y на некоторую главную компоненту в $C(K)^*$, содержащую f и g. Теперь остаётся только применить замечание I.I.3 и (Канторович, Вулих, Пинскер [I], стр. 148).

3. До конца этого параграфа фиксируем $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$ и число $s\in(0,1)$.

Лемма 2.8.3. Пусть $f,g\in C(K)^*_+$, $u,v\in C(K)_+$. Тогда

$$\varphi(f,g)(\hat{\varphi}(u,v))\leq f(u)+g(v), \qquad (8.4)$$

$$f^{1-s}g^s(u^{1-s}v^s)\leq (f(u))^{1-s}(g(v))^s. \qquad (8.5)$$

Здесь $\varphi(f,g)$ есть значение функции $\varphi(\xi,\eta)$ на элементах f,g К-пространства $C(K)^*$, $f^{1-s}g^s$ есть значение функции $\xi^{1-s}\eta^s$ на этих же элементах, аналогичный смысл имеют $\hat{\varphi}(u,v)$ и $u^{1-s}v^s$.

Доказательство. Пусть $\mu\in rca^+(K)$ и $p,q\in L^1(\mu)$ таковы, что справедливо (8.2). Тогда[x)] $\varphi(f,g)(\hat{\varphi}(u,v))=$ $=\int_K\hat{\varphi}(u,v)\varphi(p,q)\,d\mu\leq\int_K(up+vq)\,d\mu=f(u)+g(v)$. Аналогично.

x) Напомним, что (см. определение 2.I.3) $\varphi(\alpha,\beta)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\leq\alpha\xi+\beta\eta$ при всех $\alpha,\beta,\xi,\eta\geq 0$.

с помощью неравенства Гёльдера получаем $f^{1-s}g^s(u^{1-s}v^s)=$
$=\int_K u^{1-s}v^s p^{1-s}q^s d\mu=\int_K (up)^{1-s}(vq)^s d\mu\le\left(\int_K up\,d\mu\right)^{1-s}\left(\int_K vq\,d\mu\right)^s=(f(u))^{1-s}(g(v))^s.$

Л е м м а 2.8.4. Пусть $f,g,h\in C(K)^*_+$ таковы, что

$$h(u^{1-s}v^s)\le(1-s)f(u)+sg(v) \text{ для всех } u,v\in C(K)_+. \quad (8.6)$$

Тогда $h\le f^{1-s}g^s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mu\in rca^+(K)$ и $p,q,r\in L^1(\mu)_+$ таковы, что

$$f(x)=\int_K xp\,d\mu,\ g(x)=\int_K xq\,d\mu,\ h(x)=\int_K xr\,d\mu,\quad x\in C(K). \quad (8.7)$$

Тогда

$$\int_K u^{1-s}v^s r\,d\mu\le(1-s)\int_K up\,d\mu+s\int_K vq\,d\mu \quad (8.8)$$

при всех $u,v\in C(K)$. Возьмём произвольный $x\in C(K)_+$ и заменим u на ux, v на vx в (8.8). Получим $\int_K[u^{1-s}v^s r-(1-s)up-svq]x\,d\mu\le 0$. В силу произвольности $x\in C(K)_+$ отсюда следует, что

$$u^{1-s}v^s r-(1-s)up-svq\le 0 \quad \mu\text{- почти всюду} \quad (8.9)$$

для любых $u,v\in C(K)_+$. Итак,

$$u^{1-s}v^s r\le(1-s)up+svq \quad \mu\text{-почти всюду} \quad (8.10)$$

для любых $u,v\in C(K)_+$. Ясно, что тогда (8.10) справедливо и для любых $u,v\in L^1(\mu)_+$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и в (8.10) положим $u=\left(\frac{q+\varepsilon}{p+\varepsilon}\right)^s$, $v=\left(\frac{p+\varepsilon}{q+\varepsilon}\right)^{1-s}$, получим $r\le$ $\le(p+\varepsilon)^{1-s}(q+\varepsilon)^s$ μ - почти всюду. В силу произвольности

$\varepsilon>0$ имеем $r\le \rho^{1-s}q^{s}$ μ – почти всюду, то есть $h\le f^{1-s}g^{s}$.

Лемма 2.8.5. Пусть $f,g,h\in C(K)_+^*$ таковы, что

$$h(\hat{\varphi}(u,v))\le f(u)+g(v) \quad \text{для всех} \quad u,v\in C(K)_+ . \tag{8.11}$$

Тогда $h\le \varphi(f,g)$.

Доказательство. Пусть $\mu\in rca^+(K)$ и $r,\rho,q\in L^1(\mu)_+$ таковы, что справедливо (8.7). Как и при доказательстве предыдущей леммы получаем, что

$$\hat{\varphi}(u,v)r\le u\rho+vq \qquad \mu\text{ – почти всюду} \tag{8.12}$$

для любых $u,v\in C(K)_+$. Напомним (предл. 2.1.4), что

$$\varphi(\xi,\eta)=\inf_{\alpha,\beta>0}\frac{\alpha\xi+\beta\eta}{\hat{\varphi}(\alpha,\beta)} \quad \text{при всех } \xi,\eta\ge 0 .$$

Отсюда легко следует, что $r\le\varphi(\rho,q)$ μ – почти всюду, то есть $h\le\varphi(f,g)$.

Лемма 2.8.6. Пусть $f_0,f_1\in C(K)_+^*$, $z\in C(K)_+$, $a\in(0,+\infty)$. Пусть

$$(u_0,u_1\in C(K)_+ ,\ \varphi(u_0,u_1)\ge z)\Longrightarrow(f_0(u_0)+f_1(u_1)\ge a). \tag{8.13}$$

Тогда $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z)\ge a$.

Доказательство. Пусть $\mu\in rca^+(K)$ и пусть $\rho_i\ge 0$ суть борелевские функции на K, такие что $f_i(x)=\int_K x\rho_i\,d\mu$, $x\in C(K)$ $(i=0,1)$. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и положим $q_0=\rho_0+\varepsilon\rho_1+\varepsilon\chi_K$, $q_1=\rho_1+\varepsilon\rho_0+\varepsilon\chi_K$. В силу леммы 2.7.7 найдутся борелевские функции r_0,r_1 и числа $c_1,c_2\in(0,+\infty)$, такие что $\varphi(r_0,r_1)=\chi_K$, $\hat{\varphi}(q_0,q_1)=r_0q_0+r_1q_1$, $c_1\chi_K\le r_0\le c_2\chi_K$, $c_1\chi_K\le r_1\le c_2\chi_K$. Пусть $M(\xi)$ есть N-функция из (1.4). Тогда из равенства

$\varphi(z_0, z_1) = x_K$ следует, что $z_0 = z_1 M(z_1^{-1} x_K)$. Построим последовательность $y_n \in C(K)$, такую что $c_1 x_K \leq y_n \leq c_2 x_K$ и $y_n \to z_1$ μ-почти всюду. Положим $x_n = y_n M(y_n^{-1} x_K)$. Заметим, что $\varphi(x_n, y_n) = x_K$. Ясно, что $x_n \to z_0$ μ-почти всюду и что $c_1' x_K \leq x_n \leq c_2' x_K$ для некоторых $c_1', c_2' \in (0, +\infty)$. Положим $u_0^{(n)} = x_n z$, $u_1^{(n)} = y_n z$. Имеем $\varphi(u_0^{(n)}, u_1^{(n)}) = \varphi(x_n z, y_n z) = \varphi(x_n, y_n) \cdot z = z$. Поэтому по условию $f_0(u_0^{(n)}) + f_1(u_1^{(n)}) \geq a$. Тем самым $\int_K (u_0^{(n)} p_0 + u_1^{(n)} p_1) d\mu \geq a$, то есть $\int_K z(x_n p_0 + y_n p_1) d\mu \geq a$. Следовательно, $\int_K z(z_0 p_0 + z_1 p_1) d\mu \geq a$, откуда и подавно $\int_K z(z_0 q_0 + z_1 q_1) d\mu \geq a$, то есть $\int_K z \hat{\varphi}(q_0, q_1) d\mu \geq a$. Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\int_K z \hat{\varphi}(p_0, p_1) d\mu \geq a$, то есть $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) \geq a$.

Л е м м а 2.8.7. Пусть $f_0, f_1 \in C(K)_+^*$, $\gamma \in [0, +\infty)$ и пусть

$$(1-s) f_0(z^s) + s f_1(z^{s-1}) \geq \gamma \tag{8.14}$$

для любой $z \in C(K)_+$ такой что $\min\{z(t) : t \in K\} > 0$. Тогда

$$f_0^{1-s} f_1^s (x_K) \geq \gamma. \tag{8.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \in rca^+(K)$ и пусть $p_i \geq 0$ суть борелевские функции на K, такие что $f_i(x) = \int_K x p_i \, d\mu$, $x \in C(K)$ $(i = 0, 1)$. По условию

$$(1-s) \int_K z^s p_0 \, d\mu + s \int_K z^{s-1} p_1 \, d\mu \geq \gamma \tag{8.16}$$

для любой $z \in C(K)_+$ такой что $\min\{z(t) : t \in K\} > 0$. С помощью предельного перехода убеждаемся, что (8.16) верно и тогда, когда z есть произвольная борелевская функция на K, такая что $\inf\{z(t):t\in K\}>0,\ \sup\{z(t):t\in K\}<+\infty$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и положим $q_0=\rho_0+\varepsilon(\rho_1+\chi_K),\ q_1=\rho_1+\varepsilon(\rho_0+\chi_K)$, $z=q_1q_0^{-1}$. Тогда имеем $\int_K q_0^{1-s}q_1^s d\mu=(1-s)\int_K q_0^{1-s}q_1^s d\mu+s\int_K q_0^{1-s}q_1^s d\mu\geq$ $\geq(1-s)\int_K z^s\rho_0 d\mu+s\int_K z^{s-1}\rho_1 d\mu\geq\gamma$. Итак, $\int_K q_0^{1-s}q_1^s d\mu\geq\gamma$. Отсюда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_K q_0^{1-s}q_1^s d\mu\geq\gamma$, то есть $\int_K \rho_0^{1-s}\rho_1^s d\mu\geq\gamma$, то есть справедливо (8.16). Лемма доказана.

4. Лемма 2.8.8. Для $f,g\in C(K)_+^*$ справедливо

$$\varphi(f,g)=\inf\left\{\frac{\alpha f+\beta g}{\hat\varphi(\alpha,\beta)}:\alpha,\beta\in(0,+\infty)\right\}. \tag{8.17}$$

Эта лемма есть очевидное следствие того, что $\varphi=\hat{\hat\varphi}$.

Лемма 2.8.9. Для $f,g\in C(K)_+^*$, $z\in C(K)_+$ и $a\in[0,+\infty)$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) $\varphi(f,g)(z)\geq a$;

(б) для любого $n\in\mathbb{N}$, любых $\alpha_k,\beta_k\in(0,+\infty)$ $(k=1,\dots,n)$, любых $z_k\in C(K)_+$ $(k=1,\dots,n)$, таких что $z_1+\dots+z_n=z$, справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k f(z_k)+\beta_k g(z_k)}{\hat\varphi(\alpha_k,\beta_k)}\geq a$.

Действительно, в силу леммы 2.8.8 и формулы для вычисления нижней грани функционалов (Вулих [6], стр. 230) имеем

$$\varphi(f,g)(z)=\inf\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k f(z_k)+\beta_k g(z_k)}{\hat\varphi(\alpha_k,\beta_k)},$$

где инфимум берётся по всем $n,\{\alpha_k\},\{\beta_k\},\{z_k\}$, удовлетворяющих условиям пункта (б) леммы.

5. В этом пункте полагаем $E=C(K)\times C(K)$ (декартово произведение), причём считаем, что $E^*=C(K)^*\times C(K)^*$ естественным образом.

Л е м м а 2.8.10. Пусть $z\in C(K)_+$, $a\in[0,+\infty)$. Множество

$$H_z=\{(f,g)\in E_+^*:\varphi(f,g)(z)\geqslant a\}\tag{8.18}$$

выпукло и замкнуто в топологии $\sigma(E^*,E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По каждым $n\in N,\{\alpha_k\},\{\beta_k\},\{z_k\}$ из пункта (б) леммы 2.8.9 образуем множество

$$\{(f,g)\in E_+^*:\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k f(z_k)+\beta_k g(z_k)}{\varphi(\alpha_k,\beta_k)}\geqslant a\},\tag{8.19}$$

которое, очевидно, выпукло и замкнуто в топологии $\sigma(E^*,E)$. Остаётся заметить, что H_z совпадает с пересечением всех таких множеств.

Л е м м а 2.8.11. Пусть $h\in C(K)_+^*$. Множество

$$H=\{(f,g)\in E_+^*:\varphi(f,g)\geq h\}\tag{8.20}$$

непусто, выпукло и замкнуто в топологии $\sigma(E^*,E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $(\alpha h,\alpha h)\in H$ при $\alpha=\dfrac{1}{\varphi(1,1)}$, поэтому $H\neq\phi$. Так как $H=\bigcap\limits_{z\in C(K)_+}\{(f,g)\in E_+^*: :\varphi(f,g)(z)\geq h(z)\}$, то остальные утверждения леммы прямо следуют из леммы 2.8.10.

§ 9. Доказательства предложения 2.2.1 и утверждения, сформулированного в замечании 2.2.3

1. Л е м м а 2.9.1. Пусть Y – архимедов К-линеал, Y_1 – его идеал, $\varphi\in\mathcal{K}_2^0$ и $f,g\in\tilde{Y}_+$. Тогда $\varphi(f,g)|_{Y_1}=\varphi(f|_{Y_1},g|_{Y_1})$.

Действительно, отображение $\tilde{Y} \ni f \to f|_{Y_1} \in \hat{Y}_1$ есть структурный гомоморфизм, остаётся применить теорему I.I.23 к указанному отображению и функции $\varphi(|\xi|,|\eta|)$.

Лемма 2.9.2. Пусть Y есть идеал в W, $u \in Y_+$, $f, g \in \hat{Y}_+$, $\varphi \in \mathfrak{N}_2^0$. Тогда $\varphi(f,g)_{(u)} = \varphi(f_{(u)}, g_{(u)})$.

Напомним, что $f_{(u)}$ есть функционал на M, действующий по формуле $f_{(u)}(x) = f(xu)$, $x \in M$.

Доказательство. Отображение $\tilde{Y} \ni f \to f_{(u)} \in \tilde{M}$ есть структурный гомоморфизм (см. лемму 1.2.5), остаётся применить теорему I.I.23 к указанному отображению и функции $\varphi(|\xi|,|\eta|)$.

2. В этом пункте будет доказано предложение 2.2.I. Предварительно докажем некоторые леммы.

Лемма 2.9.3. Пусть $u_0, u_1 \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, $f \in (X_0)^*_+$, $g \in (X_1)^*_+$. Тогда

(а) $f_{(u_0 \vee u_1)} = f_{(u_0)} \vee f_{(u_1)}$, $f_{(u_0 \wedge u_1)} = f_{(u_0)} \wedge f_{(u_1)}$;

(б) $(f_{(u_0 \vee u_1)})^{1-s}(g_{(v)})^s = (f_{(u_0)})^{1-s}(g_{(v)})^s \vee (f_{(u_1)})^{1-s}(g_{(v)})^s$,

$(f_{(u_0 \wedge u_1)})^{1-s}(g_{(v)})^s = (f_{(u_0)})^{1-s}(g_{(v)})^s \wedge (f_{(u_1)})^{1-s}(g_{(v)})^s$.

Доказательство. Пусть $x \in M_+$. Тогда

$$(f_{(u_0)} \vee f_{(u_1)})(x) = \sup\{f(u_0 x_0 + u_1 x_1) : x_0, x_1 \geq 0, x_0 + x_1 = x\} = f((u_0 \vee u_1)x) = f_{(u_0 \vee u_1)}(x)$$

. Аналогично доказывается второе равенство в (а). Наконец, (б) есть очевидное следствие из (а).

Следствие 2.9.4. Пусть $f \in (X_0)^*_+$, $g \in (X_1)^*_+$, $u_1, u_2 \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, причём $u_1 \wedge u_2 = 0$. Тогда $(f_{(u_1)})^{1-s}(g_{(v)})^s \wedge (f_{(u_2)})^{1-s}(g_{(v)})^s = 0$, кроме того, $(f_{(u_1+u_2)})^{1-s}(g_{(v)})^s =$
$= (f_{(u_1)})^{1-s}(g_{(v)})^s + (f_{(u_2)})^{1-s}(g_{(v)})^s$.

Лемма 2.9.5. Пусть $f\in(X_0)^*_+$, $g\in(X_1)^*_+$, $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$, причём $u\wedge v=0$. Тогда $f_{(u)}\wedge g_{(v)}=0$, то есть $(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s=0$.

Доказательство. Для любого $x\in M_+$ имеем $(f_{(u)}\wedge g_{(v)})(x)=\inf\{f(uy)+g(vz): 0\le y,z,\ y+z=x\}$. Положим $y_0=\mathbb{1}v\,\mathbb{)}x$, $z_0=x-y_0$. Тогда $(f_{(u)}\wedge g_{(v)})(x)\le f(uy_0)+g(vz_0)=0$.

Лемма 2.9.6. Пусть $f\in(X_0)^*_+$, $g\in(X_1)^*_+$, $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$, $x\in M_+$, причём $x\wedge u^{1-s}v^s=0$. Тогда $(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s(x)=0$.

Доказательство. В силу следствия 2.9.4 и леммы 2.9.5 можно считать, что $e_u=e_v$. Тогда $x\wedge u=0$, $x\wedge v=0$, поэтому $(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s(x)\le(f_{(u)}(x))^{1-s}(g_{(v)}(x))^s=$ $=(f(xu))^{1-s}(g(xv))^s=0$, см. лемму 2.8.3.

Доказательство предложения 2.2.I. Докажем сначала единственность функционала h. Допустим, что $h,h'\in(X_s)^*_+$ оба удовлетворяют требуемому условию. Тогда $(h-h')_{(u^{1-s}v^s)}=0$ для всех $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$. Заметим, что $\{u^{1-s}v^s: u\in(X_0)_+, v\in(X_1)_+\}=(X_s)_+$, поэтому $h-h'=0$ в силу леммы I.2.9.

Дадим теперь фактический способ построения функционала h, это построение неоднократно будет использовано далее. Пусть $x\in X_s$ – произвольный. Найдём $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$, такие что $|x|\le\lambda u^{1-s}v^s$ для некоторого $\lambda\in(0,+\infty)$. Обозначим $w=u^{1-s}v^s$, $F=(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$, где $(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$ есть значение функции $\xi^{1-s}\eta^s$ на элементах $f_{(u)}, g_{(v)}$ К-пространства $\tilde{M}$. Теперь полагаем

$$h(x)=F(w^{-1}x). \qquad (9.I)$$

Прежде всего убедимся, что число $h(x)$ не зависит от выбора u и v. Действительно, пусть $u_1\in(X_0)_+$, $v_1\in(X_1)_+$ таковы, что $|x|\le\lambda_1 u_1^{1-s}v_1^{s}$ для некоторого $\lambda_1\in(0,+\infty)$. Положим $u_2=u\vee u_1$, $v_2=v\vee v_1$. Теперь для $i=1,2$ обозначим $w_i=u_i^{1-s}v_i^{s}$, $F_i=(f_{(u_i)})^{1-s}(g_{(v_i)})^{s}$. Нужно доказать, что $F(w^{-1}x)=F_2(w_2^{-1}x)$, $F_1(w_1^{-1}x)=F_2(w_2^{-1}x)$. Докажем первое из этих равенств, второе устанавливается совершенно аналогично. Обозначим $y=u_2^{-1}u$, $z=v_2^{-1}v$. Ясно, что $y,z\in M$ и

$$f_{(u)}(t)=f_{(u_2)}(yt),\ g_{(v)}(t)=g_{(v_2)}(zt),\quad t\in M.$$

Поэтому имеем

$$F(t)=F_2(y^{1-s}z^{s}t),\quad t\in M.$$

Отсюда $F_2(w_2^{-1}x)=F_2((u_2^{1-s}v_2^{s})^{-1}x)=F_2((u_2^{-1}u)^{1-s}(v_2^{-1}v)^{s}(u^{1-s}v^{s})^{-1}x)=$

$$=F_2(y^{1-s}z^{s}w^{-1}x)=F(w^{-1}x).$$

Теперь ясно, что $h\in(X_S)_+^{*}$. Проверим (2.1). Пусть $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$, $w=u^{1-s}v^{s}$, $F=(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^{s}$. Тогда для любого $x\in M_+$ имеем $h_{(w)}(x)=h(wx)=F(w^{-1}wx)=F(\{w\}x)=F(x)-F(x')$, где $x'=x-\{w\}x$. Так как $x'\wedge w=0$, то $F(x')=0$ в силу леммы 2.9.6. Итак, $h_{(w)}(x)=F(x)$. Предложение 2.2.1 доказано.

3. Доказательство утверждения, сформулированного в замечании 2.2.3.

Покажем прежде всего, что $X_0\cap X_1$ плотно по норме в X_S. Фиксируем произвольный $x\in X_S$ и убедимся, что существует последовательность $z_n\in X_0\cap X_1$ $(n\in N)$, такая что $\|x-z_n\|_{X_S}\to 0$

при $n\to\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $x\geq 0$. Найдутся $x_i\in X_i$, такие что $x_i\geq 0, x=x_0^{1-s}x_1^s$, $\langle x\rangle=\langle x_i\rangle$ ($i=0,1$). В силу леммы 2.7.8 найдутся последовательности $u_n\in X_0, v_n\in X_1 (n\in N)$, такие что $0\leq u_n\uparrow x_0, 0\leq v_n\uparrow x_1, \|x_0-u_n\|_{X_0}\to 0$, $\|x_1-v_n\|_{X_1}\to 0$ при $n\to\infty$. Положим $z_n=u_n^{1-s}v_n^s$ и убедимся, что $z_n (n\in N)$ – требуемая последовательность. Имеем $0\leq x-z_n=x_0^{1-s}x_1^s-u_n^{1-s}v_n^s=(x_0^{1-s}x_1^s-x_0^{1-s}v_n^s)+(x_0^{1-s}v_n^s-u_n^{1-s}v_n^s)=$

$$=x_0^{1-s}(x_1-v_n)^s+(x_0-u_n)^{1-s}v_n^s\leq x_0^{1-s}(x_1-v_n)^s+(x_0-u_n)^{1-s}x_1^s.$$

Остаётся заметить, что из $\|x_0-u_n\|_{X_0}\to 0, \|x_1-v_n\|_{X_1}\to 0$ следует, что $\|x_0^{1-s}(x_1-v_n)^s\|_{X_s}\to 0, \|(x_0-u_n)^{1-s}x_1^s\|_{X_s}\to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть теперь $f\in(X_0)^*_+, g\in(X_1)^*_+$ – произвольные и пусть $h=f^{1-s}g^s$ в смысле определения 2.2.2. Обозначим через f', g', h' сужения функционалов f, g, h на $X_0\cap X_1$. Нужно доказать, что $h'=(f')^{1-s}(g')^s$, где справа написано значение функции $\xi^{1-s}\eta^s$ от элементов f', g' К-пространства $(X_0\cap X_1)^*$. Обозначим $\ell=h'-(f')^{1-s}(g')^s$. В силу леммы I.2.9 достаточно убедиться, что $\ell_{(u)}=0$ для любого $u\in(X_0\cap X_1)_+$. Фиксируем произвольный $u\in(X_0\cap X_1)_+$. Ясно, что $(h')_{(u)}=h_{(u)}, (f')_{(u)}=f_{(u)}$, $(g')_{(u)}=g_{(u)}$. Далее, в силу леммы 2.9.2 имеем $((f')^{1-s}(g')^s)_{(u)}=$ $=((f')_{(u)})^{1-s}((g')_{(u)})^s=(f_{(u)})^{1-s}(g_{(u)})^s$. Следовательно, $\ell_{(u)}=h_{(u)}-(f_{(u)})^{1-s}(g_{(u)})^s=0$ по самому определению 2.2.2.

4. В этом пункте рассматриваются свойства конструкции, введённой в определении 2.2.2.

Лемма 2.9.7. Пусть $f\in(X_0)^*_+, g\in(X_1)^*_+, u\in(X_0)_+, v\in(X_1)_+$. Тогда $f^{1-s}g^s(u^{1-s}v^s)\leq(f(u))^{1-s}(g(v))^s$, где $f^{1-s}g^s$ понимается в смысле определения 2.2.2.

Доказательство. Обозначим для краткости $\mathbb{1}(W)$ через $\mathbb{1}$. Тогда, используя лемму 2.8.3, получаем

$$f^{1-s}g^s(u^{1-s}v^s)=(f^{1-s}g^s)_{(u^{1-s}v^s)}(\mathbb{1})=((f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s)(\mathbb{1})\le$$
$$\le(f_{(u)}(\mathbb{1}))^{1-s}(g_{(v)}(\mathbb{1}))^s=(f(u))^{1-s}(g(v))^s.$$

Лемма 2.9.8. Пусть $f\in(X_0)_+^*$, $g\in(X_1)_+^*$, $h\in(X_s)_+^*$ таковы, что $h(u^{1-s}v^s)\le(1-s)f(u)+sg(v)$ для всех $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$. Тогда $h\le f^{1-s}g^s$, где $f^{1-s}g^s$ понимается в смысле определения 2.2.2.

Доказательство. Фиксируем произвольные $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$. Тогда для любых $x,y\in M_+$ имеем по условию $h((xu)^{1-s}(yv)^s)\le(1-s)f(xu)+sg(yv)$, то есть $h_{(u^{1-s}v^s)}(x^{1-s}y^s)\le(1-s)f_{(u)}(x)+sg_{(v)}(y)$. В силу леммы 2.8.4 отсюда следует, что $h_{(u^{1-s}v^s)}\le(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$, то есть $h_{(u^{1-s}v^s)}\le(f^{1-s}g^s)_{(u^{1-s}v^s)}$. Итак, $h_{(w)}\le(f^{1-s}g^s)_{(w)}$ при всех $w\in(X_s)_+$. Следовательно, $h\le f^{1-s}g^s$.

Лемма 2.9.9. Пусть $f_0\in(X_0)_+^*$, $f_1\in(X_1)_+^*$, $v_0\in(X_0)_+$, $v_1\in(X_1)_+$, $\gamma\in(0,+\infty)$ и пусть

$$(1-s)f_0(z^s v_0)+sf_1(z^{s-1}v_1)\ge\gamma \tag{9.2}$$

для любого $z\in M_+$ такого что $z^{-1}\in M_+$ и $zz^{-1}=\mathbb{1}(W)$. Тогда

$$(f_0^{1-s}f_1^s)(v_0^{1-s}v_1^s)\ge\gamma.$$

Доказательство. Положим $h_0=(f_0)_{(v_0)}$, $h_1=(f_1)_{(v_1)}$. Тогда $(1-s)h_0(z^s)+sh_1(z^{s-1})\ge\gamma$ для любого $z\in M_+$ такого что $z^{-1}\in M_+$ и $zz^{-1}=\mathbb{1}(W)$. В силу леммы 2.8.7 имеем $h_0^{1-s}h_1^s(\mathbb{1}(W))\ge\gamma$, то есть $(f_0^{1-s}f_1^s)_{(v_0^{1-s}v_1^s)}(\mathbb{1}(W))\ge\gamma$, то есть $f_0^{1-s}f_1^s(v_0^{1-s}v_1^s)\ge\gamma$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.9.10. Пусть для $i=0,1$ $f_i \in (X_i)^*_+, z_i \in M_+$. Положим

$$g_i(x)=f_i(z_i x),\ x\in X_i.$$

Тогда

$$g_0^{1-s} g_1^s(x)=f_0^{1-s} f_1^s(z_0^{1-s} z_1^s x),\ x\in X_s. \qquad (9.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$h(x)=f_0^{1-s} f_1^s(z_0^{1-s} z_1^s x),\ x\in X_s.$$

Взяв произвольные $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$, находим $h_{(u^{1-s}v^s)}=$ $=(f_0^{1-s}f_1^s)_{((uz_0)^{1-s}(vz_1)^s)}=((f_0)_{(uz_0)})^{1-s}((f_1)_{(vz_1)})^s, (g_0^{1-s}g_1^s)_{(u^{1-s}v^s)}=$ $=((g_0)_{(u)})^{1-s}((g_1)_{(v)})^s=((f_0)_{(uz_0)})^{1-s}((f_1)_{(vz_1)})^s$. Таким образом, $h_{(w)}=(g_0^{1-s}g_1^s)_{(w)}$ для любого $w\in(X_s)_+$. Остаётся применить лемму 1.2.9.

Л е м м а 2.9.11. Пусть $f\in(X_0)^*_+, g\in(X_1)^*_+, a, b\in[0,+\infty)$. Тогда

$$(af)^{1-s}(bg)^s=a^{1-s}b^s f^{1-s}g^s.$$

Прямо следует из определения 2.2.2.

Л е м м а 2.9.12. Пусть $E\subset(X_0)^*_+$, $g\in(X_1)^*_+$, причём существует $\sup E=f_1\in(X_0)^*_+$. Тогда

$$\sup\{f^{1-s}g^s : f\in E\}=f_1^{1-s}g^s, \qquad (9.4)$$

$$\inf\{f^{1-s}g^s : f\in E\}=f_0^{1-s}g^s, \qquad (9.5)$$

где

$$f_0=\inf E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $F=\sup\{f^{1-s}g^s : f\in E\}$. Фиксируем произвольный $w\in(X_s)_+$. Найдутся $u\in(X_0)_+$, $v\in(X_1)_+$, такие что $w=u^{1-s}v^s$. В силу леммы 1.2.5 имеем

$F_{(w)} = \sup\{(f^{1-s}g^s)_{(w)} : f \in E\}$, то есть $F_{(w)} = \sup\{(f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s : f \in E\}$. Но $\sup\{f_{(u)} : f \in E\} = (f_1)_{(u)}$ по той же лемме I.2.5. Поэтому $F_{(w)} = ((f_1)_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$, то есть $F_{(w)} = (f_1^{1-s}g^s)_{(w)}$. Следовательно, (лемма I.2.9) $F = f_1^{1-s}g^s$. Аналогично доказывается (9.5).

С л е д с т в и е 2.9.13. Пусть $f_1, f_2 \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, причём $f_1 \wedge f_2 = 0$. Тогда $f_1^{1-s}g^s \wedge f_2^{1-s}g^s = 0$, $(f_1 + f_2)^{1-s}g^s = f_1^{1-s}g^s + f_2^{1-s}g^s$.

Л е м м а 2.9.14. Пусть $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $h = f^{1-s}g^s$. Пусть K_f, K_g, K_h суть компоненты в $\tilde{M}$, порождённые множествами $\{f_{(u)} : u \in (X_0)_+\}$, $\{g_{(v)} : v \in (X_1)_+\}$, $\{h_{(w)} : w \in (X_s)_+\}$, соответственно. Тогда $K_h = K_f \cap K_g$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмём произвольные $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$ и положим $w = u^{1-s}v^s$. Тогда $h_{(w)} = (f_{(u)})^{1-s}(g_{(v)})^s$, поэтому главная компонента в $\tilde{M}$, порождённая $h_{(w)}$, совпадает с пересечением главных компонент в $\tilde{M}$, порождённых $f_{(u)}$ и $g_{(v)}$, соответственно. Из сказанного немедленно вытекает требуемое.

§ 10. Доказательства предложений 2.2.6 и 2.2.7

1. Предварительно докажем следующие три леммы.

Л е м м а 2.10.1. Пусть $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ – направление в $(X_0)_+$, слабо сходящееся к нулю в X_0 , а $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ – направление в $(X_1)_+$, слабо сходящееся к нулю в X_1 . Тогда направление $\{z_\alpha : \alpha \in A\}$, где $z_\alpha = x_\alpha^{1-s}y_\alpha^s$, слабо сходится к нулю в X_s .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим противное. Тогда найдётся такой $F\in(X_S)_+^*$, что $F(z_\alpha)\geq 1$ для всех $\alpha\in A_1$, где A_1 – конфинальная часть A. Так как направление $\{(x_\alpha,y_\alpha):\alpha\in A_1\}$ слабо сходится к нулю в декартовом произведении $X_0\times X_1$, а выпуклые замыкания множества в слабой и нормированной топологиях совпадают, то найдётся такая последовательность выпуклых комбинаций

$$v_i=\Big(\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}},\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki}y_{\alpha_{ki}}\Big),\ i\in N,\alpha_{ki}\in A_1,$$

что $\Big\|\sum\limits_{k=1}^{n_i} t_{ki}x_{\alpha_{ki}}\Big\|_{X_0}\xrightarrow[i\to\infty]{}0,\ \Big\|\sum\limits_{k=1}^{n_i} t_{ki}y_{\alpha_{ki}}\Big\|_{X_1}\xrightarrow[i\to\infty]{}0.$

Положим $z_i=\sum\limits_{k=1}^{n_i} t_{ki}z_{\alpha_{ki}},\ i\in N$. Имеем $F(z_i)=\sum\limits_{k=1}^{n_i}t_{ki}F(z_{\alpha_{ki}})\geq$ $\geq\sum\limits_{k=1}^{n_i}t_{ki}=1\ (i\in N)$. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера $z_i=\sum\limits_{k=1}^{n_i}t_{ki}x_{\alpha_{ki}}^{1-s}y_{\alpha_{ki}}^{s}\leq\Big(\sum\limits_{k=1}^{n_i}t_{ki}x_{\alpha_{ki}}\Big)^{1-s}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n_i}t_{ki}y_{\alpha_{ki}}\Big)^{s}$, откуда $\|z_i\|_{X_S}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$. Это противоречит тому, что $F(z_i)\geq 1$ $(i\in N)$.

Л е м м а 2.10.2. Для любого $F\in(X_S)_+^*$ найдутся $f_0\in(X_0)_+^*,f\in(X_1)_+^*$, такие что $(x_0\in(X_0)_+,x_1\in(X_1)_+,f_0(x_0)\leq 1,f_1(x_1)\leq 1)\Longrightarrow(F(x_0^{1-s}x_1^{s})\leq 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим конуса $(X_0)_+$, $(X_1)_+$, $(X_S)_+$, снабжённые соответствующими слабыми топологиями. Введём отображение T декартова произведения $(X_0)_+\times(X_1)_+$ на $(X_S)_+$, действующее по формуле

$$T((x_0,x_1))=x_0^{1-s}x_1^{s},\ (x_0,x_1)\in(X_0)_+\times(X_1)_+.$$

Из леммы 2.10.1 следует, что T непрерывно в точке $(0,0)$. Так как множество $\{z\in(X_S)_+ : F(z)\le 1\}$ есть окрестность нуля в $(X_S)_+$, то найдутся $g_1,\dots,g_m\in(X_0)^*$ и $h_1,\dots,h_n\in(X_1)^*$, такие что $(x_0\in(X_0)_+, x_1\in(X_1)_+, g_i(x_0)\le 1\ (i=1,\dots,m), h_j(x_1)\le 1\ (j=1,\dots,n))\Longrightarrow(F(x_0^{1-s}x_1^s)\le 1)$. Остаётся положить

$$f_0=\sum_{i=1}^{m}|g_i|,\quad f_1=\sum_{j=1}^{n}|h_j|.$$

Лемма 2.10.3. Для любого $F\in(X_S)_+^*$ найдутся $f_0\in(X_0)_+^*, f\in(X_1)_+^*$, такие что $F\le f_0^{1-s}f_1^s$.

Доказательство. Покажем, что f_0 и f_1 из леммы 2.10.2 суть требуемые. Возьмём произвольные $y_i\in(X_i)_+$ и $\varepsilon>0$, и положим $x_i=\dfrac{y_i}{f_i(y_i)+\varepsilon}$ $(i=0,1)$. Тогда $f_i(x_i)\le 1$ $(i=0,1)$, поэтому $F(x_0^{1-s}x_1^s)\le 1$, то есть $F(y_0^{1-s}y_1^s)\le$ $\le[f_0(y_0)+\varepsilon]^{1-s}[f_1(y_1)+\varepsilon]^s$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ отсюда следует, что $F(y_0^{1-s}y_1^s)\le[f_0(y_0)]^{1-s}[f_1(y_1)]^s$. Итак,

$$F(y_0^{1-s}y_1^s)\le[f_0(y_0)]^{1-s}[f_1(y_1)]^s \text{ для любых } y_i\in(X_i)_+\ (i=0,1). \quad (10.1)$$

Так как $a^{1-s}b^s\le(1-s)a+sb$ для любых $a,b\in[0,+\infty)$, то из (10.1) и леммы 2.9.8 следует, что $F\le f_0^{1-s}f_1^s$.

2. Доказательство предложения 2.2.6. Итак, пусть единицы $\mathbb{1}_0$ и $\mathbb{1}_1$ выбраны произвольно. Рассмотрим множество $H=\{e_0^{1-s}e_1^s : e_0\in E_0, e_1\in E_1\}$, где $e_0^{1-s}e_1^s$ понимается в смысле определения 2.2.2. Покажем, что $H^d=\{0\}$, где H^d есть дизъюнктное дополнение множества H в $(X_S)^*$. Для $i=0,1$ обозначим через G_i совокупность всех $f\in(X_i)^*$, представимых в виде $f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k$, где $n\in N, \alpha_k\in(0,+\infty)$,

$g_k \in E_1$ $(k=1,\dots,n)$, причём $g_k \wedge g_j = 0$ при $k \neq j$. Из следствия 2.9.13 вытекает, что $f_0^{1-s} f_1^s \in H^{dd}$ для любых $f_0 \in G_0, f_1 \in G_1$. Возьмём теперь произвольный $F \in H^d$, $F \geqslant 0$. В силу леммы 2.10.3 существуют $f_0 \in (X_0)_+^*$, $f_1 \in (X_1)_+^*$, такие что $F \leqslant f_0^{1-s} f_1^s$. Но

$$f_i = \sup\{f \in G_i : f \leqslant f_i\} \ (i=0,1),$$

следовательно, $f_0^{1-s} f_1^s \in H^{dd}$ по лемме 2.9.12. Тем самым $F \in H^{dd}$. Поэтому $F = 0$. Итак, $H^d = \{0\}$. Отсюда прямо следует единственность единицы $\mathbb{1}_S$, подчинённой единицам $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$. Из следствия 2.9.13 вытекает, что инфимум любых двух элементов из H является осколком каждого из них. Поэтому существует $\sup H \in \mathfrak{M}((X_S)^*)$. Ясно, что $\mathbb{1}_S = \sup H$ есть единица, подчинённая единицам $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$. Предложение 2.2.6 доказано.

3. Доказательство предложения 2.2.7. Итак, пусть единицы $\mathbb{1}_0$ и $\mathbb{1}_1$ выбраны произвольно, а единица $\mathbb{1}_S$ подчинена им. Пусть сначала $f \in E_0, g \in E_1$. Тогда $R_0(f)$, $R_1(g), R_S(f^{1-s} g^s)$ суть единичные элементы пространства $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, причём в силу леммы 2.9.14 и теоремы 1.2.22 имеем $R_S(f^{1-s} g^s) = R_0(f) \wedge R_1(g)$, или, что то же самое, $R_S(f^{1-s} g^s) = [R_0(f)]^{1-s} [R_1(g)]^s$. Пусть теперь $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i$, $g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j q_j$, где $p_i \in E_0$ попарно дизъюнктны, $q_j \in E_1$ попарно дизъюнктны, и числа $\alpha_i, \beta_j > 0$. Тогда в силу леммы 2.9.11 и следствия 2.9.13 имеем $f^{1-s} g^s = \sum_{i,j} \alpha_i^{1-s} \beta_j^s p_i^{1-s} q_j^s$, откуда $R_S(f^{1-s} g^s) = \sum_{i,j} \alpha_i^{1-s} \beta_j^s R_S(p_i^{1-s} q_j^s) =$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i^{1-s} \beta_j^s [R_0(p_i)]^{1-s} [R_1(q_j)]^s = [R_0(f)]^{1-s} [R_1(g)]^s.$$

Общий случай. Пусть G_i $(i=0,1)$ означает то же, что и в предыдущем пункте. Тогда, пользуясь уже доказанным и леммой 2.9.12, получаем $R_S(f^{1-S}g^S)=\sup\{R_S(f_1^{1-S}g_1^S):f_1\le f, g_1\le g, f_1\in G_0, g_1\in G_1\}=$
$=\sup\{[R_0(f_1)]^{1-S}[R_1(g_1)]^S: f_1\le f, g_1\le g, f_1\in G_0, g_1\in G_1\}=[R_0(f)]^{1-S}[R_1(g)]^S.$

Предложение 2.2.7 доказано.

