ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 1940 году Данфорд, Петтис и Филлипс ([74], [122]) заметили, что сепарабельные сопряженные банаховы пространства и слабо компактные операторы обладают примечательным свойством: всякий оператор из $L_1(\mu)$ в сепарабельное сопряженное пространство и всякий слабо компактный оператор из $L_1(\mu)$ допускают интегральные представления с измеримыми по Бохнеру функциями. Это свойство, по-видимому, впервые выделило в теории интегральных представлений линейных операторов сепарабельные сопряженные пространства и рефлексивные пространства из класса всех банаховых пространств и класс слабо компактных отображений — из класса всех операторов в банаховых пространствах.

В 1955 году появилась фундаментальная работа А. Гротендика [80], в которой среди огромного множества общих результатов содержались утверждения, значительно обобщающие теоремы Данфорда, Петтиса и Филлипса и показывающие, что сепарабельные сопряженные пространства, рефлексивные пространства и слабо компактные операторы кроме свойств, указанных этими математиками, обладают также и множеством других замечательных свойств. В частности, А. Гротендик ввел понятия интегральных и ядерных отображений в общих локально выпуклых пространствах и показал, что если X, Y — банаховы пространства, то пространства интегральных и ядерных из X в Y совпадают по крайней мере в каждом из следующих случаев: 1) одно из пространств рефлексивно, 2) сопряженное к X пространство сепарабельно, 3) Y сепарабельно и сопряжено к некоторому банахову пространству. С другой стороны, оказалось, что слабо компактные отображения обладают аналогичными свойствами, а именно, произведение слабо компактного оператора с интегральным отображением является ядерным оператором. Однако, эти результаты, как и большая часть работы [80], оставались незамеченными в течение более чем десяти лет (главным образом, вследствие очень большой общности и трудности работы [80]).

В середине 1960-х годов появление монографии Н. Динкулеану [73] возбудило интерес к изучению свойств векторнозначных мер и, особенно, к исследованию интересной проблемы в теории мер со значениями в банаховых пространствах, а именно, вопроса о том, для каких векторнозначных мер справедлив аналог теоремы Радона–Никодима и, в частности, какие банаховы пространства обладают тем свойством, что всякая мера ограниченной вариации со значениями в этом пространстве и абсолютно непрерывная по некоторой скалярной мере μ имеет производную по μ (в дальнейшем о таких пространствах стали говорить, что они обладают свойством Радона–Никодима). В то же время, появление ряда работ А. Пича во второй половине 1960-х годов дало толчок к исследованию различных классов операторов в банаховых пространствах, — здесь одним из интересных вопросов был вопрос о совпадении некоторых (вообще говоря, различных) пространств операторов.

Эти две проблемы поначалу исследовались независимо друг от друга. Однако, довольно быстро выяснилось, что они имеют интересную общую точку пересечения, — и этой общей точкой оказались как раз сепарабельные сопряженные пространства и рефлексивные пространства. С одной стороны, по-существу еще Данфордом, Петтисом и Филлипсом было показано, что все эти пространства обладают свойством Радона–Никодима. С другой стороны, после введения двух новых классов операторов в банаховых пространствах — p-интегральных и p-ядерных отображений — А. Перссоном [120] было установлено, что всякий p-интегральный оператор, действующий из рефлексивного пространства, либо из пространства с сепарабельным сопряженным, является p-ядерным. Более того, в последнем случае вновь (как и у А. Гротендика) проявилось интересное свойство слабо компактных операторов: оказалось, что произведение UT p-интегрального оператора U с любым слабо компактным отображением T будет p-ядерным оператором (см. [120]; таким образом, эти результаты явились частичным обобщением упоминавшихся результатов А. Гротендика). Кроме того, сепарабельные сопряженные и рефлексивные пространства стали фигурировать в различных теоремах типа Данфорда–Филлипса–Петтиса об интегральных представлениях линейных отображений, действующих из пространств $L_p(\mu)$ (см., например, [167]). Все эти факты, однако, являлись довольно разрозненными, и не совсем понятно было, имеют ли они одну и ту же природу и если имеют, то что общее соединяет операторы со значениями в сепарабельных сопряженных пространствах со слабо компактными операторами. Возникла проблема объединения всех указанных, а также ряда других результатов в единую теорию, которая объясняла бы, почему именно операторы со значениями в сепарабельных сопряженных пространствах, а также слабо компактные операторы обладают теми примечательными свойствами, о которых говорилось выше.

Первые шаги в этом направлении были сделаны сразу рядом математиков, в особенности Дж. Дистелем [69]. Он показал, что любой интегральный оператор со значениями в пространстве X будет ядерным тогда и только тогда, когда пространство X обладает свойством Радона–Никодима. Кроме того, Дистель обобщил теорему Гротендика и в другом направлении: если сопряженное X^* к пространству X обладает свойством Радона–Никодима, то всякий интегральный оператор из X будет ядерным. Полное описание сопряженных пространств со свойством Радона–Никодима в этих терминах было дано автором в кандидатской диссертации: X^* обладает свойством Радона–Никодима тогда и только тогда, когда всякий интегральный оператор из X является ядерным.

Интересные результаты о возможностях того или иного аналитического представления линейных отображений, в частности, и в связи со свойством Радона–Никодима, были получены А. В. Бухваловым [4 – 8]. Так в [5] он установил, что пространство X^*, сопряженное к банахову пространству X, обладает свойством Радона–Никодима тогда и только тогда, когда для любого банахова идеального пространства E с условием A любой оператор с абстрактной нормой из X в E допускает аналитическое представление с измеримой по Бохнеру X^*-значной функцией. Этот результат был затем независимо передоказан автором (см. [28]) и некоторым образом дополнен. Таким образом, упоминавшиеся выше свойства сепарабельных сопряженных и рефлексивных пространств стали укладываться в рамки единой теории — теории пространств со свойством Радона–Никодима. Однако все еще в стороне оставались слабо компактные отображения, обладающие многими свойствами, аналогичными свойствам операторов со значениями в сепарабельных сопряженных пространствах.

Для того, чтобы включить факты об операторах, принимающие значения в сепарабельных сопряженных пространствах, и о слабо компактных операторах в единую схему, в начале 1974 года автором [29] (и независимо Вернером Линде [100]) был введен и исследован новый класс операторов в банаховых пространствах — класс операторов типа RN (операторов Радона–Никодима). Оказалось, что такой подход с единой точки зрения объясняет, почему так похожи (в известном смысле) свойства слабо компактных отображений и отображений со значениями в сепарабельных сопряженных пространствах: каждое слабо компактное отображение, также как и тождественные отображения сепарабельных сопряженных пространств в себя, являются операторами типа RN .

До сих пор речь шла об аналитическом направлении развития теории пространств и операторов со свойством Радона–Никодима. Но независимо от этой ветви теории и сначала незаметно возникло геометрическое направление. Оно берет свое начало с одной "индивидуальной" теоремы Риффеля. В своей работе [137] он ввел, как уже сегодня ясно, понятие исторической важности — понятие заостренности множества в банаховом пространстве ("dentability", — вольный перевод этого слова принадлежит автору [32]). Заостренность множества означает, что можно вырезать сколь угодно маленький шарик в этом множестве так, что после "пломбирования" — взятия замкнутой выпуклой оболочки оставшегося куска — вне полученного множества останется центр шарика. Риффель доказал теорему об индивидуальной характеризации векторной меры: такая мера имеет производную относительно некоторой вероятности тогда и только тогда, когда "она локально имеет заостренный (dentable) усредненный образ".

В 1973 г. Мэйнард [108] ввел понятие s-заостренности, когда почти не было связей между геометрической и аналитической частями теории пространств со свойством Радона–Никодима. В действительности, его основной результат представлял собой первую геометрическую характеризацию пространств со свойством RN . В [108] он, по-существу, установил, что банахово пространство обладает свойством Радона–Никодима тогда и только тогда, когда всякое его ограниченное подмножество s-заостренное. Вскоре было получено еще несколько важных результатов в этом направлении. Важнейшим из них в тот период времени, пожалуй, следует считать теорему Дэйвиса и Фелпса [68]. Они непосредственно и просто доказали, что факт заостренности каждого ограниченного подмножества в банаховом пространстве ("наследственная заостренность") равносилен тому, что каждое ограниченное множество в данном пространстве является f-заостренным (и, следовательно, тому, что пространство обладает свойством RN). f-Заостренность множества отличается от заостренности тем, что вместо замкнутых выпуклых оболочек рассматриваются выпуклые оболочки множеств. В тот период времени это был достаточно впечатляющий результат. Методы статьи Дэйвиса–Фелпса не позволяли, однако, получить "локальный вариант" их теоремы, именно, показать, что понятия "наследственных" заостренности, s-заостренности и f-заостренности равносильны для любого замкнутого выпуклого ограниченного множества (с пустой внутренностью). В том же 1974 году Хуф [85] все же сумел частично перенести результат Дэйвиса–Фелпса на такие множества (модифицируя построения Мэйнарда). Он показал, что для произвольного замкнутого ограниченного выпуклого множества в банаховом пространстве его наследственная заостренность – то же самое, что и его наследственная s-заостренность (при этом основным инструментом Хуфа была техника векторного интегрирования).

Впервые полностью на случай произвольного замкнутого ограниченного выпуклого множества результат Дэйвиса–Фелпса был перенесен автором [38] в 1979 году (см. ниже теорему 1.1.2). К сожалению, эта заметка автора осталась незамеченной, и в 1983 году R. Bourgin [58] привел свое "первое решение" этой задачи.

В дальнейшем в исследование геометрических свойств как пространств, так и множеств со свойством Радона–Никодима подключились многие другие известные математики, среди которых, несомненно, следует отметить Ж. Бургейна (например, [56]). Автор, кроме указанного выше результата из [38], также получил ряд геометрических характеристик как операторов типа RN, так и множеств "со свойством Радона–Никодима". Последнее понятие было введено автором, независимо от остальных математиков, в заметке [34], и затем исследовалось с разных точек зрения, особенно с геометрической и топологической, в работах как автора (1979-2001; [37-39, 49, 52]), так таких известных математиков как C. Stegall, W.M. Ruess, I. Namioka, B. Cascales, G. Vera (1986–2000; [62, 63, 155-158, 160, 111]).

В первой главе изложение части наших исследований операторов Радона–Никодима и их связей с аппроксимацией в различных идеалах операторов мы начнем с рассмотрения геометрических свойств этих операторов. Наша цель — пройти путь от первых геометрических свойств операторов RN (§1) через аналитическую часть теории до примеров применения некоторых понятий заостренности к аппроксимации (типа гротендиковской) операторов конечномерными (§9). Примерно в середине пути мы получим очень важные для главы II характеристики операторов RN как I_p-N_p-мультипликаторов (§4), а также покажем, каким образом эти характеристики могут быть применены для обобщения одной теоремы А. Гротендика о соотношениях между свойствами аппроксимации и ограниченной аппроксимации для операторов (§5). Во второй главе мы переходим к детальному исследованию возможностей аппроксимации конечномерными операторов из различных операторных идеалов и изучению соответствующих свойств аппроксимации.

Аппроксимационные свойства в операторных идеалах (эта проблематика, в основном, восходит к А. Гротендику, П. Сафару и А. Пичу) занимают значительное место в современной теории операторов. Примерами операторных идеалов общего характера являются идеал ядерных операторов и идеал компактных операторов в алгебре всех линейных непрерывных операторов, а примерами тесно связанных с этими идеалами аппроксимационных свойств являются свойства аппроксимации и ограниченной аппроксимации А. Гротендика, введенные им в 1955 г.

Еще в конце 20-х годов прошлого века С. Банахом была поставлена проблема существования базиса в произвольном сепарабельном банаховом пространстве. В своей знаменитой работе 1955 года А. Гротендик поставил более общий вопрос о наличии в любом банаховом пространстве свойства аппроксимации (существование базиса в данном пространстве влечет за собой выполнение условия аппроксимации для этого пространства). Если за время, прошедшее от работ С. Банаха до работ А. Гротендика, большинство специалистов занималось тем. что строило базисы в конкретных банаховых пространствах, то после выхода в свет работы А. Гротендика — по прошествии, однако, десятилетия — математики, работающие в соответствующей области геометрической теории операторов, пошли также путем различного рода обобщений (вводя более слабые аппроксимационные условия), склоняясь все более к тому, что ответы на вопросы С. Банаха и А. Гротендика отрицательны.

Лишь в 1972 г. П. Энфло [75] построил пример сепарабельного рефлексивного пространства без свойства аппроксимации (и, следовательно, без базиса). Это стимулировало дальнейшее исследование гротендиковских аппроксимационных свойств, в которое включились такие крупные специалисты как П. Сафар, У. Б. Джонсон, Т. Фигель, А. Пелчинский, А. Дэйви, А, Шанковский, А. Пич и ряд других. Например, Т. Фигель и У. Б. Джонсон [76] сразу же после появления работы П. Энфло построили пример банахова пространства со свойством аппроксимации, но без свойства ограниченной аппроксимации, а А. Шанковский [162] показал, что "почти в каждом" банаховом пространстве есть подпространство без свойства аппроксимации.

Работы этих математиков стимулировали исследования и в ряде других направлений. Так сразу же снова встал вопрос о существовании банахова пространства без свойства аппроксимации порядка p для $p > 1$, впервые рассмотренного П. Сафаром (1970). В течение 10 лет никакого существенного продвижения в связи с вопросами П. Сафара и близкими проблемами (которые ставились также А. Пелчинским, А. Пичем и др.) не наблюдалось. Лишь в 1981 г. автору [41] удалось ответить на все основные вопросы этих математиков, построив, в частности, примеры как пространств без свойств аппроксимации порядка p, так и примеры пространств со свойством аппроксимации, но без свойства ограниченной аппроксимации порядка p $(p > 1)$. Примерно в то же время Ж. Пизье [127] построил свой знаменитый контрпример к одной из последних гипотез А. Гротендика. Однако с 1985 г. в этой области функционального анализа на время наступило некоторое затишье — слишком трудными оказались остававшиеся в тот период открытыми в теории аппроксимации в операторных идеалах проблемы.

Стимулом к новым исследованиям явилась работа Г. А. Уиллиса (1992; [166]), в которой был построен пример пространства со свойством компактной аппроксимации, но без свойства аппроксимации. К этим исследованиям подключились такие специалисты как А. Дефант, Ф. Флорет [67], У. Б. Джонсон, К. Л. Гарсиа, П. Касаза, Х. Ярхов [60, 61]. Последние два математика, используя результат Г. А. Уиллиса, в 1996 г. передоказали полученную автором еще в 1983 г. [45] теорему о неравносильности свойств компактной аппроксимации и компактной ограниченной аппроксимации.

В последующие годы к исследованиям интенсивно подключились А. Лима, О. Нигаард, Е. Ойа [99]. Они, в частности, исследуя варианты обобщения известной теоремы Дэйвиса–Фигеля–Джонсона–Пелчинского, получили новые характеристики пространств со свойствами аппроксимации, компактной аппроксимации и др. В конце 1990-х интерес к изучению аппроксимационных условий, в частности свойств аппроксимации порядка p, проявился и в таких странах как Испания (университет г. Севилья [64]), Индия (университет г. Дели; 2001, [96]), Швеция (университет г. Уппсала; 2001, см. [93]). Так, в продвижение к открытому до сих пор вопросу о наличии в H^∞ свойства аппроксимации, испанские математики М. Д. Контрерас и С. Диас-Мадригал показали (2000; [64]), что это пространство обладает так называемым свойством $UMAP_p$ для $p > 1$, обобщая, таким образом, наилучший в этой задаче до них один результат Бургейна–Рейнова (1983; [57]). Наконец (и это, видимо, стоит отметить), в 2002 г. работы всех упоминавшихся выше математиков, не в последнюю очередь и автора, повлияли на возникновение соответствующих исследований в Египте (университет г. Каир).

В главе II мы как раз и будем иметь дело с известными проблемами теории аппроксимации операторов в квазинормированных операторных идеалах.

Приведем подробное изложение результатов диссертации.

В **главе 0** даны предварительные сведения, обозначения, определения.

Глава I состоит из 9-ти параграфов и, в целом, посвящена изложению центральных результатов теории операторов (типа) RN (операторов Радона–Никодима). В этой главе мы начинаем изучение операторов RN сразу с рассмотрения их основных геометрических свойств, затем переходим к аналитическим свойствам операторов RN, проходя через некоторые приложения теории к гротендиковской аппроксимации линейных непрерывных отображений конечномерными. В процессе изложения материала, мы снова возвращаемся к геометрии рассматриваемого класса операторов, уточняя для сопряженных операторов полученные в первом параграфе результаты. В конце главы, изучая векторнозначные бэровские функции I класса, мы соединяем геометрические, аналитические и "метрико-топологические" свойства для приложения снова с теории аппроксимации А. Гротендика [80]. Ниже через $\mathrm{L}(X, Y)$ мы обозначаем банахово пространство всех (линейных непрерывных) операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y.

В §**1** приводится основное определение — определение оператора типа RN, и после этого мы сразу приступаем к рассмотрению геометрических характеристик таких операторов. Оператор $T : X \to Y$ в банаховых пространствах называется оператором типа RN (оператором Радона–Никодима), если он всякую X-значную меру $\overline{m}$ ограниченной вариации переводит в Y-значную меру, имеющую производную относительно вариации меры $\overline{m}$ (если $T = \mathrm{id}_x$ — тождественный оператор в X, то говорят о "свойстве Радона–Никодима" для пространства X). Класс RN операторов типа RN является банаховым операторным идеалом в смысле Пича. В §1 — две основные теоремы. Теорема 1.1 предоставляет нам общую характеризацию операторов в терминах заостренности (dentability) множеств в банаховых пространствах, а в теореме 1.2 мы, по-существу, имеем дело с частным (но, пожалуй, одним из самых важных) случаем операторов, — со случаем, когда операторы взаимно-однозначны и переводят (замкнутые) единичные шары в замкнутые же множества. Понятие заостренности множества (одно из самых важных в геометрической теории как пространств, так и операторов со свойством Радона–Никодима) вводится, грубо говоря, следующим образом. Подмножество банахова пространства заостренное, если из него можно вырезать шарик сколь угодно малого радиуса таким образом, что после этой процедуры и после "пломбирования" оставшейся части (после взятия замкнутой выпуклой оболочки) вне полученного "запломбированного множества" останется центр вырезанного шара. Более общо (определение 1.2), если $T : X \to Y$ — (линейный непрерывный) оператор в банаховых пространства, то множество $B \subset X$ называется T-заостренным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin \overline{\mathrm{co}}(B \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)))$, $D_\varepsilon(Tx) = \{y \,|\, ||y - Tx|| < \varepsilon\}$ (через $\overline{\mathrm{co}}$ обозначается операция взятия замкнутой выпуклой оболочки). Введенное нами понятие позволяет дать первые геометрические характеристики операторов RN (теорема 1.1). Теорема 1.2 (чисто геометрическая) имеет дело с "локальной версией" понятия свойства Радона–Никодима для банахова пространства. Именно, в ней мы показываем, что замкнутое выпуклое ограниченное множество в банаховом пространстве является наследственно заостренным тогда и только тогда, когда оно является наследственно f-заостренным (понятие f-заостренности вводится по аналогии с понятием заостренности с заменой замкнутых выпуклых оболочек на выпуклые; "наследственность" означает сохранение свойства всеми подмножествами). Результаты, связанные с теоремой 1.2 имеют свою интересную историю. В 1974 г. Дэйвис и Фелпс [68] установили, что сформулированное утверждение справедливо для подмножеств банаховых пространств *с непустой внутренностью.* Перенос их теоремы на случай подмножества с пустой внутренностью был частично сделан Хуффом [85] в том же году. Однако, полное обобщение результата Дэйвиса–Фелпса на последний случай было осуществлено лишь в 1979 г. автором (и это — теорема 1.2). В 1983 г. теорема 1.2 была передоказана R. Bourgin'ом [58]. Связь результата теоремы 1.2 (которая имеет простое и чисто геометрическое доказательство) с операторами

Радона–Никодима указывается в следствии 1.3. В конце параграфа приводится также (как следствие *геометрических рассмотрений*) пример одного большого и важного класса операторов RN — это идеал всех слабо компактных отображений.

В **параграфе 2** мы начинаем изложение "аналитической части" теории операторов RN. Параграф разделен на две части. В первой операторы RN изучаются с точки зрения аналитических представлений отображений, действующих между банаховыми пространствами и пространствами измеримых функций, во второй — с точки зрения аппроксимации конечномерными аналогичных отображений, но для случая абстрактных банаховых решеток. Для формулировки основных результатов из §1, приведем некоторые определения.

