УДК 519.61

ФОРМУЛЫ ФРОБЕНИУСА, ШЕРМАНА–МОРРИСОНА И БЛИЗКИЕ ВОПРОСЫ[1)]

© **В. Н. Малоземов*, М. Ф. Монако**, А. В. Петров***

**198504 Петродворец, СПбГУ, математико-механический факультет*

***87306 Rende (CS), Università della Colabria, Italia*

Рассматривается задача окаймления вырожденной матрицы с целью получения невырожденной матрицы. Указана минимальная ширина полосы окаймления. В случае минимальной ширины установлен критерий обратимости. Описан численный метод обращения окаймленной матрицы в случае, когда исходная матрица является вырожденной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим блочную матрицу вида

$$G = \begin{pmatrix} A & X \\ Y^T & H \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где A, H — квадратные матрицы порядков n и r соответственно, X, Y — $(n \times r)$-матрицы. Нас интересует вопрос об обратимости матрицы G в случае, когда матрица A — вырожденная.

В статье доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть ранг матрицы A равен s и $s < n$. Минимальное r, при котором матрица G вида* (1.1) *может быть обратимой, равно $n-s$. При $r = n-s$ критерием обратимости матрицы G является выполнение условий*

$$\operatorname{rank}\,(\,A,\ X\,) = \operatorname{rank}\,(\,A^T,\ Y\,) = n. \tag{1.2}$$

Отметим, что при минимальном r обратимость G не зависит от свойств матрицы H.

Хорошо известно, что в случае невырожденной матрицы A матрица G обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $F = H - Y^TA^{-1}X$. Формула для G^{-1} записывается явно. Этот результат Фробениуса обычно доказывается на уровне достаточности (см., например, [1, с. 59–60; 2, с. 137–138]). В разделе 2 мы даем детальное и полное доказательство результата Фробениуса, поскольку он играет решающую роль в доказательстве теоремы.

Результат Фробениуса удивительным образом связан с результатом Шермана–Моррисона–Вудбери об обратимости матрицы D вида $D = A - XY^T$, где A —

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаметальных исследований (код проекта 01-01-00231).

невырожденная матрица порядка n и X, Y — $(n \times r)$-матрицы. Этот вопрос также рассматривается в разделе 2.

В разделе 3 приводится доказательство сформулированной выше теоремы. В качетсве следствия мы получаем критерий невырожденности матрицы G вида

$$G = \begin{pmatrix} A & x \\ x^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где A — вырожденная симметричная матрица и x — n-мерный вектор-столбец. Этот результат представляет интерес для теории негладкой оптимизации [3, 4].

В разделе 4 описан численный метод для обращения матрицы G вида (1.1) с вырожденной матрицей A.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начнем с теоремы Фробениуса.

Предложение 1. *Пусть A — невырожденная матрица. Для обратимости матрицы G вида* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы была обратимой матрица r-го порядка $F = H - Y^T A^{-1} X$. При этом*

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}X \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -Y^T A^{-1} & I_r \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где I_n, I_r — единичные матрицы порядков n и r *соответсвенно.*

Доказательство. Необходимость. Имеем

$$\begin{pmatrix} A & X \\ Y^T & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}X \\ 0 & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ Y^T & H - Y^T A^{-1} X \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ Y^T & F \end{pmatrix} =: Q. \tag{2.2}$$

Обе матрицы из левой части равенства (2.2) обратимы. Значит, обратима и матрица Q. Линейная независимость последних r столбцов матрицы Q гарантирует обратимость матрицы F.

Достаточность. По условию матрицы A и F обратимы. Тогда обратима и матрица Q. Это следует из того, что однородная система

$$\begin{cases} Au & = 0, \\ Y^T u + Fv & = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Обратимость матрицы Q и равенство (2.2) гарантируют обратимость матрицы G вида (1.1).

Для доказательства формулы (2.1) отметим, что

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ Y^T & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -F^{-1} Y^T A^{-1} & F^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -F^{-1} Y^T A^{-1} & F^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -Y^T A^{-1} & I_r \end{pmatrix}.$$

Умножив обе части равенства (2.2) справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -Y^T A^{-1} & I_r \end{pmatrix},$$

придем к (2.1). Предложение доказано.

Следующее утверждение называется теоремой Шермана–Моррисона–Вудбери (см., например, [5, с. 53]).

Предложение 2. *Для обратимости матрицы D вида $D = A - XY^T$, где A — невырожденная матрица порядка n и X, Y — $(n \times r)$-матрицы, необходимо и достаточно, чтобы была обратимой матрица r-го порядка $P = I_r - Y^T A^{-1} X$. При этом*

$$D^{-1} = A^{-1} + A^{-1} X P^{-1} Y^T A^{-1}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Обозначим

$$G_1 = \begin{pmatrix} A & X \\ Y^T & I_r \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} A & X \\ Y^T & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -Y^T & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - XY^T & X \\ 0 & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & X \\ 0 & I_r \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Матрица D обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица G_1. Критерием же обратимости G_1 согласно предложению 1 является обратимость матрицы $P = I_r - Y^T A^{-1} X$.