§ II. Доказательство теоремы 2.2.8

Итак, единицы $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$ выбраны произвольно, а единица $\mathbb{1}_S$ подчинена им. Пространства $(X_0)^*, (X_1)^*, (X_S)^*$ отождествляем с их образами $R_0((X_0)^*), R_1((X_1)^*), R_S((X_S)^*)$ при канонических реализациях.

I. Заметим сначала, что равенство (2.5) имеет место по запасу элементов. Действительно, из предложения 2.2.7 следует, что $((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S\subset(X_S)^*$, после чего из леммы 2.10.3 следует равенство $((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S=(X_S)^*$ по запасу элементов. Остаётся доказать, что

$$\|\cdot\|_{(X_S)^*}=\|\cdot\|_{((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S}. \qquad (II.1)$$

Напомним, что

$$\|F\|_{(X_S)^*}=\sup\{|F(x)|: x\in X_S, \|x\|_{X_S}\le 1\},\ F\in(X_S)^*, \qquad (II.2)$$

$\|F\|_{((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S}=\inf\{\lambda>0: |F|\le\lambda f_0^{1-S}f_1^S$ для некоторых

$$f_i\in(X_i)^*_+ \text{ с } \|f_i\|_{(X_i)^*}\le 1\ (i=0,1)\},\ F\in(X_S)^*. \qquad (II.3)$$

2. Докажем, что

$$\|\cdot\|_{(X_S)^*} \leq \|\cdot\|_{((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S}. \tag{II.4}$$

Пусть $F\in(X_S)^*_+$, $\|F\|_{((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S}=1$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и произвольный $z\in(X_S)_+$, $\|z\|_{X_S}\leq 1$. Найдутся $f_i\in(X_i)^*_+$, $x_i\in(X_i)_+$, такие что $\|f_i\|_{X_i^*}\leq 1$, $\|x_i\|_{X_i}\leq 1$ $(i=0,1)$ и $F\leq(1+\varepsilon)f_0^{1-S}f_1^S$, $z\leq(1+\varepsilon)x_0^{1-S}x_1^S$. Тогда $F(z)\leq(1+\varepsilon)^2 f_0^{1-S}f_1^S(x_0^{1-S}\times x_1^S)\leq(1+\varepsilon)^2(f_0(x_0))^{1-S}(f_1(x_1))^S\leq(1+\varepsilon)^2$ в силу леммы 2.9.7. Отсюда ясно, что $\|F\|_{(X_S)^*}\leq 1$. Итак, неравенство (II.4) доказано. Осталось доказать, что

$$\|\cdot\|_{(X_S)^*} \geq \|\cdot\|_{((X_0)^*)^{1-S}((X_1)^*)^S}. \tag{II.5}$$

3. Положим далее $E=X_0\times X_1$, причём

$$\|(x_0,x_1)\|_E=\max\left\{\frac{\|x_0\|_{X_0}}{1-S},\ \frac{\|x_1\|_{X_1}}{S}\right\},\quad (x_0,x_1)\in E.$$

Тогда естественным образом $E^*=(X_0)^*\times(X_1)^*$, причём

$$\|(f_0,f_1)\|_{E^*}=(1-S)\|f_0\|_{(X_0)^*}+S\|f_1\|_{(X_1)^*},\quad (f_0,f_1)\in E^*.$$

Л е м м а 2.11.1. Пусть $F\in(X_S)^*_+$. Тогда множество

$$H=\{(f_0,f_1)\in E^*_+ : f_0^{1-S}f_1^S\geq F\} \tag{II.6}$$

непусто, выпукло и слабо* замкнуто, то есть замкнуто в топологии $\sigma(E^*,E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $H\neq\emptyset$ в силу леммы 2.10.3. Пусть (f_0,f_1), $(g_0,g_1)\in H$, $\lambda\in(0,1)$. Тогда $[\lambda f_0+(1-\lambda)g_0]^{1-S}\cdot[\lambda f_1+(1-\lambda)g_1]^S\geq\lambda f_0^{1-S}f_1^S+(1-\lambda)g_0^{1-S}g_1^S\geq F$ в силу вогнутости функции $\xi^{1-S}\eta^S$, тем самым, H – выпукло. Пусть $\{(f_0^\alpha, f_1^\alpha):\alpha\in A\}$ – направление в H, которое слабо* сходится к некоторому (f_0,f_1). Докажем, что $(f_0,f_1)\in H$. Возьмём произвольные $u_0\in(X_0)_+, u_1\in(X_1)_+$. Тогда очевидно $(f_0^\alpha)_{(u_0)}\to(f_0)_{(u_0)}, (f_1^\alpha)_{(u_1)}\to(f_1)_{(u_1)}$ в топологии $\sigma(\tilde{M},M)$. Но $((f_0^\alpha)_{(u_0)})^{1-s}((f_1^\alpha)_{(u_1)})^s=((f_0^\alpha)^{1-s}(f_1^\alpha)^s)_{(u_0^{1-s}u_1^s)}\geq F_{(u_0^{1-s}u_1^s)}$ при всех $\alpha\in A$. В силу леммы 2.8.II поэтому будет $((f_0)_{(u_0)})^{1-s}((f_1)_{(u_1)})^s\geq F_{(u_0^{1-s}u_1^s)}$, то есть $(f_0^{1-s}f_1^s)_{(u_0^{1-s}u_1^s)}\geq F_{(u_0^{1-s}u_1^s)}$. Отсюда следует, что $f_0^{1-s}f_1^s\geq F$, то есть $(f_0,f_1)\in H$. Лемма доказана.

Лемма 2.II.2. В условиях леммы 2.II.I пусть $\|F\|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s}=1$. Тогда для любого $(f_0,f_1)\in H$ справедливо
$$\|(f_0,f_1)\|_{E^*}\geq 1.$$

Доказательство. Так как
$$F\leq\|f_0\|_{(X_0)^*}^{1-s}\cdot\|f_1\|_{(X_1)^*}^s\cdot\left(\frac{f_0}{\|f_0\|_{(X_0)^*}}\right)^{1-s}\left(\frac{f_1}{\|f_1\|_{(X_1)^*}}\right)^s,$$
то $\|f_0\|_{(X_0)^*}^{1-s}\cdot\|f_1\|_{(X_1)^*}^s\geq 1$, следовательно, $(1-s)\|f_0\|_{(X_0)^*}+s\|f_1\|_{(X_1)^*}\geq 1$, ибо $\xi^{1-s}\eta^s\leq(1-s)\xi+s\eta$ для любых $\xi,\eta\in[0,+\infty)$. Лемма доказана.

4. Фиксируем произвольный $F\in(X_s)_+^*$ такой что $\|F\|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s}=1$, и покажем, что
$$\|F\|_{(X_s)^*}\geq 1. \qquad (II.7)$$

Тогда неравенство (II.5), а с ним и теорема 2.2.8 будут доказаны. Фиксируем произвольное $\gamma\in(0,1)$ и обозначим $V_\gamma=\{(f_0,f_1)\in E^*:\|(f_0,f_1)\|_{E^*}\leq\gamma\}$, то есть V_γ есть замкнутый шар радиуса γ с центром в нуле в E^*. Пусть H есть множество из леммы 2.II.1, см.(II.6). Тогда $H \cap V_\gamma = \emptyset$ в силу леммы 2.II.2. Так как H слабо* замкнуто, V_γ слабо* компактно, то они отделимы слабо* замкнутой гиперплоскостью. Итак, найдётся $(x_0, x_1) \in E$, такой что $\|(x_0,x_1)\|_E = 1$ и $\inf\{f_0(x_0)+f_1(x_1) : (f_0,f_1)\in H\} \geq \gamma$. Положим $u_0 = |x_0|$, $u_1 = |x_1|$. Теперь имеем

$$(f_0 \in (X_0)^*_+, f_1 \in (X_1)^*_+, f_0^{1-s} f_1^s \geq F) \Longrightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq \gamma). \quad (II.8)$$

Обозначим $v_0 = \dfrac{u_0}{1-s}$, $v_1 = \dfrac{u_1}{s}$. Тогда

$$\|v_0\|_{X_0} \leq 1, \ \|v_1\|_{X_1} \leq 1, \quad (II.9)$$

$$(f_0 \in (X_0)^*_+, f_1 \in (X_1)^*_+, f_0^{1-s} f_1^s \geq F) \Longrightarrow ((1-s) f_0(v_0) + s f_1(v_1) \geq \gamma). \quad (II.10)$$

Фиксируем $f_0 \in (X_0)^*_+$, $f_1 \in (X_1)^*_+$, такие что $f_0^{1-s} f_1^s = F$. Возьмём произвольный $z \in M_+$, такой что $z^{-1} \in M_+$ и $z z^{-1} = \mathbb{1}(W)$. Положим

$$g_0(x) = f_0(z^s x), \ x \in X_0,$$

$$g_1(x) = f_1(z^{s-1} x), x \in X_1 .$$

Ясно, что $g_0^{1-s} g_1^s = f_0^{1-s} f_1^s$, ибо $(z^s)^{1-s}(z^{s-1})^s = \mathbb{1}(W)$. Поэтому $(1-s)g_0(v_0) + s g_1(v_1) \geq \gamma$, то есть $(1-s)f_0(z^s v_0) + s f_1(z^{s-1} v_1) \geq \gamma$. Теперь из леммы 2.9.9 следует, что $F(v_0^{1-s} v_1^s) \geq \gamma$. Но $\|v_0^{1-s} v_1^s\|_{X_s} \leq 1$, поэтому $\|F\|_{(X_s)^*} \geq \gamma$. Тем самым, в силу произвольности $\gamma \in (0,1)$ неравенство (II.7) доказано. Теорема 2.2.8 доказана.

§ 12. Доказательства предложения 2.2.9 и теорем 2.2.11 и 2.2.12

1. Доказательство предложения 2.2.9. Напомним, что в банаховом K_N-пространстве Y выполнено условие (A) тогда и только тогда, когда $Y^*_{ant} = \{0\}$. Из теоремы 2.2.8 и предложений 1.2.26 и 1.2.27 следует, что

$$\{F : F \in (X_s)^*_{ant}, F \geq 0\} = \{f_0^{1-s} f_1^s : f_i \in (X_i)^*_{ant}, f_i \geq 0 \ \ (i = 0,1)\},$$

ибо, если $f_0 \in \overline{X}_0$, $f_1 \in (X_1)^*_{ant}$, то $f_0 D f_1$. Остаётся заметить, что для любых $f_i \in (X_i)^*_+$ $(i = 0,1)$ справедливо $(f_0^{1-s} f_1^s = 0) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (f_0 D f_1)$. Предложение 2.2.9 доказано.

2. В этом пункте будет доказана теорема 2.2.12. Считаем, что в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ фиксирована какая-нибудь единица $\mathbb{1}(\mathfrak{M}(\tilde{M}))$, единицы $\mathbb{1}_0$ и $\mathbb{1}_1$ в $\mathfrak{M}((X_0)^*)$ и $\mathfrak{M}((X_1)^*)$ выбраны произвольно, а единица $\mathbb{1}_s$ в $\mathfrak{M}((X_s)^*)$ подчинена $\mathbb{1}_0$ и $\mathbb{1}_1$. Пространства $(X_i)^*$ $(i = 0,1,s)$ отождествляем с их образами в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$ при соответствующих канонических реализациях. Пространства $\overline{X}_i$ $(i = 0,1,s)$ тем самым оказываются идеалами в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$. Нормы на $\overline{X_i}$ считаем индуцированными из $(X_i)^*$ $(i = 0,1,s)$. Теперь можно образовать пространство $(\overline{X_0})^{1-s}(\overline{X_1})^s$, являющееся идеалом в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$.

Лемма 2.12.1. Равенство

$$\overline{X_s} = (\overline{X}_0)^{1-s}(\overline{X}_1)^s$$

имеет место как по запасу элементов, так и по норме.

Доказательство. Естественным образом считаем, что $\mathfrak{M}(\overline{M})$ есть компонента в $\mathfrak{M}(\tilde{M})$, порождённая множеством $\overline{M}$. В силу предложения 1.2.26 имеем $\overline{X}_i = (X_i)^* \cap \mathfrak{M}(\overline{M})$. Теперь из теоремы 2.2.8 немедленно вытекает требуемое. Лемма доказана.

Для $i = 0, 1, s$ обозначим через θ_i естественный изоморфизм пространства $\overline{X}_i$ на X_i'.

Л е м м а 2.12.2. Для любых $f_0 \in (\overline{X}_0)_+$, $f_1 \in (\overline{X}_1)_+$ справедливо

$$\theta_s(f_0^{1-s} f_1^s) = [\theta_0(f_0)]^{1-s} [\theta_1(f_1)]^s. \qquad (12.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\theta_i(f_i) = y_i$ $(i=0,1)$. Тогда

$$f_i(x) = J(x y_i), \; x \in X_i \quad (i = 0, 1). \qquad (12.2)$$

Положим

$$F(x) = J(x y_0^{1-s} y_1^s), \; x \in X_s.$$

Ясно, что $F \in \overline{X}_s$. Заметим, что (12.1) равносильно тому, что $f_0^{1-s} f_1^s = F$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $(f_0^{1-s} f_1^s)_{(w)} = F_{(w)}$ для всех $w \in (X_s)_+$. Итак, достаточно показать, что

$$((f_0)_{(u_0)})^{1-s}((f_1)_{(u_1)})^s = F_{(u_0^{1-s} u_1^s)} \text{ при всех } u_i \in (X_i)_+ \; (i=0,1). \qquad (12.3)$$

Ясно, что

$$F_{(u_0^{1-s} u_1^s)}(x) = J(x u_0^{1-s} u_1^s y_0^{1-s} y_1^s), \quad x \in M. \qquad (12.4)$$

С другой стороны,

$$(f_i)_{(u_i)}(x) = J(x u_i y_i), \quad x \in M \quad (i=0,1), \qquad (12.5)$$

откуда[x)]

$$((f_0)_{(u_0)})^{1-s}((f_1)_{(u_1)})^s(x) = J(x u_0^{1-s} y_0^{1-s} u_1^s y_1^s), \quad (12.6)$$

$$x \in M.$$

Из (12.4) и (12.6) следует (12.3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.2.12. Положим для краткости

$$(Y, \|\cdot\|_Y) = (((X_0)')^{1-s}((X_1)')^s, \|\cdot\|_{((X_0)')^{1-s}((X_1)')^s}).$$

Имеем $(X_s)'_+ = \{\Theta_s(F) : F \in (\overline{X_s})_+\} = \{\Theta_s(f_0^{1-s} f_1^s) : f_i \in (\overline{X_i})_+ \ (i=0,1)\} =$

$= \{[\Theta_0(f_0)]^{1-s}[\Theta_1(f_1)]^s : f_i \in (\overline{X_i})_+ \ (i=0,1)\} = \{y_0^{1-s} y_1^s : y_i \in (X_i)'_+ \ (i=0,1)\} = Y_+.$

Тем самым $(X_s)' = Y$ по запасу элементов. Аналогично убеждаемся, что $\{z \in (X_s)'_+ : \|z\|_{(X_s)'} < 1\} = \{y \in Y_+ : \|y\|_Y < 1\}$, тем самым $\|\cdot\|_{(X_s)'} = \|\cdot\|_Y$. Теорема 2.2.12 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.2.11. Не умаляя общности, можно считать, что X_0 и X_1 суть фундаменты в W (в противном случае, вместо W мы стали бы рассматривать его компоненту V, порождённую множеством $X_0 \cap X_1$, а вместо X_0 и X_1 стали бы рассматривать $Y_0 = X_0 \cap V$, $Y_1 = X_1 \cap V$, ибо $Y_0^{1-s} Y_1^s = X_0^{1-s} X_1^s$, но Y_0 и Y_1 уже суть фундаменты в V). Так как в W имеется фундамент, являющийся КВ-пространством, то в W имеется и фундамент, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Поэтому имеет смысл говорить о пространствах $(X_i)'$, дуальных к X_i $(i=0,1,s)$, причём для простоты записи мы будем отождествлять $(X_i)'$ с $\overline{X_i}$.

---

x) Здесь используется также следующее очевидное утверждение: пусть Θ есть естественный изоморфизм $\overline{M}$ на $M' = L$, тогда для любых $g_0, g_1 \in \overline{M}_+$ справедливо $\Theta(g_0^{1-s} g_1^s) = [\Theta(g_0)]^{1-s} \times [\Theta(g_1)]^s$.

Используя следствие 2.2.10, получаем $(X_S)^* = \overline{X}_S = (\overline{X}_0)^{1-S}(\overline{X}_1)^S$. Ещё раз применив следствие 2.2.10, получим $(X_S)^{**} = (\overline{X}_S)^* = \overline{\overline{X}}_S = (\overline{\overline{X}}_0)^{1-S}(\overline{\overline{X}}_1)^S$. Пусть X_0 – КВ-пространство. Тогда $\overline{\overline{X}}_0 = X_0$ и, следовательно, $(\overline{\overline{X}}_0)^{1-S}(\overline{\overline{X}}_1)^S = (X_0)^{1-S}(\overline{\overline{X}}_1)^S$ удовлетворяет условию (A), поэтому можно ещё раз применить следствие 2.2.10. Получим $(X_S)^{***} = \overline{X_S^{**}} = \overline{(X_0)^{1-S}(\overline{\overline{X}}_1)^S} = (\overline{X}_0)^{1-S}(\overline{\overline{\overline{X}}}_1)^S = (\overline{X}_0)^{1-S}(\overline{X}_1)^S = (X_S)^*$. Следовательно, пространство $(X_S)^*$ $(\mathfrak{b})$-рефлексивно. Но тогда $(\mathfrak{b})$-рефлексивно и X_S. Теорема доказана.

§ 13. Доказательства теоремы 2.3.4 и утверждения, сформулированного в замечании 2.3.3

1. Доказательство утверждения, содержащегося в замечании 2.3.3. Пусть в пространстве $\mathfrak{M}(X)$ кроме единицы $\mathbb{1} = \mathbb{1}(\mathfrak{M}(X))$ фиксирована ещё какая-нибудь единица $\mathbb{1}^*$. Пусть F есть вещественная функция вещественной переменной, задаваемая формулой $F(\xi) = \xi^p, \xi \in [0,+\infty)$. Тогда в обозначениях гл. I § 1 имеем

$$X_p = \{x \in \mathfrak{M}(X) : F_{\mathbb{1}}(|x|) \in X\},$$

$$\|x\|_{X_p} = (\|F_{\mathbb{1}}(|x|)\|_X)^{\frac{1}{p}} \text{ для } x \in X_p.$$

Положим

$$V = \{x \in \mathfrak{M}(X) : F_{\mathbb{1}^*}(|x|) \in X\},$$

$$\|x\|_V = (\|F_{\mathbb{1}^*}(|x|)\|_X)^{\frac{1}{p}} \text{ для } x \in V.$$

Нужно показать, что пространства $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ и $(V, \|\cdot\|_V)$ алгебраически и порядково изоморфны и изометричны.

Ясно, что существует такая единица $\mathbb{1}^{**}$ в $\mathfrak{M}(X)$, что $F_{\mathbb{1}}(x)=F_{\mathbb{1}^*}(\mathbb{1}^{**}x)$ для любого $x\in\mathfrak{M}(X)_+$, где произведение $\mathbb{1}^{**}x$ понимается по отношению к единице $\mathbb{1}$. Отображение

$$X_\rho\ni x\longrightarrow \mathbb{1}^{**}x\in V$$

и есть, очевидно, искомый оператор.

2. Доказательство Теоремы 2.3.4. Напомним, что $X_\rho=X^{1-s}Y^s$, где Y есть соответствующее KN-пространство ограниченных элементов (см. предложение 2.3.2). Выберем произвольно единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ в пространствах $\mathfrak{M}(X^*)$ и $\mathfrak{M}(Y^*)$, а единицу в $\mathfrak{M}((X_\rho)^*)$ выберем так, чтобы она была подчинена единицам $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$. Тогда, отождествляя пространства X^* и $(X_\rho)^*$ с их образами в $\mathfrak{M}(Y^*)$ при канонических реализациях, в силу теоремы 2.2.8 имеем

$$(X_\rho)^*=(X^*)^{1-s}(Y^*)^s.$$

Так как Y^* есть KB-пространство, то по следствию 2.2.10 в $(X_\rho)^*$ выполнено условие (A), поэтому $(X_\rho)^*$ есть KB-пространство. Утверждение (a) доказано. Пусть теперь Z есть KN-пространство ограниченных элементов в $\mathfrak{M}(Y^*)$, порождённое единицей $\mathbb{1}_2$. Выберем произвольно единицы в пространствах $\mathfrak{M}(X^{**})$, $\mathfrak{M}(Y^{**})$, $\mathfrak{M}(Z^*)$, а единицу в $\mathfrak{M}((X_\rho)^{**})$ выберем так, чтобы она была подчинена единицам пространств $\mathfrak{M}(X^{**})$ и $\mathfrak{M}(Y^{**})$. Отождествив пространства X^{**}, Y^{**}, $(X_\rho)^{**}$ с их образами в $\mathfrak{M}(Z^*)$ при канонических реализациях, получим $(X_\rho)^{**}=(X^{**})^{1-s}(Y^{**})^s$, то есть $(X_\rho)^{**}=(X^{**})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$, ибо $Y^{**}=\overline{Y^*}$. Пусть H есть компонента в $\mathfrak{M}(Z^*)$, порождённая $\overline{Y^*}$. В силу предложения I.2.29 $X^{**}\cap H=\overline{X^*}$ и $\overline{X^*}$ есть фундамент в H . Поэтому $(X^{**})^{1-s}(\overline{Y^*})^s=$ $=(\overline{X^*})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$, то есть $(X_\rho)^{**}=(\overline{X^*})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$. Применив предложение 2.3.2, видим, что $(\overline{X^*})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X^*})_\rho$, ибо $\overline{Y^*}$ есть KN-пространство ограниченных элементов и компоненты в $\mathfrak{M}(Z^*)$, порождённые $\overline{X^*}$ и $\overline{Y^*}$, совпадают. Утверждение (в) доказано. Докажем (б). Так как $(X_\rho)^*$ есть KB-пространство, то X_ρ (б) -рефлексивно тогда и только тогда, когда X_ρ есть KB-пространство (теорема Огасавара, Вулих [6], стр. 294). Остаётся проверить, что X является KB-пространством тогда и только тогда, когда X_ρ есть KB-пространство. Это вытекает из следующих двух очевидных фактов: I) непрерывность нормы в X эквивалентна непрерывности нормы в X_ρ ; 2) монотонная полнота нормы в X эквивалентна монотонной полноте нормы в X_ρ .

Теорема 2.3.4 доказана.

§ 14. Доказательство теоремы 2.4.1

На протяжении всего параграфа полагаем $Z=X_0\cap X_1$ и считаем, что Z плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Напомним, что Z и X_0+X_1 суть банаховы KN-пространства, если нормы на них задать формулами (I.6) и (I.7).

Заметим, что Z плотно по норме в X_0+X_1 . Действительно, пусть $x\in X_0+X_1$ – произвольный. Тогда существуют $x_0\in X_0$, $x_1\in X_1$ такие, что $x=x_0+x_1$. Для $i=0,1$ найдутся последовательности $\{z_n^{(i)}\}_{n\in N}$ в Z, такие что $\|x_i - z_n^{(i)}\|_{X_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Положим $z_n = z_n^{(0)} + z_n^{(1)}$. Тогда

$\|x - z_n\|_{X_0+X_1} \le \|x_0 - z_n^{(0)}\|_{X_0} + \|x_1 - z_n^{(1)}\|_{X_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

На протяжении всего параграфа фиксируем $\varphi \in \mathfrak{N}_2^0$ и полагаем $X = \varphi(X_0, X_1)$.

1. Обозначим (только в этом пункте) через π, π_0, π_1, π_2 операторы сужения:

$$\pi F = F\big|_Z,\ F \in X^*_{min},$$
$$\pi_i f = f\big|_Z,\ f \in X_i^*\ (i=0,1),$$
$$\pi_2 f = f\big|_Z,\ f \in (X_0+X_1)^*.$$

Ясно, что π, π_0, π_1, π_2 суть изоморфизмы пространств $X^*_{min}, X_0^*, X_1^*, (X_0+X_1)^*$ на соответствующие идеалы в Z^*.

Лемма 2.14.1. Пусть $f_i \in (X_i)^*_+$ $(i = 0,1)$, $H = \hat{\varphi}(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1)$. Тогда $H \in \pi(X^*_{min})$ и для $F = \pi^{-1} H$ справедливо

$$\|F\|_{X^*} \le \|f_0\|_{X_0^*} + \|f_1\|_{X^*}. \qquad (14.1)$$

Кроме того,

$$F(\varphi(u_0,u_1)) \le f_0(u_0) + f_1(u_1) \text{ при всех } u_i \in (X_i)_+ \ (i=0,1). \qquad (14.2)$$

Доказательство. Возьмём произвольные $z \in Z_+$, $u_i \in (X_i)_+$ $(i=0,1)$, такие что $0 < z \le \varphi(u_0,u_1)$. Положим $w_i = z \vee u_i$ $(i=0,1)$. До конца параграфа будем (для удобства) считать, что $W = C_\infty(Q)$, $\mathbb{1}(W) = \chi_Q$, где $Q = Q(W)$ – соответствующий экстремальный бикомпакт. Найдутся $\mu \in rca^+(Q)$, $\ell_i \in L^1(\mu)_+$, такие что

$$f_i(x)=\int_Q (x w_i^{-1})\ell_i \, d\mu, \quad x\in W_{w_i} \quad (i=0,1). \tag{14.3}$$

Здесь $x w_i^{-1}$ есть произведение в смысле умножения элементов К-пространства W, а $(x w_i^{-1})\ell_i$ есть уже обычное произведение функции $x w_i^{-1}\in L^\infty(\mu)$ на функцию $\ell_i\in L^1(\mu)$. Из (14.3) следует, что

$$f_i(x)=\int_Q (x z^{-1})(z w_i^{-1})\ell_i \, d\mu, \quad x\in Z_z \quad (i=0,1). \tag{14.4}$$

В силу леммы 2.9.1 имеем

$H\big|_{Z_z}=\hat\varphi(\pi_0 f_0\big|_{Z_z}, \pi_1 f_1\big|_{Z_z})$, то есть $H\big|_{Z_z}=\hat\varphi(f_0\big|_{Z_z}, f_1\big|_{Z_z})$, откуда

$$H(x)=\int_Q (x z^{-1})\hat\varphi((z w_0^{-1})\ell_0, (z w_1^{-1})\ell_1)\, d\mu, \quad x\in Z_z. \tag{14.5}$$

Из (14.5) находим

$$H(z)=\int_{Q_z} \hat\varphi(z w_0^{-1})\ell_0, (z w_1^{-1})\ell_1)\, d\mu. \tag{14.6}$$

Далее нам удобно считать, что ℓ_0 и ℓ_1 суть не классы (попарно эквивалентных) функций, а представители этих классов, определённые на всём Q. Положим $m=\hat\varphi((z w_0^{-1})\ell_0, (z w_1^{-1})\ell_1)$, то есть $m(t)=\hat\varphi((z w_0^{-1})(t)\cdot\ell_0(t), (z w_1^{-1})(t)\cdot\ell_1(t))$ при $t\in Q$. Положим также $G=\{s\in Q_z : 0<z(s)\le w_i(s)<+\infty \ (i=0,1)\}$. Ясно, что G открыто и плотно в Q_z. Фиксируем произвольную точку $t\in Q_z$ и полагаем

$$m_t(s)=\hat\varphi((z w_0^{-1})(s)\cdot\ell_0(t), (z w_1^{-1})(s)\cdot\ell_1(t)), \ s\in G. \tag{14.7}$$

Так как $(z w_i^{-1})(s) = \dfrac{z(s)}{w_i(s)} \le \dfrac{\varphi(u_0(s), u_1(s))}{w_i(s)}$, то $m_t(s) \le$

$\le \varphi(u_0(s), u_1(s))\, \hat{\varphi}\left(\dfrac{\ell_0(t)}{w_0(s)}, \dfrac{\ell_1(t)}{w_1(s)}\right) \le \dfrac{u_0(s)\ell_0(t)}{w_0(s)} + \dfrac{u_1(s)\ell_1(t)}{w_1(s)}$ при $s \in G$.

Следовательно, $m(t) = \lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in G}} m_t(s) \le (u_0 w_0^{-1})(t) \cdot \ell_0(t) + (u_1 w_1^{-1})(t) \cdot \ell_1(t)$.

Теперь из (14.6) получаем $H(z) = \int_{Q_z} m\, d\mu \le \int_{Q_z} (u_0 w_0^{-1}) \ell_0\, d\mu +$ $+ \int_{Q_z} (u_1 w_1^{-1}) \ell_1\, d\mu$, то есть $H(z) \le f_0(u_0) + f_1(u_1)$ (см. (14.3)). Итак, для любых $u_i \in (X_i)_+$ $(i = 0,1)$ имеем

$$\sup\{H(z) : z \in Z,\ 0 \le z \le \varphi(u_0, u_1)\} \le f_0(u_0) + f_1(u_1). \qquad (14.8)$$

Из (14.8) немедленно следует, что $H \in \mathfrak{X}(X^*_{min})$ и справедливо (14.2). Возьмём теперь произвольный $x \in X_+$, $\|x\|_X < 1$. Найдутся $u_i \in (X_i)_+$ $(i = 0,1)$, такие что $\|u_i\|_{X_i} \le 1$ и $x \le \varphi(u_0, u_1)$. Имеем $F(x) \le F(\varphi(u_0, u_1)) \le f_0(u_0) + f_1(u_1) \le$ $\le \|f_0\|_{X_0^*} + \|f_1\|_{X_1^*}$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 2.14.2. Для любых $f_i \in (X_i)^*_+$ $(i = 0,1)$ полагаем

$$\hat{\varphi}(f_0, f_1) \overset{def}{=} \pi^{-1} \hat{\varphi}(\pi_0 f_0, \pi_1 f_1).$$

Л е м м а 2.14.3. Для любых $f_i \in (X_i)^*_+$ $(i = 0,1)$ найдётся последовательность $F_n \in X^*_{min}$, такая что $0 \le F_n \uparrow \hat{\varphi}(f_0, f_1)$, причём $\pi F_n \in \pi_2((X_0 + X_1)^*)$ для всех n (то есть каждый F_n допускает линейное положительное распространение на $X_0 + X_1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g = \pi_0 f_0 \wedge \pi_1 f_1$. Покажем, что g допускает линейное положительное распространение на X_0+X_1. Действительно, пусть $y=x_0+x_1$, где $x_i\in(X_i)_+$ $(i=0,1)$. Тогда $\sup\{g(z): z\in Z,\ 0\le z\le y\}=\sup\{g(x_0')+g(x_1'): x_i'\in Z,\ 0\le x_i'\le x_i\ (i=0,1)\}\le f_0(x_0)+f_1(x_1)<+\infty$. Тем самым $g\in \mathfrak{I}_2((X_0+X_1)^*)$ и подавно $g\in\mathfrak{I}(X^*_{min})$. Положим $h=\mathfrak{I}^{-1}(g)$.

$$F_n=\hat{\varphi}(f_0,f_1)\wedge nh\ (n\in N).$$

Заметим, что $F_n\le nh$, поэтому $\mathfrak{I}F_n\le n\mathfrak{I}h=ng$, откуда $\mathfrak{I}F_n\in\mathfrak{I}_2((X_0+X_1)^*)$. Заметим, что $\mathfrak{I}F_n=$

$$=\mathfrak{I}\hat{\varphi}(f_0,f_1)\wedge\mathfrak{I}nh=(\hat{\varphi}(\mathfrak{I}_0f_0,\mathfrak{I}_1f_1)\wedge ng)\uparrow\hat{\varphi}(\mathfrak{I}_0f_0,\mathfrak{I}_1f_1)=$$

$\mathfrak{I}\hat{\varphi}(f_0,f_1)$, ибо след $\hat{\varphi}(\mathfrak{I}_0f_0,\mathfrak{I}_1f_1)$, очевидно, равен инфимуму следов $\mathfrak{I}_0f_0$ и $\mathfrak{I}_1f_1$, а указанный инфимум совпадает со следом g. Остаётся заметить, что из $\mathfrak{I}F_n\uparrow\mathfrak{I}\hat{\varphi}(f_0,f_1)$ следует, что $F_n\uparrow\hat{\varphi}(f_0,f_1)$, ибо $\mathfrak{I}$ есть изоморфизм X^*_{min} на некоторый идеал в Z^*. Лемма доказана.

Л е м м а 2.14.4. Пусть $f_i\in(X_i)^*_+$ $(i=0,1)$, $z\in Z_+$, $a\in(0,+\infty)$. Пусть

$$(u_i\in(X_i)_+\ (i=0,1),\ \varphi(u_0,u_1)\geq z)\Longrightarrow(f_0(u_0)+f_1(u_1)\geq a).\quad(14.9)$$

Тогда $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z)\geq a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g_i=f_i|_{Z_z}$ $(i=0,1)$. Тогда из (14.9), очевидно, следует, что

$$(u_0,u_1\in(Z_z)_+,\ \varphi(u_0,u_1)\geq z)\Longrightarrow(g_0(u_0)+g_1(u_1)\geq a).\quad(14.10)$$

Из (14.10) и леммы 2.8.6 вытекает, что $\hat{\varphi}(g_0,g_1)(z)\geq a$. Но $\hat{\varphi}(g_0,g_1)=\hat{\varphi}(\mathfrak{I}_0f_0,\mathfrak{I}_1f_1)|_{Z_z}$ в силу леммы 2.9.1. Тем самым $\hat{\varphi}(\mathfrak{I}_0f_0,\mathfrak{I}_1f_1)(z)\geq a$, то есть $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z)\geq a$. Лемма доказана.

2. Далее будем отождествлять пространства X^*_{min}, X^*_0, X^*_1, $(X_0+X_1)^*$ с их образами $\pi(X^*_{min}), \pi_0(X^*_0), \pi_1(X^*_1)$, $\pi_t((X_0+X_1)^*)$, соответственно. Напомним, что пространство $\hat{\varphi}(X^*_0, X^*_1)$ состоит из всех $F \in Z^*$, таких что

$$|F| \le \lambda \hat{\varphi}(f_0, f_1) \tag{14.11}$$

для некоторого $\lambda \in [0, +\infty)$ и каких-нибудь $f_i \in (X_i)^*_+$ с $\|f_i\|_{X^*_i} \le 1$ $(i = 0, 1)$. При этом $\|F\|_{\hat{\varphi}(X^*_0, X^*_1)}$ есть инфимум всех возможных λ в (14.11). Уже установлено (лемма 2.14.1), что $\hat{\varphi}(X^*_0, X^*_1) \subset X^*_{min}$.

Лемма 2.14.5. Для любого $F \in \hat{\varphi}(X^*_0, X^*_1)$ справедливо

$$\|F\|_{X^*} \le 2 \|F\|_{\hat{\varphi}(X^*_0, X^*_1)}. \tag{14.12}$$

Доказательство. Пусть $\|F\|_{\hat{\varphi}(X^*_0, X^*_1)} = \lambda$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $f_i \in (X_i)^*_+$, $\|f_i\|_{X^*_i} \le 1$ $(i = 0, 1)$, такие что $|F| \le (\lambda + \varepsilon)\hat{\varphi}(f_0, f_1)$. Теперь в силу леммы 2.14.1 имеем $\|F\|_{X^*} \le (\lambda + \varepsilon)\|\hat{\varphi}(f_0, f_1)\|_{X^*} \le (\lambda+\varepsilon)(\|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_1}) \le$ $\le 2(\lambda + \varepsilon)$. Итак, $\|F\|_{X^*} \le 2\lambda$. Лемма доказана.

3. До конца параграфа полагаем $E = X_0 \times X_1$, причём

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}, \ (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда естественным образом $E^* = X^*_0 \times X^*_1$, причём

$$\|(f_0, f_1)\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{X^*_0}, \|f_1\|_{X^*_1}\}, \ (f_0, f_1) \in E^*.$$

Так как $Z \subset X_0$, $Z \subset X_1$, то, естественным образом, $Z \times Z \subset E$. Положим $\tau = \sigma(E^*, Z \times Z)$. Заметим, что топология τ слабее слабой * топологии $\sigma(E^*, E)$, тем не менее, она тоже хаусдорфова, ибо Z плотно по норме в X_0 и X_1.

Лемма 2.14.6. Пусть $F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)_+$. Тогда множество

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : \hat{\varphi}(f_0, f_1) \geq F\} \tag{14.13}$$

непусто, выпукло и τ - замкнуто.

Доказательство. То что $H \neq \phi$ - очевидно. Пусть $(f_0, f_1), (f_0', f_1') \in H$, $\lambda \in (0,1)$. Тогда $\hat{\varphi}(\lambda f_0 + (1-\lambda) f_0', \lambda f_1 + (1-\lambda) f_1') \geq \lambda \hat{\varphi}(f_0, f_1) + (1-\lambda)\hat{\varphi}(f_0', f_1') \geq F$ в силу вогнутости функции $\hat{\varphi}$, тем самым, H - выпукло. Пусть $\{(f_0^\alpha, f_1^\alpha) : \alpha \in A\}$ - направление в H, которое τ - сходится к некоторому (f_0, f_1). Докажем, что $(f_0, f_1) \in H$. Для этого достаточно установить, что

$$\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) \geq F(z) \text{ при всех } z \in Z_+ \tag{14.14}$$

Фиксируем произвольный $z \in Z_+$. Положим $g_i^\alpha = f_i^\alpha|_{Z_z}$, $g_i = f_i|_{Z_z}$, $g = F|_{Z_z}$ $(i = 0,1)$. Тогда $\hat{\varphi}(g_0^\alpha, g_1^\alpha) = \hat{\varphi}(f_0^\alpha, f_1^\alpha)|_{Z_z}$, $\hat{\varphi}(g_0, g_1) = \hat{\varphi}(f_0, f_1)|_{Z_z}$ в силу леммы 2.9.1. Ясно, что $\hat{\varphi}(g_0^\alpha, g_1^\alpha) \geq g$ при всех $\alpha \in A$ и что $g_i^\alpha \to g_i$ $(i = 0,1)$ в топологии $\sigma(Z_z^*, Z_z)$. Поэтому $\hat{\varphi}(g_0, g_1) \geq g$ в силу леммы 2.8.11. Отсюда $\hat{\varphi}(g_0, g_1)(z) \geq g(z)$, то есть $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) \geq F(z)$. Лемма доказана.

Лемма 2.14.7. Норма $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)}$ на пространстве $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Доказательство. Пусть направление $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ в $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$ таково, что $0 \le F_\alpha \uparrow$ и $\sup\limits_{\alpha \in A} \|F_\alpha\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} = a < +\infty$. Нужно показать, что существует $F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$, такой что $F_\alpha \uparrow F$ и $\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} = a$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и для любого $\alpha \in A$ положим $H_\alpha = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : F_\alpha \le (a+\varepsilon)\hat{\varphi}(f_0, f_1)$ и $\|f_i\|_{X_i^*} \le 1 \ (i = 0,1)\}$. Из леммы 2.14.6 следует, что H_α τ-компактно (как пересечение τ-замкнутого и τ-компактного множеств). Очевидно, что $H_\alpha \ne \phi$ и что $(\alpha_1 \le \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in A) \Rightarrow (H_{\alpha_1} \supset H_{\alpha_2})$. Итак, система множеств $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ – центрированная и состоит из τ-компактных множеств. Поэтому $\bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha \ne \phi$. Пусть $(f_0, f_1) \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha$. Тогда $F_\alpha \le (a+\varepsilon)\hat{\varphi}(f_0, f_1)$ при всех $\alpha \in A$. Поэтому существует $\sup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha = F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$, причём $\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \le a + \varepsilon$. Остаётся заметить, что $\varepsilon > 0$ – произвольно. Лемма доказана.