В этой части изложения мы будем следовать терминологии монографии Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [15] "Функциональный анализ" (М., "Наука", 1977). Здесь $L_0(\mu)$ — пространство всех μ-измеримых функций для некоторой конечной положительной меры μ. Если E — векторная решетка, то $\mathrm{P}(X,E)$ обозначает векторное пространство линейных отображений из X в E, которые переводят единичный шар их X в порядково ограниченное подмножество из E. Если E — идеальное подпространство (ИП) в $L_0(\mu)$, то мы определяем векторное пространство $\overline{\mathrm{S}}(E,X)$ следующим образом: линейное отображение $T : E \to X$ лежит в $\overline{\mathrm{S}}(E,X)$ тогда и только тогда, когда существует функция $e' \in E'$ (из дуального к E пространства), такая, что $\|Tx\| \leqslant \int |e|e'\,d\mu$ для всех $e \in E$. Через $\overline{\mathrm{S}}_0(E,X)$ обозначается векторное подпространство пространства $\overline{\mathrm{S}}(E,X)$, состоящее из отображений T, для которых существуют функции $\overline{g}_T \in E'(X)$ такие, что $Te = \int e\overline{g}_T\,d\mu$ для $e \in E$. Если E — банахово идеальное подпространство (БИП) в $L_0(\mu)$, то пространства $\mathrm{P}(X,E)$ и $\overline{\mathrm{S}}(E,X)$ — банаховы, если снабдить их нормами

$$p(T) = \inf\{\|\gamma\|_E \mid \gamma \in E,\ |Tx| \leqslant \|x\|\gamma \ \text{ для всех } \ x \in X\}$$

и, соответственно,

$$\overline{s}(T) = \inf\{\|e'\|_{E^*} \mid e' \in E',\ \|Tx\| \leqslant \int |e|e'\,d\mu \ \text{ для всех } \ e \in E\}.$$

Если E — идеальное подпространство в $L_0(\mu)$, то $E(X)$ обозначает векторное пространство всех μ-измеримых (по Бохнеру) функций $\overline{f} : \Omega \to X$ таких, что функция $\|\overline{f}\|_X$ принадлежит E. Если E — банахова подрешетка в $L_0(\mu)$, то $E(X)$ является банаховым пространством с нормой $\|\overline{f}\|_{E(X)} = \|\,\|\overline{f}\|_X\,\|_E$.

В п. 2.1 из §2 доказываются, в частности, следующие утверждения.

Теорема 2.1.2. *Для линейного ограниченного оператора из X в Y следующие утверждения равносильны:*

1) $T \in \mathrm{RN}(X,Y)$;

2) *для любого конечного положительного измеримого пространства* (Ω,Σ,μ), *любого ИП $E \subset L_0(\mu)$ и для всякого отображения $U \in \overline{\mathrm{S}}(E,X)$ отображение TU принадлежит пространству $\overline{\mathrm{S}}_0(E,Y)$;*

3) *для любого конечного положительного измеримого пространства* (Ω, Σ, μ), *любого БИП* $E \subset L_0(\mu)$ *и для всякого отображения* $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ *существует такая функция* $\overline{g} \in E'(Y)$, *что* $TUe = \int e\overline{g}\, d\mu, e \in E$, *и* $\|\overline{g}\|_{E'(Y)} \leqslant \|T\|\, \overline{s}(U)$;

4) *существует пространство* (Ω, Σ, μ) *с конечной положительной не чисто атомической мерой и ИП* E *с недискретным дуальным, такие, что для любого отображения* $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ *отображение* TU *лежит в пространстве* $\overline{\mathrm{S}}_0(E, Y)$.

В частности (и это, по-видимому, важнейшие для дальнейших приложений факты):

Следствие 2.1.2. *Оператор* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ *является оператором Радона–Никодима тогда и только тогда, когда для всякого (соответственно, для некоторого) пространства с мерой (соответственно, пространства с не чисто атомической мерой)* (Ω, Σ, μ) *и для всякого отображения* $U \in \mathrm{L}(L_1(\mu), X)$ *существует такая функция* $\overline{g} \in L_\infty(\mu; Y)$, *что* $TUe = \int f\overline{g}\, d\mu, f \in L_1(\mu)$, *и* $\|\overline{g}\|_{L_\infty(\mu;Y)} \leqslant \|T\|\, \|U\|$. ■

А если взять $E = L_\infty(\mu)$, то получим

Следствие 2.1.3. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *—пространство с конечной положительной не чисто атомической мерой,* $T \in \mathrm{L}(X, Y.)$ *Оператор* T *есть оператор типа* RN *тогда и только тогда, когда для каждого отображения* $U \in \overline{\mathrm{S}}(L_\infty(\Omega, \mu), X)$ *существует такая функция* $\overline{g} \in L_1(\Omega, \mu;)$ *что* $TUf = \int f\, \overline{g}\, d\mu$ *для всех* $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$.
■

Таким образом, мы можем сказать (переформулируя часть теоремы 2.1.2 в сокращенном виде и в терминах "мультипликаторов"), что

$T : X \to Y$ есть оператор Радона–Никодима тогда и только тогда, когда для любой конечной меры μ и для каждого БИП $E \subset L_0(\mu)$ он действует как мультипликатор из банахова пространства $\overline{\mathrm{S}}(E, X)$ в банахово пространство $\overline{\mathrm{S}_0}(E, Y)$, а также тогда и только тогда, когда для любого БИП E он индуцирует естественное отображение "интегрального представления" из $\overline{\mathrm{S}}(E, X)$ в $E'(Y)$.

Дуальный вариант теоремы 2.1.2 дается теоремой 2.1.5, частный случай которой представляет

Следствие 2.1.5. *Пусть* E *— недискретное БИП минимального типа и* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$;

2) *для каждого оператора* $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ *существует такая функция* $\overline{g} \in E(X^*)$, *что* $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ *для всех* $x \in X$;

3) *для каждого оператора* $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ *оператор* UT *приближается конечномерными операторами в пространстве* $\mathrm{P}(X, E)$.

В §1 имеется еще ряд утверждений, из которых, видимо, следует отметить теоремы 2.1.4 и 2.1.4$'$, в которых операторы RN характеризуются как, грубо говоря, мультипликаторы из пространств векторнозначных скалярно измеримых функций в пространства сильно измеримых (т. е. измеримых по Бохнеру) функций.

В случае тождественного отображения $T = \mathrm{id}_X$ многие из этих результатов были получены Бухваловым А. В [4 – 8].

Из теоремы 2.1.4 мы получаем нетривиальный пример некоторого класса операторов, сопряженные к которым принадлежат RN : это операторы с "сепарабельными сопряженными", т. е. такие $T : X \to Y$, что множество $T^*(Y^*)$ сепарабельно.

Во втором разделе параграфа 2 полученные результаты переносятся на случай абстрактных векторных решеток. Здесь мы характеризуем операторы типа RN как естественные мультипликаторы из пространств суммирующих по Левину отображений $\mathrm{S}(E, X)$ в пространства $\mathrm{S}_0(E, Y)$, состоящее из операторов, которые аппроксимируются конечномерными по норме в $\mathrm{S}(E, Y)$ (теорема 2.2.2). Операторы, сопряженные к которым принадлежат классу RN, охарактеризованы как те операторы $T : X \to Y$, суперпозиция с которыми каждого правильного по Левину [20] оператора $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ приближается конечномерными в пространстве $\mathrm{P}(X, E)$ (теорема 2.2.3). В разделе 2.2 параграфа приведены также некоторые приложения указанных результатов.

§3 посвящен описанию пространств $\mathrm{RN}(L_1(\mu), X)$, $\mathrm{RN}(L, X)$ для $\mathcal{L}_1$-пространств L (в смысле Линденштраусса–Пелчинского) и приложениям полученных до этого места результатов к исследованию свойств операторов, принимающих свои значения в $L_\infty(\mu)$-пространствах. В п. 3.1 доказывается, в частности, что операторы из $\mathrm{RN}(L_1(\mu), X)$ — это в точности операторы, допускающие интегральные представления с сильно измеримыми ядрами (теорема 3.1.1). Основная теорема в п. 3.3 — это

Теорема 3.3.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, L_\infty(\mu))$ и $j : L_1(\mu) \to L_\infty(\mu)^*$ — тождественное вложение. Оператор T^*j является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда 1) существует такая μ-измеримая функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $\|\overline{g}(t)\| \leqslant \|T\|$ для всех $t \in \Omega$, 2) $Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$ и 3) $\sigma(X^*, X)$-замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества $\overline{g}(\Omega) \subset X^*$ совпадает с множеством $T^*(D(L_\infty(\mu)^*))$, где $D(E)$ — единичный шар в пространстве E.*

Мы привели здесь полный вариант теоремы для того, чтобы отметить следующее. В этой теореме, хотя и описываются условия при которых именно оператор T^*j принадлежит классу RN, но не даны условия, достаточные для включения $T^* \in \mathrm{RN}$. Это не означает, что соответствующая теорема не получилась. Просто условия, накладываемые на оператор T в теореме, не достаточны для этого, и в §3 еще не хватает технического материала для доказательства (и нет некоторого определения для формулировки) соответствующего утверждения. Мы сможем вернуться к этому вопросы и получить нужный результат только в конце шестого параграфа (следствие 6.2.2; отметим, однако, что §5 носит чисто прикладной, с точки зрения теории операторов Радона–Никодима, характер).

§4 начинается с п. 4.1, и результаты этого раздела главы I представляют собой первый, начиная со второго параграфа, кульминационный момент, весьма важный для всего дальнейшего, включая материал второй главы. Здесь мы доказываем, что, во-первых, операторы, сопряженные к которым принадлежат RN, являются правыми I_p-N_p-мультипликаторами для всех $p \in [1, \infty)$; во-вторых, что операторы типа RN характеризуются как левые $\mathrm{I}_1 - N_1$-мультипликаторы. И, в-третьих, сопряженные операторы $T^* : Y^* \to X^*$ типа RN есть в точности те операторы из X в Y, для которых произведения UT являются ядерными операторами при всех 1-интегральных отображениях U, действующих из Y. Для более точной формулировки нам нужны некоторые определения. Поскольку эти и близкие к ним определения будут использоваться и ниже, приведем несколько больше, чем это необходимо на настоящий момент. Через π_Z обозначается каноническое изометрическое вложение банахова пространства Z в его второе сопряженное.

Для $p \in [1, \infty]$ оператор T называется *p-ядерным*, если его можно представить в следующем виде:

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle \, y_k \qquad \text{для } x \in X, \tag{2.1}$$

где последовательности $(x'_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ таковы, что конечна величина

$$\nu_p := \alpha_p(x'_n) \, \varepsilon_{p'}(y_n);$$

где $\alpha_p(x'_n) := \left(\sum_j \|x_j\|^p \right)^{1/p}$ и $\varepsilon_q(y_n) := \sup_{\|y'\| \le 1} \left(\sum_j |\langle y_j, y' \rangle|^q \right)^{1/q}$ (при $p, q = \infty$ необходима естественная модификация). Соответствующая норма ($\inf \nu_p$) обозначается через $\nu_p(T)$. Для $0 < p \leqslant 1$ оператор T p-ядерен, если он допускает представление вида (2.1), в котором $\nu_p := \left(\sum (\|x'_n\| \, \|y_n\|)^p \right)^{1/p} < \infty$; соответствующая квазинорма ($\inf \nu_p$) обозначается также через $\nu_p(T)$. При $p = 1$ принято употреблять термин "ядерный" и обозначать N_1 и ν_1 также через N и ν соответственно.

Для любого $p > 0$ оператор T является p-ядерным тогда и только тогда, когда он факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{A} c_0 \xrightarrow{\Delta} l_p \xrightarrow{B} Y,$$

где A, B — непрерывные, а Δ — диагональный операторы.

Для $p \in [1, \infty]$ оператор $T : X \to Y$ называется (*строго*) *p-интегральным* (*p*-интегральным по Пичу), если он допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{A} C(K) \xrightarrow{j} L_p(K, \mu) \xrightarrow{B} Y,$$

где K — некоторый компакт, μ — вероятностная мера Радона на нем, j — оператор "тождественного вложения" и A, B — непрерывные операторы. Норма в пространстве $\mathrm{I}_p(X, Y)$ вводится следующим образом: $i_p(T) = \inf \|A\| \, \|B\|$. При $p = 1$ принято употреблять термин "интегральный" и обозначать I_1 и i_1 также через I и i соответственно.

Если $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $\pi_Y T \in \mathrm{I}_p(X, Y^{**})$, то мы говорим, что оператор T является *p-интегральным по Гротендику*: $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$; норма $i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$ индуцируется из $\mathrm{I}_p(X, Y^{**})$. Для $p = 1$ применяем те же соглашения, что и выше.

Кратко напомним, что в 1955 г. А. Гротендик [80] доказал, что произведение слабо компактного и строго интегрального операторов (в любом порядке) всегда является ядерным оператором. Аналогичный факт он установил для произведений вида UT, где оператор U строго интегральный, а T задан на пространстве, сопряженное к которому сепарабельно, либо T^* — интегральный, а U принимает свои значения в сепарабельном сопряженном пространстве. А. Перссон в 1969 г. [120] перенес часть этих утверждений на случай показателей интегральности и ядерности операторов, больших чем единица. Дж. Дистель в 1972 г. [69] обобщил результаты А. Гротендика о сепарабельных сопряженных пространствах на более общие случаи: с одной стороны, пространство X обладает свойством Радона–Никодима тогда и только тогда, когда всякий строго интегральный оператор со значениями в этом пространстве является ядерным; с другой стороны, если пространство X^* обладает свойством Радона–Никодима, то любой строго интегральный оператор, заданный на Y, является ядерным. Последнее утверждение в 1973 г. независимо получил Ч. Сварц [161], и он же поставил вопрос о справедливости обращения этого утверждения. Ответ был получен автором в 1975 г. [28]. В рамки единой схемы все эти результаты объединили следующие теоремы автора (1975; [33]).

Теорема 4.1.1. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Если T^* — оператор типа* RN, *то для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in \mathrm{I}_p(Y,Z)$ оператор UT принадлежит пространству $\mathrm{N}_p(X,Z)$.*

Теорема 4.1.2. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T \in \mathrm{RN}(X,Y)$;

2) *для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in \mathrm{I}(Z,X)$ оператор TU является ядерным;*

3) *для некоторого пространства (Ω,Σ,μ) с конечной положительной не чисто атомической мерой и всякого оператора $U \in \mathrm{I}(L_\infty(\Omega,\mu),X)$ оператор UT является ядерным.*

Теорема 4.1.3. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*,X^*)$;

2) *для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in \mathrm{I}(Y,Z)$ оператор UT является ядерным;*

3) *для некоторого пространства (Ω,Σ,μ) с конечной положительной не чисто атомической мерой и всякого оператора $U \in \mathrm{I}(Y,L_1(\Omega,\mu))$ оператор UT является ядерным.*

Последние две теоремы дают необходимые и достаточные условия для принадлежности оператора или его сопряженного классу RN. В части необходимости теорема 4.1.1, конечно, сильнее, чем теорема 4.1.3. Можно ли отказаться от предположения "$p \geqslant 1$" в теореме 4.1.1, заменить его на условие $p > 1$ и получить, помимо необходимых, достаточные условия? Ответ отрицательный, и обсуждение проблем, связанных с подобного рода вопросами, происходит в остальных четырех разделах четвертого параграфа первой главы. В п. 4.2 вводится понятие *условно слабо компактного* оператора как оператора, переводящего ограниченные последовательности в условно слабо компактные последовательности (т. е такие, из которых можно выделить слабо фундаментальную подпоследовательность). Поводом к введению этого класса операторов послужила известная теорема Х. Розенталя [141]. Этот операторный идеал неявно рассматривался тогда в математической литературе, но формально характеризация и первые систематические результаты появились в работе автора 1978 г. [35]. В 1983 г. к методическому изучению условно слабо компактных ("слабо предкомпактных" в их терминологии) подключились Л. Риддл, Е. Сааб и Дж. Ул (см. [58; стр. 309 и далее]). Если оператор T таков, что $T^* \in \mathrm{RN}$, то T — условно слабо компактен. Обратное неверно даже для тождественного оператора (это очень сложные примеры, восходящие к Р. Джеймсу [1974, 88]). В разделах 4.2 – 4.5 мы изучаем необходимые для дальнейшего свойства операторов из этого класса и приводим ряд простейших (с точки зрения их определения) операторов, которые являются правыми I_p-N_p-мультипликаторами для всех $p \in (1, \infty)$ (и, следовательно, по нашей лемме 4.4.1 условно слабо компактными), но сопряженные к которых не принадлежат идеалу RN.

В §**5** мы покидаем аналитическую часть теории операторов RN и на время останавливаемся для того, чтобы применить полученные результаты в гротендиковской теории аппроксимации (или, по другому, в теории тензорных произведений А. Гротендика).

В 1955 г. А. Гротендик установил такой замечательный факт: рефлексивное банахово пространство обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда оно обладает свойством метрической аппроксимации. Приведем необходимые для понимания дальнейшего определения общего характера. Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Говорят, что оператор T удовлетворяет условию аппроксимации (или обладает свойством аппроксимации), если он может быть аппроксимирован равномерно на каждом компакте конечномерными операторами, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого компакта $K \subset X$ существует такой оператор $R \in \mathrm{L}(X, Y)$ с конечномерным образом, что $\|Rx - Tx\| < \varepsilon$ для всех $x \in K$. Это определение формально не имеет авторства, но поскольку впервые операторы с подобными свойствами рассматривались А. Гротендиком, то следует, видимо, считать, что это — определение свойства аппроксимации для операторов по Гротендику. Далее, будем говорить, что оператор T обладает свойством C-метрической аппроксимации, где $C \geqslant 1$, если в приведенном только что определении конечномерные операторы R всегда можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\|R\| \leq C$. Свойство метрической аппроксимации — это свойство 1-метрической аппроксимации, а если T удовлетворяет условию C-метрической аппроксимации для какого-либо C, то говорят об условии ограниченной аппроксимации. В случае, когда $T = \mathrm{id}_X$, мы приходим к соответствующим понятиям для пространства X.

А. Гротендик сформулировал более общую теорему, чем та, о которой говорилось выше. Именно [80; Chap. 1, Théorème 15]:

(G) *Пусть E, F, G — три банаховых пространства, и — линейное непрерыв-*

ное отображение из E в F, v — линейное непрерывное отображение из F в G. Предположим, что одно из двух отображений u, v слабо компактно, а другое есть равномерный на каждом компакте предел линейных непрерывных отображений конечного ранга. Тогда $w = vu$ есть предел, равномерный на каждом компакте, отображений коечного ранга с нормами $\leqslant \|w\|$.

В п. 5.1 мы следующим образом обобщаем эту теорему (теорема 5.1.1; появляется некоторое дополнительное предположении о дополняемости одного из пространств в своем втором сопряженном; почему оно необходимо, будет пояснено несколько ниже).

(5.5.1) *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, $U \in \mathrm{L}(Y, Z)$. Предположим, что существует непрерывный проектор $P : X^{**} \to X$ и выполнено одно из следующих условий:* 1) $U \in \mathrm{AP}, T \in \mathrm{RN}(X, Y)$; 2) $T \in \mathrm{AP}, U \in \mathrm{RN}(Z^*, Y^*)$. *Тогда* $UT \in \|P\| \cdot \|UT\|$-MAP .

Теорема (G) и тот результат А. Гротендика о рефлексивных пространствах, о котором говорилось выше, побудили его сделать предположение (Chap. 2, p. 135, "Questions non Résolues"; мы формулируем его в нашей терминологии): если слабо компактный оператор U в банаховых пространствах обладает свойством аппроксимации, то он обладает и свойством $\|U\|$-метрической аппроксимации.

В пункте 5.2 параграфа 5 мы приводим контрпример к этой гипотезе. Точнее, мы доказываем следующую теорему [133].

Теорема 5.2.1. *Существуют банаховы пространства E и F и компактный оператор $U : E \to F$ такие, что*

(1) *E сепарабельно, также как и все его сопряженные;*
(2) *E удовлетворяет условию аппроксимации;*
(3) *если $d < \infty$, то нельзя аппроксимировать U, равномерно на каждом компакте из E, операторами конечного ранга с нормами $\leqslant d$.*

Таким образом, мы показываем, что сформулированное предположение не верно, так же как и неверны некоторые части теоремы 15 и ее следствий 1 и 2 в [80], Chapitre 1.

В разделе 5.3 мы вводим понятие оператора, дополняемого в своем втором сопряженном и приводим еще два "положительных" результата, связанных с рассматриваемой в параграфе проблематикой.