Выведем формулу (2.3). Для этого отметим, что

$$\begin{pmatrix} D & X \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & -D^{-1}X \\ 0 & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} D & X \\ 0 & I_r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} & -D^{-1}X \\ 0 & I_r \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Вместе с тем, согласно (2.4) и (2.1)

$$\begin{pmatrix} D & X \\ 0 & I_r \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ Y^T & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}X \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -Y^T A^{-1} & I_r \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}X \\ Y^T & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -P^{-1} Y^T A^{-1} & P^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1} X P^{-1} Y^T A^{-1} & -A^{-1} X P^{-1} \\ 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эту формулу с (2.5), получаем, в частности, (2.3). Предложение доказано.

При $r = 1$ приходим к такому результату.

Пусть A — невырожденная матрица порядка n и x, y — n-мерные вектор-столбцы. Для обратимости матрицы $D = A - xy^T$ необходимо и достаточно, чтобы число $p = 1 - y^T A^{-1} x$ было отлично от нуля. При этом

$$D^{-1} = A^{-1} + p^{-1}(A^{-1}x)(y^T A^{-1}). \tag{2.6}$$

Формула (2.6) — это известная формула Шермана–Моррисона [6–8].

Приведем важный для дальнейшего пример на использование формулы Шермана–Моррисона.

Пример. В невырожденной матрице A порядка n заменим j-й столбец a_j на вектор c. Новая матрица D имеет вид $D = A - (a_j - c)e_j^T$, где e_j — j-й орт. Когда матрица D будет обратимой?

В данном случае $p = 1 - \langle e_j, A^{-1}(a_j - c)\rangle = \langle e_j, A^{-1}c\rangle$. Обозначим $z = A^{-1}c$. Тогда $p = z[j]$. Критерием обратимости матрицы D является условие $z[j] \neq 0$. Поскольку $Az = c$, то условие $z[j] \neq 0$ означает, что в разложении вводимого вектора c по столбцам матрицы A отличен от нуля коэффициент при выводимом столбце a_j.

Соглсано (2.6)

$$D^{-1} = A^{-1} + (z[j])^{-1}(A^{-1}(a_j - c))(e_j^T A^{-1}) = A^{-1} + (z[j])^{-1}(e_j - z)(e_j^T A^{-1}). \tag{2.7}$$

Обозначим через A_i^{-1} i-ю строку матрицы A^{-1} и перепишем матричное равенство (2.7) в виде равенства строк. Учитывая, что $e_j^T A^{-1} = A_j^{-1}$, получаем

$$D_j^{-1} = A_j^{-1} + (z[j])^{-1}(1 - z[j])A_j^{-1} = (z[j])^{-1} A_j^{-1} \tag{2.8}$$

и при $i \neq j$

$$D_i^{-1} = A_i^{-1} - z[i] D_j^{-1}. \tag{2.9}$$

Это известные формулы пересчета обратной матрицы при замене столбца [7]. Строка D_j^{-1} называется *рабочей строкой.*

Рассмотрим случай, когда в невырожденной матрице A порядка n заменяются r столбцов. Будем использовать индексную технику, детально представленную в [9]. Обозначим $N = \{1, 2, ..., n\}$, и пусть индесное множество $N_* \subset N$ состоит из r индексов. Заменим столбцы $A[N, j]$ столбцами $C[N, j]$ при $j \in N_*$. Новая матрица $D = D[N, N]$ имеет вид

$$D[N, N] = A[N, N] - (A[N, N_*] - C[N, N_*]) \times I_n[N_*, N]. \tag{2.10}$$

Для выяснения вопроса об обратимости матрицы D проведем вычисления:

$$Y^T A^{-1} X = (I_n[N_*, N] \times A^{-1}[N, N]) \times (A[N, N_*] - C[N, N_*]) =$$

$$= I_r[N_*, N_*] - A^{-1}[N_*, N] \times C[N, N_*].$$

Получаем $P := I_r - Y^T A^{-1} X = A^{-1}[N_*, N] \times C[N, N_*]$. Согласно предложению 2 матрица D вида (2.10) обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица

r-го порядка $P = A^{-1}[N_*, N] \times C[N, N_*]$. При этом для обратной матрицы D^{-1} справедлива формула

$$D^{-1}[N,N] = A^{-1}[N,N] + A^{-1}[N,N] \times (A[N,N_*] - C[N,N_*]) \times$$
$$\times P^{-1}[N_*,N_*] \times (I_n[N_*,N] \times A^{-1}[N,N]).$$