Лемма 2.14.8. Пусть $F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)_+$, $\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} = 1$ и пусть $a \in (0,1)$. Тогда найдутся $z_0, z_1 \in Z_+$, такие что $\|z_0\|_{X_0} + \|z_1\|_{X_1} = 1$ и

$$(f_0 \in (X_0)_+^*, f_1 \in (X_1)_+^*, \hat{\varphi}(f_0, f_1) \ge F) \Longrightarrow (f_0(z_0) + f_1(z_1) \ge a). \quad (14.15)$$

Доказательство. Пусть $H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* :$

$$: \hat{\varphi}(f_0, f_1) \ge F\}, \ V_a = \{(f_0, f_1) \in E^* : \|(f_0, f_1)\|_{E^*} \le a\}.$$

Возьмём произвольный $(f_0, f_1) \in H$. Тогда, очевидно, $\|(f_0, f_1)\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{X_0^*}, \|f_1\|_{X_1^*}\} \ge 1$. Тем самым $H \cap V_a = \phi$. Так как H τ – замкнуто (лемма 2.14.6), V_a τ – компактно и эти множества не пересекаются, то они отделимы τ – замкнутой гиперплоскостью. Таким образом, существуют $x_0, x_1 \in Z$,

такие что $\inf\limits_{(f_0,f_1)\in H}\{f_0(x_0)+f_1(x_1)\}\geq \sup\limits_{(f_0,f_1)\in V_a}\{f_0(x_0)+f_1(x_1)\}=a$.
Остаётся положить $z_i=|x_i|$ $(i=0,1)$. Лемма доказана.

4. Лемма 2.14.9. Для любого $F\in\hat{\varphi}(X_0^*;X_1^*)$ справедливо

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*,X_1^*)}\leq\|F\|_{X^*}. \tag{14.16}$$

Доказательство. Можно считать, что $F\geq 0$ и (в силу лемм 2.14.7 и 2.14.3), что F допускает линейное положительное распространение на X_0+X_1, которое будет обозначаться той же буквой F. Наконец, можно считать, что $\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*,X_1^*)}=1$. Фиксируем произвольные $a,\varepsilon\in(0,1)$. Найдём $z_0,z_1\in Z_+$, такие что справедливо (14.15) и $\|z_0\|_{X_0}+\|z_1\|_{X_1}=1$. Положим $u=z_0+\varepsilon z_1$, $v=z_1+\varepsilon z_0$. Заметим, что $(u)=(v)$. Пусть N-функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (1.4) и (1.5). Применим лемму 2.7.7, положив

$$z=M'(M^{-1}(uv^{-1})),\ h=z^{-1},\ k=N(z)z^{-1}. \tag{14.17}$$

Тогда $\varphi(u,v)=hu+kv$, $\hat{\varphi}(h,k)=\chi_{Q_u}$, где Q_u – открыто-замкнутый носитель элемента u. Заметим, что $Q_u=Q_v=Q_h=Q_k=Q_z$. Так как, очевидно, $\varepsilon\chi_{Q_u}\leq uv^{-1}\leq\frac{1}{\varepsilon}\cdot\chi_{Q_u}$, то существуют $c_1,c_2\in(0,+\infty)$, такие что

$$c_1\chi_{Q_u}\leq h\leq c_2\chi_{Q_u},\ c_1\chi_{Q_u}\leq k\leq c_2\chi_{Q_u}. \tag{14.18}$$

Положим теперь для $x\in X_0+X_1$

$$f_0(x)=F(hx)+F(\omega x),$$

$$f_1(x)=F(kx)+F(\omega x),$$

где $\omega = \dfrac{\chi_Q - \chi_{Q_u}}{\hat{\varphi}(1,1)}$. Покажем, что $\hat{\varphi}(f_0, f_1) = F$, то есть что $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) = F(z)$ при всех $z \in Z$. Фиксируем произвольное $z \in Z_+$. Пусть $\mu \in rca^+(Q)$ такова, что $F(x) = \int_Q x z^{-1} d\mu$ при $x \in Z_z$. Тогда

$$\begin{cases} f_0(x) = \int_Q x z^{-1}(h+\omega) d\mu \\ f_1(x) = \int_Q x z^{-1}(\kappa+\omega) d\mu \end{cases} \text{при } x \in Z_z.$$

Отсюда $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(x) = \int_Q x z^{-1} \hat{\varphi}(h+\omega, \kappa+\omega) d\mu$ при $x \in Z_z$. Но $h \wedge \omega = \kappa \wedge \omega = 0$, следовательно, $\hat{\varphi}(h+\omega, \kappa+\omega) = \hat{\varphi}(h,\kappa) + \hat{\varphi}(\omega,\omega) = \chi_{Q_u} + \hat{\varphi}(1,1)\omega = \chi_{Q_u} + (\chi_Q - \chi_{Q_u}) = \chi_Q$. Тем самым $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(x) = \int_Q x z^{-1} d\mu$ при $x \in Z_z$, поэтому $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) = \int_{Q_z} d\mu = F(z)$. Итак, $\hat{\varphi}(f_0, f_1) = F$. Теперь в силу (14.15) имеем $f_0(z_0) + f_1(z_1) \geq a$. Тогда и подавно $f_0(u) + f_1(v) \geq a$, то есть $F(hu + \kappa v) \geq a$ (ибо $\omega u = \omega v = 0$), то есть $F(\varphi(u,v)) \geq a$. Обозначим $b = \max\{\|z_0\|_{X_1}, \|z_1\|_{X_0}\}$. Тогда $\|u\|_{X_0} \leq \|z_0\|_{X_0} + \varepsilon\|z_1\|_{X_0} \leq 1 + \varepsilon b$, $\|v\|_{X_1} \leq \|z_1\|_{X_1} + \varepsilon\|z_0\|_{X_1} \leq 1 + \varepsilon b$. Следовательно, $\|\varphi(u,v)\|_{X_\varphi} \leq 1 + \varepsilon b$, откуда $\|F\|_{X^*} \geq \dfrac{a}{1+\varepsilon b}$. Так как b не зависит от взятого ε, то имеем $\|F\|_{X^*} \geq a$. Тогда в силу произвольности $a \in (0,1)$ получаем $\|F\|_{X^*} \geq 1$, то есть $\|F\|_{X^*} \geq \|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.14.10. Пространство $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$ есть компонента в X^*_{min}, причём

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \leq \|F\|_{X^*} \leq 2\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \text{ при всех } F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*). \qquad (14.19)$$

Доказательство. Утверждение (14.19) уже установлено, см. леммы 2.14.5 и 2.14.9. Уже установлено (лемма 2.14.1), что $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$ есть идеал в X_{min}^*. Пусть направление $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ в $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$ таково, что $0 \le F_\alpha \uparrow F \in X_{min}^*$. Докажем, что $F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$. Из (14.19) следует, что $\sup_{\alpha\in A} \|F_\alpha\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \le \|F\|_{X^*} < +\infty$, поэтому в силу леммы 2.14.7 существует $\sup_{\alpha\in A} F_\alpha \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$. Это и значит, что $F \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$. Лемма доказана.

5. Лемма 2.14.11. $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*) = X_{min}^*$ по запасу элементов.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся $g \in (X_{min}^*)_+$ и $z \in Z_+$, такие что $g(z) > 1$ и $g \perp \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$. Пусть A есть множество всех $\alpha = (n, f)$, где $n \in N$ и $f \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)_+$. Для $\alpha_1 = (n_1, f_1), \alpha_2 = (n_2, f_2) \in A$ полагаем $(\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2) \Longleftrightarrow (n_1 \le n_2$ и $f_1 \le f_2)$. По каждому $\alpha = (n, f) \in A$ найдутся $y_\alpha, z_\alpha \in Z_+$, такие что $y_\alpha + z_\alpha = z, g(y_\alpha) + f(z_\alpha) < \min\{g(z) - 1, \frac{1}{n}\}$. Указанные y_α, z_α существуют в силу того, что $f \wedge g = 0$. Тогда $f(z_\alpha) < \frac{1}{n}, g(z_\alpha) = g(z) - g(y_\alpha) \ge g(z) - (g(z) - 1) = 1$. Таким образом, направление $\{z_\alpha : \alpha \in A\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(z_\alpha) \longrightarrow 0 \text{ для любого } f \in \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*), \tag{14.20}$$

$$g(z_\alpha) \ge 1 \text{ для любого } \alpha \in A. \tag{14.21}$$

Обозначим через B выпуклую оболочку множества $\{z_\alpha : \alpha \in A\}$ и положим $\gamma = \inf\{\|z\|_X : z \in B\}$. Ясно, что $\gamma > 0$, ибо $g(z) \ge 1$ для любого $z \in B$. Положим $H = \{(u_0, u_1) \in E_+ :$

существует $z \in B$, такой что $\varphi(u_0,u_1) \geq z\}$. Здесь E означает то же, что в начале пункта 3 этого параграфа. Множество H , очевидно, непусто, покажем, что оно выпукло. Действительно, пусть $(u_0,u_1),(u_0',u_1') \in H$, $\varphi(u_0,u_1) \geq z \in B$, $\varphi(u_0',u_1') \geq z' \in B$. Тогда при любом $\lambda \in (0,1)$ имеем $\varphi(\lambda u_0 + (1-\lambda)u_0', \lambda u_1 + (1-\lambda)u_1') \geq$ $\geq \lambda\varphi(u_0,u_1) + (1-\lambda)\varphi(u_0',u_1') \geq \lambda z + (1-\lambda)z' \in B$. Тем самым, H – выпукло. Заметим, что $\|(u_0,u_1)\|_E \geq \gamma$ для любого $(u_0,u_1) \in H$. Действительно, если $(u_0,u_1) \in H$, то $\|\varphi(u_0,u_1)\|_X \geq \gamma$, откуда $\|(u_0,u_1)\|_E = \|u_0\|_{X_0} + \|u_1\|_{X_1} \geq \max\{\|u_0\|_{X_0}, \|u_1\|_{X_1}\} \geq \gamma$. Так как множество H выпукло и $\|(u_0,u_1)\|_E \geq \gamma > 0$ при всех $(u_0,u_1) \in H$, то H строго отделимо от точки $(0,0) \in E$ гиперплоскостью. Поэтому существуют $f_i \in (X_i)_+^*$ $(i = 0,1)$ и $c \in (0,+\infty)$, такие что

$$((u_0,u_1) \in H) \Longrightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c).$$

Следовательно, для любого $\alpha \in A$ справедливо

$$(u_0 \in (X_0)_+, u_1 \in (X_1)_+, \varphi(u_0,u_1) \geq z_\alpha) \Longrightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c),$$

откуда и подавно

$$(u_0, u_1 \in Z_+, \varphi(u_0,u_1) \geq z_\alpha) \Longrightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c),$$

откуда и подавно

$$(u_0, u_1 \in (Z_{z_\alpha})_+, \varphi(u_0,u_1) \geq z_\alpha) \Longrightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c),$$

откуда $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z_\alpha) \geq c$ в силу леммы 2.8.6 и леммы 2.9.1.

Итак, $\hat{\varphi}(f_0,f_1)(z_\alpha) \geq c > 0$ при всех $\alpha \in A$. Это противоречит (14.20). Лемма доказана.

6. Из лемм 2.14.10 и 2.14.11 следует, что $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*) = X_{min}^*$ по запасу элементов и

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \leq \|F\|_{X^*} \leq 2\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \quad \text{при всех } F \in X_{min}^*.$$

Осталось лишь доказать следующую лемму.

Лемма 2.14.12. Пусть N-функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (1.4) и (1.5) удовлетворяют Δ_2-условию при всех значениях аргумента. Тогда $X_0 \cap X_1$ плотно по норме в X.

Доказательство. Пусть $z \in X_+$ - произвольный. Найдутся $x \in (X_0)_+$, $y \in (X_1)_+$, такие что $z = \varphi(x, y)$. В силу леммы 2.7.8 найдутся $x_n, y_n \in X_0 \cap X_1$, такие что $0 \leq x_n \uparrow x$, $0 \leq y_n \uparrow y$, $\|x - x_n\|_{X_0} \to 0$, $\|y - y_n\|_{X_1} \to 0$. Положим $z_n = \varphi(x_n, y_n)$. Ясно, что $z_n \in X_0 \cap X_1$, ибо $z_n \hat{\varphi}(1,1) = \varphi(x_n, y_n)\hat{\varphi}(1,1) \leq x_n + y_n$. Осталось показать, что $\|z - z_n\|_X \to 0$. В силу леммы 2.7.4 для любых $m, n \in N$ имеем $0 \leq z - z_n = \varphi(x, y) - \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x, y) -$

$$-\varphi(x_n, y) + \varphi(x_n, y) - \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x - x_n, y) + \varphi(x_n, y - y_n) \leq \varphi\left(\frac{b}{2}(x - x_n), \frac{1}{2}y\right) + \varphi\left(\frac{x_n}{2}, \frac{b}{2}(y - y_n)\right) \leq \varphi\left(\left(\frac{b}{2}\right)^m (x - x_n), \frac{y}{2^m}\right) + $$

$$+ \varphi\left(\frac{x_n}{2^m}, \left(\frac{b}{2}\right)^m (y - y_n)\right).$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Подберём $m \in N$ так, что $\|x\|_{X_0} \leq 2^{m-1}\varepsilon$, $\|y\|_{X_1} \leq 2^{m-1}\varepsilon$. Тогда $\left\|\frac{y}{2^m}\right\|_{X_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\left\|\frac{x_n}{2^m}\right\|_{X_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Так как для достаточно больших n будет $\left\|\left(\frac{b}{2}\right)^m (x - x_n)\right\|_{X_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\left\|\left(\frac{b}{2}\right)^m (y - y_n)\right\|_{X_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, то для этих n будет $\|z - z_n\|_X \leq \varepsilon$. Лемма доказана.

Теорема 2.4.1 доказана.

§ 15. Доказательство теоремы 2.4.2 и пример к замечанию 2.4.3

1. Прежде всего заметим, что при доказательстве теоремы 2.4.2. не умаляя общности, можно считать, что X_0 и X_1 не просто идеалы, но фундаменты в W. Действительно, пусть V есть компонента в W, порождённая $X_0 \cap X_1$. Пусть $Y_i = X_i \cap V$ с нормой, индуцированной из X_i $(i=0,1)$. Ясно, что Y_i есть компонента в X_i, причём $\varphi(X_0, X_1) = \varphi(Y_0, Y_1)$, $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)} = \|\cdot\|_{\varphi(Y_0,Y_1)}$. Остаётся заметить, что Y_0 и Y_1 суть фундаменты в V.

2. Итак, считаем, что X_0 и X_1 суть фундаменты в W. Напомним, что в теореме 2.4.2 не требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в X_0 или X_1. Полагаем $X = \varphi(X_0, X_1)$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$.

Лемма 2.15.1.

$$(\varphi(X_0, X_1))' = \hat{\varphi}(X_0', X_1') \quad \text{по запасу элементов} \tag{15.1}$$

и

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0',X_1')} \le \|\cdot\|_{(\varphi(X_0,X_1))'} \le 2\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0',X_1')}. \tag{15.2}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $Z = X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Считаем, что X^*_{min}, X^*_0, X^*_1 вложены в Z^* так же как в теореме 2.4.1. Ясно, что $\bar{X} = X^*_{min} \cap \bar{Z}$, $\bar{X}_0 = X^*_0 \cap \bar{Z}$, $\bar{X}_1 = X^*_1 \cap \bar{Z}$. Теперь (15.1) и (15.2) прямо следуют из теоремы 2.4.1. Общий случай. Обозначим через Y_i замыкание Z в X_i по норме, причём за $\|\cdot\|_{Y_i}$ примем сужение нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ на Y_i $(i=0,1)$. Так как $Y_0 \cap Y_1$ плотно по норме в Y_i $(i=0,1)$, то по уже доказанному имеем

$$(\varphi(Y_0,Y_1))' = \hat{\varphi}(Y_0',Y_1') \quad \text{по запасу элементов} \tag{15.3}$$

и

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(Y_0',Y_1')} \le \|\cdot\|_{(\varphi(Y_0,Y_1))'} \le 2\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(Y_0',Y_1')}. \tag{15.4}$$

Заметим, что $(Y_i',\|\cdot\|_{Y_i'}) = (X_i',\|\cdot\|_{X_i'})$ $(i=0,1)$ в силу предложения 0.4.5. Так как $\varphi(\alpha,\beta)\hat{\varphi}(\xi,\eta) \le \alpha\xi + \beta\eta$ при всех ξ,η, $\alpha,\beta \in [0,+\infty)$, то

$$\hat{\varphi}(X_0',X_1') \subset (\varphi(X_0,X_1))'. \tag{15.5}$$

Далее, так как $\varphi(Y_0,Y_1) \subset \varphi(X_0,X_1)$, то $(\varphi(Y_0,Y_1))' \supset (\varphi(X_0,X_1))' \supset \hat{\varphi}(X_0',X_1') = \hat{\varphi}(Y_0',Y_1') = (\varphi(Y_0,Y_1))'$, откуда следует (15.1). Доказываем (15.2). Так как очевидно $\|y\|_{\varphi(Y_0,Y_1)} \ge \|y\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ при всех $y \in \varphi(Y_0,Y_1)$, то $\|\cdot\|_{(\varphi(Y_0,Y_1))'} \le \|\cdot\|_{(\varphi(X_0,X_1))'}$, откуда $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(Y_0',Y_1')} \le \|\cdot\|_{(\varphi(X_0,X_1))'}$ в силу (15.4). Тем самым $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X_0',X_1')} \le \|\cdot\|_{(\varphi(X_0,X_1))'}$, то есть левое неравенство из (15.2) справедливо. Докажем правое. Пусть $p \in \hat{\varphi}(X_0',X_1')_+$, $\|p\|_{\hat{\varphi}(X_0',X_1')} = \lambda$. Возьмём произвольный $x \in \varphi(X_0,X_1)_+$, такой что $\|x\|_{\varphi(X_0,X_1)} < 1$. Найдутся $u_i \in (X_i)_+$, такие что $\|u_i\|_{X_i} \le 1$ $(i=0,1)$ и $x \le \varphi(u_0,u_1)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $u_i' \in (X_i)_+'$, такие что $\|u_i'\|_{X_i'} \le 1$ $(i=0,1)$ и $p \le (\lambda+\varepsilon)\hat{\varphi}(u_0',u_1')$. Теперь имеем $J(xp) \le (\lambda+\varepsilon)\tilde{J}(\varphi(u_0,u_1)\hat{\varphi}(u_0',u_1')) \le$ $\le (\lambda+\varepsilon)J(u_0 u_0' + u_1 u_1') \le 2(\lambda+\varepsilon)$. Тем самым $J(xp) \le 2\lambda$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Наконец, $\|p\|_{(\varphi(X_0,X_1))'} =$ $= \sup\{J(xp) : x \in \varphi(X_0,X_1)_+,\ \|x\|_{\varphi(X_0,X_1)} < 1\} \le 2\lambda$. Лемма доказана.

Лемма 2.15.2. Норма $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X'_0,X'_1)}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Доказательство. Можно считать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам, ибо, в противном случае, можно перейти от X_i к Y_i, где Y_i есть замыкание $X_0 \cap X_1$ в X_i, и воспользоваться тем, что $X'_i = Y'_i$, $\|\cdot\|_{X'_i} = \|\cdot\|_{Y'_i}$ $(i=0,1)$. Теперь требуемое прямо следует из леммы 2.14.7.

Лемма 2.15.3. Для любого $x' \in \hat{\varphi}(X'_0, X'_1)_+$ существуют $x'_i \in (X_i)'_+$, такие что $\|x'_i\|_{X'_i} \le 1$ $(i=0,1)$ и $x' \le \lambda \hat{\varphi}(x'_0, x'_1)$, где $\lambda = \|x'\|_{\hat{\varphi}(X'_0,X'_1)}$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы можно считать, что $Z = X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Считаем, что X^*_{min}, X^*_0, X^*_1 вложены в Z^* так же как в теореме 2.4.1. Пусть $E = X_0 \times X_1$, как и в § 14 пункт 3. Положим

$$F(x) = J(x\,x'),\ x \in X.$$

Ясно, что $F \in \bar{X}$. Положим теперь

$$H = \{(f_0, f_1) \in E^*_+ : \hat{\varphi}(f_0, f_1) \ge F\}.$$

В силу леммы 2.14.6 H непусто, выпукло и $\sigma(E^*, E)$ — замкнуто. Для каждого $n \in N$ найдётся $(f_0^{(n)}, f_1^{(n)}) \in H$, такой что $\|f_i^{(n)}\|_{X^*_i} \le \lambda + n^{-1}$ $(i=0,1)$. Пусть (f_0, f_1) есть обобщённая предельная точка последовательности $\{(f_0^{(n)}, f_1^{(n)})\}_{n \in N}$ в топологии $\sigma(E^*, E)$ (определение обобщённой предельной точки см., например, Данфорд и Шварц [I], стр.41). Ясно, что

$\|f_i\|_{X_i^*} \leq \lambda$ $(i=0,1)$. Положим $f_i' = Pr_{\overline{X}_i} f_i$ и пусть $u_i' \in X_i'$ есть прообраз f_i' при естественном вложении X_i' в X_i^* $(i=0,1)$. Но $(f_0, f_1) \in H$, ибо H $\sigma(E^*,E)$ – замкнуто. Поэтому $\|u_i'\|_{X_i'} \leq \lambda$ $(i=0,1)$ и $\hat{\varphi}(u_0', u_1') \geqslant x'$. Остаётся принять[x] $x_i' = \lambda^{-1} u_i'$ $(i=0,1)$. Лемма доказана.

3. Докажем сначала утверждение (б) теоремы 2.4.2. Так как нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$ универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны, то (см. теорему 0.5.9) $X_i'' = X_i$, $\|\cdot\|_{X_i''} = \|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$. Напомним также, что $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$. Заменив теперь в леммах 2.15.2 и 2.15.3 φ на $\hat{\varphi}$, $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ на $(X_i', \|\cdot\|_{X_i'})$, получаем требуемое.

Докажем (а). Так как норма $\|\cdot\|_{X_i}$ $(i=0,1)$ универсально монотонно полна, то она эквивалентна некоторой монотонной норме, которая одновременно универсально монотонно полна и универсально полунепрерывна (см. предложение 0.4.4). Остаётся применить уже доказанное утверждение (б) и воспользоваться тем, что если одна из двух эквивалентных монотонных норм на некотором К-линеале универсально монотонно полна, то этим же свойством обладает и вторая норма.

Докажем (в). Так как нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ универсально полунепрерывны, то $\|x\|_{X_i} = \|x\|_{X_i''}$ при всех $x \in X_i$ $(i=0,1)$, см. теорему 0.5.9. В силу леммы 2.7.9 норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ есть сужение нормы $\|\cdot\|_{\varphi(X_0'',X_1'')}$ на $\varphi(X_0,X_1)$. Остаётся заметить, что норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0'',X_1'')}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна в силу уже доказанного утверждения (б).

Теорема 2.4.2 доказана.

---

[x] Мы считаем, что $\lambda > 0$, ибо при $\lambda = 0$ утверждение леммы тривиально.

4. Для построения примера, существование которого утверждается в замечании 2.4.3, нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 2.15.4. Существует N-функция $M(\xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(\text{а}) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{M(2^n)}{M(2^{n+1})} = 0 \quad ;$$

$$(\text{б}) \quad \frac{M((1+\frac{1}{m})2^n)}{M(2^{n+1})} \geqslant \frac{1}{m} \quad \text{при } n = 0,1,2,\dots;\ m = 1,2,\dots .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмём любую N-функцию $M(\xi)$, которая удовлетворяет условию (а) и линейна на каждом промежутке $[2^n, 2^{n+1}]$ $(n = 0,1,2,\dots)$. Покажем, что она удовлетворяет и условию (б). Действительно,

$$M((1+\frac{1}{m})2^n) = M(2^n) + [M(2^{n+1}) - M(2^n)]\cdot \frac{\frac{1}{m}\cdot 2^n}{2^{n+1}-2^n} = M(2^n) + \frac{M(2^{n+1})-M(2^n)}{m} \geqslant \frac{M(2^{n+1})}{m},$$

откуда $\frac{M((1+\frac{1}{m})2^n)}{M(2^{n+1})} \geqslant \frac{1}{m}$ при всех $n = 0,1,2,\dots;$ $m = 1,2,\dots$. Лемма доказана.

П р и м е р 2.15.5. Возьмём $M(\xi)$ из леммы 2.15.4 и зададим φ по формуле (1.4). Примем $W = S$ (пространство всех последовательностей вещественных чисел). За X_0 примем пространство всех $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in W$, таких что

$$\|x\|_{X_0} = \sup_n \frac{|\xi_n|}{M(2^{n+1})} < +\infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{M(2^{n+1})} = 0 .$$

Положим также $X_1 = \ell^\infty$ с обычной равномерной нормой. Покаясь, что норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ не является полунепрерывной, хотя нормы $\|\cdot\|_{X_0}$ и $\|\cdot\|_{X_1}$ универсально полунепрерывны. Причина этого заключается в том, что функция $M(\xi)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию.

Рассуждая как в замечании 2.1.11, видим, что $\varphi(X_0,X_1)$ состоит из всех $x=(\xi_n)_{n\in N}$, таких что $\{M(\frac{|\xi_n|}{\lambda})\}_{n\in N}\in X_0$ для некоторого $\lambda\in(0,+\infty)$, и, если это условие выполнено, то

$$\|x\|_{\varphi(X_0,X_1)}=\inf\left\{\lambda>0:\left\|\left\{M\left(\frac{|\xi_n|}{\lambda}\right)\right\}_{n\in N}\right\|_{X_0}\le 1\right\}.$$

Положим $u=\{2^n\}_{n\in N}$. Ясно, что $u\in\varphi(X_0,X_1)$, $\|u\|_{\varphi(X_0,X_1)}\le 1$. Допустим, что $\|u\|_{\varphi(X_0,X_1)}<1$. Тогда существует $m\in N$, такое что $\|u\|_{\varphi(X_0,X_1)}<\frac{m}{m+1}$. Следовательно, $\{M((1+\frac{1}{m})2^n)\}_{n\in N}\in X_0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M((1+\frac{1}{m})2^n)}{M(2^{n+1})}=0$, что невозможно. Итак, $\|u\|_{\varphi(X_0,X_1)}=1$. Положим теперь $u_n=(2,2^2,\dots,2^n,0,0,\dots)$. Ясно, что $0\le u_n\uparrow u$, причём $\|u_n\|_{\varphi(X_0,X_1)}\le 0{,}5$ при всех n. Тем самым, норма $\|\cdot\|_{\varphi(X_0,X_1)}$ не является полунепрерывной, что и требовалось доказать.

§ 16. Доказательство теоремы 2.4.5

1. Справедливость утверждения (а) теоремы 2.4.5 прямо следует из теоремы 2.2.12. Доказываем утверждение (б). Пусть (φ_1,φ_2) – фиксированная согласованная пара.

До конца параграфа будет действовать следующее соглашение. В тех случаях, когда мы принимаем $W=R^1$, мы считаем, что $\mathbb{1}(W)=1$, $J(x)=x$ для $x\in R^1$. В тех случаях, когда мы принимаем $W=R^2$, мы считаем, что $\mathbb{1}(W)=(1,1)$, $J(x)=x_1+x_2$ для $x=(x_1,x_2)\in R^2$.

Л е м м а 2.16.1. Для любых $\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ справедливо

$$\varphi_1(\lambda,\mu)\cdot\varphi_2(\lambda^{-1},\mu^{-1})=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Примем $W=R^1$, $\|x\|_{X_0}=\frac{|x|}{\lambda}$, $\|x\|_{X_1}=\frac{|x|}{\mu}$. Тогда $\|x\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}=\frac{|x|}{\varphi_1(\lambda,\mu)}$, $\|x\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}=|x|\cdot\varphi_1(\lambda,\mu)$. С другой стороны, $\|x\|_{X_0'}=\lambda|x|$, $\|x\|_{X_1'}=\mu|x|$, $\|x\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}=\frac{|x|}{\varphi_2(\lambda^{-1},\mu^{-1})}$. Теперь из равенства $\|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}=\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}$ получаем требуемое. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 2.16.2. Для $\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ через $p_{\lambda,\mu}, q_{\lambda,\mu}$ обозначаем нормы на R^2, задаваемые формулами

$$\left.\begin{aligned} p_{\lambda,\mu}(x)&=\max\{\lambda^{-1}|x_1|,\mu^{-1}|x_2|\}\\ q_{\lambda,\mu}(x)&=\lambda|x_1|+\mu|x_2|\end{aligned}\right\}\ x=(x_1,x_2)\in R^2.$$

Следующие две леммы тривиальны, их доказательства мы опускаем.

Л е м м а 2.16.3. Для $\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ имеем

$$(R^2,p_{\lambda,\mu})'=(R^2,q_{\lambda,\mu}),\ (R^2,q_{\lambda,\mu})'=(R^2,p_{\lambda,\mu}).$$

Л е м м а 2.16.4. Пусть $W=R^2$, $\lambda,\mu,\alpha,\beta\in(0,+\infty)$, $\|\cdot\|_{X_0}=p_{\lambda,\mu}$, $\|\cdot\|_{X_1}=p_{\alpha,\beta}$. Тогда $\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}=p_{\varphi_1(\lambda,\alpha),\varphi_1(\mu,\beta)}$.

Л е м м а 2.16.5. Функции φ_1,φ_2 положительно однородны.

Доказательство. Фиксируем $\xi, \eta \in (0,+\infty)$. Положим $\lambda = \frac{1}{2\xi}$, $\mu = \frac{1}{2\eta}$. Пусть $W = R^2$, $\|\cdot\|_{X_0} = q_{\lambda,\lambda}$, $\|\cdot\|_{X_1} = q_{\mu,\mu}$. Тогда $\|\cdot\|_{X_0'} = p_{\lambda,\lambda}$, $\|\cdot\|_{X_1'} = p_{\mu,\mu}$. Следовательно, $\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')} = p_{\varphi_2(\lambda,\mu),\varphi_2(\lambda,\mu)}$. Отсюда $\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0,X_1)} = \|\cdot\|_{(\varphi_2(X_0',X_1'))'} = q_{\varphi_2(\lambda,\mu),\varphi_2(\lambda,\mu)}$. Таким образом,

$$\|\cdot\|_{\varphi_1(X_0,X_1)} = q_{\varphi_2(\lambda,\mu),\varphi_2(\lambda,\mu)}. \tag{16.1}$$

Пусть $x_0 = (1,1) \in R^2$. В силу (16.1) имеем

$$\|x_0\|_{\varphi_1(X_0,X_1)} = q_{\varphi_2(\lambda,\mu),\varphi_2(\lambda,\mu)}(x_0) = 2\varphi_2(\lambda,\mu) = \frac{2}{\varphi_1(\lambda^{-1},\mu^{-1})} = \frac{2}{\varphi_1(2\xi,2\eta)}. \tag{16.2}$$

С другой стороны, по определению

$$\|x_0\|_{\varphi_1(X_0,X_1)} = \inf\{ r \geq 0 : 1 \leq r\varphi_1(b_1,c_1), 1 \leq r\varphi_1(b_2,c_2),$$

где $\quad b_1, c_1, b_2, c_2 \in [0,+\infty), \lambda(b_1+b_2) \leq 1, \mu(c_1+c_2) \leq 1 \}. \qquad (16.3)$

Положим $r_0 = \|x_0\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}$. Из соображений компактности ясно, что инфимум в (16.3) достигается. Пусть он реализуется на числах $b_1^0, c_1^0, b_2^0, c_2^0$. Так как $\varphi_1(\cdot,0) = \varphi_1(0,\cdot) = 0$, то $b_1^0, c_1^0, b_2^0, c_2^0 > 0$. Покажем, что

$$1 = r_0\varphi_1(b_1^0,c_1^0), \quad 1 = r_0\varphi_1(b_2^0,c_2^0). \tag{16.4}$$

Допустим, например, что $1 < r_0\varphi_1(b_1^0,c_1^0)$. Возьмём настолько малое $\delta > 0$, что $b_1' = b_1^0 - \delta > 0$ и $1 < r_0\varphi_1(b_1',c_1^0)$. Положим $b_2' = b_2^0 + \delta$. Тогда $1 < r_0\varphi_1(b_2',c_2^0)$. Итак,

$$\lambda(b_1'+b_2') \leq 1, \ \mu(c_1^0+c_2^0) \leq 1, \ 1 < r_0\varphi_1(b_1',c_1^0), 1 < r_0\varphi_1(b_2',c_2^0). \tag{16.5}$$

Из (16.5) следует, что $\|x_0\|_{\varphi_1(X_0,X_1)} < r_0$, что невозможно. Итак, имеем (16.4). Кроме того, можно считать, что

$$\lambda(b_1^0+b_2^0)=1,\quad \mu(c_1^0+c_2^0)=1. \qquad (16.6)$$

В силу вогнутости функции φ_1 имеем

$$1=r_0\left[\frac{1}{2}\cdot\varphi_1(b_1^0,c_1^0)+\frac{1}{2}\cdot\varphi_1(b_2^0,c_2^0)\right]\le r_0\varphi_1(b^*,c^*), \qquad (16.7)$$

где $b^*=\frac{1}{2}\cdot(b_1^0+b_2^0)$, $c^*=\frac{1}{2}(c_1^0+c_2^0)$. Так как $\lambda(b^*+b^*)=1$, $\mu(c^*+c^*)=1$, то в (16.7) не может быть строгого неравенства, ибо иначе $\|x_0\|_{\varphi_1(x_0,x_1)}<r_0$. Следовательно, $1=r_0\varphi_1(b^*,c^*)=r_0\varphi_1\left(\frac{1}{2\lambda},\frac{1}{2\mu}\right)=r_0\varphi_1(\xi,\eta)$. Отсюда и из (16.2) находим, что $1=\dfrac{2\varphi_1(\xi,\eta)}{\varphi_1(2\xi,2\eta)}$. Итак,

$$\varphi_1(2\xi,2\eta)=2\varphi_1(\xi,\eta)\ \text{при}\ \xi,\eta\in(0,+\infty). \qquad (16.8)$$

Из (16.8) в силу вогнутости φ_1 получаем, что φ_1 – положительно однородна. Теперь из леммы 2.16.1 следует, что и φ_2 – положительно однородна. Лемма доказана.

Лемма 2.16.6. Пусть $u_1,u_2,v_1,v_2,a_1,a_2,b_1,b_2\in(0,+\infty)$, причём $u_1a_1+u_2a_2=v_1b_1+v_2b_2=1$. Тогда

$$\varphi_1(u_1,v_1)\varphi_2(a_1,b_1)+\varphi_1(u_2,v_2)\varphi_2(a_2,b_2)\le 1. \qquad (16.9)$$

Доказательство. Пусть $W=R^2$, $\|\cdot\|_{X_0}=q_{a_1,a_2}$, $\|\cdot\|_{X_1}=q_{b_1,b_2}$. Тогда $\|\cdot\|_{X_0'}=p_{a_1,a_2}$, $\|\cdot\|_{X_1'}=p_{b_1,b_2}$. Следовательно, $\|(u_1,u_2)\|_{X_0}=\|(v_1,v_2)\|_{X_1}=\|(a_1,a_2)\|_{X_0'}=\|(b_1,b_2)\|_{X_1'}=1$.
Поэтому $\|(\varphi_1(u_1,v_1),\varphi_1(u_2,v_2))\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}\le 1$, $\|(\varphi_2(a_1,b_1),\varphi_2(a_2,b_2))\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}\le 1$.
Теперь по определению согласованной пары имеем (16.9). Лемма доказана.

2. Положим $A=\varphi_1(1,1)$ и $g(t)=A^{-1}\varphi_1(t,1)$, $t\in(0,+\infty)$. Функция g удовлетворяет условиям леммы 2.7.3. Действительно, условия (а) и (б) выполнены тривиальным образом. Фиксируя

$\alpha, \beta \in (0,1)$ и $x, y \in (0,+\infty)$, воспользуемся леммами 2.16.1, 2.16.5 и 2.16.6, приняв $u_1 = \alpha x$, $v_1 = 1$, $a_1 = x^{-1}$, $b_1 = \beta$, $u_2 = (1-\alpha)y$,

$$v_2 = 1,\ a_2 = y^{-1},\ b_2 = 1-\beta:$$

$$\frac{\beta g(\alpha x)}{g(\beta x)} + \frac{(1-\beta)g[(1-\alpha)y]}{g[(1-\beta)y]} = \frac{\beta\varphi_1(\alpha x,1)}{\varphi_1(\beta x,1)} + \frac{(1-\beta)\varphi_1[(1-\alpha)y,1]}{\varphi_1[(1-\beta)y,1]} =$$

$$= \frac{\varphi_1(\alpha x,1)}{\varphi_1(x,\beta^{-1})} + \frac{\varphi_1[(1-\alpha)y,1]}{\varphi_1[y,(1-\beta)^{-1}]} = \varphi_1(\alpha x,1)\varphi_2(x^{-1},\beta) + \varphi_1[(1-\alpha)y,1]\cdot\varphi_2(y^{-1},1-\beta) =$$

$$= \varphi_1(u_1,v_1)\varphi_2(a_1,b_1) + \varphi_1(u_2,v_2)\cdot\varphi_2(a_2,b_2) \le 1.$$

Итак, g удовлетворяет всем условиям леммы 2.7.3. Поэтому существует $p \in [0,1]$, такое что $g(t) = t^p$ при $t \in (0,+\infty)$. Отсюда $\varphi_1(\xi,\eta) = \eta\varphi_1(\xi\eta^{-1},1) = \eta A g(\xi\eta^{-1}) = \eta A\xi^p\eta^{-p} = A\xi^p\eta^{1-p}$ при всех $\xi,\eta \in (0,+\infty)$, а значит, и при всех $\xi,\eta \in [0,+\infty)$. Положим $s = 1-p$. Тогда $s \in [0,1]$ и

$$\varphi_1(\xi,\eta) = A\xi^{1-s}\eta^s \text{ при } (\xi,\eta) \in R^2_+ .$$

Теперь, пользуясь леммой 2.16.1, находим

$$\varphi_2(\xi,\eta) = A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s \text{ при } (\xi,\eta) \in R^2_+ .$$

Наконец, по самому определению класса $\mathfrak{A}_2$ (см. определение 2.1.1, г)) видим, что $s \in (0,1)$.

Теорема 2.4.5. доказана.

§ 17. Доказательство теоремы 2.4.6

1. Справедливость утверждения (а) теоремы 2.4.6 прямо следует из леммы 2.15.1. Доказываем утверждение (б). Пусть (φ_1, φ_2) – фиксированная слабо согласованная пара.

Л е м м а 2.17.1. Существуют $C_1, C_2 \in (0, +\infty)$, такие что

$$C_1 \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0', X_1')} \le \|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0, X_1))'} \le C_2 \|\cdot\|_{\varphi_2(X_0', X_1')} \quad (17.1)$$

для любых $W, \mathbb{I}(W), L, X_0, X_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда для каждого $n \in N$ найдутся $W_n, \mathbb{I}(W_n), L_{(n)}, X_0^{(n)}, X_1^{(n)}$, $z^{(n)} \in (\varphi_1(X_0^{(n)}, X_1^{(n)}))', z^{(n)} > 0$, такие, что для

$$\alpha_n = \frac{\|z^{(n)}\|_{\varphi_2((X_0^{(n)})', (X_1^{(n)})')}}{\|z^{(n)}\|_{(\varphi_1(X_0^{(n)}, X_1^{(n)}))'}} \quad (17.2)$$

справедливо одно из следующих утверждений:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0; \quad (17.3)$$

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \infty. \quad (17.4)$$

Пусть W состоит из всех $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_n \in W_n (n \in N)$, причём упорядочение и алгебраические операции в W – покоординатные. Естественным образом считаем, что каждое W_n есть компонента в W. Положим $\mathbb{I}(W) = \sup\{\mathbb{I}(W_n) : n \in N\}$. Пусть L состоит из всех $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, таких что $x_n \in L_{(n)}$ и

$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{L(n)}<+\infty$. Для $i=0,1$ пусть X_i состоит из всех $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)$, таких что $x_n\in X_i^{(n)}$ и $\|x\|_{X_i}=\sup\{\|x_n\|_{X_i^{(n)}}:$ $:n\in N\}<+\infty$. Заметим, что так как W_n мы отождествили с соответствующей компонентой в W, то элемент $z^{(n)}\in W_n$ отождествляется с элементом $(0,\dots,0,z^{(n)},0,\dots)\in W$, где $z^{(n)}$ стоит на n-м месте строки. Так как $(\varphi_1(X_0,X_1))'=$ $=\varphi_2(X_0',X_1')$ по запасу элементов, то (см. теорему 0.3.I)

$$a_1\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}\le\|\cdot\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}\le a_2\|\cdot\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}\qquad(17.5)$$

для некоторых $a_1,a_2\in(0,+\infty)$. Но очевидно $z^{(n)}\in(\varphi_1(X_0,X_1))'$, причём

$$\|z^{(n)}\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}=\|z^{(n)}\|_{(\varphi_1(X_0^{(n)},X_1^{(n)}))'},\ \|z^{(n)}\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}=\|z^{(n)}\|_{\varphi_2((X_0^{(n)})',(X_1^{(n)})')}.$$

Отсюда следует, что $a_2^{-1}\le\alpha_n\le a_1^{-1}$ при всех $n\in N$. Это противоречит как (17.3), так и (17.4). Лемма доказана.