В §**6** включены две из основных теоремы теории операторов RN, характеризующие сопряженные операторы Радона–Никодима: 1) в терминах мер Радона на сопряженных пространствах и 2) в чисто топологических терминах. Первый результат [1975; 29], который на пять лет позже автора был установлен также французским математиком E. Saab [144], — это теорема 6.1.1, и ее основная часть формулируется так.

Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и K — единичный шар пространства Y^*, снабженный топологией $\sigma(Y^*, Y)$. $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$ тогда и только тогда, когда оператор T^* переводит всякую вероятность Радона на K в меру на T^*K, продолжаемую до меры Радона на пространстве X^*.

В частности, если $T = \mathrm{id}_X$, мы получаем характеризацию сопряженных пространств со свойством Радона–Никодима в терминах мер Радона [29]. Последний результат был получен двумя годами раньше автора Л. Шварцем [150], о чем автор узнал намного позже, чем доказал теорему 6.1.1.

Вторая теорема (теорема 6.2.2) является обобщением известной теоремы Ч. Стигала [153], и формулируется так. Для $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ эквивалентны условия: 1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$; 2) для всякого сепарабельного подпространства $X_0 \subset X$ множество $(T^*Y^*)|_{X_0}$ сепарабельно в X_0^*.

В конце шестого параграфа вводится понятие RN-множества в сопряженном пространстве и на основе одной леммы (лемма 6.2.1) и предыдущих рассмотрений доказывается наконец утверждение о характеризации операторов со значениями в пространствах $L_\infty(\mu)$, сопряженные к которым (к операторам) являются операторами типа RN . Именно об этом утверждении мы говорили несколько выше, когда обсуждалась теорема 3.3.1. Понятие RN-множества в сопряженном пространстве, введенное автором в 1978 г. [34] и детально исследованное в последующих статьях, навеяно теоремой 6.1.1. Мы говорим, что *-слабый компакт $K \subset X^*$ есть RN-множество, если всякая вероятность Радона на компакте K является вероятностью Радона на $(K, \|\cdot\|)$. Лемма 6.2.1 утверждает, что K есть RN-множество тогда и только тогда, когда RN-множеством является *-слабо замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества K. Чтобы в теореме 3.3.1 получить характеризацию T^* как оператора Радона–Никодима, надо в формулировке этой теоремы добавить фразу "и $\sigma(X^*, X)$-замыкание множества $\overline{g}(\Omega)$ является RN-множеством в X^*" (следствие 6.2.2).

В §**7** более менее подробно рассматриваются свойства RN-множеств из предыдущего параграфа, и здесь мы вновь возвращаемся к таким геометрическим понятиям, как заостренность, которые рассматривались в первом параграфе. Основная теорема 7.2 нацелена, в частности, на применение в последнем, девятом параграфе главы. Теорема предоставляет несколько эквивалентных переформулировок определения *-слабо компактного RN-множества в сопряженном пространстве (отметим, что E. Saab рассматривал лишь *выпуклые* *-слабо компактные RN-множества). Наиболее интересной представляется такая эквивалентность (теорема 7.2, 1) $\iff$ 5)). *-Слабый компакт K является RN-множеством тогда и только тогда, когда каждое каждое подмножество $B_0 \subset B$ является *-слабо заостренным, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $z \in B_0$, что $z \notin \overline{\mathrm{co}}^*(B_0 \setminus D_\varepsilon(z))$. Отсюда получается утверждение, существенно дополняющее результаты из §1 :

Следствие 7.4. *Оператор T^* является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда он переводит *-слабые компакты в *-слабо заостренные множества из X^*.*

Для того, чтобы дополнить характеристики RN-множеств, приведенных в предыдущем параграфе, в §**8** изучается на первый взгляд далекий от теории операторов вопрос (если не знать, о чем шла речь ранее). Именно, здесь устанавливается один результат из [37], относящийся к чистой теории меры и измеримых функций на топологических пространствах. Дан, в частности, критерий универсальной измеримости функции, заданной на отделимом топологическом пространстве и принимающей значения в метрическом пространстве в терминах так называемых μ-колебаний функции, где μ — мера Радона.

В §**9** устанавливается векторнозначный аналог теоремы Бэра о функциях I класса и приводится ряд применений. Например, доказывается, что для $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ оператор T^* является оператором типа RN тогда и только тогда, когда для всякого *-слабого компакта $K \subset Y^*$ отображение $T^*|_K : (K, \sigma(Y^*,Y)) \to X^*$ имеет на K хотя бы одну точку непрерывности (теорема 9.1). В доказательстве существенно используются геометрические свойства операторов Радона–Никодима.

Результаты 5-го параграфа главы I представляют некоторый "слепок" с части результатов, получаемых во **второй главе**, и который соответствует случаю $p=1$, если иметь ввиду, что в §I.5 рассматривался вопрос о внутренней структуре таких пространств как пространства $\mathrm{N}_p(X,Y), \mathrm{I}_p(X,Y)$ и $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$, либо пространств, грубо говоря, дуальных к этим при $p=1$. В главе II выходят на сцену как указанные пространства, так и соответствующие им, либо тесно связанные с ними банаховы тензорные произведения. В то время как теория операторных идеалов (1978; А. Пич [125], [27]; см. также один из последних обзоров [72]) давно и прекрасно разработана, теория банаховых тензорных произведений (1993; [67]) в целом сравнительно молода, хотя и берет свое начало несомненно с работ Шаттена [1950; 148] и А. Гротендика [1955; 80]. Эти две теории тесно связаны друг с другом, и одним из связующих их звеном служат так называемые аппроксимационные свойства различного рода для банаховых пространств.

Для пары банаховых пространств X, Y тензорное произведение $X^* \otimes Y$ в контексте этих двух теорий естественно рассматривать (что мы и делаем) как *пространство всех* (линейных непрерывных) *конечномерных операторов* из X в Y. На тензорных произведениях указанного вида существуют слабейшая и сильнейшая "хорошие" тензорные нормы. Слабейшая — это норма, индуцированная из пространства $\mathrm{L}(X,Y)$ всех операторов, и ее принято называть инъективной. Сильнейшая — норма в некотором смысле двойственная к инъективной, и ее А. Гротендик назвал проективной. Приведем необходимые нам для дальнейшего определения некоторых банаховых тензорных произведений, среди которых появится и проективное произведение, соответствующее проективной норме. Заранее отметим, что можно (и нужно) рассматривать не только нормы на пространствах вида $X^* \otimes Y$, но так называемые "квазинормы", что мы тоже будем делать.

Конечная p-ядерная тензорная норма $||\cdot||_p$ для $p \in [1,+\infty]$ определяется на произведении $X^* \otimes Y$ следующим образом: если $z \in X^* \otimes Y$, то

$$(1) \qquad ||z||_p := \inf \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \|x'_k\|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\| \le 1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{N} | < y_k, y' > |^{p'} \right)^{1/p'} \right\},$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X^* \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes y_k$ (формально, формула

(1) имеет смысл лишь при конечном показателе $p > 1$; в случаях $p = 1$ и $p = +\infty$ в этом определении нужно произвести соответствующие тривиальные изменения, на которых мы не останавливаемся).

Для $0 < p \leqslant 1$ мы определяем p-проективную квазинорму $||\cdot||_p$ на произведении $X^* \otimes Y$ так: если $z \in X^* \otimes Y$, то

$$||z||_p := \inf \quad \left(\sum_{k=1}^{N} (\|x'_k\| \|y_k\|)^p \right)^{1/p},$$

где infimum берется по представлениям тензорного элемента z в виде $z = \sum_{k=1}^N x'_k \otimes y_k$. Пополнение тензорного произведение $X \otimes Y$ по квазинорме $\|\cdot\|_p$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначается через $X \widehat{\otimes}_p Y$. В случае, когда $p \in [1, \infty]$, пополнение тензорного произведения $X^* \otimes Y$ по дуальной к $\|\cdot\|_p$ норме обозначается через $X^* \widehat{\otimes}^p Y$ (у нас дуальная тензорная норма получается из исходной простой "переменой свойств" входящих в определение наборов векторов x'_k и y_k).

Имеются естественные отображения из $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ в $\mathrm{L}(X, Y)$ (продолженные по непрерывности с множества конечномерных операторов $X^* \otimes Y$) и из $X^* \widehat{\otimes}^p Y$ в $\mathrm{L}(X, Y)$. Операторные пространства $\mathrm{N}_p(X, Y)$ — это в точности образы пространств $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ при первых отображениях с квазинормами, индуцированными факторотображениями $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{N}_p(X, Y)$. Пространства, получаемые при рассмотрении вторых отображений аналогичным образом обозначаются через $\mathrm{N}^p(X, Y)$ (с соответствующей квазинормой), и операторы из $\mathrm{N}^p(X, Y)$ мы называем "дуально-p-ядерными".

Свойства аппроксимации, рассмотренные выше, для банаховых пространств можно переформулировать в терминах проективных тензорных произведений А. Гротендика (случай $p = 1$). Мы приведем определения более общего характера, среди которых появятся и гротендиковские аппроксимационные свойства, но сделаем это несколько ниже. Большинство результатов второй главы концентрируется тем или иным образом вокруг вопросов типа следующих двух.

1) Для каких X, Y, для каких p каноническое отображение из $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ в $\mathrm{N}_p(X, Y)$ взаимно однозначно?

2) Для каких X, Y, для каких p каноническое отображение из $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ в $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ является изоморфным (вложением)?

При $p = 1$ эти вопросы тесно связаны со знаменитыми проблемами аппроксимации и ограниченной аппроксимации А. Гротендика. Перейдем теперь к изложению материала главы II.

Мы начинаем §**1** с того, что, в частности, приводим простое доказательство следующей весьма интересной теоремы А. Гротендика о 2/3. Если элемент z проективного тензорного произведения $X \widehat{\otimes} Y$ двух банаховых пространств таков, что $z = \sum x_j \otimes y_j, x_j \in X,\ y_j \in Y, \sum (\|x_j\| \, \|y_j\|)^{2/3} < \infty$, то: $z = 0$ тогда и только тогда, когда ассоциированный с z оператор $\widetilde{z} : Y^* \to X$ нулевой.

Эквивалентная переформулировка: для любой пары банаховых пространств X, Y каноническое отображение из $X^*\widehat{\otimes}_{2/3}Y$ в $\mathrm{N}_{2/3}(X,Y)$ взаимно однозначно (ср. с вопросом 1)).

Оригинальное доказательство А. Гротендика было достаточно сложным и основывалось на тонких результатах теории аналитических функций, а также абстрактной теории Фредгольма, развитой им. Мы даем доказательство в несколько строчек, которое использует лишь классический результат о $\sqrt{n}$-дополняемости каждого n-мерного подпространства в объемлющем банаховом пространстве.

Во **втором параграфе** строятся ряд примеров банаховых пространств со свойством аппроксимации, но без свойства ограниченной компактной аппроксимации. Для более подробных формулировок приведем некоторые определения, введенные автором в 1983 г. [45] для тождественного, и в 2002 г. [53] для произвольного операторов.

Пусть $\mathrm{J}(X,Y)$ — линейное подпространство в $\mathrm{L}(X,Y), 1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Определение 2.4.1. Оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ обладает свойством λ-MAP(J), (λ-*метрической аппроксимации относительно* J), если для всякого компакта $K \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $R \in \mathrm{J}(X,Y)$ такой, что $\|R\| \leqslant \lambda$ и $\sup_K \|Rx - Tx\| < \varepsilon$.

При $\lambda = \infty$ получаем свойство AP(J); при $\lambda < \infty$ получаем BAP(J). В случае, когда J — идеал K компактных операторов, говорят, в частности, о свойствах компактной аппроксимации и ограниченной компактной аппроксимации. Пространство X обладает соответствующим свойством аппроксимации, если этим свойством обладает тождественный оператор id_X .

В пп. 2.1 – 2.3 рассматривается случай тождественного отображения. В 2.1 даны эквивалентные переформулировки соответствующих определений (в частности, в терминах тензорных произведений), с которыми удобнее работать в этом параграфе. В 2.2 формулируются четыре основных теоремы параграфа для рассматриваемого случая, и в 2.3 приводятся их доказательства.

В частности, в пп. 2.1 – 2.3 устанавливается, что

1) существует банахово пространство со свойством аппроксимации Гротендика, не обладающее свойством ограниченной компактной аппроксимации (теорема 2.2.3) и

2) существует неядерный оператор, порождающий линейный непрерывный функционал на пространстве всех слабо компактных операторов (теорема 2.2.4).

Оба результата представляют собой обобщения известных теорем Фигеля–Джонсона [76], которые показали, что свойства AP и BAP не равносильны, и что существует неядерный оператор с ядерным сопряженным (ядерность сопряженного оператора гарантирует то, что сам оператор порождает линейный непрерывный функционал на соответствующем пространстве всех конечномерных операторов). Наш метод доказательства существенно отличается от метода работы Фигеля–Джонсона, — лишь формулы для введения некоторых новых эквивалентных норм в доказательстве аналогична их формулам. (Здесь ситуация похожа на ту, что возникает в §1 главы I: их доказательство проходит для "конечномерного образа единичного шара", но не проходит для для случая, когда "образ единичного шара бесконечномерен").

Утверждение 1) было получено автором в 1983 г. и через 13 лет передоказано американским математиком П. Касаза и швейцарским математиком Х. Ярхов в их совместной работе [60].

В п. 2.4 к тем же задачам мы подходим с другой стороны и, используя другие методы, получаем "конечномерные аналоги" утверждений 1) и 2) (и даже более общих). Основная теорема 2.4.1 формулируется очень громоздко. Поэтому мы приведем здесь лишь одно следствие из нее. "Вполне сепарабельность" означает сепарабельность всех сопряженных пространств.

Следствие 2.4.3. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют вполне сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в E^{**}, пространство F рефлексивно, $T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(K) при $\beta < \alpha$.*

Это утверждение, между прочим показывает, что аппроксимационная оценка в теореме 5.1.1 главы I (см. выше) точна даже в случае, если в этой теореме заменить аппроксимацию конечномерными операторами на аппроксимации операторами из более широких классов.

§**3** начинается с примера пространства без свойства аппроксимации с достаточно хорошими конечномерными подпространствами (п. 3.1). Хорошо известно, что если X — банахово пространство типа p и котипа q, то всякое его n-мерное подпространство $Cn^{1/p-1/q}$-дополняемо в X (см. [126]). Шанковский [162] показал, что если $T(X) = \sup\{p : X \text{ типа } p\} \neq 2$ или $C(X) = \inf\{q : X \text{ котипа } q\} \neq 2$, то в X есть подпространство без свойства аппроксимации. Таким образом, если всякое подпространство в X обладает свойством аппроксимации, то необходимо $T(X) = C(X) = 2$ и, следовательно, все конечномерные подпространства в X "хорошо" дополняемы (см. лемму 0.4.4.1). При этом пространство X не обязано быть гильбертовым (или изоморфным ему). Примеры таких пространств построены Джонсоном [91], [92].

В связи с примерами Шанковского и Джонсона возникают естественные вопросы: 1)*если $T(X) = C(X) = 2$, то верно ли, что всякое подпространство в X обладает свойством аппроксимации*? 2) насколько хорошо могут быть дополняемы конечномерные подпространства пространства без свойства аппроксимации: в частности, *существует ли пространство X без свойства аппроксимации, постоянные C и A такие, что всякое n-мерное подпространство в X $C\log^A n$-дополняемо*? В п. 3.1 мы отвечаем на сформулированные вопросы (отрицательно — на первый, положительно — на второй).

Пример, который мы строим, основан на конструкции Шанковского. Наш результат был опубликован автором в 1982 г. в работе [42]. К этой важной и интересной проблеме существования достаточно хороших пространств без свойства аппроксимации обратились через 18 лет и такие известные специалисты, как П. Касаза, У. Б. Джонсон и С. Л. Гарсиа. В их работе [61] в 2000 г. (в которой получено, качественно и количественно, то же самое, что и у нас) был использован пример П. Энфло в изложении А. Дэйви [65]. Так же как и у них, наше банахово пространство является асимптотически гильбертовым, но не обладает свойством аппроксимации А. Гротендика.

В п. 3.2 мы переходим к рассмотрению ситуации, когда $p < 1$: можно ли теорему из предыдущего раздела перенести на случай свойств аппроксимации AP_p? Приведем общее необходимое определение.

Пусть $p \in (0, \infty]$. Пространство X обладает свойством AP_s ($X \in \mathrm{AP}_s$), если для любого Y естественное отображение из $Y^* \widehat{\otimes}_s X$ в $\mathrm{L}(Y, X)$ взаимно однозначно.

При $p = 1$ это свойство аппроксимации Гротендика. Для случая $p > 1$ определение впервые было введено П. Сафаром 1972 г. [146]. При $p \in (0, 1)$ свойства AP_p впервые появились в работе автора [43] в 1983 г. В 2001 г. пространства со свойством AP_p для всех показателей p изучили А. Карн и Д. Синха [96]. Они переформулировали определения для случая $p < 1$ в терминах понятия "p-компактности" и в этих терминах передоказали некоторые из результатов автора.

Теорема Гротендика о 2/3 утверждает, что всякое пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3}$. Мы обобщаем в п. 3.2 эту теорему, например, на случай подпространств в $L_q(\mu)$, и приводим серию теорем, показывающих, что наш результат точен. Некоторые из них:

Теорема 3.2.1. *Пусть $0 \leqslant r \leqslant 1/2; c > 0$ и банахово пространство X таково, что*

(A_r) на любое его конечномерное подпространство E существует проектор из X с нормой $< c(\dim E)^r$.

Тогда $X \in \mathrm{AP}_s$, где $s = (r+1)^{-1}$.

Теорема 3.2.3. *Пусть $p \in (2/3, 1]$ и $r = 1/p - 1$. Существует банахово пространство Z, обладающее свойствами:*

1) $Z \notin \mathrm{AP}_p$;

2) для всякого $\delta > 0$ существует такая константа $c > 0$, что если E — конечномерное подпространство в Z, то

$$\lambda_Z(E) \leqslant c(\dim E)^r \log^{2+\delta}(\dim E).$$

В частности, для любого $s < p$ Z удовлетворяет условию $(A_{r(s)})$ и, следовательно, $Z \in \mathrm{AP}_s \ \forall s < p$.

Здесь $\lambda_Z(E) := \inf \|P\|$, где инфимум берется по всевозможным проекторам P из Z на E.

В §4 нас интересует количественный аспект теоремы Фигеля–Джонсона о существовании не ядерного с p-ядерным сопряженным. Именно, нетрудно показать (это мы делаем в начале параграфа), что n-мерного оператора $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ имеет место следующее соотношение между его ядерной и интегральной (по Гротендику) нормами: если $\nu(T) = 1$, то $\nu(T^*) \geq i(T) \geq 1/\sqrt{n}$. Теоремы 4.1 и 4.2 — центральные результаты параграфа. В них мы, в частности, показываем, что это соотношение между указанными нормами асимптотически точно даже для пространств со свойством ограниченной аппроксимации. Это — результаты 1996 г. Намного ранее автор построил такого рода примеры в пространствах со свойством аппроксимации, но без свойства ограниченной аппроксимации (это явно не включено в диссертацию, но вытекает из результатов этого параграфа). Приведем одно из шести следствий теорем.

Следствие 4.3. *Существуют сепарабельное банахово пространство X со свойством аппроксимации, постоянная $C > 0$, счетное семейство $\{E_n\}$ подпространств пространства X, $\dim E_n = n$ для $n \in \mathbb{N}$, такие, что если $R \in X^* \otimes X$ и $R|_{E_n} = \mathrm{id}_{E_n}$ для некоторого фиксированного n, то $\| R \| \geq C\sqrt{n}$.*

Это — экстремально плохое пространство, обладающее свойством аппроксимации (и, конечно, не обладающее свойством ограниченной аппроксимации). Действительно, хорошо известно, что на всякое n-мерное подпространство банахова пространства существует проектор с нормой, не большей чем $\sqrt{n}$.

В §**5** результаты предыдущего параграфа используются для ответа на один вопрос Ю. А. Брудного (берущий свое начало в теории интерполяции).