В частности,

$$D^{-1}[N_*,N] = A^{-1}[N_*,N] + (I_r[N_*,N_*] - P[N_*,N_*]) \times$$
$$\times P^{-1}[N_*,N_*] \times A^{-1}[N_*,N] = P^{-1}[N_*,N_*] \times A^{-1}[N_*,N] \qquad (2.11)$$

и

$$D^{-1}[N\backslash N_*,N] = A^{-1}[N\backslash N_*,N] + A^{-1}[N\backslash N_*,N] \times (A[N,N_*] - C[N,N_*]) \times$$
$$\times D^{-1}[N_*,N] = A^{-1}[N\backslash N_*,N] - (A^{-1}[N\backslash N_*,N] \times C[N,N_*]) \times D^{-1}[N_*,N]. \quad (2.12)$$

Формулы (2.11), (2.12) являются обобщением формул (2.8), (2.9) и переходят в последние при $N_* = \{j\}$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Предположим сначала, что $1 \le s \le n-1$. Случай $s = 0$ мы рассмотрим отдельно. За счет перестановок строк и столбцов, которые не изменяют ранг, приведем матрицу G к виду

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 B & X_1 \\ C^T A_1 & C^T A_1 B & X_2 \\ Y_1^T & Y_2^T & H \end{pmatrix},$$

где A_1 — невырожденная матрица порядка s. Согласно предложению 1 критерием обратимости матрицы G является обратимость такой матрицы:

$$F = \begin{pmatrix} C^T A_1 B & X_2 \\ Y_2^T & H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C^T A_1 \\ Y_1^T \end{pmatrix} A_1^{-1} \left(A_1 B,\ X_1 \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} C^T A_1 B & X_2 \\ Y_2^T & H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C^T A_1 B & C^T X_1 \\ Y_1^T B & Y_1^T A_1^{-1} X_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & X_2 - C^T X_1 \\ Y_2^T - Y_1^T B & H - Y_1^T A_1^{-1} X_1 \end{pmatrix}.$$

Если F обратима, то строки матрицы $X_2 - C^T X_1$ линейно независимы, а поскольку эта матрица имеет размеры $(n-s) \times r$, то необходимо $r \ge n - s$.

При минимальном r, равном $n - s$, матрицы $X_2 - C^T X_1$ и $Y_2^T - Y_1^T B$ — квадратные, так что обратимость матрицы F равносильна обратимости матриц $X_2 - C^T X_1$ и $Y_2^T - Y_1^T B$ порядка $n - s$.

Запишем равенство

$$\begin{pmatrix} -C^T & I_r \\ I_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & X_1 \\ C^T A_1 & X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_2 - C^T X_1 \\ A_1 & X_1 \end{pmatrix}.$$

Из него следует, что обратимость $X_2 - C^T X_1$ равносильна обратимости матрицы n-го порядка $\begin{pmatrix} A_1 & X_1 \\ C^T A_1 & X_2 \end{pmatrix}$, что в свою очередь равносильно условию $\operatorname{rank}\left(A,\ X \right) = n$.

Равенство
$$\begin{pmatrix} A_1 & A_1 B \\ Y_1^T & Y_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B & I_s \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ Y_2^T - Y_1^T B & Y_1^T \end{pmatrix}$$
показывает, что обратимость $Y_2^T - Y_1^T B$ равносильна условию $\operatorname{rank}\left(A^T,\ Y \right) = n$. При $1 \le s \le n-1$ теорема доказана.

При $s = 0$ матрица G имеет вид
$$G = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y^T & H \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$
Необходимым условием обратимости такой матрицы является выполнение неравенства $r \ge n$. При $r = n$ матрица G вида (3.1) обратима тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Y = n$, что при $s = 0$ равносильно (1.2).

Следствие. *Пусть A — вырожденная симметричная матрица порядка n и x — n-мерный вектор-столбец. Для обратимости матрицы G вида* (1.3) *необходимо и достаточно выполнение условий*
$$\operatorname{rank} A = n-1, \quad \operatorname{rank}(A, x) = n. \tag{3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Имеем $\operatorname{rank} G = n+1$. Поскольку A — вырожденная матрица, то $\operatorname{rank} A \le n-1$. Если $\operatorname{rank} A \le n-2$, то $\operatorname{rank}(A, x) \le n-1$, и тогда $\operatorname{rank} G \le n$. Это противоречит равенству $\operatorname{rank} G = n+1$. Значит, $\operatorname{rank} A = n-1$.

Если при этом $\operatorname{rank}(A, x) = n-1$, то снова получаем $\operatorname{rank} G \le n$, что противоречит равенству $\operatorname{rank} G = n+1$. Таким образом, необходимо $\operatorname{rank}(A, x) = n$.