Л е м м а 2.17.2. Для любых $\xi,\eta\in(0,+\infty)$ справедливо

$$c_1\le\varphi_1(\xi,\eta)\varphi_2(\xi^{-1},\eta^{-1})\le c_2,\qquad(17.6)$$

где c_1,c_2 из леммы 2.17.I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W=R^1$, $\|x\|_{X_0}=\dfrac{|x|}{\xi}$, $\|x\|_{X_1}=\dfrac{|x|}{\eta}$. Тогда $\|x\|_{X_0'}=\xi|x|$, $\|x\|_{X_1'}=\eta|x|$

$$\|x\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}=\frac{|x|}{\varphi_1(\xi,\eta)},\ \|x\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}=\varphi_1(\xi,\eta)|x|,\ \|x\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}=\frac{|x|}{\varphi_2(\xi^{-1},\eta^{-1})}.$$

В силу леммы 2.17.I имеем

$$c_1\cdot\frac{1}{\varphi_2(\xi^{-1},\eta^{-1})}\le\varphi_1(\xi,\eta)\le c_2\cdot\frac{1}{\varphi_2(\xi^{-1},\eta^{-1})},$$

откуда следует (17.6). Лемма доказана.

Лемма 2.17.3. Пусть числовые последовательности $a_n>0,\ b_n>0,\ \xi_n\geq 0,\ \eta_n\geq 0\ (n\in N)$ таковы, что $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n a_n^{-1}\leq 1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n b_n^{-1}\leq 1$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_1(\xi_n,\eta_n)}{\varphi_1(a_n,b_n)}\leq\frac{C_2}{C_1}$, где C_1, C_2 из леммы 2.17.1.

Доказательство. Пусть $W=S$, $L=\ell^1$, $\mathbb{1}(W)=(1,\dots,1,\dots)$. Пусть X_0 есть пространство всех $z=\{\zeta_n\}_{n\in N}\in W$, таких что $\|z\|_{X_0}=\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|a_n^{-1}<+\infty$ и пусть X_1 есть пространство всех $z=\{\zeta_n\}_{n\in N}\in W$, таких что $\|z\|_{X_1}=\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta_n|b_n^{-1}<+\infty$. Положим $a=\{a_n\}_{n\in N}$, $b=\{b_n\}_{n\in N}$, $x=\{\xi_n\}_{n\in N}$, $y=\{\eta_n\}_{n\in N}$. Ясно, что $\varphi_1(x,y)\in\varphi_1(X_0,X_1)$, $\|\varphi_1(x,y)\|_{\varphi_1(X_0,X_1)}\leq 1$,

$$\varphi_2(a^{-1},b^{-1})\in\varphi_2(X_0',X_1'),\ \|\varphi_2(a^{-1},b^{-1})\|_{\varphi_2(X_0',X_1')}\leq 1.$$

Из последнего неравенства и леммы 2.17.1 следует, что $\|\varphi_2(a^{-1},b^{-1})\|_{(\varphi_1(X_0,X_1))'}\leq C_2$, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(\xi_n,\eta_n)\varphi_2(a_n^{-1},b_n^{-1})\leq C_2$.

Но $\frac{1}{\varphi_1(a_n,b_n)}\leq\frac{\varphi_2(a_n^{-1},b_n^{-1})}{C_1}$ в силу леммы 2.17.2, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_1(\xi_n,\eta_n)}{\varphi_1(a_n,b_n)}\leq\frac{C_2}{C_1}$. Лемма доказана.

Лемма 2.17.4. Для любых $\lambda,\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ справедливо

$$\frac{\varphi_1(\lambda\alpha,\lambda\beta)}{\lambda\varphi_1(\alpha,\beta)}\leq K, \tag{17.7}$$

где $K=\frac{C_2}{C_1}$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ и рассмотрим функцию

$$\Theta(\lambda)=\frac{\varphi_1(\lambda\alpha,\lambda\beta)}{\lambda\varphi_1(\alpha,\beta)},\ \lambda\in(0,+\infty).$$

Из вогнутости φ_1 следует, что θ убывает на $(0,+\infty)$. Поэтому достаточно лишь доказать, что (17.7) справедливо при $\lambda = n^{-1} (n \in N)$. Применим лемму 2.17.3, взяв

$$a_i = \alpha, b_i = \beta, \xi_i = n^{-1}\alpha, \eta_i = n^{-1}\beta \quad \text{при} \quad i = 1,\dots,n,$$

$$a_i = b_i = 1, \quad \xi_i = \eta_i = 0 \quad \text{при} \quad i = n+1, n+2, \dots .$$

Получим (17.7). Лемма доказана.

2. Положим для $(\xi,\eta) \in R^2_+$

$$\varphi(\xi,\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi = \eta = 0 \\ (\xi+\eta)\varphi_1\left(\dfrac{\xi}{\xi+\eta}, \dfrac{\eta}{\xi+\eta}\right) & \text{при } \xi+\eta > 0 . \end{cases}$$

Л е м м а 2.17.5. $\varphi \in \mathfrak{A}^0_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что φ непрерывна на R^2_+, положительно однородна, $\varphi(\xi,0) = \varphi(0,\eta) = 0$ при всех $\xi,\eta \geqslant 0$. Далее, для любых $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2) \in R^2_+$ имеем

$$\varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}, \frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\varphi(\xi_1,\eta_1) + \frac{1}{2}\varphi(\xi_2,\eta_2). \tag{17.8}$$

Действительно, если $\xi_1+\eta_1 = 0$ или $\xi_2+\eta_2 = 0$, то (17.8) – тривиально. Пусть теперь $z_i = \xi_i + \eta_i > 0$ $(i=0,1)$ Тогда в силу вогнутости φ_1 имеем

$$\varphi\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}, \frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right) = \frac{z_1+z_2}{2}\cdot\varphi_1\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{z_1+z_2}, \frac{\eta_1+\eta_2}{z_1+z_2}\right) =$$

$$= \frac{z_1+z_2}{2}\cdot\varphi_1\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\cdot\frac{\xi_1}{z_1} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\cdot\frac{\xi_2}{z_2}, \frac{z_1}{z_1+z_2}\cdot\frac{\eta_1}{z_1} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\cdot\frac{\eta_2}{z_2}\right) \geqslant$$

$$\geq \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\left[\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\cdot\varphi_1\left(\frac{\xi_1}{\tau_1},\frac{\eta_1}{\tau_1}\right)+\frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\cdot\varphi_1\left(\frac{\xi_2}{\tau_2},\frac{\eta_2}{\tau_2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tau_1\varphi_1\left(\frac{\xi_1}{\tau_1},\frac{\eta_1}{\tau_1}\right)+\tau_2\varphi_1\left(\frac{\xi_2}{\tau_2},\frac{\eta_2}{\tau_2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_1,\eta_1)+\varphi(\xi_2,\eta_2)\right].$$

Итак, φ -вогнута. Положим теперь в (17.7) $\lambda=\xi+\eta$, $\alpha=\frac{\xi}{\xi+\eta}$, $\beta=\frac{\eta}{\xi+\eta}$, где $\xi,\eta\in[0,+\infty)$, $\xi+\eta>0$. Получим $\varphi_1(\xi,\eta)\leq$ $\leq K(\xi+\eta)\varphi_1\left(\frac{\xi}{\xi+\eta},\frac{\eta}{\xi+\eta}\right)$, тем самым

$$\varphi(\xi,\eta)\geq K^{-1}\varphi_1(\xi,\eta) \text{ при } (\xi,\eta)\in R^2_+ . \qquad (17.9)$$

Из (17.9) следует, что φ удовлетворяет последнему условию из определения 2.1.1. Лемма доказана.

Лемма 2.17.6. φ эквивалентна φ_1, а $\hat{\varphi}$ эквивалентна φ_2.

Доказательство. Взяв в (17.7) $\alpha=\xi$, $\beta=\eta$, $\lambda=(\xi+\eta)^{-1}$, где $\xi,\eta\in[0,+\infty)$, $\xi+\eta>0$, получим $(\xi+\eta)\varphi_1\left(\frac{\xi}{\xi+\eta},\frac{\eta}{\xi+\eta}\right)\leq K\varphi_1(\xi,\eta)$, тем самым

$$\varphi(\xi,\eta)\leq K\varphi_1(\xi,\eta) \quad \text{при} \quad (\xi,\eta)\in R^2_+ . \qquad (17.10)$$

Из (17.9) и (17.10) следует, что φ эквивалентна φ_1. Заметим, что

$$\varphi(\xi,\eta)\hat{\varphi}(\xi^{-1},\eta^{-1})\leq\xi\xi^{-1}+\eta\eta^{-1}=2 \quad \text{при} \quad (\xi,\eta)\in R^2_+ . \qquad (17.11)$$

Далее, так как $M^{-1}(v)N^{-1}(v)>v$ при $v\in(0,+\infty)$ для любых дополнительных друг к другу N -функций $M(\xi)$ и $N(\xi)$ (см. Красносельский и Рутицкий [1], стр. 25), то с помощью предложения 2.1.5 находим $\varphi(\xi,\eta)\hat{\varphi}(\xi^{-1},\eta^{-1})=\eta M^{-1}(\xi\eta^{-1})\xi^{-1}N^{-1}(\eta^{-1}\xi)\geq$ $\geq\eta\xi^{-1}\xi\eta^{-1}=1$ при $\xi,\eta\in(0,+\infty)$. Итак,

$$1\le\varphi(\xi,\eta)\hat\varphi(\xi^{-1},\eta^{-1})\le 2 \quad \text{при} \quad \xi,\eta\in(0,+\infty). \tag{17.12}$$

Используя лемму 2.17.2 и (17.9), (17.10), (17.12), получаем

$$\varphi_2(\xi,\eta)\le\frac{c_2}{\varphi_1(\xi^{-1},\eta^{-1})}\le\frac{Kc_2}{\varphi(\xi^{-1},\eta^{-1})}\le Kc_2\hat\varphi(\xi,\eta)=c_1^{-1}c_2^{2}\hat\varphi(\xi,\eta),$$

$$\varphi_2(\xi,\eta)\ge\frac{c_1}{\varphi_1(\xi^{-1},\eta^{-1})}\ge\frac{c_1}{K\varphi(\xi^{-1},\eta^{-1})}\ge\frac{c_1}{2K}\cdot\hat\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}c_1^{2}c_2^{-1}\hat\varphi(\xi,\eta)$$

при $\xi,\eta\in(0,+\infty)$. Итак,

$$\frac{1}{2}\cdot c_1^{2}c_2^{-1}\hat\varphi\le\varphi_2\le c_1^{-1}c_2^{2}\hat\varphi.$$

Лемма доказана.

Таким образом, $\varphi\in\mathfrak{A}_2^0$, φ эквивалентна φ_1, $\hat\varphi$ эквивалентна φ_2.

Теорема 2.4.6 доказана.

§ 18. Доказательства теорем 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 и 2.6.3

1. Л е м м а 2.18.1. Пусть Y есть произвольное банахово пространство, V – замкнутое по норме подпространство пространства Y^*, причём V – тотально на Y. Пусть норма $\|\cdot\|_V$ есть сужение нормы $\|\cdot\|_{Y^*}$ на V. Тогда, если V – (b) – рефлексивно, то и Y – (b) – рефлексивно (и $V=Y^*$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $B=\{f\in V:\|f\|_V\le 1\}$. Множество B компактно в топологии $\sigma(V,V^*)$, а значит компактно и в более слабой топологии

$\sigma(Y^*,Y)$. Поэтому $Б$ замкнуто в $(Y^*,\sigma(Y^*,Y))$. Тогда (теорема Крейна-Шмульяна, см. Дэй [I], стр. 77) V замкнуто в $(Y^*,\sigma(Y^*,Y))$. Но V плотно в $(Y^*,\sigma(Y^*,Y))$, ибо V тотально на Y. Тем самым $V=Y^*$. Так как Y^* $(\flat)$– рефлексивно, то и Y $(\flat)$– рефлексивно. Лемма доказана.

Следствие 2.18.2. Пусть Y есть банахово KN–пространство с тотальным $\bar{Y}$. Если $\bar{Y}$ $(\flat)$–рефлексивно (норма на $\bar{Y}$ индуцирована из $\bar{Y}^*$), то и само Y $(\flat)$– рефлексивно.

2. **Доказательство** теоремы 2.5.2. Положим $Y=X^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}}$. Тогда по теореме 2.2.12 имеем

$$Y'=(X')^{\frac{1}{2}}(X'')^{\frac{1}{2}},\quad Y''=(X'')^{\frac{1}{2}}(X''')^{\frac{1}{2}}=(X'')^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}}=Y', \tag{18.1}$$

причём в (18.1) равенства имеют место как по запасу элементов, так и по норме. Так как $Y'=Y''$, то $Y'\subset L_2$. Но тогда $Y''\supset(L_2)'$, то есть $Y'\supset L_2$. Тем самым $Y'=L_2$ по запасу элементов. Покажем, что $\|\cdot\|_{Y'}=\|\cdot\|_{L_2}$. Возьмём произвольный $w\in Y'_+$. Тогда в силу первого из равенств (18.1) и теоремы 2.4.2 найдутся $u'\in X'_+$, $v''\in X''_+$, такие что $\|u'\|_{X'}\le 1$, $\|v''\|_{X''}\le 1$ и

$$w\le\|w\|_{Y'}(u')^{\frac{1}{2}}(v'')^{\frac{1}{2}}. \tag{18.2}$$

Из (18.2) получаем $\|w\|_{L_2}\le\|w\|_{Y'}\|(u')^{\frac{1}{2}}(v'')^{\frac{1}{2}}\|_{L_2}=\|w\|_{Y'}[J(u'v'')]^{\frac{1}{2}}\le$
$\le\|w\|_{Y'}$. Итак,

$$\|\cdot\|_{L_2}\le\|\cdot\|_{Y'}. \tag{18.3}$$

Из (18.3) следует, что $\|\cdot\|_{(L_2)'} \geq \|\cdot\|_{Y''}$, то есть

$$\|\cdot\|_{L_2} \geq \|\cdot\|_{Y'}. \qquad (18.4)$$

Из (18.3) и (18.4) следует, что $\|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{Y'}$. Из следствия 2.18.2 вытекает, что Y есть КВ-пространство, поэтому $Y = Y''$ по запасу элементов и по норме, то есть $Y = (L_2)' = L_2$ по запасу элементов и по норме.

Теорема 2.5.2 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.5.1. Из теоремы 2.5.2 следует, что в $X^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}}$ выполнено условие (A). Остаётся применить предложение 2.2.9.

Теорема 2.5.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2.5.3. Доказываем 1). Положим $\lambda = \|z\|_L$. Так как $|z|^{\frac{1}{2}} \in L_2$ и $\||z|^{\frac{1}{2}}\|_{L_2} = \lambda^{\frac{1}{2}}$, то по теореме 2.5.2 найдутся $u \in X_+$, $x' \in X'_+$, такие что $\|u\|_X \leq 1$, $\|x'\|_{X'} \leq 1$, $|z|^{\frac{1}{2}} \leq \lambda^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}(x')^{\frac{1}{2}}$. Так как $|z| \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} u x'$, то $z = x x'$ для некоторого $x \in X$, такого что $|x| \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} u$. Остаётся заметить, что $\|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'} \leq$
$\leq \|x\|_X \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1}\|u\|_X \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} = \dfrac{\|z\|_L}{1-\varepsilon}$, то есть $\|z\|_L \geq (1-\varepsilon)\|x\|_X \|x'\|_{X'}$. Доказываем 2). По-прежнему $\lambda = \|z\|_L$. В силу теорем 2.5.2 и 2.4.2 найдутся $u \in X_+$, $x' \in X'_+$, такие что $\|u\|_X \leq 1$, $\|x'\|_{X'} \leq 1$, $|z|^{\frac{1}{2}} \leq \lambda^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}(x')^{\frac{1}{2}}$. Так как $|z| \leq \lambda u x'$, то $z = x x'$ для некоторого $x \in X$, такого что $|x| \leq \lambda u$. Остаётся заметить, что $\|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'} \leq \lambda = \|z\|_L$, и в то же время $\|z\|_L = \|x x'\|_L \leq \|x\|_X \|x'\|_{X'}$.

Теорема 2.5.3 доказана.

5. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.5.5. Так как $\Pi(W) \in L$, то в силу теоремы 2.5.3 найдутся $u \in X_+$, $y \in X'_+$, такие что $uy = \Pi(W)$. Ясно, что $X[y] \subset L$ и $\Pi(W) \in X[y]$. Тем самым $M \subset X[y] \subset L$.

Теорема 2.5.5 доказана.

6. Д о к а з а т е л ь с т в а теорем 2.6.I и 2.6.3. Пусть E – банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$, удовлетворяющим условию (★) (см. определение 2.6.2). Вложим E и E^* в пространство S, отождествив каждый $x \in E$ с $\{f_k(x)\}_{k \in N} \in S$ и каждый $f \in E^*$ с $\{f(e_k)\}_{k \in N} \in S$. Тогда E и E^* суть банаховы KN-пространства, являющиеся фундаментами в S. При этом естественным образом E^* совпадает с пространством дуальным к E. Теперь ясно, что теоремы 2.6.I и 2.6.3 суть следствия теоремы 2.5.3.

Теоремы 2.6.1 и 2.6.3 доказаны.

Глава III

О ЛИНЕЙНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР

Всюду в этой главе термины "изоморфизм", "сепарабельность", "подпространство" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств. В частности, подпространством нормированного пространства называется его замкнутое линейное подмножество. Два нормированных пространства X и Y, которые могут быть и KN-линеалами, называются изоморфными (обозначение: $X \sim Y$), если существует линейное непрерывное взаимнооднозначное отображение T одного из них на другое, такое что T^{-1} тоже непрерывно. Через $\mathfrak{T}$ обозначается естественное вложение нормированного пространства X в X^{**}. Через J в этой главе обозначается банахово пространство Р.Джеймса (см.Дэй [I], стр.123), обладающее следующими свойствами: J -сепарабельно, линейно изометрично J^{**} и не является (b)-рефлексивным.

Хорошо известно, что банахова топология КВ-линеала полностью определяется имеющимся в нём частичным упорядочением. Точнее говоря (см.теорему 0.3.I), любые две монотонные банаховы нормы, заданные на одном и том же К-линеале, - эквивалентны, то есть определяемые ими топологии совпадают. Напротив, банахова топология КВ-линеала несёт мало информации об его остальных свойствах. Дело в том, что если некоторое банахово пространство можно превратить в КВ-линеал путём введения в нём частичного упорядочения и эквивалентной перенормировки x), то такое превращение обычно неединственно. Например, бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство можно превратить как в $L^2[0,1]$, так и в ℓ^2.

Тем не менее, некоторые свойства частичного упорядочения в КВ-линеале всё же полностью определяются его банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является теорема Огасавара (см.теорему 0.3.8): КВ-линеал является КВ-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон. Полученные нами в этом направлении результаты (теоремы 3.1.2, 3.1.8, 3.2.1, 3.3.1 и 3.4.12) относятся к числу главных результатов диссертации.

§ 1. Непрерывность нормы

1. Напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ элементов банахова пространства X называется слабо фундаментальной, если для любого $f\in X^*$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Определение 3.1.1. (Пелчиньский [1], стр.251). Банахово пространство X обладает свойством (u), если для каждой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ в X существует такая последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$ в X, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(y_n)|<+\infty$ для любого $f\in X^*$ и последовательность $x_n-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ слабо сходится к нулю.

x) Не всякое банахово пространство изоморфно КВ-линеалу, то есть не всякое банахово пространство можно превратить в КВ-

Теорема 3.1.2. Для любого банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) в X выполнено условие (A), то есть норма в X непрерывна;

(б) в X выполнено условие $(\mathcal{U})$;

(в) в X нет подпространств, изоморфных пространству ℓ^∞;

(г) в X нет подпространств, изоморфных пространству $C[0,1]$;

(д) в X нет подпространств, изоморфных пространству J.

Замечание 3.1.3. Из теоремы 3.1.2 вытекает следующее. Пусть E – произвольное линейное множество, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две эквивалентные банаховы нормы на E, K_1 и K_2 – два конуса в E, причём $X_1=(E,K_1,\|\cdot\|_1)$ и $X_2=(E,K_2,\|\cdot\|_2)$ суть $K_\sigma N$-пространства. Тогда, если в X_1 выполнено условие (A), то и в X_2 выполнено условие (A). Сказанное равносильно следующему: если X и Y – банаховы $K_\sigma N$-пространства, $X\sim Y$ и в X выполнено условие (A), то в Y тоже выполнено условие (A). В этом смысле можно сказать, что условие (A) в банаховом $K_\sigma N$-пространстве полностью определяется его банаховой топологией.

Замечание 3.1.4. Эквивалентность (а)$\Longleftrightarrow$(в) утверждается в работе Т.Андо (см.Андо [2], теорема 4.1), однако приведённое там доказательство ошибочно (принципиальная ошибка допущена в доказательстве ключевой леммы 4.1). Заметим также, что, поскольку импликация (в)$\Longrightarrow$(а) почти тривиальна, упомянутая эквивалентность (а)$\Leftrightarrow$(в) существенно слабее каждой из эквивалентностей (а)$\Leftrightarrow$(г) и (а)$\Leftrightarrow$(д), ибо ℓ^∞ содержит подпространства, изоморфные $C[0,1]$ и J.

Доказательство теоремы 3.1.2. Импликации (д)$\Rightarrow$(г)$\Rightarrow$(в) – тривиальны. Импликация (б)$\Rightarrow$(д) прямо вытекает из следующих двух результатов А.Пелчиньского: 1) если в X выполнено условие (u), то в любом его подпространстве тоже выполнено условие (u) (см.Пелчиньский [1], следствие 1); 2) в пространстве J условие (u) не выполнено (см.Пелчиньский [1], предложение 3). Импликация (в)$\Rightarrow$(а) почти тривиальна и хорошо известна (см., например, Андо [1], доказательство теоремы 8). Осталось только доказать, что (а)$\Rightarrow$(б). Пусть в X выполнено условие (A). Пусть $\mathfrak{A}: X \to X^{**}$ есть естественное вложение. Заметим, что $X^* = \bar{X}$, $\mathfrak{A}(X) \subset \bar{\bar{X}}$, причём $\mathfrak{A}(X)$ есть фундамент в $\bar{\bar{X}}$ (см.Вулих [6], стр.289). Пусть $\{x_n\}_{n\in N}$ – произвольная слабо фундаментальная последовательность в X. Положим $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2(\|x_n\|_X+1)}$ (написанный ряд сходится по норме, x есть его сумма относительно этой сходимости). Тогда $\mathfrak{A}x \in \bar{\bar{X}}$. Обозначим через Z главную компоненту в $\bar{\bar{X}}$, порождённую элементом $\mathfrak{A}x$. Положим $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, $f \in \bar{X}$. Так как $f(x_n) = (\mathfrak{A}x_n)(f)$ и $\mathfrak{A}x_n \in Z$, то в силу теоремы 0.4.7 имеем $F \in Z$. Так как $\mathfrak{A}x$ есть единица в Z, то найдётся последовательность $\{F_n\}_{n\in N}$ в Z, удовлетворяющая условиям: $|F_k| \wedge |F_n| = 0$ при $k \neq n$; $|F_n| \leq n\mathfrak{A}x$ при всех $n \in N$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$
(o)– сходится в Z и его сумма есть F. Положим $y_n = \mathfrak{A}^{-1}F_n$ $(n \in N)$

и убедимся, что $\{y_n\}_{n\in N}$ и есть требуемая последовательность. Так как $(0)-\sum_{n=1}^{\infty} F_n = F$ и члены этого ряда попарно дизъюнктны, то $\sum_{n=1}^{\infty} T(F_n) = T(F)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |T(F_n)| < +\infty$ для любого $T\in\overline{Z}$. В частности, взяв произвольный $f\in\overline{X}$ и положив $T(G)=G(f)$ при $G\in Z$, находим $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(f) = F(f)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(f)| < +\infty$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} f(y_n) = F(f)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < +\infty$. Остаётся заметить, что равенство $\sum_{n=1}^{\infty} f(y_n) = F(f)$ можно переписать в виде $\lim_{n\to\infty} f(x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i) = 0$. Теорема доказана.

Следствие 3.1.5. ПРОСТРАНСТВО $C[0,1]$ НЕ ИЗОМОРФНО НИКАКОМУ K_6N-ПРОСТРАНСТВУ.

Действительно, допустим, что $C[0,1]\sim X$, где X есть K_6N-пространство. Так как X полно по норме и сепарабельно, то в X выполнено условие (A) (теорема 0.3.2). Это противоречит эквивалентности (а)$\Leftrightarrow$(г) из теоремы 3.1.2.

Замечание 3.1.6. В связи с замечанием 3.1.3 естественно возникает следующий вопрос. Пусть X и Y – КВ-линеалы (не являющиеся, вообще говоря, K_6N-пространствами), такие что $X\sim Y$ и в X выполнено условие (A), будет ли в Y тоже выполнено условие (A). Оказывается, что в Y условие (A) может и не выполняться; например, так будет, если принять $X=c_0$, $Y=c$. Таким образом, условие (A) в произвольном КВ-линеале уже не определяется полностью его банаховой топологией.

З а м е ч а н и е 3.1.7. а) Существуют банаховы KN - пространства X и Y, такие что $X \sim Y$, в X выполнено условие (B), но в Y условие (B) не выполнено. Тем самым, даже в банаховом KN-пространстве условие (B) не определяется полностью его банаховой топологией. Приведём соответствующий пример. Пусть N - множество натуральных чисел в дискретной топологии, βN - его чеховское бикомпактное расширение. Фиксируем точку $q \in \beta N \setminus N$. Положим $X = C(\beta N)$, $Y = \{x \in X : x(q) = 0\}$, причём норма и упорядочение на Y индуцированы из X. Ясно, что X и Y суть банаховы KN-пространства, $X \sim Y$, в X выполнено условие (B), а в Y оно не выполнено.

б) Существуют банаховы KN-пространства X и Y, такие что $X \sim Y$, в X есть единица, а в Y единицы нет. Тем самым в банаховом KN-пространстве наличие единицы не определяется полностью его банаховой топологией. Приведём соответствующий пример. За X принимаем пространство $L^2(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) - пространство с конечной несепарабельной мерой, за Y - пространство ℓ^2_Γ, где Γ есть множество, мощность которого равна мощности полной ортонормированной системы в $L^2(T, \Sigma, \mu)$. Ясно, что $X \sim Y$, в X есть единица, в Y нет единицы.

в) Существуют банаховы KN-пространства X и Y, такие что $X \sim Y, \overline{X}$ тотально на X, а $\overline{Y} = \{0\}$. Таким образом, тотальность множества вполне линейных функционалов на банаховом KN-пространстве не есть линейно-топологическое свойство этого пространства. Приведём соответствующий пример. За X принимаем пространство $L^{\infty}[0,1]$, за Y – пространство $\widehat{C}[0,1]$, то есть Y есть K-пополнение пространства $C[0,1]$. Известно, что $\overline{X}$ тотально на $X, X \sim Y, \bar{Y} = \{0\}$.

г) Нетрудно привести пример, показывающий, что свойство полунепрерывности нормы в банаховом KN-пространстве тоже не есть линейно-топологическое свойство.

2. Теорема 3.1.8. ПУСТЬ X БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A) И КОТОРОЕ ИЗОМОРФНО СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ. ТОГДА В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (B), ТЕМ САМЫМ X ЕСТЬ KB-ПРОСТРАНСТВО.

Доказательство. Допустим противное. Тогда в X существует подпространство, изоморфное пространству c_0 (теорема 0.3.8). Но (Бессага и Пелчиньский [I]), если сопряжённое банахово пространство содержит подпространство, изоморфное пространству c_0, то оно содержит и подпространство, изоморфное пространству ℓ^{∞}. Таким образом, X содержит подпространство, изоморфное пространству ℓ^{∞}. Это противоречит эквивалентности (а)$\Longleftrightarrow$(в) из теоремы 3.1.2. Теорема доказана.

Замечание 3.1.9. Если банахово KN-пространство изоморфно сопряжённому банахову пространству, но в нём не выполнено условие (A), то в нём может не выполняться и условие (B). Примером такого пространства служит Y из замечания 3.1.7а, которое, очевидно, изоморфно пространству ℓ^{∞}.

Следствие 3.1.10. Пусть X – банахово K_6N-пространство, такое что X^* – сепарабельно, а X^{**} несепарабельно. Тогда X не изоморфно сопряжённому банахову пространству.

Действительно, из теоремы 0.3.2 следует, что X^* есть КВ-пространство, и что в X выполнено условие (A). Так как X не (b)-рефлексивно, то X не есть КВ-пространство (см. Вулих [6], стр. 294, теорема Огасавара), ибо X^* есть КВ-пространство. Тем самым, в X не выполнено условие (B). Остаётся применить теорему 3.1.8.

Следующая теорема о пространствах Марцинкевича $M_0(\psi)$ (см. гл. 0 § 6 п. 7) и пространствах Орлича E_M (см. Красносельский и Рутицкий [I], стр. 98) является следствием теоремы 3.I.8.

Т е о р е м а 3.I.II. ПРОСТРАНСТВО $M_0(\psi)$ НЕ ИЗОМОРФНО СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ. ЕСЛИ N-ФУНКЦИЯ $M(\xi)$ НЕ УДОВЛЕТВОРЯЕТ Δ_2-УСЛОВИЮ, ТО И ПРОСТРАНСТВО E_M НЕ ИЗОМОРФНО СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ.

Действительно, в каждом из этих пространств выполнено условие (A), но не выполнено условие (B) (см. предложения 0.6.I и 0.6.2).

§ 2. Счётность типа

В этом параграфе: $\aleph$ означает мощность континуума, H - фиксированное множество мощности $\aleph$, ω - первый бесконечный ординал, ω_1 - первый несчётный ординал, $W=\{\alpha:\alpha<\omega_1\}$.

Напомним, что термины "подпространство" и "изоморфизм" в этой главе используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств.

1. Теорема 3.2.1. Пусть X – банахово KN-пространство с тотальным $\overline{X}$. В предположении справедливости континуум-гипотезы следующие утверждения эквивалентны:

(а) X – счётного типа;

(б) в X нет подпространства, изоморфного пространству ℓ^{∞}_{H};

(в) существует такое множество $\mathfrak{N} \subset X^*$, что $\mathfrak{N}$ тотально на X и для любого $x \in X$ множество $\{f \in \mathfrak{N} : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

Из сказанного в гл.0 § 5 вытекает, что теорема 3.2.1 допускает следующую эквивалентную переформулировку в терминах банаховых пространств измеримых функций на пространстве с мерой.

Теорема 3.2.1'. Пусть (T, Σ, μ) – пространство с мерой, удовлетворяющее условиям: 1) $S(T, \Sigma, \mu)$ есть K-пространство; 2) $L^1(T, \Sigma, \mu)$ есть фундамент в $S(T, \Sigma, \mu)$. Тогда для любого банахова KN-пространства X, являющегося идеалом в $S(T, \Sigma, \mu)$, в предположении справедливости континуум гипотезы следующие утверждения эквивалентны:

(а) для любого $x \in X$ множество $\{t \in T : x(t) \neq 0\}$ имеет σ-конечную меру (то есть это множество есть объединение счётного числа множеств конечной меры);

(б) в X нет подпространства, изоморфного пространству ℓ^{∞}_{H};

(в) существует такое множество $\mathfrak{N} \subset X^*$, что $\mathfrak{N}$ тотально на X и для любого $x \in X$ множество $\{f \in \mathfrak{N} : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

Замечание 3.2.2. Из теоремы 3.2.1 вытекает следующее. Пусть E – произвольное линейное множество, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две эквивалентные банаховы нормы на E. K_1 и K_2 – два конуса в E, причём $X_i = (E, K_i, \|\cdot\|_i)$ есть KN-пространство с тотальным $\overline{X_i}$ $(i=1,2)$. Тогда, если X_1 – счётного типа, то (в предположении справедливости континуум-гипотезы) X_2 тоже счётного типа. Сказанное эквивалентно следующему: если X и Y – банаховы KN-пространства, $X \sim Y$, $\overline{X}$ тотально на X, $\overline{Y}$ тотально на Y и X – счётного типа, то (в предположении справедливости континуум-гипотезы) Y тоже счётного типа.

Замечание 3.2.3. Существуют банаховы $K_\sigma N$-пространства X и Y, такие что $X \sim Y$, $\overline{X}$ – тотально на X, $\overline{Y}$ – тотально на Y, X – счётного типа, но Y не есть пространство счётного типа. Приведём соответствующий пример. Пусть X есть подпространство в ℓ^∞_H, состоящее из всех x, таких что $\operatorname{card}\{t \in H : x(t) \neq 0\} \leq \aleph_0$; Y есть подпространство в ℓ^∞_H, состоящее из всех x, таких что для некоторого $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ (зависящего от x) справедливо $\operatorname{card}\{t \in H : x(t) \neq \alpha\} \leq \aleph_0$. Ясно, что эти X и Y – требуемые. Заметим, что в этом примере X есть K-пространство, Y есть K_σ-пространство, но Y не есть K-пространство.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 3.2.1.

2. Л е м м а 3.2.4. Пусть $f\in(\ell^\infty_H)^*$ и пусть $\{H_\xi:\xi\in\Xi\}$ – некоторое разбиение[x)] множества H. Тогда

$$card\{\xi\in\Xi:|f|(\chi_{H_\xi})\neq 0\}\leq\aleph_0 .$$

Лемма тривиальна, ибо множество $\{\xi\in\Xi:|f|(\chi_{H_\xi})\geq n^{-1}\}$ – конечно при любом $n\in N$.

Л е м м а 3.2.5. Пусть $\mathfrak{U}$ есть множество всех отображений $u: W\to W$, таких что для некоторого $\alpha\in W$ (зависящего от u) справедливо $u(\alpha)=u(\beta)$ при всех $\beta\geq\alpha,\beta\in W$. Тогда $card\ \mathfrak{U}=\aleph$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\alpha\in W$ положим $\mathfrak{U}_\alpha=\{u\in\mathfrak{U}:u(\beta)=u(\alpha)$ при $\beta\geq\alpha,\beta\in W\}$. Ясно, что $card\,\mathfrak{U}_\alpha\leq\aleph$ при всех α и $card\ \mathfrak{U}_\alpha=\aleph$ при $\alpha\geq\omega$. Остаётся заметить, что $\mathfrak{U}=\bigcup_{\alpha\in W}\mathfrak{U}_\alpha$.

Л е м м а 3.2.6. По каждому $\alpha\in W$ можно указать такое разбиение $\{H_{\alpha\xi}:\xi\in\Xi_\alpha\}$ множества H, что

(a) $card\ \Xi_\alpha>\aleph_0$;

(б) если $\alpha<\beta$, то разбиение $\{H_{\beta\xi}:\xi\in\Xi_\beta\}$ есть измельчание разбиения $\{H_{\alpha\xi}:\xi\in\Xi_\alpha\}$;

(в) если $\alpha\in W$ и для каждого $\gamma<\alpha$ H^γ есть одно из множеств разбиения $\{H_{\gamma\xi}:\xi\in\Xi_\gamma\}$, причём $H^{\gamma_1}\supset H^{\gamma_2}$ при $\gamma_1<\gamma_2<\alpha$, то $\bigcap_{\gamma<\alpha}H^\gamma$ совпадает с объединением несчётного набора множеств из разбиения $\{H_{\alpha\xi}:\xi\in\Xi_\alpha\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.2.5 множество H можно отождествить с множеством $\mathfrak{U}$. Фиксируем

x) Разбиением множества называется такое семейство непустых попарно непересекающихся его подмножеств, объединение которого совпадает с этим множеством.

$\alpha\in W$. Положим $W_\alpha=\{\gamma:\gamma\le\alpha\}$. За Ξ_α примем множество всех отображений $\xi: W_\alpha\longrightarrow W$. Положим теперь $H_{\alpha\xi}=$ $=\{u\in\mathfrak{U}: u(\gamma)=\xi(\gamma)$ при $\gamma\in W_\alpha\}$. Ясно, что $\{H_{\alpha\xi}:\xi\in\Xi_\alpha\}(\alpha\in W)$ и есть требуемая система разбиений. Лемма доказана.

Л е м м а 3.2.7. Пусть $T\subset(\ell^\infty_H)^*$, T тотально на ℓ^∞_H. Тогда для каждого $\alpha\in W$ можно указать $f_\alpha\in T$, $E_\alpha\subset H$, $F_\alpha\subset H$, так что

(а) $E_\alpha\cap F_\alpha=\emptyset$ при всех $\alpha\in W$;

(б) если $\alpha<\beta$, то $F_\alpha\supset E_\beta\cup F_\beta$;

(в) $f_\alpha(\chi_{E_\alpha})\ne 0$, $|f_\alpha|(\chi_{F_\alpha})=0$ при всех $\alpha\in W$;

(г) $f_\alpha\ne f_\beta$ при $\alpha\ne\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{H_{\alpha\xi}:\xi\in\Xi_\alpha\}(\alpha\in W)$ – разбиения множества H из леммы 3.2.6. Множества $H_{\alpha\xi}(\xi\in\Xi_\alpha)$ будем для краткости называть α-множествами. Построение трёх требуемых семейств произведём индуктивно. За E_1 возьмём любое 1-множество. За f_1 возьмём любой функционал из T, такой что $f_1(\chi_{E_1})\ne 0$. Наконец, за F_1 возьмём любое 1-множество, такое что $|f_1|(\chi_{F_1})=0$; существование такого множества вытекает из леммы 3.2.4 и (а) из леммы 3.2.6. Пусть теперь $\alpha\in W$, $\alpha>1$ и для каждого $\beta<\alpha$ построены $f_\beta\in T$, $E_\beta\subset H$, $F_\beta\subset H$ такие что

(д) E_β и F_β суть β-множества;

(е) $E_\beta\ne F_\beta$, то есть $E_\beta\cap F_\beta=\emptyset$;

(ж) если $\beta_1<\beta_2<\alpha$, то $F_{\beta_1}\supset E_{\beta_2}\cup F_{\beta_2}$;

(з) $f_\beta(\chi_{E_\beta})\ne 0$, $|f_\beta|(\chi_{F_\beta})=0$ при всех $\beta<\alpha$.

Теперь, используя лемму 3.2.4 и (в) из леммы 3.2.6, найдём

$f_\alpha \in T$ и α -множества E_α и F_α, так что $E_\alpha \cap F_\alpha = \emptyset$, $f_\alpha(\chi_{E_\alpha}) \neq 0$, $|f_\alpha|(\chi_{F_\alpha}) = 0$, $E_\alpha \subset \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$, $F_\alpha \subset \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$.

Итак, построены семейства $f_\alpha, E_\alpha, F_\alpha$ $(\alpha \in W)$, удовлетворяющие (а), (б), (в). Покажем, что тогда (г) выполнено автоматически. Действительно, если $\alpha < \beta$ $(\alpha, \beta \in W)$, то $f_\beta(\chi_{E_\beta}) \neq 0$, $|f_\alpha(\chi_{E_\beta})| \leq |f_\alpha|(\chi_{E_\beta}) \leq |f_\alpha|(\chi_{F_\alpha}) = 0$, тем самым $f_\beta(\chi_{E_\beta}) \neq f_\alpha(\chi_{E_\beta})$, откуда $f_\alpha \neq f_\beta$. Лемма доказана.