В §**6** начинается исследование аппроксимационных свойств AP_p с общей точки зрения для всех значений $p > 0$. Сначала (п. 6.1) приводятся различные эквивалентные переформулировки определения этих свойств для $p \geqslant 1$. Здесь, в частности, показывается (предложение 6.1.1), что в определении в случае, когда $p > 1$, можно ограничиться только рассмотрением рефлексивных пространств Y. Кроме того, в той же теореме даются условия топологического характера, характеризующие как свойства аппроксимации порядка p, так и свойства ограниченной аппроксимации порядка p, определения которых приводятся несколько позже (в п. 6.2) по некоторым соображениям. Изучаются также соотношения между свойствами AP_p и AP_q при различных значениях параметров, или для некоторых частных случаев конкретных банаховых пространств. Например, устанавливается, что

1) если $p > 2$, то свойства AP_1 и AP_p не равносильны (теорема 6.1.1);

2) если $p > 2$ и $E \in \mathrm{AP}_p$, то $E \in \mathrm{AP}_q$ для любого $q \in [2, p]$ (теорема 6.1.2);

3) если $s \leqslant 1$, $1/p + 1/s = 2$ и $s \leqslant q \leqslant p$, то $\mathrm{AP}_q \implies \mathrm{AP}_s$ (теорема 6.1.3);

4) если $p \in [1, +\infty]$ и X — фактор–пространство пространства l_p, то $X \in \mathrm{AP}_1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{AP}_p$ (теорема 6.1.4).

В следующем разделе 6.2 вводятся в рассмотрения свойства C-метрической аппроксимации порядка $p, p \geqslant 1$ (для $C = 1$ понятие было рассмотрено впервые П. Сафаром, при $p = 1$ это соответствующие свойства Гротендика).

Определение 6.2.1. Пусть $C \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$. Пространство Y *обладает свойством* C-MAP_p, $Y \in C$-MAP_p, если для любого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C). Наконец, Y *имеет свойство* BAP_p (соответственно *свойство* MAP_p), если оно обладает свойством C-MAP_p для некоторого числа $C \geq 1$ (соответственно свойством 1-MAP_p).

При $p = 1$ общеприняты аббревиатуры C-MAP, BAP, MAP.

Конечно же для любого $p \in [1, \infty]$ имеет место импликация $\mathrm{BAP}_p \implies \mathrm{AP}_p$. С другой стороны, Т. Фигель и У. Б. Джонсон [76] показали, что включение $Y \in \mathrm{AP}_1$ не влечет за собой включение $Y \in \mathrm{BAP}_1$. Однако, если, например, существует проектор из Y^{**} на Y с нормой, равной единице, и Y — пространство со свойством RN, то $Y \in \mathrm{AP}_1 \iff Y \in \mathrm{MAP}_1$ (следствие 5.1.1 главы I). Что можно сказать о случаях других значений параметра p?

Вопрос о справедливости импликации "$\mathrm{AP}_p \implies \mathrm{BAP}_p$" откладывается до следующего параграфа (там будет получен результат типа Фигеля–Джонсона). В п. 6.2 мы формулируем и доказываем некоторые аналоги следствия 5.1.1.

Предложение 6.2.1. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P: Y^{**} \to Y$. Тогда для всякого $p \in (1, +\infty)$ из того,что Y обладает свойством AP_p вытекает условие $Y \in \|P\|$-MAP_p. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_p$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p$ эквивалентны между собой.*

Предложение было установлено автором еще в 1985 г. в работе [57]. В 1993 г. оно появилось в монографии [67], к сожалению, без ссылок на [57]. Вопрос о том, справедливо ли утверждение предложения в случае $p = 1$, открыт. Неясно также, что будет в случае $p = +\infty$. Мы доказываем такой аналог следствия 5.1.1 в этой ситуации.

Предложение 6.2.2. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P: Y^{**} \to Y$. Тогда если Y^* обладает свойством Радона-Никодима и Y удовлетворяет условию AP_∞, то $Y \in \|P\|$-MAP_∞. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_\infty$ и $Y \in \mathrm{MAP}_\infty$ эквивалентны между собой.*

Забегая вперед, отметим, что для любого $p \in [1, +\infty], p \neq 2$, существуют банаховы пространства со свойством AP_p, не обладающие свойством $C - \mathrm{MAP}_p$ ни при каком $C \geq 1$ (см. ниже).

Т. Фигель и У. Б. Джонсон использовали свою конструкцию в [76] для построения неядерного оператора с ядерным сопряженным. Это указывает на возможную тесную связь между вопросом об эквивалентности свойств AP_p и BAP_p и вопросом о существовании не p-ядерного оператора с сопряженным из идеала N^p, или, что то же, с вопросом о существовании не p-ядерного оператора с p-ядерным вторым сопряженным. Мы даем некоторые достаточные условия для ответа на последний вопрос в положительном направлении:

Предложение 6.2.3. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что либо X^*, либо Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика, и пусть $p \in [1, +\infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если $T \in \mathrm{N}_p(X, Y^{**})$, то $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.*

Аппроксимационные условия, накладываемые на рассматриваемые в предложении 6.2.3 пространства существенны и не могут быть заменены на аналогичные условия для пространств X, либо Y^{**} (следствие 10.3).

В п. 6.3 полученные результаты применяются для изучения аппроксимационных свойств банахова пространства H^∞. Неизвестно, обладает ли пространство Харди H^∞ ограниченных аналитических функций в круге свойством аппроксимации [118]. Однако, мы доказываем что для каждого $p \neq 1$ пространство H^∞ обладает свойством аппроксимации AP_p и, более того, что если $p > 1$, то H^∞ и все его четные сопряженные имеют свойство 1-MAP_p (теорема 6.3.1). Этот результат автора из его совместной с Ж. Бургейном статьи в каком-то смысле был "рекордным" до 2000-го года. Дальнейшее продвижение в исследовании аппроксимационных свойств пространства H^∞ произошло лишь в работе испанских математиков М. Д. Контрераса и С. Диас-Мадригала (2000; [64]). Они ввели в рассмотрение новое понятие — "равномерное свойство C-MAP_p порядка p" — и доказали, что H^∞ обладает этим свойством при $p \in (1, \infty)$.

В п. 6.4 изучается топологический аспект понятия аппроксимации порядка p. Вводится топология "p-компактной сходимости" на пространствах абсолютно p-суммирующих операторов, и в терминах приближений операторов в этой топологии даются различные характеристики пространств со свойствами AP_p . В частности, в этом пункте дается ответ на соответствующий вопрос П. Сафара (охарактеризовать в топологических терминах типа гротендиковских пространства со свойствами $\mathrm{AP}_p, p > 1$). В конце п. 6.4 даны некоторые контрпримеры к соответствующим утверждениям раздела. В частности, показано, что для всякого $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$, существуют банахово пространство Z, элемент $z \in Z^*\widehat{\otimes}_{p'} Z$, такие, что z порождает ненулевой функционал на пространстве всех абсолютно p-суммирующих операторов из Z в Z^{**}, который есть тождественный нуль на подпространстве всех абсолютно p-суммирующих операторов из Z в Z (следствие 6.4.10). Любопытным представляется случай $p = +\infty$: получаем ненулевой тензорный элемент $z \in Z^*\widehat{\otimes}_1 Z$, обращающийся в нуль на подпространстве $\mathrm{L}(Z, Z)$ пространства $\mathrm{L}(Z, Z^{**})$. Это — ответ на вопрос (устный) шведского математика С.Кайзера, который и обратил мое внимание на возможность существования такого элемента z.

В §**7** мы отрицательно отвечаем, в частности, на следующие вопросы А. Пелчинского, А. Пича, П. Сафара.

Каждый ли квази-p-ядерный оператор лежит в замыкании конечномерных операторов по π_p-норме?

Каждое ли банахово пространство обладает свойством AP_p?

Если банахово пространство имеет свойство AP_p, то имеет ли оно и свойство BAP_p?

Совпадают ли между собой классы операторов, интегральных по А. Пичу и по А. Гротендику?

Следует ли из включений $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $T^{**} \in \mathrm{N}_p(X, Y)$, что $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$?

В §**8** сформулированные вопросы рассматриваются с более общей точки зрения, и мы дополняем результаты предыдущего параграфа дальнейшими утверждениями.

В п. 8.1 основная задача носит следующий характер. Рассмотрим два банаховых пространства E и F и шкалу банаховых тензорных произведений $\{E^*\widehat{\otimes}_p F\}$. Рассмотрим также для $p \leqslant q$ канонические отображения $j_{pq} : E^*\widehat{\otimes}_p F \to E^*\widehat{\otimes}_q F$ и $j_p : E^*\widehat{\otimes}_p F \to \mathrm{L}(E,F)$. Предположим, что для некоторого p отображение j_p не является взаимно однозначным. В этом случае мы можем рассматривать пары отображений j_q и j_{pq} :

$$E^*\widehat{\otimes}_p F \xrightarrow{j_{pq}} E^*\widehat{\otimes}_q F \xrightarrow{j_q} \mathrm{L}(E,F)$$

и интересоваться, меняя переменную q от p до $+\infty$, в каком месте шкалы произошло исчезновение ненулевого тензорного элемента $z \in E^*\widehat{\otimes}_p F$, для которого $j_p(z) = 0$ (т.е. при каких q $j_{pq}(z) = 0$?).

Мы даем полное решение этой задачи.

В п. 8.2 аналогичные задачи ставятся для шкалы p-ядерных операторов. Точнее, изучается вопрос о том, когда из p-ядерности второго сопряженного к некоторому оператору вытекает q-ядерность самого оператора. Здесь также приводится полное решение соответствующей задачи, причем связь между показателями p и q оказывается в точности такой же как и в предыдущем пункте.

В п. 8.3 приводятся некоторые применения результатов предыдущих разделов к проблеме аппроксимации конечномерными операторов в топологии компактной сходимости.

Следующий **девятый параграф** посвящен исследованию вопроса о непрерывности некоторых шкал операторных идеалов, таких как идеалы абсолютно p-суммирующих, p-ядерных операторов. Как известно, банаховы идеалы абсолютно p-суммирующих операторов образуют возрастающую шкалу: $\Pi_r(X,Y) \subset \Pi_s(X,Y)$, если $1 \leqslant r \leqslant s < \infty$. Соответствующие нормы возрастают: $\pi_r(T) \geqslant \pi_s(T)$, когда $T \in \Pi_r(X,Y)$. Мы доказываем, что $\pi_r(T)$ зависит непрерывно от параметра r для каждого конечно-мерного оператора T. Более того, $\lim_{s\to r+0} \pi_s(T) = \pi_r(T)$ при условии, что $T \in \Pi_s(X,Y)$ для всех $s, s > r$, и $\lim_{q\to p-0} \pi_q(T) = \pi_p(T)$, если $T \in \Pi_{p-\delta}(X,Y)$ для некоторого $\delta > 0$. Результаты о p-ядерных операторах более сложные, поскольку в них существенную роль играют различные аппроксимационные свойства, зависящие от p.

В §**10** вводятся в рассмотрения новые аппроксимационные свойства $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ и доказывается, в частности, что всякое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$. Рассматривается новый класс операторов $\mathrm{N}_{s,\infty}$ и показывается, что всякий оператор, второй сопряженный к которому лежит в идеале $\mathrm{N}_{2/3,\infty}$, является ядерным. Эти два утверждения представляют собой обобщения двух результатов А. Гротендика "о 2/3". Доказывается точная теорема 10.4 о включения вида $\mathrm{L}(X,Y)\bigcap \mathrm{N}_{s,\infty}(X,Y^{**}) \subset \mathrm{N}_p(X,Y)$. Одной из основных теорем параграфа является теорема 10.5, в которой устанавливается неулучшаемость многих получаемых положительных результатов, даже для случая пространств с базисами Шаудера. Приведем следствие из нее.

Следствие 10.3. *Существует пара сепарабельных банаховых пространств Z, W со следующими свойствами. Пространства Z^{**} и W имеют базисы (и, следовательно, обладают свойством аппроксимации), и для каждого $p, 1 \leq p < 2$, найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным.*

Это утверждение представляет собой довольно удивительный факт. Оно в частности, показывает, что одно из утверждений А. Гротендика, приведенных им без подробного доказательства в его фундаментальной работе 1955 года, неверно. Впервые для случая $p = 1$ соответствующая теорема была получена автором в совместной работе с Еве Ойа в 1987 г. [115], а в сформулированном виде — в статье автора [48] в 2000 г.

В §**11** мы возвращаемся к дополнительному исследованию свойств операторов Радона-Никодима, связанных с аппроксимацией конечномерными операторов, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками. Эти результаты применяются для исследования свойств аппроксимации $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, ассоциированных с так называемыми дуально p-ядерными операторами. В этом параграфе, в частности, устанавливается аналог одной из основных теорем главы I, о которой говорилось выше. Именно, показывается, что произведение TS оператора T типа RN и "дуально q-интегрального" отображения является дуально p-ядерным оператором (следствие 11.1). Даются достаточные условия, при которых из p-ядерности сопряженного оператора вытекает дуальная p-ядерность самого оператора (теорема 11.1; эти условия оказываются точными, что устанавливается затем в §13). В параграфе вводятся также в рассмотрение условия $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$, двойственные к условия аппроксимации BAP_p и даются достаточные условия для совпадения свойств $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ и $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$ для данных банаховых пространств (теорема 11.2). Эти условия также оказываются точными, что устанавливается в §13.

В **параграфах 12–13** все те основные результаты из предыдущих разделов о N_p-операторах и соответствующих им аппроксимационных свойствах переносятся на случай дуально p-ядерных операторов и соответствующих свойств AP-$\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$. В частности, вместе со следствием 7.3.4 следствие 12.14 дает: для $p = 1, \infty$ существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство $L_p(\mu)$, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p (более того, в случае $p = 1$ банахово пространство, в котором действует оператор, может быть взято так, что оно имеет базис; следствие 13.2). Для всех остальных значений параметра p соответствующая известная проблема, восходящая еще к Квапеню–Пелчинскому– Пичу–Пизье, вот уже более 25 лет остается открытой.

В следствии 13.3 мы даем полный ответ на вопрос А. Пича о регулярности идеалов N^p дуально-p-ядерных операторов: идеал конечномерных операторов вкладывается в каждый из идеалов $(\mathrm{N}^r)^{\mathrm{reg}}$, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не плотно. Таким образом, ни один из идеалов N^r, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не только не является регулярным, но и идеал $(\mathrm{N}^r)^{\mathrm{reg}}$ не минимален.

Нерегулярность идеала N_1 впервые установлена Фигелем–Джонсоном в 1973 г. [76]. Нерегулярность идеала N_r при $1 \leqslant r \neq 2 \leqslant \infty$ была доказана автором в

1981-1982 гг. [41, 130]. В работе 1983 г. [43] этот факт был распространен на все идеалы N_r, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$. В статье автора 2000 г. [48] было показано, что все идеалы N_p при $2/3 < r < 2$ не минимальны, и что конечномерные операторы не плотны в них. В том же году автором [50] получена нерегулярность идеалов N^p, $1 \leqslant r \neq 2 \leqslant \infty$. Тртнадцатый параграф (и работа автора 2001 года [52]) ставит точку в рассмотрении соответствующих вопросов в шкалах r-ядерных и дуально r-ядерных операторов.

Завершает главу II и всю работу §14. В этом параграфе даны два показательных применения полученных результатов в общей теории операторных идеалов А. Пича и в теории банаховых тензорных произведений Дефанта–Флорета.

С одной стороны, мы показываем (теорема 14.1.1), что никакая из норм ν_p или ν^p при $p \in [1, \infty]$, $p \neq 2$, не является слабо полунепрерывной снизу (А. Пич установил этот факт для $p = 1$). С другой стороны, отвечаем на некоторые вопросы Дефанта–Флорета (1993), связанные с введенным ими понятием достижимости тензорных норм.

Все основные результаты работы опубликованы в статьях автора [28–30, 32–33, 35–48, 50, 52, 53, 129-130, 133–135] и в совместных работах [25, 57, 93, 115]. В основном материале работы четко указаны результаты из совместных статей, которые принадлежат автору.

ГЛАВА 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Здесь мы приведем большинство основных обозначений, определений и утверждений, используемых в дальнейшем. Естественно, не все необходимые нам сведения будут собраны в данной главе, и там, где удобно, мы будем напоминать о вновь появляющихся объектах, либо вспомогательных утверждениях, в месте их применения. Особенно это относится к определениям и фактам, которые имеют лишь "локальное" применение, типа "на один раздел" или "на один параграф", о чем будет сказано в соответствующих местах работы. Ссылки на какой-либо раздел или на какое-либо место в настоящей работе будут обычно выглядеть так: "см. 0.1.1" — если в главах 1 или 2 мы ссылаемся на первый раздел (пункт) параграфа 1 главы 0, либо "(теорема 1.1.1)" — ссылка из главы 2 на теорему 1 пункта 1 в параграфе 1 этой главы.

§1. Общие сведения

Во всей работе буквами $X, X_0, Y, Y_0 \ldots$, если не оговорено противное, обозначаются произвольные банаховы (иногда просто нормированные) пространства (как правило мы рассматриваем их над полем вещественных чисел; в случае возникновения необходимости, комплексная ситуация будет выделена особо). То же самое относится и к буквам типа $E, F, \ldots,$ — за исключением первых разделов, в которых эти символы заняты под обозначения векторных решеток и разных линейных пространств измеримых функций ("идеальных пространств"). Соответствующими маленькими буквами (возможно, с индексами или какими-то другими атрибутами) $x, x_0, y, \ldots, e_1, f, \ldots$ мы, как правило, обозначаем элементы этих пространств. Сопряженное к нормированному пространству X обозначается X^*, второе сопряженное — X^{**} и т. д., их элементы — $x', x'', x'_k, \ldots,$ а значения этих функционалов на векторах рассматриваемого пространства — либо $\langle x', x\rangle$, либо $\langle x, x'\rangle$ (мы часто отождествляем нормированное пространство с его каноническим образом во втором сопряженном пространстве, поэтому последние два обозначения равноправны). В некоторых случаях возможно применение и таких обозначений как $f(x)$ и. т. д. для $f \in X^*$ и $x \in X$. Норма в фиксированном пространстве X обозначается обычно просто через $\|\cdot\|$ или, когда требуется выделить пространство, через

$\|\cdot\|_X$. Через π_X (или просто π) обозначается, когда это необходимо, каноническое изометрическое вложение нормированного пространства X в его второе сопряженное (иногда в одном и том же доказательстве символ π будет использоваться для обозначений вложений разных пространств в их вторые сопряженные). Кроме того, если это не приводит к недоразумению, мы часто будем считать, что рассматриваемое банахово пространство является подпространством своего второго сопряженного, — это удобно, в частности, для упрощений некоторых формул.

Под "подпространством" нормированного пространства мы будем понимать "замкнутое линейное подпространство". За числами (вещественными или комплексными) мы резервируем обозначения a, b_k, c, C_1, α и т.п.. Мы часто пишем, например, $K_p(X)$ для обозначения некоторой постоянной, зависящей только от p и X. Обозначения для последовательности элементов некоторого множества: $(f_k), (f_k)_k$ и т.д.; значение отображения на некотором элементе — $Ax, A(x)$; для образа отображения используем как обозначение типа $\varphi^* X^*$, так и типа $\varphi(E)$. Единичный (замкнутый) шар банахова пространства X обычно обозначается через B_X.

Обозначения l_p, c_0 (более общо, $l_p(\Gamma)$ и $c_0(\Gamma)$) стандартны; квазинормы в этих пространствах (как и пространствах типа $L_p(\mu)$) мы также обозначаем через $\|\alpha\|_p = \|\alpha\|_{l_p}$ для $\alpha = (\alpha_k) \in l_p$, $p \in (0, \infty]$, и $\|\alpha\|_\infty = \|\alpha\|_{c_0}$ в случае пространства c_0; l_p^N — конечномерные аналоги l_p-пространств; r' - сопряженный с $r \in [1, \infty]$ показатель. Следует заметить, что в некоторых случаях (например, при рассмотрении ряда норм на тензорных произведениях банаховых пространств) символом типа $\|\cdot\|_p$ мы будем обозначать и нормы в других пространствах, отличных от пространств L_p, но это ни в коем случае не приведет к недоразумению.

Если X — банахово пространство и μ — некоторая мера, то через $L_p(\mu; X)$, $0 < p \leqslant \infty$ обозначается L_p-пространство всех (классов эквивалентности) сильно μ-измеримых интегрируемых в p-й степени (по Бохнеру) функций (более подробно о подобного рода пространствах см. ниже в п. 2.2). В случае дискретных мер мы также используем обозначения типа $l_p(X)$, $l_p(\Gamma; X)$, $c_0(X)$, и т.п.. Для квазинормы последовательности $(x_k)_k$, лежащей в пространстве $l_p(X)$, мы будем использовать обозначение $\alpha_p(x_k) := (\sum_k \|x_k\|^p)^{1/p}$ (при $p = \infty$ необходима соответствующая модификация). Напомним, что для конечных $p \geqslant 1$ $l_p(\Gamma; X)^* = l_{p'}(\Gamma; X^*)$ и $c_0(\Gamma; X)^* = l_1(\Gamma; X)$. Семейство $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$, для которого конечна величина $\alpha_p(x_k)$, называется *абсолютно p-суммируемым.* Семейство $(x_k)_{k=1}^\infty$, называется *слабо p-суммируемым,* если $(\langle x_k, x'\rangle) \in l_p$ для всех $x' \in X^*$. Полагаем

$$\varepsilon_p(x_j) := \sup_{\|x'\| \leq 1} \left(\sum_j |\langle x_j,\, x'\rangle|^p \right)^{1/p}$$

Это квазинорма (норма при $p \geqslant 1$) в пространстве $l_p\{X\}$ всех слабо p-суммируемых последовательностей элементов из X.