Достаточность следует из теоремы при $s = n-1$ и $r = 1$.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для обращения матрицы G вида (1.1) в условиях теоремы целесообразно применять метод пополнения [10, с. 198–203], идея которого восходит к Шерману [7]. Для описания метода положим $m = n + r$ и введем расширенную матрицу $V = (G, I_m)$ с m строками и $2m$ столбцами. Обозначим $M = \{1, ..., m\}$. Базисом называется индексное множество $M_1 \subset \{1, ..., 2m\}$, состоящее из m элементов, такое, что столбцы $V[M, j]$ матрицы V при $j \in M_1$ линейно независимы. Квадратная невырожденная матрица $V[M, M_1]$ называется базисной, а матрица $B_1[M_1, M] = (V[M, M_1])^{-1}$ — обратной базисной матрицей.

Каждый шаг метода состоит в заполнении таблицы следующего вида:

Таблица 1

$it = s$	$(G[M, k_s])^T$	k_s
M_s	$B_s[M_s, M]$	$z_s[M_s]$

Здесь s — номер итерации, M_s — текущий базис, $B_s[M_s, M]$ — обратная базисная матрица, $k_s \in \{1, ..., m\}$ — индекс вводимого в базис столбца матрицы G, который выбирается произвольно, $(G[M, k_s])^T$ — вводимый столбец в транспонированном виде,

$$z_s[M_s] = B_s[M_s, M] \times G[M, k_s].$$

Для перехода к очередной таблице определяется индекс $j_s \in M_s \cap \{m+1, ..., 2m\}$, на котором $z_s[j_s] \neq 0$. Новый базис M_{s+1} получается путем замены индекса j_s на k_s, т.е. $M_{s+1} = M_s \setminus \{j_s\} \cup \{k_s\}$. Обратная базисная матрица $B_{s+1}[M_{s+1}, M]$ пересчитывается по формулам (2.8), (2.9).

При $s = 0$ полагаем $M_0 = \{m+1, ..., 2m\}$. В этом случае $B_0[M_0, M] = I_m$. Вычисления заканчиваются при $s = m$, когда $M_m = \{1, ..., m\}$.

Отметим, что при всех $s = 0, 1, ..., m-1$ выводимый из базиса индекс $j_s \in M_s \cap \{m+1, ..., 2m\}$ с $z_s[j_s] \neq 0$ существует. Действительно, в противном случае (при $z_s[j_s] = 0$ для всех $j \in M_s \cap \{m+1, ..., 2m\}$) вводимый в базис столбец $G[M, k_s]$ являлся бы линейной комбинацией некоторых столбцов матрицы G (или был нулевым при $s = 0$), что невозможно в силу невырожденности G.

Пример. Рассмотрим матрицу третьего порядка

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она невырожденная, что следует, например, из теоремы при $n = 2$, $s = 1$, $r = 1$. Вместе с тем, все три главные минора порядка 2 этой матрицы равны нулю.

В табл. 2 приведены вычисления G^{-1} указанным выше методом.

Таблица 2

$it = 0$	0	1	1	2
4	1	0	0	0
5	0	1	0	1
$\boxed{6}$	0	0	1	1
$it = 1$	0	1	0	1
4	1	0	0	0
$\boxed{5}$	0	1	-1	1
2	0	0	1	0
$it = 2$	1	0	0	3
$\boxed{4}$	1	0	0	1
1	0	1	-1	0
2	0	0	1	0
$it = 3$				
3	1	0	0	
1	0	1	-1	
2	0	0	1	

Получили, что

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном примере проблема начальной базисной матрицы может быть решена проще. Поскольку среди столбцов G имеются два орта, то достаточно ввести один исскуственый столбец $(0, 0, 1)^T$ с номером 4. Обратная матрица G^{-1} вычисляется за одну итерацию, как это показано в табл. 3.

Таблица 3

$it = 0$	0	1	1	2
3	1	0	0	0
1	0	1	0	1
$\boxed{4}$	0	0	1	1
$it = 1$				
3	1	0	0	
1	0	1	-1	
2	0	0	1	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966.
2. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
3. *Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C.* Convex analysis and minimization algorithms. I,II. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
4. *Kiwiel K.C.* A method for solving certain guadratic programming problems arising in nonsmooth optimization // IMA J. Numer. Anal. 1986. V. 6. № 2. P. 137–152.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
6. *Sherman J., Morrison W.J.* Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix // Annals Math. Statistcs. 1950. V. 21. № 1. P. 124-127.
7. *Sherman J.* Computations relating to inverse matrices / Simultaneous linear equations and the determination of eigenvalues. Ed. by L.J.Paige and Olga Taussky. U.S. National Bureau of Standarts. Appl. Math. Ser. 1953. № 29. P. 123–124.
8. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
9. *Малоземов В.Н.* Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
10. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1963.