Л е м м а 3.2.8. Пусть как и в предыдущей лемме $T \subset (\ell^\infty_H)^*$, T -тотально на ℓ^∞_H. Тогда существует $z \in \ell^\infty_H$ такой что $\mathrm{card}\{f \in T : f(z) \neq 0\} \geq \aleph_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 3.2.7. Для каждого $\alpha \in W$ возьмём пока произвольное $c_\alpha \in [-1,1]$ и положим $v_\alpha = c_\alpha \chi_{E_\alpha}$. Пусть z есть соединение всех v_α. Для $\gamma \in W$ через z_γ обозначим соединение множества $\{v_\alpha : \alpha \leq \gamma\}$. Заметим, что $|z - z_\gamma| \leq \chi_{F_\gamma}$, откуда $|f_\gamma(z) - f_\gamma(z_\gamma)| \leq$ $\leq |f_\gamma|(|z - z_\gamma|) \leq |f_\gamma|(\chi_{F_\gamma}) = 0$, то есть $f_\gamma(z) = f_\gamma(z_\gamma)$. Итак, $f_\alpha(z) = f_\alpha(z_\alpha)$ при всех $\alpha \in W$. Отсюда ясно, что (индуктивно) числа c_α $(\alpha \in W)$ можно выбрать так, что c_α равно $+1$ или -1 и $f_\alpha(z) \neq 0$ при всех $\alpha \in W$. Лемма доказана.

3. Если Γ есть произвольное множество, то $c_0(\Gamma)$ означает подпространство в ℓ^∞_Γ, состоящее из всех $x \in \ell^\infty_\Gamma$, таких что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| > \varepsilon\}$ - конечно. Напомним, что для любого $x \in c_0(\Gamma)$ справедливо

$$\mathrm{card}\{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) \neq 0\} \leq \aleph_0.$$

Нам понадобится далее следующий результат Д.Амира и Дж.Линденштраусса (см. Амир, Линденштраусс [1], главная теорема):

Пусть B есть банахово пространство, содержащее слабо компактное множество K, линейная оболочка которого плотна в B. Тогда существует множество Γ и взаимно однозначный линейный непрерывный оператор $\mathcal{U}$ из B в $c_0(\Gamma)$.

Л е м м а 3.2.9. Пусть X есть K-пространство счётного типа с тотальным $\bar{X}$. Тогда существует такое множество $\mathfrak{N} \subset \tilde{X}$, что $\mathfrak{N}$ тотально на X и для любого $x \in X$ множество $\{f \in \mathfrak{N} : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала X есть KB-пространство с единицей $\mathbb{1}$. Так как множество $\{x \in X : |x| \leq \leq \mathbb{1}\}$ слабо компактно (см. предложение 0.3.3) и его линейная оболочка плотна в X, то применима упомянутая теорема Амира и Линденштраусса. Пусть Γ – множество, $\mathcal{U}$ – взаимно однозначный линейный непрерывный оператор из X в $c_0(\Gamma)$. Положим $f_\gamma(x) = (\mathcal{U}x)(\gamma)$ при $x \in X$, где $\gamma \in \Gamma$. Ясно, что можно принять $\mathfrak{N} = \{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Второй частный случай. Пусть X есть K-пространство с единицей и на X существует существенно положительный вполне линейный функционал f_0. Введём на X норму, положив $\|\cdot\|_X = f_0(|x|)$, $x \in X$. Пусть Y есть (b) – пополнение X. Тогда Y есть KB-пространство с аддитивной нормой и X есть фундамент в Y (см. Канторович, Вулих, Пинскер [I], гл. XI § 3). Следовательно, единица пространства X будет единицей и в Y. Итак, Y есть KB-пространство с единицей. В силу уже доказанного существует $\mathfrak{N}' \subset \tilde{Y}$, такое что $\mathfrak{N}'$ тотально на Y и для любого $y \in Y$ множество $\{f \in \mathfrak{N}' : f(y) \neq 0\}$ не более чем счётно. Остаётся положить $\mathfrak{N} = \{f|_X : f \in \mathfrak{N}'\}$. Общий случай. Известно (см. Канторович, Вулих, Пинскер [1], гл. XI § 3), что существует такая система $\{X_\xi : \xi \in \Xi\}$ попарно дизъюнктных ненулевых компонент пространства X, соединение которых есть всё X, что каждая X_ξ есть пространство с единицей и на X_ξ существует существенно положительный вполне линейный функционал. В силу уже доказанного для каждого $\xi \in \Xi$ найдётся такое множество $\mathfrak{N}^\xi \subset \tilde{X}_\xi$, что $\mathfrak{N}^\xi$ тотально на X_ξ и для любого $x \in X_\xi$ множество $\{f \in \mathfrak{N}^\xi : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно. Для каждого $f \in \mathfrak{N}^\xi$ построим $\hat{f} \in \tilde{X}$, положив $\hat{f}(x) = f(\Pr_{X_\xi} x)$, $x \in X$. Пусть $\mathfrak{N}_\xi = \{\hat{f} : f \in \mathfrak{N}^\xi\}$. Покажем, что тогда $\mathfrak{N} = \bigcup_{\xi \in \Xi} \mathfrak{N}_\xi$ - требуемое множество. Ясно, что $\mathfrak{N}$ - тотально на X. Остаётся заметить, что для любого $x \in X$ множество $\{\xi \in \Xi : \Pr_{X_\xi} x \neq 0\}$ не более чем счётно, ибо X по условию есть пространство счётного типа. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 3.2.1. Справедливость (а) $\Longrightarrow$ (в) есть следствие леммы 3.2.9. Справедливость (в) $\Longrightarrow$ (б) есть следствие леммы 3.2.8. Доказываем, что (б) $\Longrightarrow$ (а), считая справедливой континуум-гипотезу. Пусть семейство $\{x_\xi : \xi \in \Xi\}$ элементов из X таково, что: (а) $x_\xi > 0$ при всех $\xi \in \Xi$; (б) $x_{\xi_1} \wedge x_{\xi_2} = 0$ при $\xi_1 \neq \xi_2$; (в) $\operatorname{card} \Xi > \aleph_0$; (г) существует $\sup x_\xi \in X$. Ясно, что существует $a \in (0, +\infty)$, такое что $\operatorname{card}\{\xi \in \Xi : \|x_\xi\|_X \geq a\} > \aleph_0$. Так как континуум-гипотеза предполагается справедливой, то можно считать, что $H \subset \{\xi \in \Xi : \|x_\xi\|_X \geq a\}$. Для любого $x = \{\lambda_\xi : \xi \in H\} \in \ell^\infty_H$ через Ux обозначим соединение элементов $\lambda_\xi x_\xi$ при $\xi \in H$. Ясно, что $a\|x\|_{\ell^\infty_H} \leq \|Ux\|_X \leq b\|x\|_{\ell^\infty_H}$ для всех $x \in \ell^\infty_H$, где

$\beta = \| \sup \{ x_\xi : \xi \in H \} \|_X$. Отсюда следует, что $\mathcal{U}(\ell_H^\infty)$ есть подпространство в X , изоморфное ℓ_H^∞ . Противоречие. Теорема 3.2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 3.2.10. Из доказательства видно, что в теореме 3.2.1 импликации (а) $\Longrightarrow$ (в) и (в) $\Longrightarrow$ (б) справедливы и без предположения о справедливости континуум-гипотезы.

§ 3. Слабая* секвенциальная компактность

1. Напомним, что топологическое пространство T называется СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНЫМ, если любая последовательность $t_n \in T$ $(n \in N)$ содержит сходящуюся подпоследовательность $t_{n_k} (k \in N)$. Хорошо известно (теорема Эберлейна), что для ограниченного слабо замкнутого подмножества банахова пространства слабая секвенциальная компактность эквивалентна слабой компактности. В то же время для произвольного банахова пространства E единичный шар $\{ f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1 \}$ сопряжённого пространства E^* далеко не всегда слабо* секвенциально компактен, хотя он всегда слабо* компактен. В связи с этим отметим результат Амира и Линденштраусса (см. Амир, Линденштраусс [1], следствие 2): если в банаховом пространстве E существует слабо компактное множество, линейная оболочка которого плотна в E , то единичный шар пространства E^* слабо* секвенциально компактен.

Основной результат этого параграфа - следующий.

Т е о р е м а 3.3.1. Пусть X – банахово K_6N-пространство. Тогда (в предположении справедливости континуум-гипотезы) следующие утверждения эквивалентны:

(а) единичный шар $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \le 1\}$ пространства X^* слабо* секвенциально компактен;

(б) в X выполнено условие (A) и X^* – счётного типа.

При этом импликация (б) $\Longrightarrow$ (а) справедлива и без предположения о справедливости континуум-гипотезы.

С л е д с т в и е 3.3.2[x]. Для любого банахова K_6N-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) любая ограниченная по норме последовательность элементов из X содержит слабо фундаментальную подпоследовательность (определение слабо фундаментальной последовательности элементов банахова пространства дано в начале § I);

(б) в X выполнено условие (A) и X^* есть КВ-пространство.

С л е д с т в и е 3.3.3. Пусть X и $У$ банаховы KN-пространства, удовлетворяющие условию (A), причём X^* – счётного типа, а $У^*$ не есть пространство счётного типа. Тогда (в предположении справедливости континуум-гипотезы) никакое подпространство пространства X не изоморфно пространству $У$. Напомним, что термины "подпространство" и "изоморфизм" используются здесь исключительно в смысле теории линейных топологических пространств.

Доказательства следствий 3.3.2 и 3.3.3 приведены после доказательства теоремы 3.3.I.

---

[x] В следствии 3.3.2 справедливость континуум-гипотезы не предполагается.

2. Доказательство теоремы 3.3.1. Доказываем, что (б) $\Longrightarrow$ (а). Пусть $f_n \in X^*$, $\|f_n\|_{X^*} \leq 1$ $(n \in N)$. Пусть X_n есть компонента существенной положительности функционала $|f_n|$ $(n \in N)$. Так как $\bar{X} = X^*$ – счётного типа, то максимальное расширение пространства X_n есть пространство счётного типа. Поэтому X_n есть пространство с единицей. Пусть E есть наименьшая компонента пространства X, содержащая все X_n $(n \in N)$. Тогда E тоже есть пространство с единицей. Заметим, что в E существует слабо компактное множество, линейная оболочка которого плотна в E. Действительно, таким множеством является $\{x \in E : |x| \leq \mathbb{1}\}$, где $\mathbb{1}$ есть единица в E. Из упомянутого в п.1 результата Амира и Линденштраусса теперь следует, что единичный шар пространства E^* слабо* секвенциально компактен. Поэтому найдётся последовательность $n_k \in N$ $(k \in N)$, такая что $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и последовательность $f_{n_k}|_E$ $(k \in N)$ слабо* сходится в E^*. Ясно, что тогда последовательность f_{n_k} $(k \in N)$ слабо* сходится в X^*, ибо для любого $x \in X$ справедливо $f_{n_k}(x) = f_{n_k}(\Pr_E x)$ $(k \in N)$.

Доказываем, что (а) $\Longrightarrow$ (б). Допустим, что в X не выполнено условие (A). Тогда по теореме 3.1.2 в X существует подпространство, изоморфное пространству ℓ^∞. Это невозможно, ибо, во-первых, единичный шар пространства $(\ell^\infty)^*$ не является слабо* секвенциально компактным (из последовательности координатных функционалов нельзя извлечь слабо* сходящуюся подпоследовательность), во-вторых, из теоремы Хана–Банаха очевидным образом следует, что для любого подпространства Y пространства X единичный шар пространства Y^* слабо* секвенциально компактен. Итак, в X выполнено условие (A). Докажем теперь, считая справедливой континуум-гипотезу, что X^* – счётного типа. Обозначим через Ξ множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Ясно, что Ξ имеет мощность континуума. Допустим, что X^* не есть пространство счётного типа. Тогда найдётся такое семейство $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$ в X^*, что: 1) $f_\xi > 0$ при всех $\xi \in \Xi$; 2) $f_{\xi_1} \wedge f_{\xi_2} = 0$ при $\xi_1 \neq \xi_2$; 3) существует $\sup\{f_\xi : \xi \in \Xi\} = f \in X^*$. Для каждого $\xi \in \Xi$ найдём такой $e_\xi \in X_+$, что $f_\xi(e_\xi) \geq 1$ и e_ξ принадлежит компоненте существенной положительности функционала f_ξ. Заметим, что $e_{\xi_1} \wedge e_{\xi_2} = 0$ при $\xi_1 \neq \xi_2$. Для любого $\xi = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in \Xi$ и любого $m \in N$ положим

$$\varphi_{m,\xi} = \begin{cases} 0, & \text{если } m = n_k \text{ при чётном } k \\ f_\xi, & \text{если } m = n_k \text{ при нечётном } k \text{ или} \\ & \text{если } m \neq n_k \text{ ни при каком } k. \end{cases}$$

Положим теперь $F_m = \sup\{\varphi_{m,\xi} : \xi \in \Xi\}$, $m \in N$. Рассмотрим последовательность $\{F_m\}_{m \in N}$. Ясно, что $0 \leq F_m \leq f$ при всех $m \in N$. Осталось показать, что последовательность $\{F_m\}_{m \in N}$ не содержит слабо* сходящейся подпоследовательности. Возьмём произвольное $\xi_0 = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots) \in \Xi$ и покажем, что последовательность $\{F_{m_k}\}_{k \in N}$ не является слабо* сходящейся. Рассмотрим числовую последовательность $\{F_{m_k}(e_{\xi_0})\}_{k \in N}$. Если $k \in N$ – чётное число, то $F_{m_k}(e_{\xi_0}) = (\sup_{\xi \in \Xi} \varphi_{m_k,\xi})(e_{\xi_0}) = \varphi_{m_k,\xi_0}(e_{\xi_0}) = 0$. Если же $k \in N$ – нечётное число, то $F_{m_k}(e_{\xi_0}) = \varphi_{m_k,\xi_0}(e_{\xi_0}) = f_{\xi_0}(e_{\xi_0}) \geq 1$.

Тем самым последовательность $\{F_{m_k}\}_{k\in N}$ не является слабо* сходящейся. Теорема доказана.

3. Доказательство следствия 3.3.2. Доказываем, что (б) $\Longrightarrow$ (а). Не умаляя общности, можно считать, что X есть пространство с единицей, ибо всякое счётное множество элементов из X содержится в главной компоненте пространства X. Так как в X есть единица и X - счётного типа, то и максимальное расширение пространства X есть пространство счётного типа. Отсюда следует, что $X^{**}=\bar{\bar{X}}$ есть пространство счётного типа. Поэтому в силу теоремы 3.3.1 единичный шар пространства X^{**} слабо* секвенциально компактен. Остаётся воспользоваться естественным вложением X в X^{**}.

Доказываем, что (а) $\Longrightarrow$ (б). Ясно, что X не содержит подпространства, изоморфного пространству ℓ^1, ибо последовательность ортов пространства ℓ^1 не содержит никакой слабо фундаментальной подпоследовательности. Поэтому X не содержит подпространства, изоморфного пространству $C[0,1]$, так как $C[0,1]$ содержит подпространство, линейно изометричное пространству ℓ^1. Теперь из теоремы 3.1.2 следует, что в X выполнено условие (A). Так как X не содержит подпространства, изоморфного пространству ℓ^1, то (см. Бессага и Пелчинський [1], теорема 1) X^* не содержит подпространства, изоморфного пространству ℓ^∞. Тогда по теореме 3.1.2 в X^* выполнено условие (A), а так как условие (B) в X^* выполнено тривиальным образом, то X^* есть KB-пространство.

Доказательство следствия 3.3.3. В силу теоремы 3.3.1 единичный шар пространства Y^* не является слабо* секвенциально компактным. Остаётся заметить, что из теоремы 3.3.I и теоремы Хана-Банаха следует, что для любого подпространства Z пространства X единичный шар в Z^* слабо* секвенциально компактен.

4. Замечание 3.3.4. В доказательстве теоремы 3.3.I предположение о справедливости континуум-гипотезы использовалось только при доказательстве того, что из слабой* секвенциальной компактности шара $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$ следует, что пространство X^*-счётного типа. Пусть ZF – система аксиом Цермело-Френкеля теории множеств, C – аксиома выбора. Пусть $\mathcal{D}$ – хаусдорфово пространство из двух элементов, $\mathcal{D}^{\aleph_1}$ – топологическое произведение $\aleph_1$ экземпляров пространства $\mathcal{D}$. В заметке (Бут [I]) приведено (без доказательства) следующее утверждение: если система ZF непротиворечива, то система $ZFC+(\mathcal{D}^{\aleph_1}$ – секвенциально компактно) тоже непротиворечива.

Пусть $I=[-1,1]$, $I^{\aleph_1}$ – топологическое произведение $\aleph_1$ экземпляров пространства I. Без всякого труда (с помощью разложения вещественного числа в двоичную дробь) проверяется, что $(\mathcal{D}^{\aleph_1}$ – секвенциально компактно) $\Longrightarrow$ ($I^{\aleph_1}$ – секвенциально компактно). Пусть Γ – некоторое множество мощности $\aleph_1$. Обозначим через X пространство ℓ^1_Γ. Ясно, что шар $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$, наделённый слабой* топологией, гомеоморфен пространству $I^{\aleph_1}$. Поэтому из цитированного результата Бута вытекает следующее: если система ZF непротиворечива, то непротиворечива и система $ZFC+$ (шар $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$ слабо* секвенциально компактен). Но пространство X^*, очевидно, не есть пространство счётного типа. Поэтому (если результат Бута верен) в формулировке теоремы 3.3.I нельзя отбросить предположение о справедливости континуум гипотезы.

§ 4. Сопряжённое в смысле Накано и банахову сопряжённому пространству

Напомним, что всюду в этой главе термины "подпространство" и "изоморфизм" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств. Если E – нормированное пространство, то $\pi: E \to E^{**}$ есть оператор естественного вложения. Напомним, также следующее определение, которое будет играть важную роль в этом параграфе. Пусть X – линейное топологическое пространство, $\{x_t : t \in T\}$ – некоторое семейство его элементов. Пусть $\mathcal{P}(T)$ – совокупность всех конечных подмножеств множества T, упорядоченная по включению. Говорят, что семейство $\{x_t : t \in T\}$ суммируемо к элементу $x \in E$, если $\lim\limits_{\sigma \in \mathcal{P}(T)} \sum\limits_{t \in \sigma} x_t = x$.

I. В этом пункте будут доказаны некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.4.I. Пусть X – архимедов (τ)-полный К-линеал, $\{f_t : t \in T\}$ – семейство регулярных функционалов на X, такое что $\sup\{|f_t(x)| : t \in T\} < +\infty$ для любого $x \in X$. Тогда $\sup\{|f_t|(x) : t \in T\} < +\infty$ для любого $x \in X_+$.

Доказательство. Фиксуем произвольный $x \in X_+$. Пусть $Y = X_x$, причём $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_x$, то есть

$\|\cdot\|_Y$ есть естественная норма KN-линеала ограниченных элементов. Так как X (σ)- полон, то норма $\|\cdot\|_Y$- банахова. Положим $g_t = f_t|_Y$ $(t\in T)$. Так как семейство $\{g_t : t\in T\}$ слабо ограничено, то $\sup\{\|g_t\|_{Y^*} : t\in T\} < +\infty$. Следовательно, семейство $\{|g_t| : t\in T\}$ тоже ограничено по норме в Y. Поэтому $\sup\{|g_t|(x) : t\in T\} < +\infty$, то есть $\sup\{|f_t|(x) : t\in T\} < +\infty$.

Лемма 3.4.2. Пусть E - слабо секвенциально полное банахово пространство, $\{x_t : t\in T\}$- семейство его элементов, такое что $\sum\limits_{t\in T}|f(x_t)| < +\infty$ для любого $f\in E^*$. Тогда: (а) множество $\{t\in T : x_t \neq 0\}$ не более чем счётно; (б) семейство $\{x_t : t\in T\}$ суммируемо в нормированной топологии пространства E.

Доказательство. Допустим, что множество $\{t\in T : x_t \neq 0\}$ несчётно. Тогда найдутся число $a>0$ и последовательность $t_n\in T$ $(n\in N)$, такие что $t_i \neq t_k$ при $i\neq k$ и $\|x_{t_i}\| \geqslant a$ при всех $i\in N$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{t_i}$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f(x_{t_i})| < +\infty$ для любого $f\in E^*$, то в силу теоремы Орлича-Банаха (см. Данфорд, Шварц [I], стр. 107) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{t_i}$ безусловно сходится в нормированной топологии пространства E, откуда $\|x_{t_i}\| \to 0$ при $i\to\infty$. Противоречие. Итак, множество $\{t\in T : x_t \neq 0\}$ не более чем счётно. Ещё раз применив упомянутую теорему Орлича-Банаха и хорошо известные соотношения между различными типами сходимости рядов в банаховом пространстве (см. Дэй [I], стр. 102, 103), получим второе утверждение леммы.

Лемма 3.4.3. Пусть X - KB-линеал ограниченных элементов, $\{f_t : t\in T\}$ - семейство элементов пространства

X^*, такое что $\sum\limits_{t\in T}|f_t(x)|<+\infty$ для любого $x\in X$. Тогда: (а) множество $\{t\in T: f_t\neq 0\}$ не более чем счётно; (б) семейство $\{f_t: t\in T\}$ суммируемо в нормированной топологии пространства X^*.

Доказательство. Так как X^* есть KB-пространство с аддитивной нормой, то X^* слабо секвенциально полно по теореме Огасавара (см. теорему 0.3.8). Поэтому в силу леммы 3.4.2 достаточно только проверить, что $\sum\limits_{t\in T}|F(f_t)|<+\infty$ для любого $F\in X^{**}$. Пусть H есть совокупность всех $f\in X^*$, допускающих представление вида $f=\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k f_{t_k}$, где $n\in N$ – любое, δ_k есть число, равное $+1$ или -1, $t_k\in T$ $(k=1,\dots,n)$. Ясно, что $|f(x)|\leq\sum\limits_{t\in T}|f_t(x)|<+\infty$ для любых $f\in H, x\in X$. Поэтому $\sup\{|f(x)|: f\in H\}<+\infty$ для любого $x\in X$. Следовательно, $\sup\{\|f\|_{X^*}: f\in H\}=M<+\infty$. Теперь ясно, что $\sum\limits_{t\in T}|F(f_t)|\leq M\|F\|_{X^{**}}<+\infty$ для любого $F\in X^{**}$. Лемма доказана.

Лемма 3.4.4. Пусть X – K-линеал, $\{f_t: t\in T\}$ – семейство попарно дизъюнктных элементов в $\tilde{X}$, такое что существует соединение $\underset{T}{S} f_t=f\in\tilde{X}$. Тогда $\sum\limits_{t\in T}|f_t(x)|<+\infty$, $\sum\limits_{t\in T}f_t(x)=f(x)$ для любого $x\in X$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p}(T)$ есть совокупность всех конечных подмножеств множества T, упорядоченная по включению. Так как $\underset{T}{S}|f_t|=|f|$, то для любого $x\in X$ имеем $\sum\limits_{t\in T}|f_t(x)|\leq\sum\limits_{t\in T}|f_t|(|x|)\leq|f|(|x|)$. Далее, так как $f=(0)\text{-}\lim\limits_{\sigma\in\mathfrak{p}(T)}\sum\limits_{t\in\sigma}f_t$, то (см. Вулих [6], стр. 233, теорема VIII.2.3) $f(x)=\lim\limits_{\sigma\in\mathfrak{p}(T)}\sum\limits_{t\in\sigma}f_t(x)=\sum\limits_{t\in T}f_t(x)$. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 3.4.5. Пусть X — архимедов (τ)— полный К-линеал, V — идеал в $\tilde{X}$, R— компонента в $\tilde{X}$, порождённая V. Пусть f — аддитивный и однородный функционал на X. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) $f \in R$;

(б) существует такое семейство $\{f_t : t \in T\}$ в V, что $\sum_{t\in T} |f_t(x)| < +\infty$, $\sum_{t \in T} f_t(x) = f(x)$ для любого $x \in X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) $\Longrightarrow$ (б). Возьмём максимальное семейство $\{R_t : t \in T\}$ ненулевых попарно дизъюнктных компонент К-пространства R, таких что $f_t = P_{\tau_{R_t}} f \in V$. Ясно, что $f = S_T f_t$. В силу леммы 3.4.4 семейство $\{f_t : t \in T\}$ — искомое. (б) $\Longrightarrow$ (а). Из леммы 3.4.3 следует, что сужение f на любой главный идеал в X есть регулярный функционал на этом главном идеале. Поэтому для любых $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ справедливо $\sup\{|f(x)| : x \in X, x_1 \leq x \leq x_2\} < +\infty$. Тем самым $f \in \tilde{X}$. Докажем, что $f \in R$. Достаточно показать, что если $g \in \tilde{X}_+$, g дизъюнктен R, то $g \wedge |f| = 0$. Возьмём произвольный $u \in X_+$ и рассмотрим КВ-линеал ограниченных элементов X_u. Положим $f' = f|_{X_u}$, $g' = g|_{X_u}$, $f'_t = f_t|_{X_u}$. Так как $|f'_t| \wedge g' = 0$ при всех $t \in T$, то в силу леммы 3.4.3 имеем $|f'| \wedge g' = 0$. Итак, сужения f и g на любой главный идеал в X — дизъюнктны. Отсюда ясно, что $g \wedge |f| = 0$. Предложение 3.4.5 доказано.

С л е д с т в и е 3.4.6. Пусть X есть К-пространство, F — аддитивный и однородный функционал на $\bar{X}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) $F \in \bar{\bar{X}}$;

(б) существует такое семейство $\{x_t : t\in T\}$ в X, что $\sum\limits_{t\in T}|f(x_t)|<+\infty$, $\sum\limits_{t\in T} f(x_t)=F(f)$ для любого $f\in\bar{X}$.

Доказательство. В силу теоремы Накано (Вулих [6], стр.289, теорема IX.5.2) образ X при естественном вложении в $\bar{\bar{X}}$ есть фундамент в $\bar{\bar{X}}$. Остаётся применить предложение 3.4.5.

Лемма 3.4.7. Пусть X есть К-пространство с тотальным $\bar{X}$, $g\in\tilde{X}$, но $g\notin\bar{X}$. Тогда существует такое семейство $\{x_t : t\in T\}$ в X, что:

(а) $\sum\limits_{t\in T}|f(x_t)|<+\infty$ для любого $f\in\hat{X}$;

(б) $\sum\limits_{t\in T} f(x_t)=0$ для любого $f\in\bar{X}$;

(в) $\sum\limits_{t\in T} g(x_t)\neq 0.$

Доказательство. Пусть $g=g_1+g_2$, где $g_1\in\bar{X}$, $g_2\in\tilde{X}_{ant}$. Фиксируем $x\in X_+$, такой что $g_2(x)\neq 0$. Так как $\tilde{X}_{ant}=\tilde{X}_{an}$ (см. теорему 0.4.1), то существует такой фундамент Φ в X, что $g_2(y)=0$ для любого $y\in\Phi$. Пусть H есть максимальное множество, состоящее из ненулевых попарно дизъюнктных осколков элемента x, принадлежащих Φ. Ясно, что $\sup H=x$. Положим $H_1=H\cup\{-x\}$. Покажем, что тождественное отображение H_1 на H_1 и есть искомое семейство. Действительно $\sum\limits_{y\in H_1}|f(y)|=\sum\limits_{y\in H}|f(y)|+|f(x)|\leq|f|(x)+|f|(x)$ для любого $f\in\tilde{X}$. Если $f\in\bar{X}$, то $\sum\limits_{y\in H_1}f(y)=\sum\limits_{y\in H}f(y)+$ $+f(-x)=f(x)-f(x)=0$. Наконец, $\sum\limits_{y\in H_1}g(y)=\sum\limits_{y\in H_1}g_2(y)=$ $=\sum\limits_{y\in H}g_2(y)+g_2(-x)=0-g_2(x)\neq 0$. Лемма доказана.

Л е м м а 3.4.8. Пусть X – рефлексивное К-пространство, $У$ – некоторое подмножество в $\bar{X}$, причём $У$ тотально на X. Пусть семейство $\{x_t : t \in T\}$ в X таково, что:

(а) $\sum_{t\in T} |f(x_t)| < +\infty$ для любого $f \in \bar{X}$;

(б) $\sum_{t\in T} f(x_t) = 0$ для любого $f \in У$.

Тогда $\sum_{t\in T} f(x_t) = 0$ для любого $f \in \bar{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для любого $f \in \bar{X}$ положим $F(f) = \sum_{t\in T} f(x_t)$. Тогда $F \in \bar{\bar{X}}$ в силу следствия 3.4.6. Так как X – рефлексивно, то найдётся такой $x \in X$, что $F(f) = f(x)$ для любого $f \in \bar{X}$. Тогда $f(x) = 0$ для любого $f \in У$. Отсюда $x = 0$, тем самым $F = 0$. Лемма доказана.

2. О п р е д е л е н и е 3.4.9. Пусть E – произвольное нормированное пространство. Через $(E^{**})^{\mathfrak{T}}$ обозначаем совокупность всех $F \in E^{**}$, таких что $\sum_{t\in T} F(f_t) = 0$ для любого семейства $\{f_t : t \in T\}$ в E^* , удовлетворяющего условиям:

(а) $\sum_{t\in T} |G(f_t)| < +\infty$ для любого $G \in E^{**}$,

(б) $\sum_{t\in T} f_t(x) = 0$ для любого $x \in E$.

О п р е д е л е н и е 3.4.10. Пусть E – произвольное нормированное пространство. Через $(E^{**})_{\mathfrak{T}}$ обозначаем совокупность всех $F \in E^{**}$, таких что существует семейство $\{x_t : t \in T\}$ в E , удовлетворяющее условиям:

(а) $\sum_{t\in T} |f(x_t)| < +\infty$ для любого $f \in E^*$;

(б) $\sum_{t\in T} f(x_t) = F(f)$ для любого $f \in E^*$.

Замечание 3.4.11. Подчеркнём, что в определениях 3.4.9 и 3.4.10 E есть произвольное нормированное пространство, наличия какого бы то ни было частичного упорядочения в E не требуется.

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 3.4.12. ДЛЯ ЛЮБОГО KN -ЛИНЕАЛА X СПРАВЕДЛИВО РАВЕНСТВО $\overline{X^*} = (X^{**})^{\pi}$, ГДЕ $\overline{X^*}$ ЕСТЬ СОПРЯЖЁННОЕ ПО НАКАНО ПРОСТРАНСТВО К БАНАХОВУ СОПРЯЖЁННОМУ X^* .

Замечание 3.4.13. Из теоремы 3.4.12 вытекает следующее. Пусть E – произвольное линейное множество, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две эквивалентные нормы на E , K_1 и K_2 – два конуса в E , причём $X_1 = (E, K_1, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (E, K_2, \|\cdot\|_2)$ суть KN -линеалы. Тогда $\overline{X_1^*} = \overline{X_2^*}$. В этом смысле можно сказать, что для любого KN -линеала X пространство $\overline{X^*}$ полностью определяется нормированной топологией пространства X .

Доказательство теоремы 3.4.12. Покажем, что $\overline{X^*} \subset (X^{**})^{\pi}$. Пусть $F \in \overline{X^*}$. Возьмём произвольное семейство $\{f_t : t \in T\}$ в X^* , удовлетворяющее условиям (а) и (б) из определения 3.4.9. Так как X^* есть рефлексивное К-пространство, $\pi(X) \subset \overline{X^*}$ и $\pi(X)$ тотально на X^* , то $\sum_{t\in T} F(f_t) = 0$ в силу леммы 3.4.8. Тем самым $F \in (X^{**})^{\pi}$. Докажем, что $(X^{**})^{\pi} \subset \overline{X^*}$. Пусть $F \in X^{**}$, но $F \notin \overline{X^*}$. В силу леммы 3.4.7 существует семейство $\{f_t : t \in T\}$ в X^* , такое что $\sum_{t\in T} |G(f_t)| < +\infty$

для любого $G\in X^{**}$, $\sum\limits_{t\in T} G(f_t)=0$ для любого $G\in\overline{X^*}$, но $\sum\limits_{t\in T} F(f_t)\neq 0$. Следовательно, $F\notin (X^{**})^{\mathfrak{N}}$. Тем самым $(X^{**})^{\mathfrak{N}}\subset\overline{X^*}$. Теорема доказана.

Предложение 3.4.14. Для любого KN-линеала X справедливо $\mathfrak{N}(X)\subset(X^{**})_{\mathfrak{N}}\subset(X^{**})^{\mathfrak{N}}$. Здесь $\mathfrak{N}: X\to X^{**}$ - оператор естественного вложения.

Доказательство. Включение $\mathfrak{N}(X)\subset(X^{**})_{\mathfrak{N}}$ тривиально. Включение $(X^{**})_{\mathfrak{N}}\subset\overline{X^*}$ следует из предложения 3.4.5, ибо $\mathfrak{N}(X)\subset\overline{X^*}$, а $\overline{X^*}$ есть компонента в X^{**} . Остаётся заметить, что $\overline{X^*}=(X^{**})^{\mathfrak{N}}$ в силу теоремы 3.4.12.

Предложение 3.4.15. Пусть X есть KN-пространство, удовлетворяющее условию (A) . Тогда $(X^{**})_{\mathfrak{N}}=(X^{**})^{\mathfrak{N}}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{N}(X)$ есть фундамент в $\overline{X^*}$, то $(X^{**})_{\mathfrak{N}}=\overline{X^*}$ в силу предложения 3.4.5. Тем самым $(X^{**})_{\mathfrak{N}}=(X^{**})^{\mathfrak{N}}$.

Замечание 3.4.16. Если не требовать, чтобы банахово KN-пространство X удовлетворяло условию (A) , то, вообще говоря, $(X^{**})_{\mathfrak{N}}\neq(X^{**})^{\mathfrak{N}}$. Более того, как показывает следующее предложение, эти множества даже могут иметь разную мощность.

Предложение 3.4.17. Пусть $X=\ell^\infty$. Тогда $card(X^{**})_{\mathfrak{N}}\neq card(X^{**})^{\mathfrak{N}}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $card(X^{**})_{\mathfrak{N}}=\aleph$, где $\aleph$ есть мощность континуума. Возьмём произвольное семейство $\{x_t: t\in T\}$ в X , такое что $\sum\limits_{t\in T}|f(x_t)|<+\infty$ для любого $f\in X^*$. Пусть $x_t=(\xi_{1t},\xi_{2t},\dots,\xi_{nt},\dots)$. Так как $\sum_{t\in T} |\xi_{nt}| < +\infty$ для любого $n \in N$, то множество $\{t \in T : x_t \neq 0\}$ не более чем счётно. Отсюда ясно, что $card(X^{**})_{\mathfrak{N}} \leq \aleph$. Так как, кроме того, $\mathfrak{N}(X) \subset (X^{**})_{\mathfrak{N}}$, то $card(X^{**})_{\mathfrak{N}} = \aleph$. Заметим теперь, что $(X^{**})^{\mathfrak{N}} = \overline{X^*} = X^{**}$, ибо X^* есть КВ-пространство с аддитивной нормой. Отсюда легко следует, что $card(X^{**})^{\mathfrak{N}} \geq 2^{2^{\aleph}}$. Действительно, X допускает представление в виде $C(\beta N)$, где βN есть чеховское бикомпактное расширение пространства N, рассматриваемого с дискретной топологией, поэтому уже мощность дискретной компоненты пространства X^{**} не меньше $2^{card\,\beta N} = 2^{2^{\aleph}}$. Итак, $card(X^{**})_{\mathfrak{N}} \neq card(X^{**})^{\mathfrak{N}}$.

П р е д л о ж е н и е 3.4.18. Для произвольного KN-линеала X следующие утверждения эквивалентны:

(а) X есть КВ-пространство;

(б) $\mathfrak{N}(X) = (X^{**})_{\mathfrak{N}}$;

(в) $\mathfrak{N}(X) = (X^{**})^{\mathfrak{N}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если X есть КВ-пространство, то $\mathfrak{N}(X) = \overline{X^*}$. Но $\mathfrak{N}(X) \subset (X^{**})_{\mathfrak{N}} \subset (X^{**})^{\mathfrak{N}} = \overline{X^*}$. Поэтому, если X есть КВ-пространство, то $\mathfrak{N}(X) = (X^{**})_{\mathfrak{N}} = (X^{**})^{\mathfrak{N}}$. Тем самым, импликации (а)$\Longrightarrow$(б) и (а)$\Longrightarrow$(в) – доказаны. Если $\mathfrak{N}(X) = (X^{**})^{\mathfrak{N}}$, то есть $\mathfrak{N}(X) = \overline{X^*}$, то X есть КВ-пространство в силу (Вулих [6], стр. 293, теорема IX.7.3); это доказывает импликацию (в)$\Longrightarrow$(а). Докажем, что (б)$\Longrightarrow$(а). Пусть $\mathfrak{N}(X) = (X^{**})_{\mathfrak{N}}$. Докажем сначала, что X полно по норме. Пусть $x_n \in X\ (n \in N)$, причём $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < +\infty$. Положим $F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n),\ f \in X^*$. Тогда $F \in (X^{**})_{\mathfrak{N}}$. Пусть $x = \mathfrak{N}^{-1}F$. Ясно, что $\|\sum_{n=1}^{\kappa} x_n - x\|_X \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0$. Возьмём теперь произвольную последовательность $x_n \in X$ $(n \in N)$, такую что $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$ для любого $f \in X^*$. Из равенства $\mathcal{R}(X) = (X^{**})_{\mathcal{R}}$ следует, что существует $x \in X$, такой что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ для любого $f \in X^*$. Остаётся применить теорему 0.3.8.

Т е о р е м а 3.4.19. ПУСТЬ X И Y – ПРОИЗВОЛЬНЫЕ KN-ЛИНЕАЛЫ, $U \in H_b(X \to Y)$. ТОГДА $U^{**}(\overline{X^*}) \subset \overline{Y^*}$. ЗДЕСЬ U^{**} – ВТОРОЙ СОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР К U.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тем, что $\overline{X^*} = (X^{**})^{\mathcal{R}}$, $\overline{Y^*} = (Y^{**})^{\mathcal{R}}$. Фиксируем произвольный $G \in (X^{**})^{\mathcal{R}}$. Возьмём произвольное семейство $\{f_t : t \in T\}$ в Y^*, такое что $\sum_{t \in T} |F(f_t)| < +\infty$ для любого $F \in Y^{**}$ и $\sum_{t \in T} f_t(y) = 0$ для любого $y \in Y$. Рассмотрим семейство $\{U^* f_t : t \in T\}$ в X^*. Для любого $F \in X^{**}$ имеем $\sum_{t \in T} |F(U^* f_t)| = \sum_{t \in T} |U^{**} F(f_t)| < +\infty$ ибо $U^{**} F \in Y^{**}$. Для любого $x \in X$ имеем $\sum_{t \in T} U^* f_t(x) = \sum_{t \in T} f_t(Ux) = 0$. Так как $G \in (X^{**})^{\mathcal{R}}$, то из оказанного следует, что $\sum_{t \in T} G(U^* f_t) = 0$, то есть $\sum_{t \in T} U^{**} G(f_t) = 0$. Тем самым $U^{**} G \in (Y^{**})^{\mathcal{R}}$. Теорема доказана.

3. П р е д л о ж е н и е 3.4.20. Пусть E – произвольное линейное множество, K_1 и K_2 – конусы в E, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две эквивалентные банаховы нормы на E, причём $X_1 = (E, K_1, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (E, K_2, \|\cdot\|_2)$ суть KN-пространства. Если X_1 рефлексивно по Накано и $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$ тотально на E, то $\overline{X}_1 \subset \overline{X}_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $D = \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$. Допустим, что существует $g \in \overline{X}_1$, такой что $g \notin \overline{X}_2$. В силу предложения 3.4.7 существует такое семейство $\{x_t : t \in T\}$ в E, что $\sum_{t \in T} |f(x_t)| < +\infty$ для любого $f \in \tilde{X}_2 = \tilde{X}_1$, $\sum_{t \in T} f(x_t) = 0$ для любого $f \in \overline{X}_2$, но $\sum_{t \in T} g(x_t) \neq 0$. С другой стороны, так как $\sum_{t\in T} f(x_t)=0$ для любого $f\in R$ и R тотально на X_1, то $\sum_{t\in T} f(x_t)=0$ для любого $f\in \overline{X_1}$ в силу леммы 3.4.8. Поэтому $\sum_{t\in T} g(x_t)=0$. Противоречие. Предложение доказано.