Если $A \subset X$, то $\operatorname{span} A$ — линейная оболочка множества A. Замкнутую линейную оболочку множества $A \subset X$ мы будем обозначать как через $\overline{\operatorname{span}} A$, так и через

$[A]$. Для $A \subset X$ через $\mathrm{co}(A)$ мы обозначаем выпуклую оболочку множества A, а через $\overline{\mathrm{co}}(A)$ — замкнутую выпуклую оболочку множества A. Если A — ограниченное подмножество банахова пространства X, то $\overline{\Gamma(A)}$ — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка A; X_A — банахово пространство с "единичным шаром" $\overline{\Gamma(A)}$; $\Phi_A : X_A \to X$ — каноническое вложение. Если V — абсолютно выпуклая окрестность нуля в X, то множества $(n^{-1}V)_{n=1}^{\infty}$ образуют базис окрестностей нуля в некоторой локально выпуклой топологии τ на X. Факторпространство $(X,\tau)/p^{-1}(0)$, где p — калибровочная функция множества V, обозначается через X_V и является нормированным пространством с нормой $\|\widetilde{g}\| := p(g)$ ($\widetilde{g}$ — класс эквивалентности в X_V, содержащий элемент g). Пополнение пространства X_V обозначается через $\widehat{X}_V$, а каноническое отображение их X в $\widehat{X}_V$ через Ψ_V. Для $B \subset X$ через $\overline{B}^{\,\tau}$ и $\overline{B}^{\,\|\cdot\|}$ обозначаются соответственно замыкания множества B в какой-либо топологии τ и по норме $\|\cdot\|$. Обозначения для замыканий множеств в других (конкретных) топологиях будут появляться по мере необходимости в разных местах работы.

Если f — некоторое отображение из одного множества A в другое и $A_0 \subset A$, то через $f|_{A_0}$ мы обозначаем сужение f на A_0. Более общо, если F — семейство отображений из A в некоторое множество, то $F|_{A_0} := \{f|_{A_0} :\ f \in F\}$.

Мы говорим, что банахово пространство *вполне сепарабельно*, если как оно само, так и все его сопряженные пространства сепарабельны. Банахово пространство X называется *слабо компактно порожденным* (или WCG-пространством), если существует такой слабый компакт $K \subset X$, что $\overline{\mathrm{span}}\, K = X$.

Пространство всех линейных непрерывных (= ограниченных) отображений (операторов) из X в Y с его естественной операторной нормой обозначается через $\mathrm{L}(X,Y)$ (для $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ $\|T\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\|$). Вообще, под термином "оператор" мы всегда (если не оговорено противное) будем понимать "линейное непрерывное отображение" в нормированных пространствах. Тождественное отображение пространства X в себя обозначается у нас через id_X (либо id, когда не возникает недоразумений). Одномерный оператор — это оператор вида $x_0' \otimes y_0$ для $x_0' \in X^*$ и $y_0 \in Y$, действующий из X в Y по правилу $x_0' \otimes y_0 :\ x \mapsto \langle x, x_0' \rangle\, y_0$. Под *конечномерным оператором* ("оператор конечного ранга") понимается конечная сумма одномерных.

Оператор $T : X \to Y$ называется изометрическим, если он сохраняет норму (иногда говорят об изометрическом вложении пространства X в пространство Y). Пусть $1 \leqslant \lambda < \infty$. Оператор $T : X \to Y$ называется λ-изометрическим (вложением), если он взаимно однозначный и $\|T\|\,\|T^{-1}|_{T(X)}\| \leqslant \lambda$. Говорят, что два банаховых пространства X и Y λ-изометричны между собой, если существует λ-изометрия из X на Y.

Напомним, что каждое банахово пространство X изометрично факторпространству некоторого пространства $l_1(\Gamma)$ (в качестве Γ можно взять B_X; тогда оператор, определяемый соотношением $Q(\alpha_x) := \sum_{x \in B_X} \alpha_x x$, будет факторотображением из $l_1(B_X)$ на X). Каждое банахово пространство изометрично подпространству некоторого $l_\infty(\Gamma)$, например, пространства $l_\infty(B_{X^*})$.

Еще некоторые определения (пожалуй важнейшие для нас) связаны с понятием условий аппроксимации (Гротендика) для банаховых пространств. Пространство E *обладает свойством аппроксимации* (свойством AP), если тождественный оператор на нем аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными операторами (детали и другие переформулировки этого определения можно найти непосредственно в первоисточнике [80]).

Пусть фиксировано некоторое число $C \geq 1$. Говорят, что банахово пространство X *обладает свойством C-ограниченной аппроксимации* (в другой терминологии, — свойством C-метрической аппроксимации, свойством C-MAP), если тождественный оператор пространства X лежит в замыкании в топологии компактной сходимости шара радиуса C нормированного пространства всех конечномерных линейных непрерывных операторов в X : для любого числа $\varepsilon > 0$ и для всякого компакта $K \subset X$ существует такой конечномерный оператор $R \in X^* \otimes X$, что $\|R\| \leq C$ и $\sup_{x \in K} ||x - Rx|| < \varepsilon$. Пространство X *обладает свойством ограниченной аппроксимации* (свойством BAP), если оно обладает свойством C-ограниченной аппроксимации для некоторого числа $C \geq 1$. Переформулировка этих определений в терминах тензорных произведений будет приведена ниже в п. 3.6.

Рассматриваемые топологические пространства предполагаются отделимыми.

§2. Векторные решетки, пространства измеримых функций, меры

1. Векторные решетки и пространства измеримых функций. Говоря о векторных решетках и решетках измеримых функций, мы придерживаемся терминологии в [15]. Пусть F — подмножество некоторой векторной решетки E. Говорят, что F нормально содержится в E, если из соотношений $x \in F, y \in E, |y| \leqslant |x|$ следует, что $y \in F$.

Норма $\|\cdot\|$ на векторной решетке называется монотонной, если $\|x\| \leqslant \|y\|$ для любых двух элементов $x, y \in E$, таких, что $|x| \leqslant |y|$. Векторная решетка, снабженная монотонной нормой и полная по этой норме, называется банаховой решеткой. Банахова решетка (БР) называется решеткой минимального типа, если всякий порядковый интервал $[-e, e] \subset E$ слабо компактен. Примерами таких решеток могут служить пространства $L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Пусть (Ω, Σ, μ) — произвольное пространство с положительной мерой. $L_0(\mu) = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначает решетку всех (классов эквивалентности) скалярнозначных μ-измеримых функций на Ω.

Если мера μ σ-конечна, то в пространстве $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ каждое порядково ограниченное множество имеет супремум и инфимум. Обозначения $L_p(\mu) := L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ стандартны. Для $A \in \Sigma$ через χ_A мы обозначим характеристическую функцию множества A.

Под чисто неатомической мерой μ мы понимаем меру, обладающую следующим свойством: для всякого множества $A \in \Sigma, \mu(A) > 0$, существует такое множество $B \in \Sigma, B \subset A$, что $\mu(B) > 0$. Если в Ω найдется такое подмножество $\Omega_0 \in \Sigma$, что сужение меры μ на него (т. е. на σ-алгебру $\Sigma|_{\Omega_0}$) является ненулевой чисто неатомической мерой, то мы говорим, что мера μ — не чисто атомическая. В противном случае мера μ называется чисто атомической.

Пусть ниже в разделе (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой.Для $f \in L_0(\mu)$ мы полагаем $\operatorname{supp} f = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq 0\}$; если $F \subset L_0(\mu)$, то $\operatorname{supp} F$ представляет собой наименьшее множество, принадлежащее Σ и содержащее носители $\operatorname{supp} f$ для всех $f \in F$.

Пусть E — векторная подрешетка в $L_0(\mu)$. Мы будем говорить, что E *дискретно,* если сужение μ на σ-алгебру

$$\Sigma_0 = \Sigma|_{\operatorname{supp} E} = \{A \cap \operatorname{supp} E \mid A \in \Sigma\}$$

есть чисто атомическая мера.

Говорят, что E является *идеальным пространством,* если из соотношений $f \in L_0(\mu)$, $g \in E$ и $|f| \leqslant |g|$ вытекает, что $f \in E$; если, дополнительно, E — банахова подрешетка, то E называется *банаховым идеальным пространством* (мы будем коротко писать ИП и БИП, соответственно).

Для векторной подрешетки $E \subset L_0(\mu)$ мы определим *дуальное ИП* E' как пространство

$$E' = \{g \in L_0(\mu) \mid \operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} E,\ gf \in L_1(\mu)\} \quad \text{для всех } f \in E.$$

Пусть E и F — векторные подрешетки в $L_0(\mu)$. Мы будем писать $E \prec F$, если $\operatorname{supp} E \subset \operatorname{supp} F$ и существует последовательность $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ множеств $\Omega_n \in \Sigma$ такая, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} = \operatorname{supp} E$ и $f\chi_{\Omega_n} \in F$ для всех $f \in E$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (т. е. $E|_{\Omega_n} \subset F|_{\Omega_n}$).

Простое доказательство следующего предложения сводится к стандартным теоретико-множественным рассуждениям, и мы его опускаем.

Предложение 2.1.1. *Пусть* $E \subset L_0(\mu)$ — *ИП. Тогда*

(1) *если* $\operatorname{supp} E = \Omega$, *то* $L_\infty \prec E$;

(2) *множество* $X = \{f \in E \mid f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k},\ A_k \cap A_j = \emptyset \ \text{ если } \ k \neq j\}$ *плотно в* E *в топологии "равномерной сходимости п.в.", т. е. для всякой функции* $g \in E$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая функция* $f \in X$, *что* $|f(\omega) - g(\omega)| < \varepsilon$ *п.в. на* Ω.

2. Банаховозначные объекты. В этом разделе мы придерживаемся терминологии из [71]. Пусть X — банахово пространство, (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-коечной мерой. Если $Z \subset X$, то функция $\overline{f} : \Omega \to X^*$ со значениями в X^* называется Z-скалярно μ-измеримой (или просто "Z-скалярно измеримой"), если для каждого $x \in Z$ μ-измерима функция $\langle x, \overline{f}\rangle$. Две Z-скалярно измеримые функции $\overline{f}, \overline{g}$ называются Z-скалярно эквивалентными, если для любого $x \in Z$ п. в. на Ω имеет место равенство $\langle \overline{f}, x\rangle = \langle \overline{g}, x\rangle$.

Если $\overline{f} : \Omega \to X^*$ — такая X-скалярно измеримая функция, что $|\langle \overline{f}, x\rangle| \leqslant g \in L_1(\mu)$ для каждого $x \in X$, то имеет смысл интеграл $\int \overline{f}\, d\mu = \int_\Omega \overline{f}(\omega)\, d\mu(\omega)$, определяемый как линейный непрерывный функционал $\Phi \in X^* : \langle \Phi, x\rangle = \int_\Omega \langle \overline{f}(\omega), x\rangle\, d\mu(\omega)$ для $x \in X$. Функция вида $\overline{\varphi}(\omega) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(\omega)\, x_n$, где $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ — набор попарно не пересекающихся множеств из Σ и $\{x_n\}_{n=1}^{N} \subset X$, называется простой.

Интеграл Бохнера от функции $\overline{\varphi}$ по множеству $A \in \Sigma$ определяется как сумма $\sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap A_n)\, x_n \in X$.

Функция $\overline{f} : \Omega \to X$ называется μ-измеримой (по Бохнеру, сильно μ-измеримой), если существует последовательность простых функций $\overline{\psi}_n : \Omega \to X$, сходящаяся к $\overline{f}$ почти везде на Ω, т. е. $\|\overline{f}(\omega) - \overline{\psi}_n(\omega)\| \to 0$ при $n \to +\infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Функция $\overline{f}$ μ-измерима тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\Omega_\varepsilon \in \Sigma$, что $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ и на Ω_ε функция $\overline{f}$ является равномерным пределом последовательности простых функций (теорема Егорова). И еще один классический критерий: функция $f : \Omega \to X^*$ является μ-измеримой по Бохнеру в том и только в том случае, когда она X-скалярно измерима и почти сепарабельнозначна (т. е. существует множество $F \in \Sigma$ нулевой меры, для которого множество $\overline{f}(\Omega \setminus F)$ сильно сепарабельно в X^*).

Функция $\overline{f}$ называется интегрируемой по Бохнеру (относительно меры μ), или просто "интегрируемой", если она μ-измерима и если существует такая последовательность простых функций $\overline{\psi}_n : \Omega \to X$, что $\int_\Omega \|\overline{f}(\omega) - \overline{\psi}_n(\omega)\|\, d\mu(\omega) \to 0$ при $n \to +\infty$. В этом случае интеграл Бохнера от $\overline{f}$ по множеству $A \in \Sigma$ определяется равенством $\int_A \overline{f}\, d\mu = \lim_n \int_A \overline{\psi}_n\, d\mu$. Функция $\overline{f}$ интегрируема (по Бохнеру) тогда и только тогда, когда она μ-измерима и $\int_\Omega \|\overline{f}(\omega)\|\, d\mu(\omega) < +\infty$. Векторное пространство $L_1(\mu; X) := L_1(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ всех интегрируемых по Бохнеру (относительно μ) функций $\overline{f} : \Omega \to X$ с нормой $\|\overline{f}\|_{L_1(\mu;X)} = \int_\Omega \|\overline{f}(\omega)\|\, d\mu(\omega)$ является банаховым пространством (как обычно, функции, равные почти везде на Ω, отождествляются). Если $0 < p \leqslant +\infty$, то через $L_p(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ (или через $L_p(\mu; X)$, когда это не вызывает недоразумений) обозначается пространство всех μ-измеримых функций $\overline{f} : \Omega \to X$, для которых $\|\overline{f}\|_{L_p(\mu;X)} := \left(\int \|\overline{f}\|^p\, d\mu\right)^{1/p} < +\infty$.

В общем случае, если E — векторная подрешетка в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и X — банахово пространство, то $E(X)$ обозначает векторное пространство всех μ-измеримых (по Бохнеру) функций $\overline{f} : \Omega \to X$ таких, что функция $\|\overline{f}\|_X$ принадлежит E. В случае, когда E — банахова подрешетка в $L_0(\mu)$, $E(X)$ является банаховым пространством с нормой $\|\overline{f}\|_{E(X)} = \|\, \|\overline{f}\|_X \,\|_E$.

Счетно-аддитивное отображение $\overline{m} : \Sigma \to X$ называется X-значной мерой. Для каждого множества $A \in \Sigma$ вариация меры $\overline{m}$ на A, обозначаемая через $V_{\overline{m}}(A)$, определяется следующим образом: $V_{\overline{m}}(A) := \sup\{\sum_{i=1}^{n} \|\overline{m}(A_i)\|\}$, где супремум берется по всем конечным разбиениям $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ $(A_i \in \Sigma)$ множества A. Мера $\overline{m}$ имеет ограниченную вариацию, если $V_{\overline{m}}(\Omega) < +\infty$. В этом случае $V_{\overline{m}}$ — конечная положительная мера на Σ. Мера ограниченной вариации $\overline{m}$ абсолютно непрерывна относительно μ (или μ-абсолютно непрерывна), если $\overline{m}(A) = 0$ для любого такого множества $A \in \Sigma$, что $\mu(A) = 0$ (эквивалентно, если $V_{\overline{m}}$ — абсолютно непрерывная относительно μ мера). Мы будем писать $\overline{m} = \overline{f}\,\mu$ (где $\overline{f} \in L_1(\mu; X)$), если $\overline{m}(A) = \int_A \overline{f}\, d\mu$ для $A \in \Sigma$ (в этом случае говорят, что мера $\overline{m}$ имеет производную относительно меры μ). Заметим, что если $\overline{m} = \overline{f}\,\mu$, то $V_{\overline{m}} = \|\overline{f}\|\,\mu$, т. е. $V_{\overline{m}}(A) = \int_A \|\overline{f}(\omega)\|\, d\mu(\omega)$ для всех $A \in \Sigma$. Для каждой меры $\overline{m} : \Sigma \to X$ ограниченной вариации и любой функции $f \in L_1(\Omega, \Sigma, V_{\overline{m}})$ определен интеграл $\int f\, d\overline{m}$, причем $\| \int f\, d\overline{m}\| \leqslant \int |f|\, dV_{\overline{m}}$ (см. [71]).

2. Меры Радона и универсальная измеримость. Пусть (Z,τ) — отделимое вполне регулярное топологическое пространство Через $\mathfrak{B}(Z,\tau)$ мы будем обозначать σ-алгебру борелевских подмножеств пространства (Z,τ) (т. е. минимальную σ-алгебру подмножеств пространства (Z,τ), содержащую все открытые множества). Под *мерой Радона* на пространстве (Z,τ) мы понимаем конечную неотрицательную меру μ, заданную на σ-алгебре $\mathfrak{B}(Z,\tau)$ и удовлетворяющую следующему условию регулярности:

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset B,\ K \text{ — компакт}\},\ B \subset \mathfrak{B}(Z,\tau).$$

(см. [149]). Совокупность всех мер Радона на пространстве (Z,τ) мы обозначаем через $W(Z,\tau)$ или, если это не приводит к недоразумению, через $W(Z)$.

Пусть $\mu \in W(Z,\tau)$ и f — некоторое отображение из Z в отделимое топологическое пространство (T,τ_0).

Отображение $f : Z \to T$ называется τ_0-*измеримым,* (относительно μ), если для любого компакта $K \subset Z$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset K$, что $\mu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и отображение f непрерывно на K_ε. В случае, когда (T,τ_0) — банахово пространство, τ_0-измеримые отображения $f : Z \to T$ будем называть *сильно измеримыми.*

Отображение $f : Z \to T$ *универсально* τ_0-*измеримо,* если оно τ_0-измеримо относительно каждой меры Радона на (Z,τ).

§3. Операторные идеалы и тензорные произведения

1. Операторные идеалы. Говоря об операторных идеалах в нормированных пространствах, мы будем придерживаться терминологии (но не обозначений!) монографии А. Пича [27] (см. также [124, 125]). Напомним, как вводится понятие операторного идеала.

Пусть для произвольных пространств X, Y в каждом $\mathrm{L}(X,Y)$ выделено некоторое подмножество $\mathrm{J}(X,Y)$. Говорят, что

$$\mathrm{J} := \bigcup_{X,Y} \mathrm{J}(X,Y)$$

есть *операторный идеал*, если выполняются следующие условия:

(I_1) $x' \otimes y \in \mathrm{J}(X,Y)$ для $x' \in X^*$ и $y \in Y$.

(I_2) $S + T \in \mathrm{J}(X,Y)$ для $S, T \in \mathrm{J}(X,Y)$.

(I_3) $BTA \in \mathrm{J}(X_0,Y_0)$ для $T \in \mathrm{J}(X,Y)$, $A \in \mathrm{L}(X_0,X)$ и $B \in \mathrm{L}(Y,Y_0)$.

Так как условие (I_3) влечет за собой включение $\lambda T \in \mathrm{J}(X,Y)$ для произвольных числа λ и $T \in \mathrm{J}(X,Y)$, то каждая *компонента* $\mathrm{J}(X,Y)$ идеала J есть линейное подмножество в $\mathrm{L}(X,Y)$. Иногда для сокращения обозначений мы будем писать $\mathrm{J}(X)$ вместо $\mathrm{J}(X,X)$.

Под *идеальной нормой* на операторном идеале J мы понимаем правило j, которое ставит в соответствие каждому оператору $T \in \mathrm{J}$ неотрицательное число $\mathrm{j}(T)$ так, что выполнены следующие условия:

(N_1) $\mathrm{j}(x' \otimes y) = \|x'\| \, \|y\|$ для $x' \in X^*$ и $y \in Y$.

(N_2) $\mathrm{j}(S+T) \leqslant \mathrm{j}(S) + \mathrm{j}(T)$ для $S, T \in \mathrm{J}(X,Y)$.

(N_3) $\mathrm{j}(BTA) \leqslant \|B\| \, \mathrm{j}(T) \, \|A\|$ для $T \in \mathrm{J}(X,Y)$, $A \in \mathrm{L}(X_0, X)$ и $B \in \mathrm{L}(Y, Y_0)$.

(Это действительно норма на каждой компоненте, поскольку для любого числа λ и для $T \in \mathrm{J}(X,Y)$ условие (N_3) влечет за собой выполнение равенства $\mathrm{j}(\lambda T) = |\lambda| \, \mathrm{j}(T)$).

Нормированный операторный идеал — это пара (J, j), где J — операторный идеал, а j — некоторая идеальная норма на нем.

Часто требуется более общее понятие, чем понятие идеальной нормы. Говорят, что j есть идеальная квази-норма, если помимо условий (N_1) и (N_3) выполнено обобщенное неравенство треугольника: $\mathrm{j}(S+T) \leqslant c\,[\mathrm{j}(S) + \mathrm{j}(T)]$ для $S, T \in \mathrm{J}(X,Y)$, где постоянная $c \geqslant 1$ не зависит от рассматриваемых пространств X и Y. Для любой идеальной квази-нормы j существует такое число $p \in (0,1]$, что $\mathrm{j}(S+T)^p \leqslant \mathrm{j}(S)^p + \mathrm{j}(T)^p$ для всех $S, T \in \mathrm{J}$ (надо взять p, для которого $c = 2^{1/p-1}$).

Под *банаховым операторным идеалом* понимается идеал операторов J, снабженный идеальной нормой j, такой, что все компоненты $\mathrm{J}(X,Y)$ полны в смысле сходимости по этой норме (это — "полный нормированный идеал"). Аналогично определяется квази-банахов операторный идеал.

Пусть (J, j) — произвольный операторный идеал. *Замкнутая оболочка* $\overline{\mathrm{J}}$ идеала J есть идеал с компонентами $\overline{\mathrm{J}}(X,Y) := \overline{\mathrm{J}(X,Y)}$, где замыкание берется в обычной равномерной топологии на $\mathrm{L}(X,Y)$. Идеал J называется *замкнутым*, если $\overline{\mathrm{J}} = \mathrm{J}$. *Дуальный идеал* $\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$ к идеалу J есть операторный идеал, состоящий из операторов T, для которых $T^* \in \mathrm{J}$. Если идеал J — нормированный с нормой j, то его дуальный идеал $\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$ также нормированный и норма в последнем вводится естественным образом: $\mathrm{j}^{\mathrm{dual}}(T) := \mathrm{j}(\mathrm{T}^*)$. Для нормированного операторного идеала (J, j) его регулярная, инъективная и сюръективная оболочки вводятся следующим образом. Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Оператор T принадлежит

1) *регулярной оболочке* $\mathrm{J}^{\mathrm{reg}}(X,Y)$, если $\pi_Y T \in \mathrm{J}(X, Y^{**})$; при этом $\mathrm{j}^{\mathrm{reg}}(T) = \|T\|_{\mathrm{J}^{\mathrm{reg}}(X,Y)} := \|\pi_Y T\|_{\mathrm{J}(X,Y^{**})}$;

2) *инъективной оболочке* $\mathrm{J}^{\mathrm{inj}}(X,Y)$, если $iT \in \mathrm{J}(X, Y_0)$ для какого-либо изометрического вложения i пространства Y в некоторое банахово пространство Y_0 (например, в некоторое пространство $l_\infty(\Gamma)$); при этом $\mathrm{j}^{\mathrm{inj}}(T) = \|T\|_{\mathrm{J}^{\mathrm{inj}}(X,Y)} := \|iT\|_{\mathrm{J}(X,Y_0)}$;

3) *сюръективной оболочке* $\mathrm{J}^{\mathrm{sur}}(X,Y)$, если $T\varphi \in \mathrm{J}(X_0, Y)$ для какого-либо факторотображения φ некоторого банахова пространства X_0 на пространство X (например, для некоторого факторотображения из $l_1(\Gamma)$ на X); при этом $\mathrm{j}^{\mathrm{sur}}(T) = \|T\|_{\mathrm{J}^{\mathrm{sur}}(X,Y)} := \|T\varphi\|_{\mathrm{J}(X_0,Y)}$.

Нормированный операторный идеал (J, j) называется *регулярным*, если $(\mathrm{J}, \mathrm{j}) = (\mathrm{J}^{\mathrm{reg}}, \mathrm{j}^{\mathrm{reg}})$, *инъективным*, если $(\mathrm{J}, \mathrm{j}) = \left(\mathrm{J}^{\mathrm{inj}}, \mathrm{j}^{\mathrm{inj}}\right)$ *сюръективным*, если $(\mathrm{J}, \mathrm{j}) = (\mathrm{J}^{\mathrm{sur}}, \mathrm{j}^{\mathrm{sur}})$.

(все равенства должны выполняться вместе с равенством соответствующих норм). Совершенно аналогично вводятся понятия регулярности и т. п. для квазинормированных операторных идеалов.

2. Примеры операторных идеалов. Мы используем следующие обозначения для классических операторных идеалов (основную информацию из теории операторных идеалов можно найти в [27], но мы придерживаемся несколько других обозначений и терминологии; см. [121, 120, 78]):

$[\Pi_p, \pi_p]$ — идеал абсолютно p-суммирующих операторов;

$[\mathrm{N}_p, \nu_p]$ — идеал p-ядерных операторов;

$[\mathrm{I}_p, i_p]$ — идеал (строго) p-интегральных операторов;

$[\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}, i_p^{\mathrm{Gr}}]$ — идеал p-интегральных по Гротендику операторов;

$[\mathrm{QN}_p, \pi_p]$ — идеал квази-p-ядерных операторов.

Напомним определения (нужные нам в дальнейшем переформулировки, которыми мы также будем пользоваться, можно найти, например, в [27, 121, 120, 78]). Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$.

Для $0 < p \leqslant \infty$ оператор T называется *абсолютно p-суммирующим,* если существуют такая постоянная $C > 0$, что для любого конечного набора $\{x_n\}_{n=1}^M \subset X$ выполняется соотношение $\alpha_p(Tx_n) \le C\,\varepsilon_p(x_n)$; соответствующая (квази)норма $(\inf C)$ обозначается через $\pi_p(T)$. Отметим, что $[\Pi_\infty, \pi_\infty]$ есть не что иное, как $[\mathrm{L}, \|\cdot\|]$.

Для $p \in [1, \infty]$ оператор T называется *p-ядерным*, если его можно представить в следующем виде:

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle\, y_k \qquad \text{для } x \in X, \tag{2.1}$$

где последовательности $(x'_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ таковы, что конечна величина

$$\nu_p := \alpha_p(x'_n)\,\varepsilon_{p'}(y_n);$$

соответствующая норма $(\inf \nu_p)$ обозначается через $\nu_p(T)$. Для $0 < p \leqslant 1$ оператор T p-ядерен, если он допускает представление вида (2.1), в котором $\nu_p := \left(\sum (\|x'_n\|\,\|y_n\|)^p\right)^{1/p} < \infty$; соответствующая квазинорма $(\inf \nu_p)$ обозначается также через $\nu_p(T)$. Во всех случаях мы будем называть разложения оператора T в ряд вида (2.1) *подходящим разложением.* При $p = 1$ принято употреблять термин "ядерный" и обозначать N_1 и ν_1 также через N и ν соответственно.

Для любого $p > 0$ оператор T является p-ядерным тогда и только тогда, когда он факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{\ A\ } c_0 \xrightarrow{\ \Delta\ } l_p \xrightarrow{\ B\ } Y,$$

где A, B — непрерывные, а Δ — диагональный операторы.

Для $p \in [1,\infty]$ оператор $T : X \to Y$ называется (*строго*) *p-интегральным* (*p*-интегральным по Пичу), если он допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{A} C(K) \xrightarrow{j} L_p(K,\mu) \xrightarrow{B} Y,$$

где K — некоторый компакт, μ — вероятностная мера Радона на нем, j — оператор "тождественного вложения" и A, B — непрерывные операторы. Норма в пространстве $\mathrm{I}_p(X,Y)$ вводится следующим образом: $i_p(T) = \inf \|A\|\,\|B\|$. При $p = 1$ принято употреблять термин "интегральный" и обозначать I_1 и i_1 также через I и i соответственно.

Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и $\pi_Y T \in \mathrm{I}_p(X,Y^{**})$, то мы говорим, что оператор T является *p-интегральным по Гротендику*: $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$; норма $i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$ индуцируется из $\mathrm{I}_p(X,Y^{**})$. Для $p = 1$ применяем те же соглашения, что и выше.

Отметим, что $\mathrm{I}_p^{\mathrm{reg}}$ — это нормированный идеал таких операторов T, что второй сопряженный к T оператор лежит в I_p, или, другими словами, не что иное, как идеал $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$ с нормой $i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$.

Для $1 \le p \leqslant \infty$ оператор $T : X \to Y$ является *квази-p-ядерным*, $T \in \mathrm{QN}_p(X,Y)$, если для некоторого изометрического вложения $i : Y \to L_\infty(\mu)$ суперпозиция iT принадлежит пространству $\mathrm{N}_p(X, L_\infty(\nu))$. Норма в $\mathrm{QN}_p(X,Y)$ индуцируется из пространства $\Pi_p(X,Y)$.

В монографии [27] идеал квази-p-ядерных операторов явно не упоминается, — о нем лишь немного говорится в разделе 19.2.16 из [27], как об инъективной оболочке идеала p-ядерных операторов. Приведем две соответствующие фразы из [27], поскольку мы хотим их прокомментировать (мы сохраним полностью обозначения монографии [27]: $\mathfrak{I}_r, \mathfrak{N}_r, \mathfrak{G}$ — соответственно идеалы r-интегральных (по Гротендику), r-ядерных и аппроксимируемых операторов): "... Ясно, что $[\mathfrak{I}_r, \mathbb{I}_r]^{\mathrm{inj}}$ служит максимальной оболочкой для $[\mathfrak{N}_r, \mathbb{N}_r]^{\mathrm{inj}}$. Но представляется весьма маловероятным, чтобы $[\mathfrak{N}_r, \mathbb{N}_r]^{\mathrm{inj}}$ совпадало с минимальным ядром идеала $[\mathfrak{I}_r, \mathbb{I}_r]^{\mathrm{inj}}$, иными словами, мы не знаем, справедливо ли равенство $[\mathfrak{N}_r, \mathbb{N}_r]^{\mathrm{inj}} = [\mathfrak{G}, \|\cdot\|] \circ [\mathfrak{I}_r, \mathbb{I}_r]^{\mathrm{inj}} \circ [\mathfrak{G}, \|\cdot\|]$." Действительно, инъективная оболочка идеала r-ядерных операторов (т.е. идеал всех квази-r-ядерных операторов) не совпадает с минимальным ядром идеала r-интегральных операторов ни при каком $r \in [1,\infty]$; это, например, следует из теоремы 4.2,3) и следствия 4.12 [52], либо из следствия II.7.1.1 ниже; см. также [130].

Если A — операторный идеал, то оператор, лежащий в A, мы часто будем называть A-*оператором*.

Приведем еще очень важные для нас примеры.

Пусть $p \in [1,\infty]$.

Мы говорим, что оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *принадлежит идеалу* N^p, если он представим в виде

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes y_n,$$

где последовательности (x'_n) и (y_n) таковы, что $\varepsilon_{p'}(x'_n) < \infty$, $\alpha_p(y_n) < \infty$. С нормой $\nu^p(T) := \inf \varepsilon_{p'}(x'_n)\alpha_p(y_n)$ класс N^p становится нормированным операторным идеалом. Это — почти дуальный к N_p идеал; дуальный к N_p операторный идеал есть на самом деле идеал $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}$, и оператор $T \in \mathrm{N}_p^{\mathrm{dual}}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $\pi_Y T \in \mathrm{N}^p(X, Y^{**})$. Вот иная характеристика операторов T, лежащих в $\mathrm{N}^p(X,Y)$. Оператор T является N^p-оператором в том и только том случае, если он факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{A} l_{p'} \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{B} Y,$$

где Δ — диагональный оператор с диагональю из l_p, A, B — операторы единичной нормы; при этом $\nu^p(T)$ есть infimum норм диагоналей в l_p.

Далее, мы говорим, что оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ принадлежит идеалу I^p, если он допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{A} L_{p'}(\mu) \overset{j}{\hookrightarrow} L_1(\mu) \xrightarrow{B} Y,$$

где μ — вероятностная мера, j — тождественное вложение, A и B — непрерывные операторы; при этом полагаем : $i^p(T) = \inf \|A\|\,\|B\|$, где inf берется по всевозможным факторизациям оператора T указанным образом. В этом месте нам удобно ввести еще одно определение: будем говорить, что оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *лежит в идеале* $\mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}$, если $\pi_Y T \in \mathrm{I}^p(X, Y^{**})$; при этом мы полагаем $i^p_{\mathrm{Gr}}(T) := i^p(\pi_Y T)$. Класс $[\mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}, i^p_{\mathrm{Gr}}]$ действительно является нормированным операторным идеалом.

Имеют место равенства

$$[\mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}, i^p_{\mathrm{Gr}}] = [\mathrm{I}_p^{\mathrm{dual}}, i_p^{\mathrm{dual}}], \quad [\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}, i_p^{\mathrm{Gr}}] = [(\mathrm{I}^p)^{\mathrm{dual}}, (i^p)^{\mathrm{dual}}].$$

В монографии А.Пича [27] некоторые из рассмотренных только что идеалов являются частными случаями идеалов так называемых (r,p,q)-ядерных и (r,p,q)-интегральных операторов.

3. Тензорные произведения. Для банаховых пространств X, Y алгебраическое тензорное произведение $X^* \otimes Y^*$ их банаховых сопряженных пространств определяет естественным образом линейное подпространство в алгебраически сопряженном к тензорному произведению $X \otimes Y$ пространстве: если $(x'_k)_{k=1}^n \subset X^*$, $(y')_{k=1}^n \subset Y^*$, то значение тензорного элемента $f := \sum_{k=1}^n x'_k \otimes y'_k$ на элементарном тензоре $x \otimes y$ $(x \in X, y \in Y)$ есть $f(x \otimes y) := \sum_{k=1}^n \langle x'_k, x\rangle \langle y'_k, y\rangle$ (на все пространство $X \otimes Y$ f продолжается по линейности). Более общо, для операторов $A \in \mathrm{L}(X,E)$ и $B \in \mathrm{L}(Y,F)$, действующих в банаховых пространствах, их алгебраическое тензорное произведение $A \otimes B$ определяется на элементарных тензорах вида $x \otimes y$ соотношением $(A \otimes B)(x \otimes y) := Ax \otimes By$ и далее продолжается на все тензорное произведение $X \otimes Y$ по линейности.

Пусть $\mathfrak{T}$ обозначает класс всех алгебраических тензорных произведений произвольных банаховых пространств. Отображение $\alpha : \mathfrak{T} \to [0, \infty)$ называется *тензорной нормой,* если для любых банаховых пространств X, Y α есть норма на $X \otimes Y$ и выполняются следующие условия:

T_1) $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, и

T_2) если $z \in X \otimes Y$, то для любых банаховых пространств E, F и операторов $A : X \to E$, $B : Y \to F$ имеет место неравенство $\alpha((A \otimes B)z) \leqslant \|A\| \, \|B\| \alpha(z)$.

Каждая тензорная норма является допустимой кросснормой в смысле определения 1 в [71, стр. 221], в котором выполнение условия T_2) требуется только для случая скалярнозначных операторов, т.е. функционалов на X и Y соответственно. Для тензорной нормы α нормированное пространство $(X \otimes Y, \alpha)$ обычно обозначается через $X \otimes_\alpha Y$, а его пополнение — через $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ (мы, однако, в большинстве случаев не будем придерживаться этой традиции).

На самом деле, для выполнения условия T_1) (при выполнении T_2)) достаточно требовать, чтобы норма α удовлетворяла формально более слабому условию, а именно, условию, которое получается из T_1) заменой равенства норм рассматриваемых там тензорных элементов на неравенство $\leqslant$ (см. [71, с. 222, предложение 2]).

В этой работе мы будем рассматривать, в основном, тензорные нормы на тензорных произведениях вида $X^* \otimes Y$; в этом случае тензорное произведение $X^* \otimes Y$ естественным образом отождествляется с линейным пространством всех конечномерных операторов из X в Y. В общем случае тензорное произведение $X \otimes Y$ можно представлять себе как линейное пространство всех *weak*-to-weak* непрерывных конечномерных линейных отображений из X^* в Y.

На классе $\mathfrak{T}$ имеются наибольшая (сильнейшая) и наименьшая (слабейшая) тензорные нормы [80] (см. также [71, с. 222 и далее]). Сильнейшая тензорная норма ν_1^0 на $X^* \otimes Y$ порождает (после пополнения по этой норме)*проективное тензорное произведение* Гротендика $X^* \widehat{\otimes} Y$ [80], а слабейшая $\| \cdot \|$ — *инъективное тензорное произведение* $X^* \widehat{\widehat{\otimes}} Y$, которое можно отождествить с пополнением линейного пространства всех конечномерных непрерывных отображений из X в Y, снабженного обычной операторной нормой $\| \cdot \|$, так что $X^* \widehat{\widehat{\otimes}} Y$ можно рассматривать как замкнутое линейное подпространство в $\mathrm{L}(X, Y)$, что мы и будем делать ниже. Из только что сказанного вытекает, что для всякой тензорной нормы α естественное отображение $X^* \otimes_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ продолжается по непрерывности до *канонического отображения* из $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$ в $\mathrm{L}(X, Y)$. Аналогично, в общем случае произведений вида $X \otimes Y$ естественное отображение $X \otimes_\alpha Y \to \mathrm{L}(X^*, Y)$ продолжается по непрерывности до канонического отображения из $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ в $\mathrm{L}(X^*, Y)$, причем образ этого отображения лежит в подпространстве всех *weak*-to-weak*-непрерывных операторов из X^* в Y.

Если $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$, — пополнение тензорного произведения по тензорной норме α и $z \in X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$, то ассоциированный с этим тензорным элементом оператор мы будем обозначать через $\widetilde{z}$ (аналогичное обозначение будем использовать и в случае $z \in X \widehat{\otimes}_\alpha Y$). Кроме того, в случае произвольной тензорной нормы α договоримся обозначать через $\mathrm{N}_{[\alpha]}(X, Y)$ образ (банахова) тензорного произведения $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$ при каноническом отображении $j_\alpha : X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$, так что изометрически

$$\mathrm{N}_{[\alpha]}(X, Y) = X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y / \operatorname{Ker} j_\alpha;$$

норму на $\mathrm{N}_{[\alpha]}(X,Y)$, индуцированную соответствующим факторотображением, мы обозначим через $\nu_{[\alpha]}$ (в конкретных ситуациях обозначения будут отличаться от введенных выше; это же замечание можно сделать и по поводу обозначений для различных аппроксимационных свойств, определения которых в общем виде приводятся ниже).

Пусть B, L обозначают, соответственно, классы всех банаховых пространств и всех (линейных непрерывных) операторов в банаховых пространствах, и пусть α — некоторая тензорная норма на $\mathfrak{T}$. Рассмотрим подкласс $\mathrm{N}_{[\alpha]}$ в L, компонентами которого являются банаховы операторные пространства $\mathrm{N}_{[\alpha]}(X,Y)$. Нетрудно видеть, что условия T_1) и T_2) гарантируют выполнение аксиом из определения нормированного идеала в [27, определения 1.1.1., 6.1.1, 6.2.2.], и поэтому пара $\left[\mathrm{N}_{[\alpha]}, \alpha\right]$ представляет собой (полный) нормированный операторный идеал.

Определим теперь *тензорную норму, дуальную к заданной тензорной норме* α. Мы полагаем, для $x \in X$ и $y \in Y$, $\alpha^{\mathrm{dual}}(x \otimes y) := \alpha(y \otimes x)$, или, более общо, $\alpha^{\mathrm{dual}}(\sum_{n=1}^{N} x_n \otimes y_n) := \alpha(\sum_{n=1}^{N} y_n \otimes x_n)$. Появляется естественная изометрия из $X \otimes_\alpha Y$ на $Y \otimes_{\alpha^{\mathrm{dual}}} X$, которая продолжается до изометрического оператора из $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ на $Y \widehat{\otimes}_{\alpha^{\mathrm{dual}}} X$. Ясно, что $(\alpha^{\mathrm{dual}})^{\mathrm{dual}} = \alpha$.