Следствие 3.4.21. Если в условиях предложения 3.4.20 К-пространство X_2 рефлексивно по Накано, то $\overline{X}_1=\overline{X}_2$.

Предложение 3.4.22. Пусть E – произвольное линейное множество, K_1 и K_2 – конусы в E, причём $X_1=(E,K_1)$ и $X_2=(E,K_2)$ суть К-пространства. Если $\overline{X_1}=\overline{X}_2$, то $\overline{\overline{X}}_1=\overline{\overline{X}}_2$.

Это предложение есть очевидное следствие предложения 3.4.6.

А.Пелчиньский доказал (см.Пелчиньский [2]), что пространства ℓ^∞ и $L^\infty[0,1]$ изоморфны, то есть существует линейное непрерывное взаимнооднозначное отображение ℓ^∞ на $L^\infty[0,1]$. Следующее предложение показывает, что любое такое отображение обладает "плохими" порядковыми свойствами.

Предложение 3.4.23. Пусть $\mathcal{U}$ есть любой изоморфизм пространства $X=\ell^\infty$ на $Y=L^\infty[0,1]$. Тогда множество $R=\mathcal{U}^*(\overline{Y})\cap\overline{X}$ не является тотальным на X.

Доказательство. Допустим, что R тотально на X. Так как X и Y рефлексивны по Накано, то $\overline{X}=\mathcal{U}^*(\overline{Y})$ в силу следствия 3.4.21. Тем самым $\mathcal{U}^*$ осуществляет изоморфизм $\overline{Y}$ на $\overline{X}$. Остаётся напомнить, что пространства $\overline{X}=\ell^1$ и $\overline{Y}=L^1[0,1]$ не являются изоморфными. Предложение доказано.

Глава IУ

О (b)-СОПРЯЖЁННОМ ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ СТРУКТУРЕ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе рассматриваются разного рода вопросы, относящиеся к строению и свойствам (b)-сопряжённого пространства X^* к банаховому $K_б N$-пространству X.

Одним из наиболее важных результатов, связанных с вполне линейными функционалами, является уже неоднократно цитированная нами теорема Мори, Амемия, Накано (см. теорему 0.4.3). В § I гл. IУ приведён результат (теорема 4.I.4), являющийся, как нам кажется, существенным усилением упомянутой теоремы японских математиков.

В § 2 гл. IУ рассматриваются в основном анормальные функционалы. Введён и изучен новый класс анормальных функционалов ("локализованные функционалы"). Показано, в частности, что в наиболее важных случаях всякий анормальный функционал счётного типа – локализованный (теорема 4.2.12). Понятие локализованного функционала неоднократно используется в §§ 4–6 этой главы.

В § 3 гл. IУ рассматриваются в основном особенности строения пространства X^* для того случая, когда X есть банахово $K_б N$-пространство, не удовлетворяющее условию (A) (теорема 4.3.I).

В этом же параграфе приведены два критерия (b) - рефлексивности КВ-линеала (предложения 4.3.6 и 4.3.7), а также найдены критерии дискретности и непрерывности пространства X^* для произвольного банахова K_6N-пространства X (теоремы 4.3.12 и 4.3.14). Упомянем также теорему 4.3.8 и следствие 4.3.9, являющиеся усилением одного результата Т.Шимогаки.

В §§ 4 и 5 гл. IУ методами теории полуупорядоченных пространств изучаются (b)-сопряжённые пространства к пространствам Марцинкевича $M(\Psi)$ и к пространствам со смешанной нормой $L^{(p,q)}$ (определения этих пространств приведены в гл. 0 § 6).

Наконец, в § 6 гл. IУ рассматривается задача проектирования банаховой структуры X на её замкнутый идеал $У$; при этом используется уже упоминавшееся понятие локализованного функционала. Отметим, что теорема 4.6.4 является обобщением одного результата Т.Андо.

Из результатов этой главы теоремы 4.1.4, 4.2.12, 4.3.1 и 4.6.4 относятся к числу главных результатов диссертации.

§ I. О вполне линейных функционалах

I. В теории нормированных пространств важную роль играет понятие опорного функционала к выпуклому множеству. Напомним его.

О п р е д е л е н и е 4.I.I. Пусть E - нормированное пространство, V - выпуклое замкнутое множество в E ,

x – граничная точка V, $f \in E^*$, $f \neq 0$ и $f(x) = \sup f(V)$. Тогда f называется ОПОРНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ к V в точке x, а x – ОПОРНОЙ ТОЧКОЙ множества V.

Нам понадобится далее следующий классический результат Бишопа и Фелпса (см. Бишоп, Фелпс [I], следствие 4 теоремы 2): если V – ограниченное замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E, то опорные функционалы к V плотны в E^*.

Определение 4.I.2. Пусть X – K^N-пространство. Элемент $x \in X$ назовём СИЛЬНЫМ, если существует $f \in \bar{X} \cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$. Иными словами, элемент $x \in X$ называется сильным, если существует вполне линейный и одновременно (b) – линейный функционал, который опорен к множеству $\{y \in X : \|y\|_X \leq \|x\|_X\}$ в точке x.

Определение 4.I.3. Пусть X – K^N-пространство. Элемент $x \in X$ назовём КВАЗИСИЛЬНЫМ, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $f \in \bar{X} \cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) \geq \|x\|_X - \varepsilon$.

Используя последнее определение, теорему Мори, Амемия, Накано (см. теорему 0.4.3), можно переформулировать так: если X есть K^N-пространство с тотальным $\bar{X}$, то все элементы пространства X являются квазисильными тогда и только тогда, когда норма в X универсально полунепрерывна.

С другой стороны, справедлива следующая теорема (см. Лозановский, Меклер [I], теорема 3): если X есть K^N-пространство с тотальным $\bar{X}$, то все элементы пространства X

являются сильными тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (A). Иными словами, все элементы пространства X могут быть сильными лишь в тривиальном случае, когда $X^* \subset \overline{X}$.

Следующая теорема дополняет и уточняет оба эти результата.

Теорема 4.1.4. *Пусть X – KN-пространство с тотальным $\overline{X}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) норма в X универсально полунепрерывна;

(б) для любого $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся сильный элемент $y \in X$, такой что $\|x - y\|_X < \varepsilon$;

(в) для любого $x \in X_+$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся сильный элемент $y \in X$, такой что $(1-\varepsilon)x \leq y \leq (1+\varepsilon)x$;

(г) для любого $x \in X_+$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся сильные элементы $y, z \in X$, такие что

$$(1-\varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1+\varepsilon)x.$$

Доказательство. (в) $\Longrightarrow$ (г). Фиксируем $x \in X_+$, $\varepsilon \in (0,1)$. Положим $x_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)x$, $x_2 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)x$. Возьмём теперь пока произвольное $\delta > 0$. По условию найдутся сильные элементы $y, z \in X$, такие что $(1-\delta)x_1 \leq y \leq (1+\delta)x_1$, $(1-\delta)x_2 \leq z \leq (1+\delta)x_2$, то есть $(1-\delta)(1-\frac{\varepsilon}{2})x \leq y \leq (1+\delta)(1-\frac{\varepsilon}{2})x$, $(1-\delta)(1+\frac{\varepsilon}{2})x \leq z \leq (1+\delta)(1+\frac{\varepsilon}{2})x$. Если $\delta > 0$ достаточно мало, то из этих неравенств следует, что $(1-\varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1+\varepsilon)x$.

Импликация (г) $\Longrightarrow$ (в) тривиальна. Итак, доказано, что (г) $\Longleftrightarrow$ (в). Докажем, что (в) $\Longrightarrow$ (б). Заметим, что если $z_1, z_2 \in X$ и $|z_1| = |z_2|$, то для любого $f_1 \in \overline{X}$ найдётся $f_2 \in \overline{X}$, такой что $|f_2| = |f_1|$ и $f_1(z_1) = f_2(z_2)$ [x]. Отсюда следует, что если

---

[x] Действительно, пусть X_1 и X_2 суть две дополнительные друг к другу компоненты в X, такие что $P_{\mathfrak{z}_{X_1}} z_1 = P_{\mathfrak{z}_{X_1}} z_2$, $P_{\mathfrak{z}_{X_2}} z_1 = -P_{\mathfrak{z}_{X_2}} z_2$. Тогда можно принять $f(x) = f(P_{\mathfrak{z}_{X_1}} x) - f(P_{\mathfrak{z}_{X_2}} x)$ $(x \in X)$.

$z_1, z_2 \in X, |z_1| = |z_2|$ и z_1 – сильный элемент, то и z_2 – сильный элемент. Поэтому достаточно ограничиться случаем $x > 0$. Теперь не остаётся заметить, что из неравенства $(1-\varepsilon)x \leq y \leq \leq (1+\varepsilon)x$ следует, что $|y-x| \leq \varepsilon x$, откуда $\|y-x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_X$. Докажем теперь, что (б) $\Longrightarrow$ (а). Фиксируем $x \in X$ и возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По условию найдутся $y \in X, f \in \bar{X} \cap X^*$, такие что $\|x-y\|_X < \varepsilon$, $\|f\|_{X^*} = 1$, $f(y) = \|y\|_X$. Тогда $f(x) = f(y) + f(x-y) \geqslant \|y\|_X - \|x-y\|_X \geqslant \|x\|_X - 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, элемент x – квазисильный. Итак, все элементы пространства X – квазисильные. Из теоремы Мори, Амемия, Накано теперь следует, что норма в X универсально полунепрерывна. Наконец, докажем, что (а) $\Longrightarrow$ (в). Положим $Y = \bar{X} \cap X^*$ и за норму $\|\cdot\|_Y$ на Y примем сужение нормы $\|\cdot\|_{X^*}$. Обозначим через Z максимальное расширение пространства Y, а через γ – оператор канонического вложения X в $\bar{Y}$. Напомним, что $\gamma(X)$ есть фундамент в $\bar{Y}$ (см. Вулих [6], стр. 237, 283). Фиксируем произвольный $x > 0$ в X и произвольное число $\varepsilon > 0$. Можно считать, что x есть единица в X, ибо в противном случае вместо X мы стали бы рассматривать главную компоненту в X, порождённую элементом x. Тогда γx есть существенно положительный вполне линейный функционал на Y. В силу (Канторович, Вулих, Пинскер [I], гл. XI § I) найдётся фундамент L в Z, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой, и существенно положительный вполне линейный функционал J на L, такие что будут выполнены условия: (а) $Y \subset L$; (б) $\|g\|_L = J(|g|)$ для любого $g \in L$; (в) сужение $J|_Y = \gamma x$. Заметим, что для любого $F \in L^*$ справедливо равенство $\|F\|_{L^*} = \min\{\lambda \geqslant 0 : |F| \leqslant \lambda J\}$. Множество $\mathcal{U}_Y = \{g \in Y : \|g\|_Y \leqslant 1\}$ ограничено, выпукло и (в силу предложения 0.3.6) замкнуто в банаховом пространстве L. Поэтому можно применить упомянутый в начале параграфа результат Бишопа и Фелпса, взяв $E = L$, $V = \mathcal{U}_Y$. Пусть $F \in L^*$ опорен к $\mathcal{U}_Y$ в точке $f_0 \in \mathcal{U}_Y$ и $\|F - J\|_{L^*} \leqslant \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $|F - J| \leqslant \varepsilon J$, то есть $(1-\varepsilon)J \leqslant F \leqslant (1+\varepsilon)J$. Отсюда $(1-\varepsilon)J|_Y \leqslant F|_Y \leqslant (1+\varepsilon)J|_Y$, то есть $(1-\varepsilon)\gamma x \leqslant F|_Y \leqslant (1+\varepsilon)\gamma x$. Так как $\gamma(X)$ – фундамент в $\bar{Y}$, то найдётся $y \in X$ такой, что $\gamma y = F|_Y$. Покажем, что y – требуемый. Из неравенства $(1-\varepsilon)\gamma x \leqslant \gamma y \leqslant (1+\varepsilon)\gamma x$ следует, что $(1-\varepsilon)x \leqslant y \leqslant (1+\varepsilon)x$. Используя теорему Мори, Амемия, Накано, получаем $\|y\|_X = \sup\{f(y) : f \in \mathcal{U}_Y\} = \sup\{F(f) : f \in \mathcal{U}_Y\} = F(f_0) = f_0(y)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.1.5. ПУСТЬ X – БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ $\bar{X}$, НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНА И УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНА. ПУСТЬ $\mathcal{U}_X = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$. ТОГДА СПРАВЕДЛИВЫ СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ:

(а) ДЛЯ ЛЮБОГО $f \in \bar{X}$ И ЛЮБОГО $\varepsilon > 0$ НАЙДЁТСЯ ТАКОЙ $g \in \bar{X}$, ЧТО $\|f - g\|_{X^*} < \varepsilon$ И g ОПОРЕН К $\mathcal{U}_X$;

(б) ДЛЯ ЛЮБОГО НЕНУЛЕВОГО $f \in \bar{X}_+$ И ЛЮБОГО $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $g, h \in \bar{X}$, ЧТО $(1-\varepsilon)f \leqslant g \leqslant f \leqslant h \leqslant (1+\varepsilon)f$, ПРИЧЁМ g И h ОПОРНЫ К $\mathcal{U}_X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 0.5.9 следует, что при естественном вложении X в $\bar{\bar{X}}$ оба эти пространства совпадают как по запасу элементов, так и по норме. Теперь остаётся только применить теорему 4.1.4.

З а м е ч а н и е 4.I.6. В связи с теоремами 4.I.4 и 4.I.5 естественно возникает следующий вопрос. Пусть X - банахово KN-пространство с тотальным $\overline{X}$, с универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной нормой. Пусть $f\in X_+^*$ (но уже, вообще говоря, $f\notin\overline{X}$) и пусть число $\varepsilon>0$. Существует ли такой $g\in X_+^*$, что $(1-\varepsilon)f\le g\le(1+\varepsilon)f$ и g - опорен к $\mathcal{U}_X=\{x\in X:\|x\|_X\le 1\}$? Положительный ответ на этот вопрос был бы существенным усилением теоремы 4.I.5. Приведём пример, показывающий, что на самом деле требуемого функционала g может не существовать. Пусть X есть обычное пространство $L^\infty[0,1]$, но рассматриваемое не с естественной нормой $\|\cdot\|_{L^\infty[0,1]}$, а с нормой $\|x\|_X=\|x\|_{L^\infty[0,1]}+\int_0^1|x(t)|dt,\ x\in X$. Представим X естественным образом в виде $C(Q)$ на подходящем бикомпакте Q, так что $\chi_{[0,1]}$ при этом превращается в χ_Q. Фиксируем любую точку $q\in Q$ и полагаем $f(x)=x(q),x\in X$. Ясно, что $\|f\|_{X^*}=1$ и что f не является опорным к $\mathcal{U}_X$, ибо $|f(x)|<1$ для любого $x\in\mathcal{U}_X$. Остаётся заметить, что компонента в X^*, порождённая f, - одномерна, то есть состоит из функционалов вида af, где a - произвольное число.

2. В этом пункте будут даны некоторые приложения теоремы 4.I.4 к вопросам, рассматриваемым в гл. II § 5. До конца этого пункта пусть X означает произвольное банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$ и удовлетворяющее следующим условиям:

(а) норма в X полунепрерывна и монотонно полна;

(б) норма в X строго выпукла, то есть множество $\{x\in X: \|x\|_X = 1\}$ не содержит прямолинейных отрезков.

Положим

$$E_X = \{x\in X_+ : \|x\|_X = 1\},$$

$$E_{X'} = \{x'\in X'_+ : \|x'\|_{X'} = 1\},$$

$$E_L = \{z\in L^1[0,1] : z \geq 0, \|z\|_{L^1[0,1]} = 1\}.$$

Из теоремы 2.5.3 следует, что для любого $z\in E_L$ найдутся такие $x\in E_X$, $x'\in E_{X'}$, что $z = xx'$.

Л е м м а 4.1.7. Элемент $x\in E_X$ определяется по $z\in E_L$ однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, x_1\in E_X$, $x', x'_1\in E_{X'}$ таковы, что $z = xx' = x_1x'_1$. Положим $y = \sqrt{xx_1}$, $y' = \sqrt{x'x'_1}$. Так как $y \leq \frac{x+x_1}{2}$, то $\|y\|_X \leq 1$ и аналогично $\|y'\|_{X'} \leq 1$. Теперь из неравенства $1 = \|z\|_{L^1[0,1]} = \|yy'\|_{L^1[0,1]} \leq \|y\|_X \, \|y'\|_{X'}$ вытекает, что $\|y\|_X = 1$, откуда $\left\|\frac{x+x_1}{2}\right\|_X \geq 1$. Тем самым $\left\|\frac{x+x_1}{2}\right\|_X = 1$. Так как норма в X строго выпукла, то отсюда следует, что $x = x_1$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 4.1.8. Через Θ обозначим оператор из E_L в E_X, сопоставляющий каждому $z\in E_L$, такой $x\in E_X$, что для некоторого $x'\in E_{X'}$ справедливо равенство $z = xx'$.

П р е д л о ж е н и е 4.1.9. Будем рассматривать E_L и E_X как метрические пространства с метриками, индуцированными из $L^1[0,1]$ и X, соответственно. Тогда множество $\{\Theta z : z\in E_L\}$ плотно в E_X. Следовательно, если оператор $\Theta: E_L \to E_X$ непрерывен, то пространство X – сепарабельно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из результатов гл.0 § 5 следует, что множество $\{\Theta z : z \in E_L\}$ совпадает с множеством всех сильных элементов $x \in X$, таких что $x \geqslant 0$, $\|x\|_X = 1$. Остаётся применить теорему 4.I.4. Предложение доказано.

Итак, для непрерывности оператора Θ необходимо, чтобы X было сепарабельным. Мы покажем сейчас, что достаточным условием непрерывности Θ является локальная равномерная выпуклость пространства X.

П р е д л о ж е н и е 4.I.I0. Если пространство X локально равномерно выпукло[x)], то оператор Θ непрерывен.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим противное. Тогда найдутся $z \in E_L$, последовательность $z_n \in E_L$ $(n \in N)$ и число $\varepsilon > 0$, такие что $\|z_n - z\|_{L^1[0,1]} \to 0$ при $n \to \infty$, но $\|\Theta z_n - \Theta z\|_X \geqslant \varepsilon$ при всех $n \in N$. Положим $x_n = \Theta z_n$, $x = \Theta z$. По условию существует число $\delta > 0$, такое что $\left\|\frac{x + x_n}{2}\right\|_X \leqslant 1 - \delta$ при всех $n \in N$. Так как $\sqrt{x x_n} \leqslant \frac{x + x_n}{2}$, то $\|\sqrt{x x_n}\|_X \leqslant 1 - \delta$ при всех $n \in N$. Но $|\sqrt{z z_n} - z| = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z_n} + \sqrt{z}} \cdot |z_n - z| \leqslant |z_n - z|$, откуда $\|\sqrt{z z_n} - z\|_{L^1[0,1]} \to 0$, поэтому $\|\sqrt{z z_n}\|_{L^1[0,1]} \to 1$. Пусть $x', x_n' \in E_{X'}$ таковы, что $z = x x'$, $z_n = x_n x_n'$ $(n \in N)$. Имеем $\sqrt{z z_n} = \sqrt{x x_n} \cdot \sqrt{x' x_n'}$. Так как $\|\sqrt{x' x_n'}\|_{X'} \leqslant 1$, $\|\sqrt{z z_n}\|_{L^1[0,1]} \to 1$, то должно быть $\|\sqrt{x x_n}\|_{X} \to 1$, что невозможно, ибо $\|\sqrt{x x_n}\|_X \leqslant 1 - \delta$ при всех $n \in N$. Предложение доказано.

---

x) Это значит, что для каждого $\varepsilon \in (0,2]$ и каждого $x \in X$, такого что $\|x\|_X = 1$, существует число $\delta(\varepsilon, x) > 0$, такое

§ 2. Об анормальных функционалах

Этот параграф посвящён в основном изучению некоторых типов анормальных функционалов на К-линеале.

Всюду в этом параграфе X есть произвольный архимедов К-линеал, удовлетворяющий там, где это указано, и некоторым дополнительным условиям.

1. Определение 4.2.1. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть ФУНКЦИОНАЛОМ СЧЁТНОГО ТИПА, если f – счётного типа как элемент К-пространства $\tilde{X}$, то есть если главная компонента в $\tilde{X}$, порождённая f, есть К-пространство счётного типа.

Определение 4.2.2. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть ЛОКАЛИЗОВАННЫМ, если в булевой алгебре $\mathfrak{A}(X)$ всех компонент К-линеала X существует идеал $Z(f)$, удовлетворяющий условиям:

(а) сужение $f|_K = 0$ для любой $K \in Z(f)$;

(б) $Z(f)$ плотен в $\mathfrak{A}(X)$, то есть если $K \in \mathfrak{A}(X)$, $K \neq \{0\}$, то существует $K_1 \in Z(f)$, такая что $K_1 \subset K$ и $K_1 \neq \{0\}$.

Совокупность всех локализованных функционалов на X будем обозначать через $\tilde{X}_{loc}$. Если X есть KN-линеал, то полагаем $X^*_{loc} = X^* \cap \tilde{X}_{loc}$.

Замечание 4.2.3. Если X есть К-пространство и $f \in \tilde{X}$, то множество $\{K \in \mathfrak{A}(X) : f|_K = 0\}$ есть идеал в $\mathfrak{A}(X)$. Поэтому $f \in \tilde{X}_{loc}$ тогда и только тогда, когда указанный идеал плотен в $\mathfrak{A}(X)$.

Лемма 4.2.4. Пусть Y есть К-пополнение X, $F\in\hat{Y}_+$, $f=F|_X$.

(а) Если $F\in\tilde{Y}_{loc}$, то и $f\in\hat{X}_{loc}$.

(б) Если f -счётного типа, то и F - счётного типа.

Доказательство. (а). Пусть $F\in\tilde{Y}_{loc}$. Напомним, что если $K\in\mathfrak{A}(Y)$, то $K\cap X\in\mathfrak{A}(X)$. Пусть $Z(F)=\{K\in\mathfrak{A}(Y):F|_K=0\}$. Тогда $Z(f)=\{K\cap X:K\in Z(F)\}$ есть искомый идеал в $\mathfrak{A}(X)$. (б). Допустим противное. Тогда существует семейство $\{F_t:t\in T\}$ в $\tilde{Y}$, такое что: $F_t>0$ при всех $t\in T$; $F_{t_1}\wedge F_{t_2}=0$ при $t_1\neq t_2$; $\sup\{F_t:t\in T\}=F$; $\operatorname{card}T>\aleph_0$. Пусть $\mathfrak{P}(T)$ есть совокупность всех конечных подмножеств множества T, упорядоченная по включению. Для $\alpha\in\mathfrak{P}(T)$ положим $G_\alpha=\sum\limits_{t\in\alpha}F_t$. Ясно, что направление $G_\alpha\uparrow F$. Положим $g_\alpha=G_\alpha|_X\ (\alpha\in\mathfrak{P}(T))$. Так как $G_\alpha(y)\uparrow F(y)$ для любого $y\in Y_+$, то $g_\alpha(x)\uparrow f(x)$ для любого $x\in X_+$. Тем самым $g_\alpha\uparrow f$. Так как f - счётного типа, то существует последовательность $\alpha_n\in\mathfrak{P}(T)$ $(n\in N)$, такая что $f=\sup\{g_{\alpha_n}:n\in N\}$. Положим $T_0=\bigcup\limits_{n\in N}\alpha_n$. Заметим, что $T\setminus T_0\neq\emptyset$, ибо $\operatorname{card}T_0\leq\aleph_0$. Ясно, что $f(x)=\sum\limits_{t\in T_0}F_t(x)$ для любого $x\in X_+$. Поэтому $F_t(x)=0$ при $t\in T\setminus T_0$, $x\in X_+$. Следовательно, $F_t=0$ при $t\in T\setminus T_0$. Противоречие. Лемма доказана.

Предложение 4.2.5. Для любого архимедова К-линеала X множество $\tilde{X}_{loc}$ есть фундамент в $\tilde{X}_{an}$.

Доказательство. Прежде всего, очевидно, что $\tilde{X}_{loc}$ есть идеал в $\tilde{X}_{an}$. Возьмём произвольный $f\in\tilde{X}_{an}$, $f>0$ и покажем, что существует $g\in\tilde{X}_{loc}$, такой что $0<g\leq f$. Пусть

сначала X есть К-пространство. По условию существует фундамент Φ в X, такой что $f|_{\Phi}=0$. Фиксируем какой-нибудь $u\in X_+$, такой что $f(u)>0$. Положим $H=\{h\in X: h\wedge(u-h)=0, u-h\in\Phi\}$. Ясно, что $\inf H=0$. Положим $g(x)=\inf\{f(\mathrm{d}h\, \mathrm{D}x): h\in H\}$ для $x\in X_+$ и $g(x)=g(x_+)-g(x_-)$ для любого $x\in X$. Ясно, что $g(u)=f(u)$, поэтому $g>0$. Очевидно также, что $g\le f$. Кроме того, $g\in\hat{X}_{loc}$, ибо g аннулируется на каждой компоненте вида $\{h\}^d$, где $h\in H$, а множество всех таких компонент полно в X. Общий случай. Пусть Y есть К-пополнение X. Тогда существует $F\in\tilde{Y}_+$, такой что $F|_X=f$. Ясно, что $F\in\hat{Y}_{an}$, поэтому в силу уже доказанного существует такой $G\in\hat{Y}_{loc}$, что $0<G\le F$. Остаётся положить $g=G|_X$ и воспользоваться леммой 4.2.4. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 4.2.6. Вообще говоря $\tilde{X}_{loc}\ne\tilde{X}_{an}$. Пример анормального функционала, не являющегося локализованным, приведён в замечании 4.2.13 пункт (б). Более того, далее будет показано (см. теорему 4.4.2), что в предположении справедливости континуум-гипотезы существует банахово K^N-пространство X, обладающее следующими свойствами: (а) X есть фундамент в $S[0,1]$, тем самым $\tilde{X}$ – тотально на X; (б) норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна; (в) $\tilde{X}_{loc}\ne\tilde{X}_{an}$.

П р е д л о ж е н и е 4.2.7. ПУСТЬ X ЕСТЬ К-ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ СУЩЕСТВУЕТ ФУНДАМЕНТ Φ, ТАКОЙ ЧТО $\tilde{\Phi}$ ТОТАЛЬНО НА Φ. ЕСЛИ $f_n\in\tilde{X}_{loc}$ $(n\in N)$ И $0\le f_n\uparrow f\in\tilde{X}$, ТО $f\in\tilde{X}_{loc}$. ТАКИМ ОБРАЗОМ, В ЭТОМ СЛУЧАЕ $\tilde{X}_{loc}$ ЕСТЬ σ-ЗАМКНУТЫЙ ФУНДАМЕНТ В $\tilde{X}_{an}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно убедиться, что для любой $K \in \mathfrak{A}(X), K \neq \{0\}$ найдётся $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}(X)$, такая что $\mathcal{P} \neq \{0\}, \mathcal{P} \subset K$ и $f|_{\mathcal{P}} = 0$. Напомним, что всякое К-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов можно разложить на главные компоненты счётного типа (см. Канторович, Вулих, Пинскер [I], стр.416). Поэтому не умаляя общности, можно считать, что K -счётного типа и с единицей. Для каждого $n \in N$ построим последовательность $\mathcal{P}_m^n \in \mathfrak{A}(X)(m \in N)$, такую что $\mathcal{P}_m^n \subset \mathcal{P}_{m+1}^n \subset K, f_n|_{\mathcal{P}_m^n} = 0 (m \in N)$ и $\sup\{\mathcal{P}_m^n : m \in N\} = K$, где супремум берётся в булевой алгебре $\mathfrak{A}(X)$. Заметим, что $\mathfrak{M}(K)$ есть регулярное К-пространство (см. Канторович, Вулих, Пинскер [I], гл.XI § 3 и гл.VI § 1). Поэтому в силу теоремы о диагональной последовательности (см. Вулих [6], стр.180) существует последовательность индексов $m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$, такая что $\mathcal{P} = \bigcap\limits_{n=2}^{\infty} \mathcal{P}_{m_n}^n \neq \{0\}$ для достаточно больших $2 \in N$. Остаётся заметить, что $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}(X), \mathcal{P} \subset K$ и $f/_{\mathcal{P}} = 0$. Предложение доказано.

2. Мы далее установим связь между локализованными функционалами и функционалами счётного типа. Предварительно докажем следующие два предложения, имеющие, как нам кажется, и самостоятельный интерес.

Предложение 4.2.8. ПУСТЬ X - АРХИМЕДОВ К-ЛИНЕАЛ, $f \in \tilde{X}_+$. СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) f - СЧЁТНОГО ТИПА;

(б) СУЩЕСТВУЮТ $u_n \in X_+ (n \in N)$, ТАКИЕ ЧТО $u_n \uparrow$ И $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x \wedge n u_n)$ ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Для каждого $v \in X_+$ положим $f_v(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_+ \wedge n v) - \lim\limits_{n\to\infty} f(x_- \wedge n v), x \in X$.

Ясно, что $f_v \in \tilde{X}_+$ и $\sup\{f_v : v \in X_+\} = f$. Так как f –счётного типа, то существует последовательность $v_n \in X_+ (n \in N)$, такая что $\sup\{f_{v_n} : n \in N\} = f$. Остаётся положить $u_n = v_1 + \ldots + v_n$ $(n \in N)$. Докажем, что (б) $\Longrightarrow$ (а). Для $m \in N$ положим $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_+ \wedge n u_m) - \lim\limits_{n\to\infty} f(x_- \wedge n u_m), x \in X$. Ясно, что $f_m \in \tilde{X}_+$ и $f_m \uparrow f$. Поэтому достаточно доказать, что f_m – счётного типа $(m \in N)$. Заметим, что если $g \in \tilde{X}_+, g \le f_m, g(u_m) = 0$, то $g = 0$. Действительно, пусть $x \in X_+$, тогда для любого $n \in N$ имеем $g(x) = g(x - x \wedge n u_m) + g(x \wedge n u_m) \le g(x - x \wedge n u_m) + n g(u_m) \le f_m(x - x \wedge n u_m)$, откуда $g(x) \le \lim\limits_{n\to\infty} f_m(x - x \wedge n u_m) = f_m(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_m(x \wedge n u_m) = f_m(x) - f_m(x) = 0$, тем самым $g = 0$. Пусть теперь $g_t \in \tilde{X}_+ (t \in T)$ попарно дизъюнктны и $0 < g_t \le f_m$. Тогда очевидно $\sum\limits_{t\in T} g_t(u_m) \le f_m(u_m)$, поэтому множество T не более чем счётно. Предложение доказано.

Предложение 4.2.9. Пусть X – КВ-линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Следующие два утверждения эквивалентны:

(а) f – счётного типа;

(б) существует $u \in X_+$, такое что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x \wedge n u)$ для любого $x \in X_+$.

Доказательство. Справедливость (б) $\Longrightarrow$ (а) прямо следует из предложения 4.2.8. Для доказательства (а) $\Longrightarrow$ (б) достаточно применить предложение 4.2.8 и положить $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, где числа $\alpha_n > 0$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|u_n\|_X < +\infty$. Предложение доказано.

Л е м м а 4.2.10. Пусть X – К-пространство, в котором существует фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$. Пусть $f \in \tilde{X}_{an}$ и f –счётного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{loc}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geqslant 0$. В силу предложения 4.2.5 $f = \sup\{g : 0 \leq g \leq f, g \in \tilde{X}_{loc}\}$. Так как f – счётного типа, то существует счётное множество $\{g_n : n \in N\}$, такое что $0 \leq g_n \uparrow f$ и $g_n \in \tilde{X}_{loc} (n \in N)$. Остаётся применить предложение 4.2.7. Лемма доказана.

Л е м м а 4.2.11. Пусть X – банахово KN-пространство, $f \in \tilde{X}_{an}$ и f –счётного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{loc}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Достаточно убедиться, что для любой $K \in \mathfrak{A}(X), K \neq \{0\}$ существует $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}(X), \mathcal{P} \neq \{0\}$, такая что $\mathcal{P} \subset K$ и $f|_{\mathcal{P}} = 0$. Пусть $u \in X_+$ из предложения 4.2.9, Φ – фундамент в X, такой что $f|_{\Phi} = 0$. Если $u \, d \, K$, то $f|_K = 0$ и можно принять $\mathcal{P} = K$. В противном случае существует $h \in \Phi$, такой что $0 < h \in K$, $(u-h) \wedge h = 0$, и за $\mathcal{P}$ можно принять главную компоненту в X порождённую h. Лемма доказана.

Следующая теорема показывает, что в наиболее важных случаях всякий анормальный функционал счётного типа – локализованный.

Т е о р е м а 4.2.12. ПУСТЬ X ЕСТЬ АРХИМЕДОВ К-ЛИНЕАЛ, В КОТОРОМ ИМЕЕТСЯ ФУНДАМЕНТ Φ С ТОТАЛЬНЫМ $\bar{\Phi}$, ИЛИ ЖЕ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ. ЕСЛИ $f \in \tilde{X}_{an}$ И f –СЧЁТНОГО ТИПА, ТО $f \in \tilde{X}_{loc}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geqslant 0$.

Пусть Y есть К-пополнение X и $F\in\tilde{Y}_+$ таков, что $F|_X=f$. В силу леммы 4.2.4 достаточно показать, что $F\in\tilde{Y}_{loc}$. Заметим, что F -счётного типа по той же лемме 4.2.4. Напомним, что К-пополнение КВ-линеала при естественном распространении нормы (b) -полно (см. Вулих, Лозановский [I]). Теперь требуемое немедленно вытекает из лемм 4.2.10 и 4.2.11. Теорема доказана.

Замечание 4.2.13. (а) Далее будет показано, что существуют локализованные функционалы, не являющиеся функционалами счётного типа (см. теорему 4.5.1).

(б) Если X есть произвольное К-пространство, то из того что $f\in\hat{X}_{an}$ есть функционал счётного типа не следует, что $f\in\tilde{X}_{loc}$; тем самым наложенные в формулировке теоремы 4.2.12 ограничения на X - существенны для справедливости теоремы. Приведём соответствующий пример. Возьмём экстремальный бикомпакт Q, в котором существуют последовательности $t_n\in Q\ (n\in N)$ и $Q_n\subset Q\ (n\in N)$, удовлетворяющие условиям: 1) множества Q_n попарно не пересекаются, они нигде не плотны, замкнуты и имеют тип G_δ; 2) $t_n\in Q_n\ (n\in N)$; 3) множество $\{t_n : n\in N\}$ - плотно в Q. Такие бикомпакты Q существуют, например, за Q можно принять абсолют отрезка $[0,1]$ (см. Пономарёв [I]). Для каждого $n\in N$ зафиксируем какую-нибудь функцию $u_n\in C_\infty(Q)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u_n(t)\geq 1$ при всех $t\in Q$; 2) $u_n(t)=+\infty$ при всех $t\in Q_n$; 3) $u_n(t)<+\infty$ при всех $t\in Q\setminus Q_n$. Примем за X наименьший идеал в $C_\infty(Q)$, содержащий все $u_n\ (n\in N)$. Положим теперь $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(xu_n^{-1})(t_n)$, $x\in X$. Функционал f, очевидно, — счётного типа. Он анормален, ибо $f(x)=0$ для любого $x \in \mathcal{C}(Q)$, и $\mathcal{C}(Q)$ есть фундамент в X. Наконец, ясно, что если $K \in \mathfrak{A}(X), K \neq \{0\}$, то $f|_K \neq 0$. Тем самым $f \notin \tilde{\hat{X}}_{loc}$.

§ 3. Различные вопросы строения (b)-сопряжённых пространств

1. Теорема 4.3.1. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО $K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A) И ПУСТЬ $Y = X^*_{ant}$. ТОГДА

(а) В Y НЕТ СЛАБОЙ ЕДИНИЦЫ;

(б) В Y СУЩЕСТВУЕТ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА;

(в) ПРОСТРАНСТВО $\overline{Y}$ НЕ ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО СЧЁТНОГО ТИПА. БОЛЕЕ ТОГО, В $\overline{Y}$ СУЩЕСТВУЕТ ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА.

Замечание 4.3.2. В формулировке теоремы 4.3.1 слова " X есть банахово $K_\sigma N$-пространство" нельзя заменить словами " X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ". Действительно, рассмотрим КВ-линеал c всех сходящихся последовательностей вещественных чисел. Он не является K_σ-пространством, в нём не выполнено условие (A), в c^* есть слабая единица, любое множество ненулевых попарно дизъюнктных элементов в c^* не более чем счётно, пространство c^{**}-счётного типа.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 4.3.3. Пусть Z есть KN-линеал, $\{z_n : n\in N\}$ – последовательность его элементов, такая что $z_n \downarrow 0$ и $\inf\{\|z_n\|_Z : n\in N\}>0$. Тогда найдётся $f\in Z_+^*$, такой что: 1) $f(z)=0$ для любого $z\in \bigcup\limits_{n\in N}\{z_n\}^d$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)>0$; 3) $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f(z\wedge n z_1)$ для любого $z\in Z_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из (Вулих [6], стр. 280, лемма IX.4.1) следует, что существует $g\in Z_+^*$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)>0$. Положим $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} g(z\wedge k z_n)$ для $z\in Z_+$ и $f(z)=f(z_+)-f(z_-)$ для любого $z\in Z$. Покажем, что f – искомый функционал. Ясно, что $f\in Z_+^*$. Если $z\in Z_+$ и $z\wedge z_n=0$ для некоторого $n\in N$, то, очевидно, $f(z)=0$. Очевидно также, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)>0$. Пусть теперь $z\in Z_+$, покажем, что $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f(z\wedge n z_1)$. Положим $h(x)=\lim\limits_{k\to\infty} g(x\wedge k z_1)$ для $x\in Z_+$ и $h(x)=h(x_+)-h(x_-)$ для любого $x\in X$. Ясно, что $f\le h$. Теперь для $n\in N$ имеем

$$0\le f(z)-f(z\wedge n z_1)=f(z-z\wedge n z_1)\le h(z-z\wedge n z_1)=h(z)-h(z\wedge n z_1)=$$

$$=\lim_{k\to\infty} g(z\wedge k z_1)-\lim_{k\to\infty} g(z\wedge n z_1\wedge k z_1)=\lim_{k\to\infty} g(z\wedge k z_1)-$$

$$-g(z\wedge n z_1).$$ Отсюда ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z\wedge n z_1)=$ $=f(z)$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4.3.1. В силу леммы 0.3.4 найдётся последовательность $\{x_n : n\in N\}$ элементов из X, удовлетворяющая условиям: 1) $x_n>0$, $\|x_n\|_X>1$ $(n\in N)$; 2) $x_m\wedge x_n=0$ при $m\ne n$; 3) существует $\sup x_n=x_0\in X$.

Разобьём множество N всех натуральных чисел на два бесконечных подмножества N_0 и N_1. Множество N_i $(i=0,1)$, в свою очередь, разобьём на два бесконечных подмножества $N_{i,0}$ и $N_{i,1}$. Каждое из четырёх полученных множеств тоже разобьём на два бесконечных множества и т.д., продолжим этот процесс неограниченно. Через T обозначим множество всех последовательностей, состоящих из чисел 0 и 1.

Пусть $i=(i_1,i_2,\dots,i_n,\dots)\in T$ – произвольная последовательность. Для $n\in N$ положим $z_n^{(i)}=\sup\{x_k : k\in N_{i_1,i_2,\dots,i_n}\}-$ $-\sup\{x_k : k\in \bigcap_{m=1}^{\infty} N_{i_1,i_2,\dots,i_m}\}$. Ясно, что $z_n^{(i)}\downarrow_n 0$ и $\inf_n \|z_n^{(i)}\|_X\geq 1$. В силу леммы 4.3.3 найдётся функционал $f_i\in X_+^*$, такой что $f_i(z)=0$ для любого $z\in\bigcup_{n\in N}\{z_n^{(i)}\}^d$, $\lim_{n\to\infty} f_i(z_n^{(i)})>0$ и $f_i(z)=$ $=\lim_{n\to\infty} f_i(z\wedge n x_0)$ для любого $z\in X_+$. Ясно, что $f_i\in X_{an}^*\subset X_{an}^*=Y$ и $f_i\wedge f_j=0$ при $i\neq j$ $(i,j\in T)$. Так как мощность множества T равна мощности континуума, то утверждение (б) доказано.