И еще обозначение: если $[\mathrm{A}, a]$ — квазинормированный операторный идеал, то $Z^* \widehat{\widehat{\otimes}}_a W$ замыкание множества конечномерных операторов в пространстве $\mathrm{A}(Z,W)$.

4. След. Пусть E — конечномерное линейное пространство, $A \in L(E)$ и пусть матрица оператора A в некотором фиксированном базисе пространства E обозначается снова через A. *След оператора* A есть след матрицы A, т.е. (мы одновременно вводим и обозначение для следа), если матрица $A = \{a_{ij}\}$, то $\mathrm{trace}\ A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Определение следа не зависит от выбора базиса и след оператора $A \in L(E)$ равен сумме всех его собственных чисел, взятых с учетом их алгебраических кратностей.

Любой непрерывный конечномерный оператор $T: X \to Y$ в произвольных нормированных пространствах X и Y допускает хотя бы одно представление в виде $T = \sum_{k=1}^{m} x'_k \otimes y_k$, где $\{x'_k\} \subset X^*$, а $\{y_k\} \subset Y$. Напомним, что последнее обозначение, использующее тензорные произведения, означает всего лишь, что оператор T действует следующим образом: если $x \in X$, то $Tx = \sum \langle x'_k, x\rangle y_k$.

Если A — оператор в конечномерном пространстве E, то для любого его разложения вида $A = \sum_{k=1}^{m} e'_k \otimes e_k$ имеет место формула $\mathrm{trace}\, A = \sum \langle e'_k, e_k\rangle$. Таким образом, с одной стороны, правая часть последнего соотношения не зависит от разложения оператора A в конечную сумму одномерных операторов и, с другой стороны, последнее равенство позволяет ввести понятие следа конечномерного оператора в бесконечномерных нормированных пространствах.

Если T — конечномерный оператор в произвольном нормированном пространстве X, то сумма $\sum \langle x'_k, y_k\rangle$ не зависит от представления T в виде (конечной) тензорной суммы одномерных операторов. Эта сумма называется *следом* конечномерного оператора T и обозначается через $\mathrm{trace}\ T$. Таким образом, корректно определен функционал $T \mapsto \mathrm{trace}\ T$ на каждой компоненте вида $X^* \otimes X$ идеала всех конечномерных операторов (характеристическим свойством этого функционала является равенство trace $x' \otimes x = \langle x', x\rangle$). Так же как и в случае конечномерных пространств, имеет место важное соотношение коммутативности для следа: для любых конечномерных операторов $A \in X^* \otimes Y$, $T \in Y^* \otimes X$ имеет место равенство $\operatorname{trace} AT = \operatorname{trace} TA$. В частности, след любого проектора на конечномерное подпространство (конечномерного проектора) в любом нормированном пространстве равен размерности этого подпространства.

Ядерная норма на пространстве всех операторов $L(E, F)$, где E и F — конечномерны, вводится следующим образом: если $A \in L(E, F)$, то

$$\nu(A) := \sup_{\substack{S \in L(F,E) \\ \|S\| \leqslant 1}} \operatorname{trace} AS.$$

С этой нормой пространство линейных операторов (в конечномерных пространствах) обозначается обычно так: $N(E, F)$. В условиях этого определения $\forall E, F, A, S$ $|\operatorname{trace} AS| \leqslant \nu(A)\,\|S\|$. Это неравенство позволяет описать банаховы сопряженные пространства:

$$(L(E,F), \|\cdot\|)^* = (N(F,E), \nu) \quad \text{и} \quad (N(E,F), \nu)^* = (L(F,E), \|\cdot\|)$$

для всех конечномерных E, F. Двойственность задается с помощью следа.

Для случая конечномерных пространств E, F любой оператор $T : E \to F$ может быть представлен не только в виде *конечной суммы* одномерных операторов, но и, в частности, в виде абсолютно сходящегося ряда

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n \otimes f_n, \qquad e'_n \in E^*,\ f_n \in F, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|e'_n\|\,\|f_n\| < \infty.$$

Оказывается, что ядерная норма оператора T совпадает в рассматриваемой конечномерной ситуации с числом $\inf \sum_{n=1}^{\infty} \|e'_n\|\,\|f_n\|$, где инфимум берется по всевозможным представлениям оператора T в указанном виде. Последнее позволяет (следуя А. Гротендику) ввести понятие ядерного оператора в произвольных банаховых пространствах. В этом месте, однако, надо быть весьма осторожным.

Для *конечномерных операторов* $T \in X^* \otimes Y$ (пространства X, Y — банаховы) имеются две возможности определения "ядерной нормы". Первая:

$$\nu^0(T) := \inf \sum_{n=1}^{N} \|x'_n\|\,\|y_n\| : \ T = \sum_{n=1}^{N} x'_n \otimes y_n,\ N \in \mathbb{N},$$

и вторая:

$$\nu(T) := \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|\,\|y_n\| : \ T = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes y_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\|\,\|y_n\| < \infty.$$

Весьма нетривиальным является тот факт (П. Энфло [75]), что существуют банаховы пространства X, Y, для которых эти нормы на $X^* \otimes Y$ различаются между собой. Пополнение пространства $X^* \otimes Y$ всех конечномерных операторов из X в Y по первой норме ν^0 дает проективное тензорное произведения Гротендика $X^* \widehat{\otimes} Y$, по второй норме — линейное подпространство $\mathrm{N}(X, Y)$ в $\mathrm{L}(X, Y)$, состоящее как раз из ядерных операторов [80]. Это линейное подпространство $\mathrm{N}(X, Y)$, снабженное нормой ν (всякий оператор из $\mathrm{N}(X, Y)$ допускает соответствующее разложение в абсолютно сходящийся ряд одномерных операторов), есть гротендиковское банахово пространство ядерных отображений. Оно является факторпространством пространства $X^* \widehat{\otimes} Y$ при естественном отображении j из $X^* \widehat{\otimes} Y$ в $\mathrm{L}(X, Y)$ (тождественное отображение $(X^* \otimes Y, \nu^0) \to \mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно и однозначно продолжается по непрерывности до этого отображения j).

Функционал trace линеен и непрерывен на пространстве $(X^* \otimes X, \nu^0)$ и поэтому также продолжается до линейного непрерывного функционала (обозначаемого также через trace) на $X^* \widehat{\otimes} X$. След $\operatorname{trace}(\cdot)$ позволяет отождествить сопряженное пространство к пространству $X^* \widehat{\otimes} Y$ с банаховым пространством $\mathrm{L}(Y, X^{**})$. Для $z \in X^* \widehat{\otimes} Y$ и $T \in \mathrm{L}(Y, X^{**})$ полагаем $\langle T, z \rangle := \operatorname{trace} T \circ z$. Здесь выражение $T \circ z$ означает "суперпозицию" оператора T и тензорного элемента z : если $z = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes y_n$ — какое-либо представление элемента z в проективном тензорном произведении $X^* \widehat{\otimes} Y$, то $T \circ z := \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes T y_n \in X^* \widehat{\otimes} X^{**}$ (как было сказано ранее, мы в большинстве случаев отождествляем банахово пространство с его естественной изометрической копией во втором сопряженном пространстве). По другому суперпозицию $T \circ z$ можно определить как образ элемента $z \in X^* \widehat{\otimes} Y$ при естественном отображении $\mathrm{id}_X \otimes T : X^* \widehat{\otimes} Y \to X^* \widehat{\otimes} X^{**}$. След $\operatorname{trace} T \circ z$ равен $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x'_n, T y_n \rangle$ и не зависит от выбранного представления для z. Все только что изложенное — упрощенный вариант первоначальных построений в [80]

5. Примеры тензорных произведений. Приведем основные примеры тензорных норм и произведений, с которыми мы будем иметь дело в данной работе (некоторые тензорные нормы будут также определены в других параграфах).

Конечная p-ядерная тензорная норма $||\cdot||_p$ для $p \in [1, +\infty]$ определяется на произведении $X \otimes Y$ следующим образом: если $z \in X \otimes Y$, то

$$(1) \qquad ||z||_p := \inf \left(\sum_{k=1}^{N} \|x_k\|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\| \le 1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{N} | < y_k, y' > |^{p'} \right)^{1/p'} \right\},$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^{N} x_k \otimes y_k$ (формально, формула (1) имеет смысл лишь при конечном показателе $p > 1$; в случаях $p = 1$ и $p = +\infty$ в этом определении нужно произвести соответствующие тривиальные изменения, на которых мы не останавливаемся). Для $0 < p \leqslant 1$ мы определяем p-проективную квазинорму $||\cdot||_p$ на произведении $X \otimes Y$ так: если $z \in X \otimes Y$, то

$$||z||_p := \inf \left(\sum_{k=1}^{N} (\|x_k\|\|y_k\|)^p \right)^{1/p},$$

где infimum берется по представлениям тензорного элемента z в виде $z = \sum_{k=1}^{N} x_k \otimes y_k$. Пополнение тензорного произведение $X \otimes Y$ по квазинорме $\|\cdot\|_p$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначается через $X \widehat{\otimes}_p Y$. В случае, когда $p \in [1, \infty]$, пополнение тензорного произведения $X \otimes Y$ по дуальной к $\|\cdot\|_p$ норме обозначается через $X \widehat{\otimes}^p Y$.

Если $p \in [1, \infty]$, то сопряженное к тензорному произведению $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ пространство есть $\Pi_{p'}(Y, X^{**})$, а сопряженное к тензорному произведению $X^* \widehat{\otimes}^p Y$ пространство отождествляется с $\Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(Y, X^{**})$ (двойственность задается стандартным образом при помощи следа суперпозиции тензорного элемента и оператора, порождающего функционал). Выбранный нами термин "p-проективная" обусловлен тем, что если $p \in (0,1)$, то, как и в случае $p = 1$ (см. [71, с. 229, предложение 12]), для подпространства Z некоторого банахова пространства X тензорное произведение $(X/Z) \widehat{\otimes}_p Y$ есть факторпространство пространства $X \widehat{\otimes}_p Y$ и $Y \widehat{\otimes}_p (X/Z)$ — факторпространство пространства $Y \widehat{\otimes}_p X$, каково бы не было Y.

Для $p \geqslant 1$ пусть $X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_p Y$ — замыкание в $\Pi_p(X, Y)$ множества конечномерных операторов. Сопряженное к $X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_p Y$ пространство отождествляется с $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(Y, X^{**})$; при $p = \infty : X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_\infty Y = X^* \widehat{\widehat{\otimes}} Y$ и $(X^* \widehat{\widehat{\otimes}} Y)^* = \mathrm{I}(Y, X^{**}) = \mathrm{I}^{\mathrm{Gr}}(X, Y^{**})$.

Рассмотренные тензорные произведения, очевидно, тесно связаны с соответствующими операторными идеалами. Так, для любых банаховых пространств X, Y пространство $\mathrm{N}_p(X, Y)$ есть факторпространство тензорного произведения $X^* \widehat{\otimes}_p Y$, каково бы ни было $p > 0$; $\mathrm{N}^p(X, Y)$ — факторпространство тензорного произведения $X^* \widehat{\otimes}^p Y$.

Примеры других тензорных норм и произведений будут появляться ниже по мере необходимости.

6. Аппроксимационные свойства. Понятия свойств аппроксимации А. Гротендика, о которых говорилось в конце §1, можно эквивалентным образом ввести, используя тензорные произведения А. Гротендика. Именно: пространство Y обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes} Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ взаимно однозначно для любого пространства X. Пространство Y обладает свойством C-MAP тогда и только тогда, когда для каждого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes} Y \to \mathrm{I}(X, Y^{**})$ является C-изометрическим. Таким образом, Y обладает свойством ограниченной аппроксимации тогда и только тогда, когда для любого X последнее отображение есть изоморфное вложение.

Пусть α — тензорная норма на $\mathfrak{T}$. Говорят [67], что банахово пространство Y *обладает свойством аппроксимации относительно нормы* α, или *удовлетворяет условию α-аппроксимации,* если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ взаимно однозначно.

Тот факт, что банахово пространство Y обладает свойством α-аппроксимации коротко будет записываться так: $Y \in \mathrm{AP}[\alpha]$. Очевидно, банахово пространство Y удовлетворяет условию α-аппроксимации тогда и только тогда, когда для всякого X каноническое отображение из $Y\widehat{\otimes}_{\alpha^{\mathrm{dual}}}X$ в $\mathrm{L}(Y^*,X)$ взаимно однозначно. Нетрудно показать, что если банахово пространство обладает свойством аппроксимации Гротендика (т.е. свойством $\mathrm{AP}[\nu_1^0]$), то оно обладает и любым аппроксимационным свойством $\mathrm{AP}[\alpha]$. Ясно также, что если $Y^{**} \in \mathrm{AP}[\alpha]$, то и $Y \in \mathrm{AP}[\alpha]$, и если $Y^* \in \mathrm{AP}[\alpha^{\mathrm{dual}}]$, то каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_\alpha X \to \mathrm{L}(Y,X)$ взаимно однозначно для любого банахова пространства X.

Замечание 3.6.1. Можно определить понятие свойства ограниченной и свойства метрической аппроксимации для произвольной тензорной нормы на классе тензорных произведений банаховых пространств. Мы предпочитаем вводить соответствующие определения в тех местах и для тех тензорных норм, для которых это потребуется по существу изложения.

§4. Калейдоскоп: некоторые специальные определения и факты

1. Компактные и слабо компактные отображения. Оператор в банаховых пространствах называется *компактным* (*слабо компактным,*) если он переводит ограниченные множества в относительно компактные (в относительно слабо компактные). Каждый компактный оператор $T : X \to Y$ факторизуется компактным образом через некоторое рефлексивное банахово пространство $G : T = BA$, где $A : X \to G$ и $B : G \to Y$ — компактные операторы [89].

Напомним, что оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ является слабо компактным тогда и только тогда, когда $T(X^{**}) \subset \pi_Y Y$. Для слабо компактного оператора $T : X \to Y$ через T^π обозначается его сильно бидуальный оператор [27, п. 1.5.5], т.е. оператор из X^{**} в Y, определяемый соотношением $T^\pi x'' := (\pi_Y|_{\pi_Y Y})^{-1}(T^{**}x'')$. Всякий слабо компактный оператор факторизуется через рефлексивное банахово пространство [66] (см. также [70, 99]). Иными словами, если оператор $T : X \to Y$ слабо компактен, то существуют рефлексивное пространство G и операторы $T_1 : X \to G, T_2 : G \to Y$, такие, что $T = T_2T_1$.

Лемма 4.1.1 (см. [116],[139],[71, теорема VI.2.15]). *Если оператор $T : C(K) \to Z$ не является слабо компактным, то в $C(K)$ найдется изометричная копия пространства c_0, на которой оператор T действует как изоморфизм.*

2. Принцип локальной рефлексивности [27, 28.1.3]. Пусть E, Y — банаховы пространства, F — подпространство в Y^*, причем E, F конечномерны. Если $S \in \mathrm{L}(E, Y^{**})$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой оператор $S_0 \in \mathrm{L}(E,Y)$, что $\|S_0\| \leqslant (1+\varepsilon)\|S\|, \langle S_0x, y'\rangle = \langle Sx, y'\rangle$ для всех $x \in E$ и $y' \in F$, а также $S_0x = Sx$, как только $Sx \in Y$.

3. Расстояние Банаха–Мазура. Для пары (вещественных или комплексных) нормированных пространств E, F положим $d(E,F) := \inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\| : T : E \to F$ — изоморфизм $\}$. Если не существует ни одного изоморфизма между пространствами E и F, то считаем, что $d(E,F) = +\infty$. Введенная величина называется *расстоянием Банаха–Мазура* между пространствами E и F. Если пространства E и F конечномерны и $\dim E = \dim F$, то существует изоморфизм $T : E \to F$, для которого $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(E,F)$. В конечномерном случае $d(E,F) = 1 \iff$ пространства E и F изометричны между собой. Если пространства E, F бесконечномерны, то из равенства $d(E,F) = 1$, вообще говоря, не вытекает, что эти пространства изометричны между собой.

Имеет место такой важный факт об оценке расстояния между конечномерными пространствами:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, E,\ \dim E = n \qquad d(E, l_2^n) \le \sqrt{n}.$$

Напомним важную теорему Гурария–Кадеца–Мацаева:

$i)$ $1 \le p \le q \le 2$ или $2 \le p \le q \le \infty \implies d(l_p^n, l_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$;
$ii)$ $1 \le p \le 2 \le q \le \infty \implies \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ cn^\alpha \le d(l_p^n, l_q^n) \le Cn^\alpha$,

где $\alpha = \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right\}$, а $c > 0$ и $C > 0$ — абсолютные постоянные.

4. Дополняемость. Тип и котип. Под проектором из банахова пространства X на некоторое его подпространство понимается такое линейное непрерывное отображение P, что $P^2 = P$. Подпространство $Y \subset X$ называется C-дополняемым (в X), если существует проектор из X на Y с нормой не большей, чем C. Подпространство дополняемо, если на него существует какой-либо проектор. Каждое конечномерное подпространство банахова пространство дополняемо. Более того, если $Y \subset X$ и $\dim Y < \infty$, то существует проектор $P : X \to Y$ с γ_2-нормой $\gamma_2(P) \leqslant \sqrt{\dim Y}$ [27, 28.2.5-28.2.6]. Здесь γ_2 — общепринятое сейчас обозначение для нормы l_2-факторизуемого оператора. Именно, через $\gamma_2(U)$ для оператора $U \in \mathrm{L}(X,Y)$ обозначается величина $\inf\{\|A\|\,\|B\|\}$, где инфимум берется по всем факторизациям $U = BA$ оператора U вида $X \xrightarrow{A} l_2 \xrightarrow{B} Y$.

Говорят, что *банахово пространство X есть пространства котипа p*, $p > 0$, (или *имеет котип p*), если для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ из пространства X с некоторой постоянной (зависящей только от пространства и p) выполняется неравенство

$$\left(\sum \|x_j\|^p\right)^{1/p} \leqslant C\ \left(\int_0^1 \left\|\sum r_j(t)\,x_j\right\|^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь (r_j) — последовательность функций Радемахера.

Наименьшую постоянную, которую можно подставить в неравенство (1), оставляя его справедливым при любых наборах векторов $\{x_j\}$ из X, мы обозначим через $C_p(X)$ (это — *константа котипа p пространства X*; если такой постоянной не существует, то полагают $C_p(X) = +\infty$).

При $2 \leqslant p < +\infty$ любое L_p-пространство имеет котип p. Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то любое L_p-пространство имеет котип 2.

В некотором смысле двойственное понятие к понятию котипа есть так называемое свойство нормированных пространств иметь конечный тип. Именно, говорят, что *пространство* X *имеет тип* p, если если для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ из X с некоторой постоянной (зависящей только от пространства и p) выполняется неравенство

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant C \left(\sum \|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

Константа типа p пространства X — это наилучшая постоянная $T_p(X)$, которую можно поставить в последнем неравенстве.

Двойственность этих двух свойств выражается в том факте, что, если пространство X имеет тип p, то сопряженное пространство X^* имеет котип p', $1/p + 1/p' = 1$, и, если X^* имеет тип p, то X имеет котип p'. Обратное, вообще говоря, не верно.

Каждое банахово пространство имеет тип 1. Пространство L_p, $p \in [1, +\infty)$, имеет тип 2 при $p \geqslant 2$. При $1 \leqslant p \leqslant 2$ пространство L_p есть пространство типа p. Любое гильбертово пространство имеет тип 2 и котип 2 с константами типа и котипа, равными единице.

Гильбертово пространство — единственное (с точностью до банаховых изоморфизмов) пространство с тем свойством, что как оно, так и его сопряженное имеют тип 2. Точнее, если X и X^* имеют тип 2, то X изоморфно гильбертову пространству. Этот замечательный факт установил польский математик С. Квапень [98].

Более общий факт доказан в [126]:

Лемма 4.4.1 [126, следствие 4.1]. *Пусть* $q \geqslant 2$. *Если* X *— пространство типа* $p \leqslant 2$ *и* $Y \subset X$ *— размерности* n, *то существует такой проектор* $P : X \to Y$, *что*

$$\gamma_2(P) \leqslant K_{p'}\, K_q\, C_q(Y)\, T_p(X)\, n^{(1/p - 1/q)} =: \lambda_n \mu_n.$$

В частности, имеем также $\|P\| \leqslant \lambda_n \mu_n$ *и* $d(Y, l_2^n) \leqslant \lambda_n \mu_n$.

Особенно часто эта лемма применяется к случаю конечномерных подпространств пространств типа $L_p(\mu)$.