Докажем (а). Допустим, что F есть слабая единица в Y. Тогда $\varphi_i=f_i\wedge F>0$ $(i\in T)$. Покажем, что $\varphi_i(x_0)>0$. Допустим, что $\varphi_i(x_0)=0$. Тогда для любого $x\in X_+$ имеем $\varphi_i(x)=$ $=\lim_{n\to\infty}\varphi_i(x-x\wedge n x_0)\leq\lim_{n\to\infty} f_i(x-x\wedge n x_0)=f_i(x)-f_i(x)=0$, то есть $\varphi_i=0$, что невозможно. Итак, $\varphi_i(x_0)>0$. Так как $\varphi_i\wedge\varphi_j=0$ при $i\neq j$ и $\varphi_i\leq F$ $(i,j\in T)$, то $\sum_{i\in T}\varphi_i(x_0)\leq F(x_0)$, тем самым $\sum_{i\in T}\varphi_i(x_0)<+\infty$. Это противоречит тому, что множество T – несчётное. Утверждение (а) доказано. Докажем (в). Положим для $i\in T$ $F_i(f)=\lim_{n\to\infty} f(z_n^{(i)})$, $f\in Y$. Ясно, что $F_i\in\tilde{Y}_+$. Так как $F_i(f_i)=\lim_{n\to\infty} f_i(z_n^{(i)})>0$, то $F_i>0$. Положим $F_0(f)=f(x_0)$, $f\in Y$. Заметим, что $F_0\in\overline{Y}$ и $0\leq F_i\leq F_0$, поэтому $F_i\in\overline{Y}$ $(i\in T)$. Осталось показать, что $F_i\wedge F_j=0$ при

$i \neq j$ $(i, j \in T)$. Фиксируем $n \in N$ настолько большое, что $z_n^{(i)} \wedge z_n^{(j)} = 0$. Положим $G_i(f) = f(z_n^{(i)}), G_j(f) = f(z_n^{(j)}), f \in Y$. Ясно, что $G_i \wedge G_j = 0$. Но, очевидно, $0 \leq F_i \leq G_i$, $0 \leq F_j \leq G_j$, поэтому $F_i \wedge F_j = 0$. Теорема доказана.

Следствие 4.3.4. Для произвольного банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) в пространстве X^* есть слабая единица;

(б) в X выполнено условие (A) и имеется существенно положительный функционал $f \in X_+^*$, то есть такой, что $f(x) > 0$ для любого $x > 0$ $(x \in X)$.

Следствие 4.3.5. Для произвольного банахова $K_\sigma N$-пространства X следующие утверждения эквивалентны:

(а) в X^* есть слабая единица и X^*-счётного типа;

(б) в X есть слабая единица и выполнено условие (A).

Напомним (Вулих [6], стр. 294, теорема IX.7.4) теорему Огасавара: КВ-линеал X (b)-рефлексивен тогда и только тогда, когда X и X^* суть КВ-пространства. Следующие два предложения дают другие критерии (b)-рефлексивности КВ-линеала.

Предложение 4.3.6. Для произвольного КВ-линеала X следующие утверждения эквивалентны:

(а) X - (b)-рефлексивен;

(б) X^{***} и X^{****} суть К-пространства счётного типа;

(в) X - КВ-пространство, а X^{***} - счётного типа.

Доказательство. Импликации (а) $\Longrightarrow$ (б) и (а) $\Longrightarrow$ (в) - тривиальны. Докажем, что (б) $\Longrightarrow$ (а). Из теоремы 4.3.1 следует, что в X^* и X^{**} выполнено условие (A). Тем самым, X^* и X^{**} суть КВ-пространства. В силу упомянутой теоремы Огасавара X^* - (b)- рефлексивное пространство, поэтому и X - (b)- рефлексивное пространство. Аналогично доказывается импликация (в) $\Longrightarrow$ (а).

Предложение 4.3.7. Для произвольного КВ-линеала X, имеющего единицу, следующие утверждения эквивалентны:

(а) X - (b) - рефлексивен;

(б) X^{**} и X^{***} суть пространства с единицами;

(в) X^{***} есть пространство счётного типа с единицей;

(г) X есть КВ-пространство, а в X^{**} есть единица.

Это предложение доказывается совершенно так же как и предыдущее, с использованием теоремы Огасавара и теоремы 4.3.I.

2. Т.Шимогаки был получен следующий результат (см. Шимогаки [I], теорема 5). Пусть X - $K_\sigma N$-пространство с тотальным $\bar{X}$ и с универсально полунепрерывной нормой. Для того чтобы сопряжённое по Накано пространство к $\bar{X} \cap X^*$ было КВ-пространством, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы (b)- пополнение пространства X было КВ-пространством. Следующая теорема содержит существенное обобщение этого результата.

Теорема 4.3.8. Пусть X -КВ-линеал, E - замкнутый по норме идеал в X^*, причём E тотален на X и $\bar{E}$ есть КВ-пространство. Тогда X есть КВ-пространство[x)].

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что E есть компонента в X^*. Обозначим через $\mathcal{U}_E$

---

x) И, следовательно, $E = X^*$.

замкнутый единичный шар пространства $\bar{E}$. Так как E естественным образом можно отождествить с пространством $(\bar{E})^* = \bar{\bar{E}}$, то $\mathcal{U}_E$ компактен в топологии $\sigma(E, \bar{E})$. Следовательно, $\mathcal{U}_E$ компактен и в более слабой топологии $\sigma(E, X)$. Тем самым $\mathcal{U}_E$ замкнут в X^* в топологии $\sigma(X^*, X)$. Так как E тотально на X, то из теоремы Крейна-Шмульяна (см. Дэй [I], стр. 77) теперь следует, что $E = X^*$. Таким образом, $\overline{X^*}$ есть КВ-пространство, тем самым $\overline{X^*}$ – слабо секвенциально полно. Но X естественным образом вкладывается в $\overline{X^*}$ как замкнутое подпространство, поэтому X тоже слабо секвенциально полно, и, следовательно, X есть КВ-пространство. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3.9. ПУСТЬ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ С ТОТАЛЬНЫМ $\bar{X}$. ЕСЛИ $\bar{\bar{X}}$ ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО, ТО И X ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО.

П р и м е р 4.3.10. Пусть X есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, причём $X' = L^\infty[0,1]$ по запасу элементов (здесь штрих, как обычно, означает дуальное пространство). Тогда $X = L^1[0,1]$ по запасу элементов.

Действительно, так как $X'' = L^1[0,1]$ есть КВ-пространство, то в силу следствия 4.3.9 X есть КВ-пространство, поэтому $X = X''$ и $X = L^1[0,1]$.

П р и м е р 4.3.11. Пусть X есть банахово KN-пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, причём $X' = M(\psi)$ по запасу элементов. Рассуждая как и в предыдущем примере, видим, что $X = \Lambda(\psi)$ по запасу элементов (определение пространств $\Lambda(\psi)$ и $M(\psi)$ см. гл. 0 § 6 п. 7).

3. Напомним (см. Вулих [6], стр. 87–89), что элемент x К-линеала X называется ДИСКРЕТНЫМ, если не существует дизъюнктных между собой элементов $y>0$ и $z>0$ таких, что $y\le|x|$ и $z\le|x|$. К-пространство называется ДИСКРЕТНЫМ, если каждый его элемент является соединением дискретных.

Напомним также следующий хорошо известный факт (см. Накано [3]). Пусть X – архимедов К-линеал, $f\in\tilde{X}_+$. Для того чтобы f был дискретным элементом К-пространства $\tilde{X}$, необходимо и достаточно, чтобы f был структурным гомоморфизмом, то есть чтобы для любых $x,y\in X$ было $f(x\vee y)=\max\{f(x),f(y)\}$.

Т е о р е м а 4.3.12. ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВА $K_\sigma N$-ПРОСТРАНСТВА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) ПРОСТРАНСТВО X^* – ДИСКРЕТНО;

(б) В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A) И X – ДИСКРЕТНО.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (б)$\Longrightarrow$(а). Если в X выполнено условие (A), то X и $X^*=\bar{X}$ имеют изоморфные максимальные расширения, поэтому, если вдобавок X – дискретно, то и X^* дискретно. (а)$\Longrightarrow$(б). Достаточно убедиться, что в X выполнено условие (A), ибо после этого дискретность X будет следовать из дискретности X^* и того, что X и X^* имеют изоморфные максимальные расширения. Допустим, что в X не выполнено условие (A). Тогда в силу леммы 0.3.4 в X найдётся замкнутая линейная подструктура Y, которая алгебраически, топологически и порядково изоморфна пространству ℓ^∞. Фиксируем любой $f\in Y^*$, такой что $f>0$ и

f дизъюнктен всем дискретным функционалам на Y. Пусть теперь $g \in X_+^*$ таков, что сужение $g|_Y = f$. Ясно, что g не является соединением дискретных функционалов, ибо если h есть дискретный функционал на X, то его сужение на Y есть дискретный функционал на Y. Противоречие. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3.13. Пусть X – КВ-линеал, такой что X^{***} есть дискретное К-пространство. Тогда X – (b)-рефлексивен.

Действительно, из теоремы 4.3.12 следует, что в этом случае в X^* и X^{**} выполнено условие (A), тем самым X^* и X^{**} суть КВ-пространства, и остаётся применить критерий (b)-рефлексивности Огасавара.

Т е о р е м а 4.3.14. ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВА $K_\sigma N$ -ПРОСТРАНСТВА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) В X^* НЕТ НЕНУЛЕВЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ;

(б) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $x_i \in X_+$ $(i = 1,\dots,n)$, ЧТО $x_i \wedge x_j = 0$ ПРИ $i \neq j$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$, ПРИЧЁМ $\|x_i\|_X \leq \varepsilon$ $(i = 1,\dots,n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . (б)$\Longrightarrow$(а). Допустим противное. Пусть $f \in X_+^*$, $\|f\|_{X^*} = 1$ и f – дискретен. Возьмём $x \in X_+$, такой что $f(x) = 1$. По условию найдутся такие $x_i \in X_+$ $(i = 1,\dots,n)$, что $x_i \wedge x_j = 0$ при $i \neq j$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$ и $\|x_i\|_X \leq \frac{1}{2}$ $(i = 1,\dots,n)$. Так как f – дискретен, то $1 = f(x) = \max\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$, что невозможно, ибо $f(x_i) \leq \|f\|_{X^*}\|x_i\|_X \leq \frac{1}{2}$ $(i = 1,2,\dots,n)$. (а)$\Longrightarrow$(б). Фиксируем произвольный $x > 0$ $(x \in X)$. Можно считать, что x есть слабая единица в X, ибо в противном случае вместо X мы стали бы рассматривать главную компоненту в X, порождённую элементом x. Можно считать теперь, что X есть фундамент в $C_\infty(Q)$, где Q – подходящий квазиэкстремальный бикомпакт, причём $x = \chi_Q$. Заметим, что для любой точки $q \in Q$ существует $z \in X_+$ такой, что $z(q) = +\infty$. Действительно, если точка $q \in Q$ такова, что $z(q) < +\infty$ для любого $z \in X_+$, то $f(z) = z(q)$ при $z \in X$ есть ненулевой дискретный функционал на X, что невозможно. Для каждой точки $q \in Q$ зафиксируем теперь $z^q \in X_+$, такой что $\|z^q\|_X = 1$ и $z^q(q) = +\infty$. Через V_q обозначим замыкание множества $\{t \in Q : z^q(t) > \frac{1}{\varepsilon}\}$ в Q. Так как бикомпакт Q – квазиэкстремален, то V_q есть открыто-замкнутое множество. Заметим, что $\chi_{V_q} \leq \varepsilon z^q$, откуда $\|\chi_{V_q}\|_X \leq \varepsilon$. В силу бикомпактности Q из покрытия $\{V_q : q \in Q\}$ можно выделить конечное подпокрытие; тем самым найдутся $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$, такие что $\bigcup_{i=1}^{n} V_{q_i} = Q$. Обозначим для краткости $\chi_{V_{q_i}}$ через y_i. Остаётся положить $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 - y_2 \wedge x_1$, $x_3 = y_3 - y_3 \wedge (x_1 + x_2), \ldots, x_n = y_n - y_n \wedge (x_1 + \ldots + x_{n-1})$. Теорема доказана.

4. В этом пункте будет доказана теорема, характеризующая банаховы KN-пространства, алгебраически и порядково изоморфные идеалам в соединении пространств $S[0,1]$ и S.

Т е о р е м а 4.3.15. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО С ЕДИНИЦЕЙ И ТОТАЛЬНЫМ $\bar{X}$. СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) X АЛГЕБРАИЧЕСКИ И ПОРЯДКОВО ИЗОМОРФНО НЕКОТОРОМУ ИДЕАЛУ В СОЕДИНЕНИИ ПРОСТРАНСТВ $S[0,1]$ И S;

(б) НА X СУЩЕСТВУЕТ СЧЁТНАЯ ТОТАЛЬНАЯ СИСТЕМА $(\mathfrak{b})$ - ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна, доказываем, что (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $\{f_n : n \in N\}$ - счётное тотальное множество $(\mathfrak{b})$-линейных функционалов на X. Можно считать, очевидно, что $f_n > 0$ при всех $n \in N$, ибо в противном случае множество $\{f_n : n \in N\}$ можно было бы заменить объединением множеств $\{(f_n)_+ : n \in N\}$ и $\{(f_n)_- : n \in N\}$. Положим $F = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n \|f_n\|}$. Тогда F есть существенно положительный функционал на X, поэтому X -К-пространство счётного типа. Итак, X -К-пространство счётного типа с единицей и $\overline{X}$ тотально на X. Из сказанного в гл.0 § 5 теперь вытекает, что X можно считать фундаментом в $S(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ)- подходящее пространство с конечной мерой. Пусть $f_n = f'_n + f''_n$, где $f'_n \in \overline{X}$, $f''_n \in X^*_{ont}$. Заметим, что f''_n - анормален в силу теоремы 0.4.I. Отсюда следует, что $X_n = \{x \in X : f''_n(|x|) = 0\}$ есть замкнутый по норме фундамент в X. Тогда $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ есть замкнутый по норме фундамент в X в силу регулярности пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. Так как Y с нормой, индуцированной из X, есть банахово KN-пространство, а мера μ - конечна, то Y есть пространство с единицей. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $Y \supset L^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$. Так как f''_n аннулируется на $L^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$ при всех $n \in N$, то множество $\{f'_n|_{L^{\infty}(T, \Sigma, \mu)} : n \in N\}$ тотально на $L^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$. Итак, на $L^{\infty}(T, \Sigma, \mu)$ существует счётное тотальное множество вполне линейных функционалов. Сказанное равносильно тому, что $L^{1}(T, \Sigma, \mu)$ метрически сепарабельно. Остаётся применить (Халмош [I], § 41). Теорема доказана.

5. Напомним следующий хорошо известный факт. Пусть X — банахово пространство, $\pi: X \to X^{**}$ — оператор канонического вложения. Тогда для любого подпространства Y пространства X слабое* замыкание множества $\pi(Y)$ в X^{**} естественным образом можно отождествить с Y^{**}. Пусть теперь X не просто банахово пространство, но КВ-линеал, Y — линейная подструктура в X. Возникает естественный вопрос, будет ли слабое* замыкание множества $\pi(Y)$ в X^{**} линейной подструктурой в X^{**}? Следующая теорема показывает, что ответ на этот вопрос утвердительный, причём без каких бы то ни было ограничений на X и Y.

Т е о р е м а 4.3.16. ПУСТЬ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ, $\pi: X \to X^{**}$ — ОПЕРАТОР КАНОНИЧЕСКОГО ВЛОЖЕНИЯ, Y — ЛИНЕЙНАЯ ПОДСТРУКТУРА В X. ТОГДА СЛАБОЕ* ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВА $\pi(Y)$ В X^{**} ЕСТЬ ЛИНЕЙНАЯ ПОДСТРУКТУРА В X^{**}.

Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а 4.3.17. Пусть E_1 и E_2 — архимедовы К-линеалы, $0 \le A \in H_2(E_1 \to E_2)$, где $H_2(E_1 \to E_2)$ есть совокупность всех регулярных операторов из E_1 в E_2. Пусть A обладает следующим свойством: для любого $0 < x \in E_1$ справедливо $\{Ay : y \in E_1,\ 0 \le y \le x\} = \{z : z \in E_2,\ 0 \le z \le Ax\}$. Положим для любого $f \in \tilde{E}_2$

$$(\hat{A} f)(x) = f(Ax),$$

где $x \in E_1$. Тогда $0 \le \hat{A} \in H_2(\tilde{E}_2 \to \tilde{E}_1)$, причём

$$(\tilde{A} f)_+ = \tilde{A}(f_+)$$

для любого $f \in \tilde{E}_2$. Следовательно, $\hat{A}(\tilde{E}_2)$ есть линейная подструктура в $\hat{E}_1$.

Доказательство леммы 4.3.17. Для любого $x \in (E_1)_+$ и любого $f \in \tilde{E}_2$ имеем

$$(\hat{A}f)_+(x) = \sup\{(\hat{A}f)(y) : y \in E_1,\ 0 \le y \le x\} =$$
$$= \sup\{f(Ay) : y \in E_1,\ 0 \le y \le x\} = \sup\{f(z) : z \in E_2,\ 0 \le z \le$$
$$\le Ax\} = f_+(Ax) = (\hat{A}f_+)(x).$$ Следовательно, $(\hat{A}f)_+ = \hat{A}(f_+)$.

Доказательство теоремы 4.3.16. Не умаляя общности, можно считать, что Y замкнуто по норме в X. Пусть $T : Y \to X$ тождественный оператор вложения. Тогда оператор $\tilde{T} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ удовлетворяет условиям леммы 4.3.17, то есть для любого $f \in \tilde{X}_+$ справедливо $\{\tilde{T}g : g \in \tilde{X},\ 0 \le g \le f\} = \{h : h \in \tilde{Y},\ 0 \le h \le \tilde{T}f\}$. Поэтому оператор $\tilde{\tilde{T}} : \tilde{\tilde{Y}} \to \tilde{\tilde{X}}$ сохраняет грани конечных множеств, следовательно, множество $\tilde{\tilde{T}}(\tilde{\tilde{Y}})$ является линейной подструктурой в $\tilde{\tilde{X}}$. Остаётся заметить, что $\tilde{\tilde{T}}(\tilde{\tilde{Y}})$ совпадает со слабым* замыканием множества $\mathfrak{T}(Y)$ в X^{**}. Теорема доказана.

§ 4. О строении пространства (b)-сопряжённого к пространству Марцинкевича

1. Всюду в этом параграфе ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0,1]$ функция, такая что $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ при $t>0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\psi(t)}=0$. Через $M(\psi)$ обозначается пространство Марцинкевича (см.гл.0 § 6 п.7).

Через μ обозначается мера Лебега на $[0,1]$, Σ – совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$, причём как обычно эквивалентные множества отождествляются.

Определение 4.4.1. Для $f \in M(\psi)^*$ и $E \in \Sigma$ через f_E обозначается функционал, задаваемый формулой

$$f_E(x) = f(x\chi_E), \ x \in M(\psi).$$

Теорема 4.4.2.

I. ПУСТЬ $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$. ТОГДА $M(\psi)^*$ ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО И ПОТОМУ ДЛЯ ЛЮБОГО $f \in M(\psi)^*_{ant}$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ СУЩЕСТВУЕТ $E \in \Sigma$, ТАКОЕ ЧТО $\mu E < \varepsilon$ И $f = f_E$.

II. ПУСТЬ $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. ТОГДА $M(\psi)^*$ НЕ ТОЛЬКО НЕ ЯВЛЯЕТСЯ КВ-ПРОСТРАНСТВОМ, НО ДАЖЕ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПРОСТРАНСТВОМ СЧЁТНОГО ТИПА. БОЛЕЕ ТОГО, В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ СУЩЕСТВУЕТ $f \in M(\psi)^*_{ant}$, $f \geq 0$ ТАКОЙ ЧТО:

(а) ЕСЛИ $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$, ТО $\|f_E\|_{M(\psi)^*} = 1$;

(б) $f(x) = 0$ ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in L^\infty[0,1]$.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 4.4.2.

2. Лемма 4.4.3. Положим $R(\psi) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{0<t\leq 1} \frac{\psi(t)}{\psi(\frac{t}{n})}$. Тогда

(а) если $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, то $R(\psi) = 1$;

(б) если $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$, то $R(\psi) = +\infty$ и если ψ строго возрастает, то $\inf\limits_{0<t\leq 1} \frac{\psi(t)}{\psi(\frac{t}{n})} > 1$ при всех $n \geq 2, n \in N$.

Доказательство. (а) Пусть $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$. Тогда (см. Семёнов [2], стр. 42, 43, лемма I.2) для любого $\ell \geq 2$ справедливо $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\psi(\ell t)}{\psi(t)} = 1$, отсюда $\inf\limits_{0<t\leq 1} \frac{\psi(t)}{\psi(\frac{t}{n})} = 1$

при всех $n \in N$, поэтому $R(\Psi)=1$. (б) Пусть $\varliminf_{t\to 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$. Положим $u_n = \inf_{0<t\le 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{n})}$ $(n \in N)$. Ясно, что $1 \le u_n \uparrow$. Заметим, что для любых $m,n \in N$ справедливо $\frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{2^{mn}})} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Psi(\frac{t}{2^{km}})}{\Psi(\frac{t}{2^{(k+1)m}})}$, откуда $\frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{2^{mn}})} \ge (u_{2^m})^n$, следовательно, $u_{2^{mn}} \ge (u_{2^m})^n$. Допустим, что $R(\Psi) < +\infty$. Тогда, очевидно, $u_n = 1$ при всех $n \in N$. Поэтому найдётся последовательность $t_n \in (0,1]$, такая что $\frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\frac{t_n}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ясно, что тогда $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\frac{t_n}{2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Это противоречит тому, что $\varliminf_{t\to 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$. Пусть теперь Ψ вдобавок строго возрастает. Нужно показать, что $u_2 > 1$. Допустим противное. Тогда найдётся последовательность $t_n \in (0,1]$ $(n \in N)$, такая что $\frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\frac{t_n}{2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Можно считать, что последовательность t_n сходится к некоторому $t^* \in [0,1]$. Так как $\varliminf_{t\to 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$, то $t^* \neq 0$. Поэтому имеем $\frac{\Psi(t^*)}{\Psi(\frac{t^*}{2})} = 1$. Это противоречит строгой монотонности функции Ψ. Лемма доказана.

3. В этом пункте будет доказано утверждение I теоремы 4.4.2. Пусть $\varliminf_{t\to 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$. Не умаляя общности, можно вдобавок считать, что Ψ строго возрастает на $[0,1]$ (этого можно добиться, соответствующим образом переопределив Ψ на некотором промежутке вида $[\tau, 1]$, где $\tau > 0$, что приведёт лишь к эквивалентной перенормировке пространства). Покажем, что пространство $M(\Psi)$ квазиравномерно выпукло. Пусть $x_1, x_2 \in M(\Psi)_+$, $x_1 \wedge x_2 = 0$, $\|x_1\|_{M(\Psi)} = \|x_2\|_{M(\Psi)} = 1$. Возьмём любые $E_1, E_2 \in \Sigma$, такие что $h_1 = \mu E_1 > 0$, $h_2 = \mu E_2 > 0$, $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$. Положим $E = E_1 \cup E_2$, $h = \mu E$. По условию $\frac{1}{\Psi(h_i)} \int_{E_i} x_i \, d\mu \le 1$ $(i = 0,1)$. Теперь для $x = x_1 + x_2$ имеем

$$\frac{1}{\Psi(h)}\int_E x\,d\mu=\frac{1}{\Psi(h)}\left[\left(\frac{1}{\Psi(h_1)}\int_{E_1}x_1d\mu\right)\Psi(h_1)+\left(\frac{1}{\Psi(h_2)}\int_{E_2}x_2d\mu\right)\Psi(h_2)\right]\le$$

$$\le\frac{1}{\Psi(h)}\left[\Psi(h_1)+\Psi(h_2)\right]\le\frac{2\Psi\left(\frac{h}{2}\right)}{\Psi(h)}\le\frac{2}{\inf\limits_{0<t\le 1}\frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}}.$$

Следовательно $\|x\|_{M(\Psi)}\le\dfrac{2}{\inf\limits_{0<t\le1}\frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}}$. Но $\dfrac{2}{\inf\limits_{0<t\le1}\frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}}<2$ в силу леммы 4.4.3. Тем самым, $M(\Psi)$ – квазиравномерно выпукло. По теореме 0.3.II $M(\Psi)^*$ есть КВ-пространство. Поэтому каждый $f\in M(\Psi)^*_{ant}$ – локализованный (лемма 4.2.II). Утверждение I доказано.

4. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству утверждения II. Считаем, что $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\Psi(2t)}{\Psi(t)}=1$. В силу леммы 4.4.3 $R(\Psi)=1$, поэтому найдётся такая числовая последовательность $\{a_n\}_{n\in N}$, что $0<a_n\le\frac{1}{n}$ $(n\in N)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Psi(na_n)}{\Psi(a_n)}=1$.

До конца параграфа положим $\varphi(t)=\dfrac{d\Psi(t)}{dt}$ для почти всех $t\in[0,1]$. Ясно, что $\varphi\in M(\Psi)$, причём $\|\varphi\chi_{[0,\varepsilon]}\|_{M(\Psi)}=1$ для любого $\varepsilon\in(0,1]$.

Если $x\in S[0,1]$, то через x^* обозначается перестановка функции $|x|$ в невозрастающем порядке.

$$\operatorname{supp}x\overset{def}{=}\{t\in[0,1]:x(t)\ne0\}.$$

Обозначим через Z множество всех $x\in M(\Psi)_+$, таких что для некоторого $\varepsilon\in(0,1]$ (зависящего от x) функции x и $\varphi\chi_{[0,\varepsilon]}$ – равноизмеримы.

Напомним, что Σ есть совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$, причём эквивалентные множества отождествляются. Через Δ будем обозначать множество (точнее – класс всех множеств) нулевой меры. Зафиксируем какое-нибудь $A \subset \Sigma$, такое что $\Delta \notin A$ и мощность множества A равна $\aleph_1$. В предположении справедливости континуум-гипотезы можно принять $A = \Sigma \setminus \Delta$. Для доказательства утверждения II достаточно установить существование такого $f \in M(\Psi)^*_+$, что $f(x) = 0$ для любого $x \in L^\infty[0,1]$, $\|f_E\|_{M(\Psi)^*} = 1$ для любого $E \in A$ и f представим в виде

$$f(x) = \sum_{E \in A} f^E(x), \quad x \in M(\Psi),$$

где $0 < f^E \in M(\Psi)^*$ и $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ из A.

Лемма. Существует отображение $A \ni E \longrightarrow z^E \in Z$, такое что: (а) если $E_1, E_2 \in A$ и $E_1 \neq E_2$, то $z^{E_1} \wedge z^{E_2} \in L^\infty[0,1]$; (б) если $E \in A$, то $\operatorname{supp} z^E \subset E$.

Справедливость леммы без труда устанавливается с помощью трансфинитной индукции.

Теперь для $E \in A$ и $n \in N$ построим множество R^n_E следующим образом. Если $\mu(\operatorname{supp} z^E) \leq \alpha_n$, то полагаем $R^n_E = \operatorname{supp} z^E$. Если же $\mu(\operatorname{supp} z^E) > \alpha_n$, то за R^n_E принимаем любое измеримое множество, такое что $\mu R^n_E = \alpha_n$, $R^n_E \subset \operatorname{supp} z^E$ и

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{t \in R^n_E} z^E(t) \geq \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1] \setminus R^n_E} z^E(t).$$

Если E фиксировано, то, очевидно, $\mu R^n_E = \alpha_n$ для достаточно больших n. Кроме того, если $E_1 \neq E_2$ из A, то $\mu(R^n_{E_1} \cap R^n_{E_2}) = 0$ при достаточно больших n.

Зафиксируем теперь какой-нибудь обобщённый предел Lim, определённый на классе всех ограниченных числовых последовательностей (см. Канторович и Акилов [I], стр. 144). По каждому $E \in A$ построим функционал $f^E \in M(\psi)^*_+$, положив

$$f^E(x) = \mathrm{Lim}\left(\left\{\frac{1}{\psi(a_n)}\int_{R_E^n} x\,d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}\right),\quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $\|f^E\|_{M(\psi)^*} \le 1$. Кроме того, $f^E(\chi_{[0,1]}) = 0$, ибо $\frac{1}{\psi(a_n)}\int_{R_E^n}\chi_{[0,1]}\,d\mu \le \frac{a_n}{\psi(a_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Заметим также, что $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \ne E_2\ (E_1, E_2 \in A)$.

Возьмём произвольные попарно различные множества $E_1, E_2, \ldots, E_m \in A$ и для $x \in M(\psi)_+$ оценим сумму $\sigma = f^{E_1}(x) + \ldots + f^{E_m}(x)$. Фиксируем номер $n_0 \ge m$, такой что при $n \ge n_0$ справедливо $\mu(R^n_{E_i} \cap R^n_{E_j}) = 0\ (i \ne j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда при $n \ge n_0$ имеем $\gamma_n = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\psi(a_n)}\int_{R^n_{E_k}} x\,d\mu \le \frac{1}{\psi(a_n)}\int_0^{ma_n} x^*d\mu \le \frac{1}{\psi(a_n)}\int_0^{na_n} x^*\,d\mu$, откуда $\gamma_n \le \left[\frac{1}{\psi(na_n)}\int_0^{na_n} x^*\,d\mu\right]\frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} \le \|x\|_{M(\psi)}\cdot\frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\psi(na_n)}{\psi(a_n)} = 1$, то $\sigma = \mathrm{Lim}\,\gamma_n \le \|x\|_{M(\psi)}$. Отсюда ясно, что для любого $x \in M(\psi)$ справедливо $\sum_{E\in A}|f^E(x)| \le \|x\|_{M(\psi)}$.

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{E\in A} f^E(x),\quad x \in M(\psi).$$

Ясно, что $f \in M(\psi)^*_+$, $\|f\|_{M(\psi)^*} \le 1$ и $f(\chi_{[0,1]}) = 0$. Осталось показать, что $f^E > 0$ и $\|f_E\|_{M(\psi)^*} \ge 1$ при всех $E \in A$. Так как $\frac{1}{\psi(a_n)}\int_{R_E^n} z^E d\mu = \frac{1}{\psi(a_n)}\int_0^{a_n}\varphi(t)dt = 1$ при достаточно

больших n , то $f^E(z^E) = \mathrm{Lim}\left(\left\{\frac{1}{\psi(a_n)}\int_{R_E^n} z^E d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$.
Поэтому $\|f_E\|_{M(\psi)^*} \geq f(z^E) \geq f^E(z^E) \geq 1$. Теорема доказана.

§ 5. О строении пространства (f)-сопряжённого к пространству со смешанной нормой

1. В этом параграфе: $T = \{(t_1, t_2): 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$; ν – мера Лебега на T ; μ – мера Лебега на $[0,1]$; p и q суть числа, такие что $1 \leq p, q \leq +\infty$; через X обозначается пространство $L^{(p,q)}$ (см.гл.0 § 6 п.4), элементы которого суть функции $x(t_1, t_2)$, определённые и измеримые на T , такие что

$$\|x\|_{L^{(p,q)}} = \left\| \|x\|_{L^p(t_1)} \right\|_{L^q(t_2)} < +\infty .$$

Теорема 4.5.1. Пусть $X = L^{(p,q)}$. Тогда

I. X^* есть КВ-пространство при $(1 < p \leq \infty, 1 < q \leq \infty)$.

II. X^* – счётного типа, но не является КВ-пространством при $(1 \leq p \leq \infty, q = 1)$ и при $(p = 1, 1 < q < \infty)$.

III. X^* не есть пространство счётного типа при $(p = 1, q = \infty)$. При этом тем не менее в пространстве $L^{(1,\infty)}$ все аномальные функционалы локализованы.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству теоремы 4.5.1.

2. В этом пункте будет доказано утверждение I. Пусть $(1 < p \leq \infty, 1 < q \leq \infty)$. Покажем, что в этом случае $X = L^{(p,q)}$

является квазиравномерно выпуклым пространством. Это очевидно, если $p = q = \infty$. Если же $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, то верно даже более сильное утверждение: X является равномерно выпуклым пространством (см. Бенедек и Панзоне [I], стр. 3I7, теорема I). Пусть $x_1, x_2 \in X_+$, $x_1 \wedge x_2 = 0$, $\|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1$. Если $p = \infty$, $1 < q < \infty$, то $\|x_1 + x_2\|_X = \left\{\int_0^1 [\operatorname{vrai\,sup}_{t_1} (x_1 + x_2)]^q dt_2\right\}^{\frac{1}{q}} =$

$$= \left\{\int_0^1 [\operatorname{vrai\,sup}_{t_1} (x_1^q + x_2^q)] dt_2\right\}^{\frac{1}{q}} \le \left\{\int_0^1 (\operatorname{vrai\,sup}_{t_1} x_1)^q dt_2 + \int_0^1 (\operatorname{vrai\,sup}_{t_1} x_2)^q dt_2\right\}^{\frac{1}{q}} = (1+1)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}}.$$

Если же $1 < p < \infty, q = \infty$, то $\|x_1 + x_2\|_X = \operatorname{vrai\,sup}_{t_2} \left\{\int_0^1 [x_1 + x_2]^p dt_1\right\}^{\frac{1}{p}} = \operatorname{vrai\,sup}_{t_2} \left\{\int_0^1 x_1^p dt_1 + \int_0^1 x_2^p dt_1\right\}^{\frac{1}{p}} \le$

$$\le \left\{\operatorname{vrai\,sup}_{t_2} \int_0^1 x_1^p dt_1 + \operatorname{vrai\,sup}_{t_2} \int_0^1 x_2^p dt_1\right\}^{\frac{1}{p}} = (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Итак, в случае $(1 < p \le \infty, 1 < q \le \infty)$ X – квазиравномерно выпукло, поэтому X^* есть КВ-пространство (теорема 0.3.II). Утверждение I доказано.

3. В этом пункте будет доказано утверждение II. В случае $(1 \le p < \infty, q = 1)$ и в случае $(p = 1, 1 < q < \infty)$ X является КВ-пространством (это легко проверяется непосредственно с помощью самого определения КВ-пространства), отсюда без труда вытекает, что $X^* = \overline{X}$ есть пространство счётного типа. Так как в указанных случаях X не является (b) – рефлексивным (см. Бенедек и Панзоне [I], стр. 303, теорема I), то X^* не является КВ-пространством в силу критерия (b) – рефлексивности

Стесавара. В случае $(p=\infty, q=1)$, то есть в случае $X=L^{(\infty,1)}$, дуальное пространство $X'=L^{(1,\infty)}$ не есть КВ-пространство (см., например, Свер [I]), поэтому и подавно X^* не есть КВ-пространство. Заметим, что, очевидно, измеримые ограниченные функции плотны в $L^{(\infty,1)}$. Отсюда в силу предложения 4.29 следует, что X^* – счётного типа. Утверждение II доказано.

4. До конца параграфа полагаем $X=L^{(1,\infty)}$. В этом пункте будет доказано, что X^* не является пространством счётного типа.

Зафиксируем какой-нибудь функционал $F\in(L^\infty[0,1])^*_+$, такой что для любого $y\in L^\infty[0,1]$ справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\operatorname{vrai\,inf}_{0\le t\le\varepsilon} y(t)] \le F(y) \le \lim_{\varepsilon\to 0}[\operatorname{vrai\,sup}_{0\le t\le\varepsilon} y(t)].$$

Такой функционал, очевидно, существует.

Для каждого $\tau\in[0,1]$ построим теперь функционал $\varphi_\tau\in X^*_+$ следующим образом. Пусть $x\in X$. Положим $z_{\tau,x}(t_2)=$ $=\int_{\tau-\tau t_2}^{\tau-\tau t_2+t_2} x(t_1,t_2)\,dt_1$ для почти всех $t_2\in[0,1]$. Ясно, что $z_{\tau,x}\in L^\infty[0,1]$. Полагаем

$$\varphi_\tau(x)=F(z_{\tau,x}),\ x\in X.$$

Ясно, что $\varphi_\tau\in X^*$, $\varphi_\tau>0$, причём $\varphi_{\tau_1}\wedge\varphi_{\tau_2}=0$ при $\tau_1\ne\tau_2$ (τ_1, $\tau_2\in[0,1]$). Заметим, что для любого конечного числа попарно различных точек $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n\in[0,1]$ справедливо неравенство $\|\sum_{k=1}^n\varphi_{\tau_k}\|_{X^*}\le 1$. Действительно, пусть $x\in X_+$, $\|x\|_X\le 1$. Для почти всех достаточно малых $t_2>0$ имеем $\sum_{k=1}^n z_{\tau_k,x}(t_2)\le$ $\le\int_0^1 x(t_1,t_2)\,dt_1\le 1$, откуда $\sum_{k=1}^n\varphi_{\tau_k}(x)=F(\sum_{k=1}^n z_{\tau_k,x})\le 1$.

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{\tau\in[0,1]} \varphi_\tau(x),\ x\in X.$$

Ясно, что $f\in X_+^*$ и f не есть функционал счётного типа, ибо функционалы φ_τ, $\tau\in[0,1]$ попарно дизъюнкты и $0\le\varphi_\tau\le f$. Итак, X^* не есть пространство счётного типа.

5. Лемма 4.5.2. Для любого $f\in X_+^*$ существует $g\in(L^\infty[0,1])_+^*$, такой что $f(x)\le g\left(\int_0^1 x(t_1,t_2)dt_1\right)$ при всех $x\in X_+$.

Доказательство. В силу теоремы 0.4.3 множество $\{h\in\bar{X}_+ : \|h\|_{X^*}\le 1\}$ слабо* плотно в множестве $\{h\in X_+^* : \|h\|_{X^*}\le 1\}$. Поэтому существует направление $K_\alpha\in L_+^{(\infty,1)}$ $(\alpha\in A)$, такое что $\sup_{\alpha\in A}\|K_\alpha\|_{L(\infty,1)}<\infty$ и $\int_0^1\int_0^1 K_\alpha(t_1,t_2)x(t_1,t_2)dt_1dt_2 \xrightarrow[\alpha\in A]{} f(x)$ при всех $x\in X$. Положим $H_\alpha(t_2)=\operatorname{vrai}\sup_{t_1} K_\alpha(t_1,t_2)$ для почти всех $t_2\in[0,1]$. Для $\alpha\in A$ определим функционал

$$h_\alpha(x)=\int_0^1\int_0^1 x(t_1,t_2)H_\alpha(t_2)dt_1dt_2,\ x\in X.$$

Ясно, что $h_\alpha\in X_+^*$ и $\sup_{\alpha\in A}\|h_\alpha\|_{X^*}<\infty$. Пусть $\varphi\in X_+^*$ есть обобщённая предельная точка направления $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$ относительно слабой* топологии. Для $y\in L^\infty[0,1]$ положим

$$\hat{y}(t_1,t_2)=y(t_2) \text{ при } 0\le t_1,t_2\le 1.$$

Теперь, взяв

$$g(y)=\varphi(\hat{y}),\ y\in L^\infty[0,1],$$

получаем, как легко видеть, искомый функционал g. Лемма доказана.

6. Если $f \in X^*$ и E есть измеримое подмножество T, то через f_E обозначается функционал на X, действующий по формуле

$$f_E(x) = f(x\chi_E),\ x \in X.$$

Лемма 4.5.3. Пусть $f \in X^*_{an}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $\mathcal{P}$ на отрезке $[0,1]$, такое что $\mu\mathcal{P} < \varepsilon$ и $f = f_E$, где $E = \{(t_1,t_2): 0 \le t_1 \le 1,\ t_2 \in \mathcal{P}\}$.

Доказательство. Можно считать, что $f \geq 0$. Пусть $g \in (L^\infty[0,1])^*_+$ — соответствующий ему функционал из леммы 4.5.2. Представим g в виде $g = g_1 + g_2$, где g_1 — анормальный, а g_2 — вполне линейный функционал на $L^\infty[0,1]$. Найдём $v \in L^1[0,1]$, такое что

$$g_2(y) = \int_0^1 y(t)\,v(t)\,dt,\ y \in L^\infty[0,1].$$

Тогда при всех $x \in X_+$ имеем

$$f(x) \le g_1\Big(\int_0^1 x(t_1,t_2)\,dt_1\Big) + \int_0^1\!\!\int_0^1 x(t_1,t_2)\,v(t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Но функционал

$$G(x) = \int_0^1\!\!\int_0^1 x(t_1,t_2)\,v(t_2)\,dt_1\,dt_2,\ x \in X,$$

очевидно, вполне линеен на X, поэтому $f \wedge G = 0$. Следовательно,

$$f(x) \leq g_1\left(\int_0^1 x(t_1,t_2)\,dt_1\right),\ x\in X_+.$$

Но g_1 – анормальный, а значит и локализованный функционал на $L^\infty[0,1]$. Поэтому существует измеримое множество $\mathcal{P}\subset[0,1]$, такое что $\mu\mathcal{P}<\varepsilon$ и $g_1(y)=g_1(y\chi_{\mathcal{P}})$ при всех $y\in L^\infty[0,1]$. Ясно, что $\mathcal{P}$ – требуемое множество. Лемма 4.5.3, а с ней и теорема 4.5.I – доказаны.

§ 6. О проектировании банаховой структуры на её замкнутый идеал

БАНАХОВЫМ ПРОЕКТОРОМ из нормированного пространства E на его замкнутое подпространство F называется линейный непрерывный оператор $\mathcal{P}$ из E на F, такой что $\mathcal{P}x=x$ для любого $x\in F$.

В этом параграфе с помощью ранее полученных результатов (в частности, результатов гл. IУ § 2 о локализованных функционалах) устанавливается несуществование банаховых проекторов из довольно большого класса банаховых KN-пространств на некоторые их замкнутые идеалы.

I. Теорема 4.6.I. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО, Y ЕГО ЗАМКНУТЫЙ ПО НОРМЕ ФУНДАМЕНТ, ПРИЧЁМ ВЫПОЛНЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ УСЛОВИЯ:

(а) НА X СУЩЕСТВУЕТ ТОТАЛЬНОЕ СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО (b)-ЛИНЕЙНЫХ (то есть линейных и непрерывных) ФУНКЦИОНАЛОВ[x];

---

x) Это условие заведомо выполнено, если X есть идеал в $S[0,1]$ (см. теорему 4.3.15).

(б) $X^*_{an} = X^*_{loc}$;

(в) НИКАКАЯ НЕНУЛЕВАЯ КОМПОНЕНТА К-ПРОСТРАНСТВА X НЕ СОДЕРЖИТСЯ В Y .

ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y .

Доказательство. Допустим противное. Тогда фактор-пространство $X/_Y$ в линейном топологическом смысле изоморфно некоторому подпространству пространства X , следовательно, на $X/_Y$ существует тотальное счётное множество $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ (b)-линейных функционалов. Для $n\in N$ положим

$$f_n(x) = \varphi_n(\gamma x), \quad x\in X,$$

где $\gamma : X \to X/_Y$ есть канонический гомоморфизм. Подберём теперь числа $\alpha_n > 0$ $(n\in N)$ так, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|f_n\|_{X^*} < +\infty$, и положим $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f_n|$. Ясно, что $f|_Y = 0$, в силу чего $f\in X^*_{an}$. С другой стороны, пусть $K \neq \{0\}$ есть компонента в X . По условию существует $x\in K_+$, такой что $x \notin Y$, то есть такой что $\gamma x \neq 0$. Ясно, что $f(x) > 0$, тем самым $f|_K \neq 0$. Из сказанного вытекает, что $f \notin X^*_{loc}$. Итак, $f\in X^*_{an}$, но $f \notin X^*_{loc}$. Противоречие. Теорема доказана.

2. Теорема 4.6.2. ПУСТЬ V ЕСТЬ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ОРЛИЧА НА $[0,1]$, X И Y СУТЬ ЕГО ЗАМКНУТЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ СИММЕТРИЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ НА $[0,1]$, ПРИЧЁМ $Y \subset X$; $Y \neq X$. ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y .

Доказательство. Известно (см. Андо [4]), что V^*_{an} есть КВ-пространство с аддитивной нормой. Поэтому V^* есть К-пространство счётного типа. Отсюда легко следует, что и X^* есть К-пространство счётного типа. Но тогда $X^*_{an} = X^*_{loc}$ в силу предложения 4.2.5 и теоремы 4.2.12. Остаётся применить теорему 4.6.1. Теорема доказана.

Дадим ещё одно приложение теоремы 4.6.1. Рассмотрим пространство $L^{(p,q)}$ (где $1 \le p,q \le \infty$) на квадрате $T = \{(t_1, t_2) : 0 \le t_1, t_2 \le 1\}$, см.начало предыдущего параграфа. Обозначим через $L_0^{(p,q)}$ замыкание в $L^{(p,q)}$ множества всех ограниченных измеримых на T функций. Нетрудно видеть, что $L_0^{(p,q)} \neq L^{(p,q)}$ тогда и только тогда, когда $1 \le p < \infty$, $q = \infty$.

Т е о р е м а 4.6.3. ПУСТЬ $1 \le p < \infty$. ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ $L^{(p,\infty)}$ НА $L_0^{(p,\infty)}$.

Действительно, $(L^{(p,\infty)})^*_{an} = (L^{(p,\infty)})^*_{loc}$ в силу предложения 4.2.5 и теорем 4.2.12 и 4.5.1. Остаётся применить теорему 4.6.1.

3. Хорошо известный результат Филлипса о несуществовании банахова проектора из пространства ℓ^∞ на его подпространство c_0 обобщался в различных направлениях. Следующая теорема является ещё одним обобщением этого результата.

Т е о р е м а 4.6.4. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО, Y – ЕГО ЗАМКНУТЫЙ ПО НОРМЕ ИДЕАЛ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЙ УСЛОВИЮ (A) . ЕСЛИ Y НЕ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПОНЕНТОЙ В X, ТО НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y .

З а м е ч а н и е 4.6.5. В работе Т.Андо (см.Андо [3], стр.41, теорема 8) приведён существенно более слабый результат. Именно, в теореме Андо дополнительно требуется, чтобы X и Y удовлетворяли следующему условию: для любого

$0 \leq x \in X$ существует $0 < y \in Y$, такой что $y \leq x$ и $\|y\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$.

Доказательство теоремы 4.6.4. Обозначим через X_1 компоненту в X, порождённую Y, через X_2 — максимальное расширение пространства X_1. Зафиксируем в X_2 единицу и обозначим через E множество всех ненулевых единичных элементов в X_2.

Зафиксируем произвольный элемент $z \in X_1$, такой что $z \notin Y$, $z > 0$. Положим $E_1 = \{e \in E : (e) \leq (z), ze \in Y\}$. Хорошо известно, что если $x \in X_2$ дизъюнктен всем элементам множества E_1, то x дизъюнктен z.

Лемма 4.6.6. Существует такое число $\tau > 0$ и такая последовательность $e_n \in E_1$ $(n \in N)$, что: 1) $e_i \wedge e_j = 0$ при $i \neq j$, 2) $\|ze_n\|_Y \geq \tau$ при всех $n \in N$.

Доказательство. Обозначим через E_2 максимальное подмножество в E_1, состоящее из попарно дизъюнктных элементов. Так как, очевидно, $z = \sup\{ze : e \in E_2\}$, то множество E_2 не является конечным. Если E_2 несчётно, то справедливость леммы вытекает из того, что несчётное множество положительных чисел содержит счётное подмножество, инфимум которого положителен. Пусть теперь E_2 — счётно, $E_2 = \{u_n : n \in N\}$. Для $n \in N$ положим $B_n = \lim\limits_{m \to \infty} \|\sum\limits_{k=n}^{m} z u_k\|_Y$. Тогда $B_1 \geq B_2 \geq \ldots \geq B_n \geq \ldots$. Положим также $\tau = \frac{1}{2}\lim\limits_{n \to \infty} B_n$. Так как $z \notin Y$, то $\tau > 0$. После этого нетрудно найти такую последовательность $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ натуральных чисел, что $\|\sum\limits_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} z u_k\|_Y \geq \tau$ при всех $i \in N$. Остаётся положить $e_i = \sum\limits_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} u_k$ $(i \in N)$. Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы. Возьмём произвольный $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots)\in\ell^\infty$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k z e_k$, очевидно, (o)-сходится в X. Обозначим через $S\lambda$ его сумму. Без труда проверяется, что $\varepsilon\|\lambda\|_{\ell^\infty}\le\|S\lambda\|_X\le\|z\|_X\,\|\lambda\|_{\ell^\infty}$. Поэтому $V=\{S\lambda:\lambda\in\ell^\infty\}$ есть замкнутое подпространство в X, и S есть линейно топологический изоморфизм ℓ^∞ на V. Обозначим через T сужение S на c_0 и положим $W=\{T\lambda:\lambda\in c_0\}$. Тогда W есть замкнутое подпространство в Y, а T есть линейно топологический изоморфизм c_0 на W.

Лемма 4.6.7. Существует банахов проектор Q из Y на W.

Доказательство. Нетрудно построить последовательность функционалов $f_n\in Y_+^*$ $(n\in N)$, обладающую следующими свойствами:

1) $\|f_n\|_{Y^*}\le\frac{1}{\varepsilon}$ $(n\in N)$;

2) $f_n(ze_n)=1$ $(n\in N)$;

3) если $y\in Y$ и $|y|\wedge z e_{n_0}=0$ для некоторого $n_0\in N$, то $f_{n_0}(y)=0$.

Убедимся теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)=0$ для любого $y\in Y$. Для этого положим $h_n=\sum_{k=n}^{\infty}e_k|y|$. Ясно, что $0\le h_n\le|y|$ и $h_n\downarrow 0$ в Y. Так как в Y выполнено условие (A), то $\|h_n\|_Y\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Остаётся заметить, что $|f_n(y)|\le f_n(|y|)=$

$$=f_n(e_n|y|)\le f_n(h_n)\le\|f_n\|_{Y^*}\|h_n\|_Y\le\frac{1}{\varepsilon}\cdot\|h_n\|_Y\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Теперь для $y\in Y$ положим $Qy=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(y)\,z e_k$. Написанный ряд, очевидно, сходится по норме в Y, ибо $f_k(y)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$; при этом $Qy\in W$. Теперь уже нетрудно проверить, что Q есть банахов проектор из Y на W. Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 4.6.4. Допустим, что существует банахов проектор $\mathcal{P}$ из X на Y. Тогда оператор $H = T^{-1}Q\mathcal{P}S$ есть проектор из ℓ^{∞} на c_0, что противоречит вышеупомянутому результату Филлипса. Теорема доказана.

4. В заключение этого параграфа докажем следующую теорему.

Теорема 4.6.8. В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ ГИПОТЕЗЫ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВО KN-ПРОСТРАНСТВО X, ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ФУНДАМЕНТОМ В $S[0,1]$, И ЗАМКНУТЫЙ ФУНДАМЕНТ Y В X, ТАКИЕ ЧТО:

(а) НИКАКАЯ НЕНУЛЕВАЯ КОМПОНЕНТА K-ПРОСТРАНСТВА X НЕ СОДЕРЖИТСЯ В Y;

(б) СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВ ПРОЕКТОР ИЗ X НА Y.

Доказательство. Через μ обозначаем меру Лебега на $[0,1]$, Σ – совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$, причём как обычно эквивалентные множества отождествляются. Через Z обозначим какое-нибудь несепарабельное пространство Орлича на $[0,1]$. Нам понадобится следующий факт, без труда вытекающий из результатов работы (Андо [4]). Для любой ненулевой компоненты V K-пространства Z найдётся $f \in Z_{+}^{*}$, удовлетворяющий условиям: $f \neq 0$; $f(x \vee y) = \max\{f(x), f(y)\}$ для любых $x, y \in Z$; $f(x) = 0$ для любого $x\, d\, V$ $(x \in Z)$.

Лемма 4.6.9. Для каждого $E \in \Sigma$ можно указать такие $f_E \in Z_{+}^{*}$ и $z_E \in Z_{+}$, что:

(1) $f_E(x \vee y) = \max\{f_E(x), f_E(y)\}$ для любых $x, y \in Z$;

(2) $f_E(z_E) = 1$;

(3) $\|z_E\|_Z = 1$;

(4) $z_E(t)=0$ для почти всех $t\in[0,1]\setminus E$;

(5) если $E_1\neq E_2\,(E_1,E_2\in\Sigma)$, то $z_{E_1}\wedge z_{E_2}\in L^\infty[0,1]$;

(6) если $E_1\neq E_2\,(E_1,E_2\in\Sigma)$, то $f_{E_1}(z_{E_2})=0$.

Заметим, что (6) есть следствие (1)–(5). Действительно, так как $z_{E_1}\wedge z_{E_2}\in L^\infty[0,1]$, то $f_{E_1}(z_{E_1}\wedge z_{E_2})=0$, ибо f_{E_1} , очевидно, аннулируется на $L^\infty[0,1]$. Но $f_{E_1}(z_{E_1}\wedge z_{E_2})=$ $=\min\{f_{E_1}(z_{E_1}),f_{E_1}(z_{E_2})\}=\min\{1,f_{E_1}(z_{E_2})\}$, откуда $f_{E_1}(z_{E_2})=0$. Теперь уже нетрудно доказать лемму, методом трансфинитной индукции, используя упомянутое следствие из результатов Т.Андо и предположение о справедливости континуум-гипотезы.

Продолжаем доказательство теоремы. За X примем множество всех $x\in Z$, таких что

$$\|x\|_X=\|x\|_Z+\sum_{E\in\Sigma}f_E(|x|)<+\infty .$$

Ясно, что X с нормой $\|\cdot\|_X$ есть банахово KN-пространство, фундамент в $S[0,1]$, причём $L^\infty[0,1]\subset X$. Заметим, что $z_E\in X$ для любого $E\in\Sigma$. Положим $Y=\{x\in X: f_E(x)=0$ для любого $E\in\Sigma\}$. Ясно, что Y есть замкнутый фундамент в X , причём $L^\infty[0,1]\subset Y$.

Покажем теперь, что X и Y – требуемые пространства. Так как $z_E\notin Y$ и $z_E\in X$ для любого $E\in\Sigma$, то никакая ненулевая компонента пространства X не содержится в Y . Положим теперь

$$\mathcal{P}x=x-\sum_{E\in\Sigma}f_E(x)\,z_E\ ,\ x\in X$$

и покажем, что $\mathcal{P}$ – искомый банахов проектор. Заметим прежде всего, что $\sum_{E\in\Sigma}\|f_E(x)z_E\|_X=\sum_{E\in\Sigma}f_E(|x|)\|z_E\|_X=$

$= 2\sum_{E\in\Sigma} f_E(|x|) \le 2\|x\|_X$ для любого $x\in X$, ибо $\|z_E\|_X = 2$. Тем самым $\mathcal{P}$ есть (b) – линейный оператор из X в X. Ясно, что $\mathcal{P}y = y$ для любого $y\in Y$. Далее, для любого $x\in X$ и любого $F\in\Sigma$ имеем $f_F(\mathcal{P}x) = f_F(x) - \sum_{E\in\Sigma} f_E(x) f_F(z_E) = f_F(x) - f_F(x) = 0$, тем самым $\mathcal{P}x\in Y$. Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$.

Цель настоящего приложения - дать некоторые применения результатов, полученных в главе II, к интерполяции линейных операторов в пространствах Кальдерона. При этом ради простоты мы будем рассматривать только случай пространств измеримых функций, а не общий случай произвольных банаховых K^N-пространств.

1. Пусть (T, Σ, μ) - пространство с σ-конечной мерой. Через $S_K = S_K(T, \Sigma, \mu)$ будем обозначать комплексную оболочку пространства $S = S(T, \Sigma, \mu)$, то есть совокупность всех (классов) функций x на T, таких что $Re\,x$, $Im\,x \in S$. БАНАХОВЫМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ на (T, Σ, μ) будем называть комплексное банахово пространство X, являющееся линейным подмножеством в S_K и удовлетворяющее условию:

$$(x \in X, y \in S_K, |y| \le |x|) \Longrightarrow (y \in X, \|y\|_X \le \|x\|_X). \qquad (1)$$

Через X_r будем обозначать вещественное ядро пространства X, то есть $X_r = X \cap S$. Очевидно, что X_r есть банахово K^N-пространство, являющееся идеалом в S. Будем говорить, что норма в X непрерывна, полунепрерывна или монотонно полна, если соответствующим свойством обладает норма в X_r.

Пусть теперь X_0 и X_1 - банаховы функциональные пространства на (T, Σ, μ) и s - произвольное число, такое что $0 < s < 1$. Пространство $X_s = X_0^{1-s} X_1^s$ определяется точно так же как в вещественном случае (см.определение 2.1.7), то есть X_S состоит из всех $x \in S_K$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|x\|_{X_S} = \inf\{\{\lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda x_0^{1-S} x_1^S, \|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1} \leq 1, x_0, x_1 \geq 0\}.$$

Ясно, что $\quad (X_0^{1-S} X_1^S)_z = ((X_0)_z)^{1-S}((X_1)_z)^S.$

Хорошо известно, что X_0+X_1 и $X_0 \cap X_1$ суть банаховы функциональные пространства на (T, Σ, μ), если на них ввести следующие нормы:

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\{\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x_0 + x_1 = x\}, x \in X_0 + X_1;$$

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}, \quad x \in X_0 \cap X_1.$$

2. Пусть далее (T_1, Σ_1, μ_1) и (T_2, Σ_2, μ_2) – пространства с σ-конечными мерами, X_0 и X_1 – банаховы функциональные пространства на (T_1, Σ_1, μ_1), Y_0 и Y_1 – банаховы функциональные пространства на (T_2, Σ_2, μ_2), число $s \in (0,1)$, $X_S = X_0^{1-S} X_1^S$, $Y_S = Y_0^{1-S} Y_1^S$. Пусть также R есть линейный оператор из X_0+X_1 в Y_0+Y_1, действующий непрерывным образом из X_i в Y_i с нормой $M_i (i=0,1)$.

Нас будет интересовать следующий вопрос: при каких условиях оператор R непрерывно действует из X_S в Y_S? Если это имеет место, то через M_S будем обозначать норму R как оператора из X_S в Y_S.

Из результатов работы (Кальдерон [1]) следует, что если норма в X_S непрерывна, то R действует непрерывно из X_S в Y_S, причём

$$M_S \le M_0^{1-S} M_1^{S}. \tag{2}$$

Некоторые результаты в указанном направлении имеются также в работе (Забрейко [I]).

Мы докажем сейчас теорему, уточняющую основной результат работы (Забрейко [I]).

Т е о р е м а I. ЕСЛИ НОРМЫ В Y_0 И Y_1 ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫ И МОНОТОННО ПОЛНЫ, ТО R НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЕТ ИЗ X_S В Y_S С ОЦЕНКОЙ (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из теоремы 2.4.2 следует, что норма в X_S полунепрерывна и монотонно полна. Из предложения 0.3.6 теперь легко следует, что множество $\{y \in Y_S : \|y\|_{Y_S} \le 1\}$ замкнуто в пространстве $Y_0 + Y_1$. Поэтому пространство Y_S совпадает с пространством $[Y_0, Y_1]^S$, полученным методом комплексной интерполяции (см. Кальдерон [I], § 13.6). Но $X_S \subset [X_0, X_1]^S$ и норма оператора вложения ≤ 1 (см. Кальдерон [I], § 13.6). Остаётся применить интерполяционную теорему из (Кальдерон [I], § 7).

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы I были использованы тонкие результаты работы (Кальдерон [I]) о комплексной интерполяции. Нетрудно дать другое доказательство теоремы I, основанное на результатах главы II, и не опирающееся на результаты работы (Кальдерон [I]). Ключом к такому доказательству служит теорема 2.2.12.

Из теоремы I, предложения 0.4.4 и теоремы 2.4.2 вытекает

Т е о р е м а 3. ЕСЛИ НОРМЫ В Y_0 И Y_1 МОНОТОННО ПОЛНЫ, ТО R НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЕТ ИЗ X_S В Y_S.

3. В связи с теоремами I и 3 естественно возникают следующие два вопроса:

$i)$ Будет ли R действовать из X_S в Y_S, если на X_0, X_1, Y_0, Y_1, R не накладывать вообще никаких ограничений?

$ii)$ В условиях теоремы 3 будет ли справедлива оценка (2)?

Мы приведём примеры, показывающие, что ответы на оба вопроса отрицательны.

В этих примерах банаховы функциональные пространства строятся на отрезке $(0,1)$ с лебеговой мерой. Через $\mathbb{1}$ обозначается функция, тождественно равная 1, через e обозначается функция $\frac{1}{t}$ на $(0,1)$.

Пример 4. За X_0 принимаем пространство всех $x \in S_K(0,1)$, таких что

$$\|x\|_{X_0} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(0,1)} \left|\frac{x(t)}{e(t)}\right| < +\infty .$$

Прежде чем продолжать построение примера, докажем следующую лемму.

Лемма 5. Существует функционал $f \in X_0^*$, удовлетворяющий условиям:

(а) $f(x) \geq 0$ при $0 \leq x \in X_0$;

(б) $f(\max\{x,y\}) = \max\{f(x), f(y)\}$ при $0 \leq x, y \in X_0$;

(в) $f(e) = 1$, $f(e^{\sigma}) = 0$ при $0 \leq \sigma < 1$.

Доказательство. В силу теоремы Крейнов–Какутани существует бикомпакт K и сохраняющий порядок изометрический изоморфизм H пространства X_0 на пространство всех комплексных непрерывных функций на K, так что $H(e)$ есть функция, тождественно равная 1 на K. Ясно, что существует $p \in K$, такая что $(H(\mathbb{I}))(p) = 0$. Остаётся положить

$$f(x) = (H(x))(p), \quad x \in X_0.$$

Лемма доказана.

Продолжаем построение примера. Фиксируем функционал f, построенный в лемме 5, и положим $Y_0 = \{x \in X_0 : f(x) = 0\}$, с нормой, индуцированной из X_0. Ясно, что Y_0 есть банахово функциональное пространство, ибо, если $x, y \in X_0, |x| \le |y|$, $f(y) = 0$, то $f(x) = 0$. Заметим, что норма в Y_0 не является монотонно полной.

За $X_1 = Y_1$ теперь примем пространство всех $x \in S_K(0,1)$, таких что

$$\|x\|_{X_1} = \|x\|_{Y_1} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in (0,1)} |x(t)| < +\infty.$$

Заметим, что $X_0 \supset X_1, Y_0 \supset Y_1$, в силу чего $X_0 + X_1 = X_0$, $Y_0 + Y_1 = Y_0$.

Положим теперь

$$Rx = x - f(x)e, \quad x \in X_0.$$

Ясно, что R непрерывно действует из X_0 в Y_0 (ибо $f(Rx) = f(x) - f(x) f(e) = f(x) - f(x) = 0$ для любого $x \in X_0$) и из X_1 в Y_1 (ибо $Rx = x$ для любого $x \in X_1$). Покажем, что R не действует из X_S в Y_S ни при каком $S \in (0,1)$. Действительно, ясно, что $e^{1-S} \in X_S$, но $e^{1-S} \notin Y_S$. Остаётся заметить, что $R(e^{1-S}) = e^{1-S}$, ибо $f(e^{1-S}) = 0$. Итак, ответ на вопрос $i)$ — отрицательный.

П р и м е р 6. Пусть X_0, X_1, Y_1, R те же, что в примере 4, а Y_0 по набору элементов совпадает с X_0, но норма

$$\|x\|_{Y_0} = \|x\|_{X_0} + \kappa f(|x|), \quad x \in Y_0,$$

где f из леммы 5, а $\kappa > 0$ — пока произвольное число. Заметим, что норма в Y_0 не является полунепрерывной. Ясно, что нормы в Y_0 и Y_1 монотонно полны, но

$$M_0 \le 2, \; M_1 = 1, \; \lim_{\kappa \to +\infty} M_S = +\infty .$$

Итак, ответ на вопрос $ii)$ тоже отрицательный.

Цитированная литература

А б р а м о в и ч Ю.А.

I. Некоторые теоремы о нормированных структурах. Л., Вестн.ун-та, № 13, серия матем., 3 (1971), 5-11.

А л е к с а н д р о в П.С.

I. Введение в общую теорию множеств и функций. М., Гостехиздат, 1948.

А м е м и я (Amemiya I.)

1. A generalization of Riesz-Fischer theorem. J. Math. Soc. Japan, 5 (1953), 353-354.

А м и р и Л и н д е н ш т р а у с с (Amir D., Lindenstrauss J.)

1. The structure of weakly compact sets in Banach spaces. Ann. of Math., 88, № 1 (1968), 35-46.

А н д о (Andô T.)

1. On the continuity of norms. Proc. Japan Acad., 33, № 8 (1957), 429-434.

2. Convexity and eveness in modulared semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido univ., ser. I, math., 14, № 2, 3, 4 (1959), 59-95.

3. On the continuity of the norm by a modular. Res. Inst. Appl. Electricity Monograph. 7 (1959), 31-44.

4. Linear functionals on Orlicz spaces. Nieuw Archief voor Wiskunde (3), VIII (1960), 1-16.

Бенедек и Панзоне (Benedek A., Panzone R.).

1. The spaces L^p with mixed norm. Duke Math. J. 28 (1961), 301–324.

Бессага и Пелчиньский (Bessaga C., Pełczyński A.)

1. Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. Bull. Acad. Pol. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 6 (1958), 249–250.

Биркгоф (Birkhoff G.).

1. Теория структур. ИЛ, 1952.

Бишоп и Фелпс (Bishop E., Phelps R. R.).

1. The support functionals of a convex set. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., 7 (Convexity), (1963), 27–35.

Бурбаки (Bourbaki N.).

1. Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.

2. Интегрирование. Наука, 1967.

Бут (Booth D.).

1. Sequential compactness. Notices A.M.S, 15, № 2, (1968), 374.

Векслер А.И.

1. Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия к теории линейных и линейных нормированных структур. Изв. вузов, Математика, 4 (53), (1966), 13–22.

Вулих Б.З.

1. Определение произведения в линейном полуупорядоченном пространстве. ДАН СССР 26 (1940), 847–851.

2. Свойства произведения и обратного элемента в линейных полуупорядоченных пространствах. ДАН СССР 26 (1940), 852-856.

3. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций. I. Матем.Сб., 22, № I (1948), 27-78.

4. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций. II. Матем.Сб., 22, № 2 (1948), 267-317.

5. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств. ИАН СССР, сер.мат., I7 (1953), 365-388.

6. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.

7. О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой. ДАН СССР 147 (1962), 271-274.

Вулих Б.З. и Лозановский Г.Я.

1. О метрической полноте нормированных и счётно-нормированных структур. Л. Вестн.ун-та, 19, серия мат., 4 (1966), 12-15.

2. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах. Матем.Сб., 84 (126), № 3 (1971), 331-353.

Гиллман и Джерисон (Gillman L., Jerison M.).

1. Rings of continuous functions. Princeton, 1960.

Гретски (Gretsky N.).

1. Representation theorems on Banach function spaces. Memoirs of Amer. Math. Soc., 84 (1968), 1-56.

Г р о т е н д и к (Grothendieck A.).

I. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K). Canadian J. Math., 5 (1953), 129–173.

Д а н ф о р д и Ш в а р ц (Dunford N., Schwartz J.T.).

I. Линейные операторы, т.I, ИЛ, 1962.

Д э й (Day M.M.).

I. Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961.

З а б р е й к о П.П.

I. Об одной интерполяционной теореме для линейных операторов. Матем.Заметки, 2, № 6 (1967), 593–598.

К а в а и (Kawai I.).

I. Locally convex lattices. J. Math. Soc. Japan, 9, № 3 (1957), 281–314.

К а к у т а н и (Kakutani S.).

I. Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math., 42 (1941), 523–537.

2. Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. of Math., 42 (1941), 994–1024.

К а л ь д е р о н (Calderon A. P.).

I. Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. Математика (сб.переводов), 9:3 (1965), 56–129.

К а н т о р о в и ч Л.В.

I. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций. ДАН СССР, 4 (1935), II–14.

2. Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires. C.R. Acad. Sci., 202 (1936), 813-816.

3. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах. ДАН СССР, I (1936), 271-274.

4. Основы теории функций вещественного переменного со значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству. ДАН СССР, 2 (1936), 359-364.

5. О некоторых классах линейных операций. ДАН СССР, 3 (1936), 9-14.

6. К проблеме моментов для конечного интервала. ДАН СССР, 14 (1937), 531-536.

7. Линейные полуупорядоченные пространства. Матем.Сб., 2 (44), (1937), 121-168.

8. Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires. C.R. Acad. Sci., 206 (1938), 833-835.

Канторович Л.В. и Акилов Г.П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.

Канторович Л.В. и Вулих Б.З.

1. Sur la représentation des opérations linéaires. Compos. Math. 5 (1937), 119-165.

Канторович Л.В., Вулих Б.З. и Пинскер А.Г.

1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, 1950.

Келли (Kelley J. L.).

1. Measures on Boolean algebras. Pacif. J. Math., 9 (1959), 1165-1178.

К р а с н о с е л ь с к и й М.А.

I. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1961.

К р а с н о с е л ь с к и й М.А. и Р у т и ц к и й Я.Б.

I. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, 1958.

К р е й н М.Г. и К р е й н С.Г.

I. Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определённых на хаусдорфовом бикомпактном множестве. ДАН СССР 27 (1940), 427–431.

2. О пространстве непрерывных функций, определённых на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах. Матем. Сб., I3 (1943), I–38.

К р е й н С.Г., П е т у н и н Ю.И. и С е м ё н о в Е.М.

I. Шкалы банаховых структур измеримых функций. Труды М.М.О., I7 (1967), 293–322.

Л е в и т а н Б.М.

I. Почти-периодические функции. Гостехиздат, 1953.

Л о з а н о в с к и й Г.Я.

I. О топологически рефлексивных КВ-пространствах. ДАН СССР, I58: 3 (1964), 517–519.

2. О рефлексивных пространствах, обобщающих рефлексивные пространства Орлича. ДАН СССР, I63: 3 (1965), 573–576.

3. О банаховых структурах и базисах. Функц. анализ и его прилож., I: 3 (1967), 92.

4. О банаховых структурах Кальдерона. ДАН СССР, 172: 5 (1967), 1018-1020.

5. О пределе последовательности функционалов в полуупорядоченных пространствах. Л., Вестн. ун-та, 1, серия матем., 1 (1967), 148-149.

6. О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности. ДАН СССР, 183: 3 (1968), 521-523.

7. О проекторах в некоторых банаховых структурах. Матем. Заметки, 4, № 1 (1968), 41-44.

8. Об изоморфных банаховых структурах. Сиб. Мат. ж., 10: 1 (1969), 93-98.

9. О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых её применениях. ДАН СССР, 188: 3 (1969), 522-524.

10. О некоторых банаховых структурах. Сиб. Мат. ж., 10: 3 (1969), 584-599.

11. О банаховых структурах с единицей. Изв. вузов, Математика, 1 (92), (1970), 65-69.

12. О вполне линейных функционалах в полуупорядоченных пространствах. Матем. Заметки, 8, № 2 (1970), 187-195.

13. Об одном результате Шмогаки. Вторая зональная конференция пединститутов северо-западной зоны по математике и методике её преподавания. Тезисы, Л., 1970, стр. 43.

14. О банаховых пространствах, эквивалентных КВ-линеалам. XXIV Герценовские чтения (межвузовская конференция). Краткое содержание докладов. Л., 1971, 52-54.

15. О нормированных структурах с полунепрерывной нормой. Сиб.Мат.ж., 12: I (1971), 232–234.

16. О некоторых банаховых структурах, II. Сиб.Мат.ж., 12: 3 (1971), 562–567.

17. О банаховых структурах и вогнутых функциях. ДАН СССР, 199: 3 (1971), 536–539.

18. О функциях от элементов линейной структуры. Изв. вузов. Математика (аннотация опубликована в 6 (109), 1971, стр. 110).

Лозановский Г.Я. и Меклер А.А.

I. Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах. Изв.вузов. Математика, II (1967), 47–53.

Лоренц (Lorentz G.G.).

I. On the theory of spaces Λ. Pacif. J. Math., I, (1950), 411–429.

Люксембург (Luxemburg W.A.J.).

I. Notes on Banach function spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam; A68 (1965); Note XIVa, 229–239; Note XIV в, 240–248; Note XVa, 415–429; Note XV в, 430–446; Note XVIa, 646–657; Note XVIв, 658–667.

Люксембург и Заанен (Luxemburg W.A.J., Zaanen A.C.).

I. Notes on Banach function spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam; Note I, A66 (1963), 135–147; Note II, A66 (1963), 148–153; Note III, A66 (1963), 239–250; Note IV, A66 (1963), 251–263; Note V, A66 (1963), 496–504; Note VI, A66 (1963), 655–668;

Note VII, A66 (I963), 669–68I; Note VIII A67 (I964), I04–II9; Note IX, A67 (I964), 360–376; Note X, A67 (I964), 493–506; Note XI, A67 (I964), 507–5I8; Note XII, A67 (I964), 5I9–529; Note XIII, A67 (I964), 530–543.

Мори, Амемия, Накано (Mori T., Amemiya I., Nakano H.).

I. On the reflexivity of semicontinuous norms. Proc. Japan Acad., 3I (I955), 684–685.

Накано (Nakano H).

I. Modulared semi-ordered linear spaces. Tokyo, Maruzen Co., LTD, I950, I–288.

2. Modern spectral theory. Tokyo, Maruzen Co., LTD, I950, I–323.

3. Semi-ordered linear spaces. Tokyo, I955.

Намиока (Namioka I.).

I. Partially ordered linear topological spaces. Memoirs of Amer. Math. Soc., 24, (I957), Providence.

Огасавара (Ogasawara T.).

I. Theory of vector lattices. J. Sci. Hirosima univ., ser. A, I2 (I942), 37–I00 и I3 (I944), 4I–I6I.

Пелчиньский (Pełczyński A.).

I. A connection between weakly unconditional convergence and weakly completeness of Banach spaces. Bull. Acad. Pol. Sci., série sci. math., astr. et phys., 6, № 4 (I958), 25I–253.

2. On the isomorphism of the spaces m and M. Bull. Acad. Pol. Sci., série sci. math., astr. et phys., 6 (I958), 695–696.

Пересcини (Peressini A.L.).

1. Ordered topological vector spaces. New York, 1967.

Пинскер А.Г.

1. О расширении полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, 21, (1938), 6-10.

2. Универсальные К-пространства. ДАН СССР, 49 (1945), 8-11.

3. Разложение К-пространств на элементарные пространства. ДАН СССР, 49, (1945), 169-172.

4. Вполне линейные функционалы в К-пространствах. ДАН СССР, 55, (1947), 303-306.

5. О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, 55, (1947), 383-386.

6. О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств. Уч.Зап.ЛГПИ им.А.И.Герцена, 64, (1948), 17--26.

7. Разложение полуупорядоченных групп и пространств. Уч.зап.ЛГПИ им.А.И.Герцена, 86, (1949), 235-284.

8. Расширение полуупорядоченных групп и пространств. Уч.Зап.ЛГПИ им.А.И.Герцена, 86, (1949), 285-315.

Пономарёв В.И.

1. О пространствах, соабсолютных с метрическими. УМН, 21, вып.4 (130), (1966), 101-132.

Райс (Rice N.M.).

1. Multiplication in vector lattices. Canad.J.Math., 20, № 5 (1968), 1136-1149.

Р а о (Rao M.M.).

1. Linear functionals on Orlicz spaces: general theory. Pacific J. Math., 25, (1968), 553–585.

2. Linear operations, tensor products, and contractive projections in function spaces. Studia Math., 38, (1971), 131–186.

С е м ё н о в Е.М.

1. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. ДАН СССР, 156, № 6 (1964), 1292–1295.

2. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докторская диссертация, Воронежский гос. ун-т, 1968.

С и в е р (Seever G.L.).

1. A peculiar Banach function space. Proc. Amer. Math. Soc., 16, (1965), 662–664.

2. Measures on F-spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 133, № 1 (1968), 267–280.

С и к о р с к и й (Sikorski R.).

1. Булевы алгебры. Мир, М., 1969.

Х а л м о ш (Halmos P.R.).

1. Теория меры. ИЛ, М., 1953.

Ш е ф е р (Schaefer H.).

1. Weak convergence of measures. Math. Ann., 193, № 1 (1971), 57–64.

Ш и м о г а к и (Shimogaki T.).

1. On the continuity and the monotonousness of norms. J. Fac. Sci. Hokkaido univ., ser. 1, 16, (1962), 225–237.

Широхов М.Ф.

1. Функции от элементов полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, 74, (1950), 1057-1060.

2. Применение функций от разложений к теории полуупорядоченных пространств. Л., Вестн. ун-та, 19, сер. мат., 4 (1960), 29-36.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ ПО МЕРЕ ИХ ПОЯВЛЕНИЯ В ТЕКСТЕ

	Гл.	§	п
N	0		
ϕ	0		
$\mathrm{card}\,\Gamma$	0		
χ_A	0		
$C(T)$	0		
R^n	0		
X_+	0	I	I
$x\,d\,y$	0	I	I
$E_1\,d\,E_2$	0	I	I
$x\,d\,E$	0	I	I
E^d	0	I	I
X_u	0	I	I
$\mathfrak{A}(X)$	0	I	I
$P_{r_y}x$	0	I	I
$0u\ Dx$	0	I	I
$\mathfrak{L}(X)$	0	I	I
$\mathcal{E}(X)$	0	I	I
e_x	0	I	I
$x_\alpha\uparrow,\ x_\alpha\downarrow,\ x_\alpha\underline{\uparrow},\ x_\alpha\sqrt{\ }$	0	I	2
$x_\alpha\uparrow x,\ x_\alpha\downarrow x,\ x_\alpha\underline{\uparrow} x,\ x_\alpha\sqrt{\ } x$	0	I	2
$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$	0	I	2
$x_\alpha \xrightarrow{(r)} x$	0	I	2
$\hat{X}$	0	I	3
$\mathfrak{M}(X)$	0	I	4

x^{-1}	0	I	5
$\mathcal{C}_\infty(Q)$	0	2	I
$\Omega(Q)$	0	2	I
$\mathcal{L}(Q)$	0	2	I
$\dot{\mathcal{L}}(Q)$	0	2	I
Q_x	0	2	2
$Q(W)$	0	2	3
E^*	0	3	I
$H_\beta(E\to F)$	0	3	I
$\|\cdot\|_{X_u}, \|\cdot\|_u$	0	3	3
X_+^*	0	3	8
$\hat{X}, \bar{X}, \tilde{X}_{an}, \hat{X}_{ant}$	0	4	I
X^*_{an}, X^*_{ant}	0	4	2
$S(T,\Sigma,\mu), L^p(T,\Sigma,\mu), L^p(\mu)$	0	5	I
$X', \|\cdot\|_{X'}$	0	5	3
$S[0,1], L^p[0,1]$	0	6	I
$s_\Gamma, \ell^p_\Gamma, c_\Gamma, (c_0)_\Gamma$	0	6	2
s, ℓ^p, c, c_0	0	6	3
$L^{(p,q)}$	0	6	5
x^*	0	6	7
$\Lambda(\Psi), M(\Psi), M_0(\Psi)$	0	6	7
$f_\Omega^W(x_1,\dots,x_n)$	I	I	I
$CH(\mathbb{R}^n)$	I	I	2
$f^X(x_1,\dots,x_n)$	I	I	2
$f_{(u)}$	I	2	2
$f\,Dq$	I	2	3

$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2^0$	II	I	I
$\hat{\varphi}$	II	I	I
$\varphi(X_0,X_1), \Vert\cdot\Vert_{\varphi(X_0,X_1)}$	II	I	2
$X_0^{1-s}X_1^s, \Vert\cdot\Vert_{X_0^{1-s}X_1^s}$	II	I	2
$X_p, \Vert\cdot\Vert_{X_p}$	II	3	
X^*_{min}	II	4	I
$rca(K), rca^+(K)$	II	8	
$(E^{**})^{\pi}, (E^{**})_{\pi}$	III	4	2
$\tilde{X}_{loc}, X^*_{loc}$	IV	2	I
$L_0^{(p,q)}$	IV	6	2