5. Декартовы l_p-суммы . Если $(X_j)_{j \in J}$ — некоторое семейство банаховых пространств и $p \geqslant 1$, то $\left(\sum_{j \in J} X_j\right)_p$ — сумма пространств этого семейства по типу l_p : эта сумма состоит из последовательностей $(x_j)_{j \in J}$, где $x_j \in X_j$, для которых коечна норма $\|(x_j)\|_p := \left(\sum_{j \in J} \|x_j\|_{X_j}^p\right)^{1/p}$. При $p \in [1, \infty)$ сопряженное пространство к банахову пространству $\left(\sum_{j \in J} X_j\right)_p$ естественным образом отождествляется с пространством $\left(\sum_{j \in J} X_j^*\right)_{p'}$.

6. Свойство Шура. Банахово пространство X обладает *свойством Шура,* если всякая слабо сходящаяся последовательность его элементов сходится сильно, т. е.

по норме. Это равносильно тому, что всякая слабо сходящаяся в себе последовательность в X сходится сильно (см. [27, 1.6.3]). Классический пример пространства со свойством Шура — банахово пространство $l_1(\Gamma)$ абсолютно суммируемых числовых семейств.

7. Абстрактные L_p-пространства. Для $1 \leqslant p < \infty$ под AL_p-пространством понимается банахова решетка E, такая, что $\|x_1 + x_2\|^p = \|x_1\|^p + \|x_2\|^p$ для любых дизъюнктных элементов $x_1, x_2 \in E$. При $p = 1$ говорят просто об AL-пространст вах. Абстрактное L_∞-пространство (AM-пространство) — это такая банахова решетка E, что для дизъюнктных $x_1, x_2 \in E$ выполняется равенство $\|x_1 + x_2\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

Теоремы Какутани [94, 95]: всякое AL_1-пространство изометрически и решеточно изоморфно пространству $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ для некоторого пространства с мерой (Ω, Σ, μ). Каждое AM-пространство с единицей изометрически и решеточно изоморфно пространству $C(K)$ для некоторого отделимого компакта K.

8. $\mathcal{L}_p$-пространства. Банахово пространство X называется $\mathcal{L}_p$-пространством [103] ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$), если существует такая постоянная $c > 0$, что каждое конечномерное подпространство $Z \subset X$ содержится в конечномерном подпространстве $Z_1 \subset X$, c-изометричном пространству l_p^n для некоторого n. Если X — $\mathcal{L}_1$-пространство, то существует такое пространство $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ с положительной мерой, что X^{**} изоморфно и дополняемо вкладывается в $L_1(\widetilde{\mu}) = l_1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ [103].

9. Два результата Й. Линденштраусса. Следующие два утверждения взяты из статьи [101] (второе приводится в удобной для нас формулировке, существование базиса в пространстве Z^{**} в лемме 4.9.2 вытекает из определения пространства Z в доказательстве следствия 1 в [101]). Подробные сведения о базисах Шаудера в банаховых пространствах можно найти в монографии [106, раздел 1.b].

Лемма 4.9.1 ([101], теорема 1). *Для всякого сепарабельного банахова пространства E существуют сепарабельное банахово пространство W с монотонным натягивающим базисом и факторотображение $\Psi : W^* \to E$ такие, что W^* имеет базис и $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$.*

Лемма 4.9.2 ([101], следствие 1). *Для всякого сепарабельного банахова пространства G существуют сепарабельное банахово пространство Z с базисом и линейный гомоморфизм $\Phi : Z^{**} \to G$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно), подпространство $\Phi^* G^*$ дополняемо в Z^{***} и ядро гомоморфизма Φ есть $\pi_Z Z$.*

ГЛАВА I

ОПЕРАТОРЫ РАДОНА–НИКОДИМА: ИХ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

§1. Геометрические свойства операторов Радона–Никодима

Пусть X, Y — банаховы пространства, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Введем одно из центральных наших определений (см. [29], [100]).

Определение 1.1. Оператор $T : X \to Y$ называется оператором типа RN, если он всякую X-значную меру $\overline{m}$ ограниченной вариации переводит в Y-значную меру, имеющую производную относительно вариации меры $\overline{m}$.

Нетрудно видеть, что это определение эквивалентно определению операторов типа RN в [29], так как по предложению 1 из [29] оператор T является оператором типа RN в смысле определения 1.1 тогда и только тогда, когда он является оператором типа RN относительно пространства $([0,1], \mathfrak{B}, \mu)$, где μ — мера Лебега на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}$ отрезка $[0,1]$, т. е. когда он переводит всякую μ-абсолютно непрерывную X-значную меру $\overline{m} : \mathfrak{B} \to X$ ограниченной вариации в Y-значную меру $T\overline{m} : \mathfrak{B} \to Y$, для которой существует такая функция $\overline{f} \in L_1(Y)$, что $(T\overline{m})(A) = \int_A \overline{f}\, d\mu$ для всех $A \in \mathfrak{B}$. По тому же предложению 1 последнее равносильно тому, что T является оператором типа RN относительно некоторого фиксированного пространства с не чисто атомической мерой. Мы часто будем говорить про такие операторы как про операторы Радона–Никодима, операторы RN, RN-операторы. В случае, когда тождественный оператор банахова пространства есть оператор типа RN, говорят, что это пространство обладает свойством RN (Радона–Никодима).

Пространство всех операторов типа RN, действующих из X в Y, мы обозначаем через $\mathrm{RN}(X, Y)$. Класс $\mathrm{RN} = \{\mathrm{RN}(X, Y) \,|\, X, Y$ — банаховы пространства$\}$ с обычной операторной нормой является нормированным операторным идеалом в смысле Пича [27, 125].

В этом параграфе вводятся понятия T-заостренности и Ts-заостренности ограниченных множеств в банаховых пространствах и в этих терминах даются условия, равносильные тому, что T есть оператор типа RN (теорема 1.1).

Затем мы рассматриваем замкнутые выпуклые ограниченные множества (в банаховых пространствах), все подмножества которых являются заостренными. В качестве примера одного из основных результатов в направлении этого исследования приведем следующую теорему: замкнутое выпуклое ограниченное множество B является наследственно заостренным[1] тогда и только тогда, когда оно наследственно f-заостренное[2] ($\forall K \subset B,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in K:\ z \notin \operatorname{co}(K \setminus \{x \mid \|x - z\| \leqslant \varepsilon\})$) и тогда и только тогда, когда всякое замкнутое подмножество в B имеет экстремальную точку. Доказательство первой эквивалентности (которая является основной в этой части параграфа) основывается только на определении понятия заостренности и существенно отличается от доказательства Дэйвиса–Фелпса [68] для специального случая $B = \{x:\ \|x\| \leqslant 1\}$. Потом мы снова возвратимся к операторам Радона–Никодима и получим, используя геометрические характеристики, некоторые простейшие, но важные их свойства. В заключение параграфа приводится (первое в работе) доказательство того, что всякий слабо компактный оператор является оператором типа RN (теперь это общеизвестный факт, но впервые он был отмечен в работе автора [29]).

Если $A \subset X$ — ограниченное множество, то через s-co(A) мы обозначаем s-выпуклую оболочку множества A [108, 85]:

$$s - \operatorname{co}(A) = \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i \mid a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1\}.$$

Пусть далее $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества Ω, $\overline{m} : \Sigma \to X$ — мера со значениями в пространстве X, $V_{\overline{m}}$ — вариация меры $\overline{m}$.

Определение 1.2. Ограниченное множество $B \subset X$ называется T-заостренным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin \overline{\operatorname{co}}(B \backslash T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)))$, $D_\varepsilon(Tx) = \{y \mid ||y - Tx|| < \varepsilon\}$.

Определение 1.3. Ограниченное множество $B \subset X$ называется Ts-заостренным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin s - \operatorname{co}(B \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)))$.

Определение 1.4. Пусть $B \subset X, E \in \Sigma$. Будем говорить, что множество E обладает свойством $(B, \overline{m})$, если для всякого подмножества $F \subset E$ ненулевой меры, $V_{\overline{m}}(F) > 0$, имеет место включение $\overline{m}(F)/V_{\overline{m}}(F) \in B$.

Определение 1.5. Тройка $(\Omega, \Sigma, \overline{m})$ обладает свойством $D(T)$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества Ω и последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ такие, что $V_{\overline{m}}(\Omega_i) > 0$ и каждое из множеств Ω_i обладает свойством $(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx_i)), \overline{m})$.

---

[1] "Наследственность" означает сохранение свойства всеми подмножествами.

[2] В [58] употребляется термин c-dentable.

Теорема 1.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$;

2) *всякое ограниченное множество $B \subset X$ является T-заостренным;*

3) *всякое ограниченное множество $B \subset X$ является Ts-заостренным;*

4) *если Σ — σ-алгебра подмножества некоторого множества Ω, $\overline{m} : \Sigma \to X$ — мера ограниченной вариации со значениями в пространстве X, $E \in \Sigma$, $V_{\overline{m}}(E) > 0$, и ε — произвольное положительное число, то существует элемент $x \in X$ и множество $F \subset E$, $V_{\overline{m}}(F)$ такое, что F обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)), \overline{m}\right)$;*

5) *если Σ — σ-алгебра подмножества некоторого множества Ω, $\overline{m} : \Sigma \to X$ — мера (ограниченной вариации) со значениями в пространстве X, то тройка $(\Omega, \Sigma, \overline{m})$ обладает свойством $D(T.)$*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим, что существует ограниченное множество $B \subset X$, которое не является T-заостренным. Тогда мы можем найти такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in B$ имеет место включение

$$x \in \overline{\mathrm{co}}\left(S \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx))\right). \tag{1}$$

Пусть $\Omega = [0, 1]$, Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств пространства Ω и μ — мера Лебега на Ω. Положим $\pi_0 = \{\Omega\}$ и $f_0 = x_1^0 \chi_\Omega$, где x_1^0 — произвольный элемент множества B. Построим по индукции семейство $\{\pi_n\}_{n=0}^\infty$ разбиений множества Ω и последовательность $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ функций $f_n : \Omega \to X$ следующим образом. Пусть $\pi_n = \{\Omega_1^n, \ldots, \Omega_{p_n}^n\}$ и $f_n = \sum_{i=1}^{p_n} x_i^n \chi_{\Omega_i^n}$, где $x_i^n \in B$, $i = 1, \ldots, p_n$, Ω_i^n — полуоткрытые интервалы. Используя (1), выберем в B точки $y_{1i}, \ldots, y_{q_i i}$ и числа $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{q_i i} > 0$ так, что

$$\sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{ji} = 1, \|Tx_i^n - Ty_{ji}\| \geq \varepsilon,$$
$$\|x_i^n - \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{ji} y_{ji}\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha_{ji} < 1/(n+1)$ для всех $j = 1, \ldots, q_i$. Разобьем множество Ω_i^n на такие полуоткрытые интервалы $\Omega_{1i}, \ldots, \Omega_{q_i i}$, что $\mu(\Omega_{ji}) = \alpha_{ji}\mu(\Omega_i^n)$, $j = 1, \ldots, q_i$. Проделав указанную процедуру для каждого индекса $i = 1, \ldots, p_n$, положим

$$\pi_{n+1} = \{\Omega_{ji} \,|\, i = 1, \ldots, p_n;\ j = 1, \ldots, q_i\}$$

и

$$f_{n+1} = \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q_i} y_{ji} \chi_{\Omega_{ji}}.$$

Наше построение закончено.

Используя (2), мы получаем

$$\left\| \int_{\Omega_i^n} (f_n - f_{n+1})\, d\mu \right\| = \left\| x_i^n \mu(\Omega_i^n) - \sum_{j=1}^{q_i} y_{ji}\mu(\Omega_{ji}) \right\| =$$

$$= \left\| x_i^n - \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{ji} y_{ji} \right\| \mu(\Omega_i^n) \le \frac{1}{2^{n+1}}\mu(\Omega_i^n),\ i = 1, \ldots, p_n.$$

Отсюда следует, что для всех $k = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\left\| \int_{\Omega_i^n} (f_n - f_{n+k})\, d\mu \right\| \le \frac{1}{2^n}\mu(\Omega_i^n),\ i = 1, \ldots, p_n. \tag{3}$$

Пусть Σ_0 — алгебра, порожденная семейством $\bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_n$. Так как $\pi_n \subset \pi_{n+1}$, то всякое множество $E \in \Sigma_0$ есть объединение множеств из некоторого разбиения $\pi_n(E)$. Теперь из (3) следует, что для каждого множества $E \in \Sigma_0$ существует предел $\lim_n \int_E f_n\, d\mu$. Положим $\overline{m}(E) = \lim_n \int_E f_n\, d\mu$. Так как $\lim_n \max\{\mu(\Omega_i^n) \mid i = 1, \ldots, p_n\} = 0$ (по выбору последовательности $\{\alpha_{ji}\}$), то Σ совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей все множества из $\{\pi_n\}$. При этом для любого $E \in \Sigma$ мы имеем

$$\left\| \int_E f_n\, d\mu \right\| \le \max_{x \in B}\{\|x\|\}\mu E.$$

Таким образом, множество $\left\{\int_E f_n\, d\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует равномерно счетно-аддитивное семейство интегралов. Поэтому [12, лемма 8, стр. 292] предел $\lim_n \int_E f_n\, d\mu$ существует для всех множеств $E \in \Sigma$. Следовательно, мы построили X-значную меру $\overline{m} : \Sigma \to X$, причем нетрудно видеть, что эта мера абсолютно непрерывна относительно μ.

По условию (1) и по определению операторов типа RN (или по [1, предложение 1]) существует такая функция $g \in L_1(Y)$, что $T\overline{m} = g\mu$. Положим

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\overline{m}(\Omega_i^n)}{\mu(\Omega_i^n)}\, \chi_{\Omega_i^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ясно, что последовательность $\{T\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к g в пространстве $L_1(Y)$. Следовательно, $\{g_n = T\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность Коши в пространстве $L_1(Y)$. Но

$$\int_\Omega \|Tf_n - g_n\|\, d\mu = \sum_{i=1}^{p_n} \|Tx_i^n \mu(\Omega_i^n) - T\overline{m}(\Omega_i^n)\| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \left\| \int_{\Omega_i^n} (Tf_n - f_{n+k})\, d\mu \right\| \le$$

$$\le \|T\| \sum_{i=1}^{p_n} \frac{1}{2^n}\mu(\Omega_i^n) = \frac{1}{2^n}\|T\|.$$

Отсюда мы заключаем, что $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ также является последовательностью Коши в пространстве $L_1(Y)$. С другой стороны, принимая во внимание (2), мы получаем, что

$$\int_{\Omega} \|Tf_n - Tf_{n+1}\, d\mu\| = \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^{p_n} Tx_i^n \chi_{\Omega_i^n} - \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q_i} Ty_{ji} \chi_{\Omega_{ji}} \right\| d\mu \geq \int_{\Omega} \varepsilon\, d\mu = \varepsilon.$$

2) $\Longrightarrow$ 3) очевидно.

3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества Ω, $\overline{m} : \Sigma \to X$ — X-значная мера, $E \in \Sigma$, $V_{\overline{m}}(E) > 0$, и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество

$$A = \{\overline{m}(E')/V_{\overline{m}}(E') \mid E' \subset E, V_{\overline{m}}(E') > 0\} \subset X.$$

По условию, множество A является Ts-заостренным. Выберем точку $x \in A$ так, чтобы

$$x \notin \text{s-co}\left(A \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx))\right) = W.$$

Тогда $x = \overline{m}(F_0)/V_{\overline{m}}(F_0)$, где $F_0 \subset E$ и $V_{\overline{m}}(F_0) > 0$. Предположим, что множество F_0 не обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)), \overline{m}\right)$. Пусть $k_1 \geq 2$ — наименьшее целое число, для которого существует подмножество $E_1 \subset F_0$ такое, что $V_{\overline{m}}(E_1) \geq 1/k_1$ и $\overline{m}(E_1)/V_{\overline{m}}(E_1) \in W$. Положим $F_1 = F_0 \setminus E_1$. Если F_1 не обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)), \overline{m}\right)$, то выберем наименьшее целое $k_2 \geq 2$, для которого существует такое множество $E_2 \subset F_1$, что $V_{\overline{m}}(E_2) \geq 1/k_2$ и $\overline{m}(E_2)/V_{\overline{m}}(E_2) \in W$, и т. д. Мы, действуя таким образом, получим последовательность непересекающихся множеств $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ из F_0 и последовательность $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ целых чисел, больших 2, такие, что

$$\frac{\overline{m}(E_i)}{V_{\overline{m}}(E_i)} \in W, \quad V_{\overline{m}}(E_i) \geq \frac{1}{k_i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Теперь, если $E' \subset F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ и $\overline{m}(E')/V_{\overline{m}}(E') \in W$, то $V_{\overline{m}}(E') < 1/(k_n - 1)$ по выбору множеств $\{E_n\}$ и $\{k_n\}$.

Положим $E_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, и пусть $F = F_0 \setminus E_0$. Нетрудно видеть, что если $F' \subset F$ и $\overline{m}(F')/V_{\overline{m}}(F') \in W$, то $V_{\overline{m}}(F') = 0$. Следовательно, множество F обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)), \overline{m}\right)$. Нам осталось лишь показать, что $V_{\overline{m}}(F) > 0$. Предположим, что $V_{\overline{m}}(F) = 0$. Тогда $\overline{m}(F) = 0$ и, следовательно, $\frac{\overline{m}(F_0)}{V_{\overline{m}}(F_0)} = \frac{\overline{m}(E_0)}{V_{\overline{m}}(E_0)}$. Поэтому

$$x = \frac{\overline{m}(F_0)}{V_{\overline{m}}(F_0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{m}(E_i)}{V_{\overline{m}}(E_i)} \frac{V_{\overline{m}}(E_i)}{V_{\overline{m}}(E_0)}.$$

Из определения множества W следует, что $x \in W$, что противоречит выбору множества F_0.

4) $\Longrightarrow$ 5). Пусть Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества Ω, $\overline{m} : \Sigma \to X$ — X-значная мера, $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Возьмем, используя условие 4) (где в качестве E рассматривается множество Ω), наименьшее

целое $k_1 \geq 2$, для которого существует точка $x_1 \in X$ и множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такие, что Ω_1 обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx_1)), \overline{m}\right)$ и $V_{\overline{m}}(\Omega_1) \geq 1/k_1$. Аналогично, пусть $k_2 \geq 2$ — наименьшее целое число, для которого существуют $x_2 \in X$ и $\Omega_2 \subset \Omega \setminus \Omega_1$ такие, что множество Ω_2 обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx_2)), \overline{m}\right)$, и $V_{\overline{m}}(\Omega_2) \geq 1/k_2$, и т. д. Мы получим последовательности множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$, $\Omega_i \in \Sigma$, и точек $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ пространства X и последовательность целых положительных чисел $\{k_i\}_{i=1}^\infty$, $k_i \geq 2$, такие, что для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots$ множество Ω_i обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx_i)), \overline{m}\right)$, и $V_{\overline{m}}(\Omega_i) \geq 1/k_i$. Заметим, что если $F \subset \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i$ и F обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)), \overline{m}\right)$, $x \in X$, то $V_{\overline{m}}(F) < 1/(k_n - 1)$ (по выбору Ω_n и k_n).

Положим $E = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i$. Если $V_{\overline{m}}(E) > 0$, то, по условию, существуют множество $F \subset E$ и элемент $x \in X$ такие, что $V_{\overline{m}}(F) > 0$ и множество F обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)), \overline{m}\right)$. Но тогда $F \subset \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ для всякого $n = 1, 2, \ldots$; следовательно, $V_{\overline{m}}(F) < 1/(k_n - 1)$. Таким образом, $V_{\overline{m}}(E) = 0$. Объединив множество E с множеством Ω_1, мы получим нужную нам последовательность множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$.

5) $\Longrightarrow$ 1). Пусть Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества Ω, $\overline{m} : \Sigma \to X$ — X-значная мера. Покажем, что $T\overline{m} = gV_{\overline{m}}$, где $g \in L_1(\Omega, V_{\overline{m}}; Y)$. Рассмотрим семейство $\{\pi\}$ всех конечных дизъюнктных разбиений множества Ω, упорядоченное естественным образом. Для каждого π положим

$$f_\pi = \sum_{E \in \pi} \frac{\overline{m}(E)}{V_{\overline{m}}(E)} \chi_E.$$

Пусть ε — произвольное положительное число и $\delta = 2^{-1}\varepsilon / \left(\|T\| + V_{\overline{m}}(\Omega)\right)$.

По условию, существуют множества $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$, $\Omega_i \in \Sigma$, и элементы $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset X$ такие, что $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$, $V_{\overline{m}}(\Omega_i) > 0$, $\bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i = \Omega$ и Ω_i обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\delta(Tx_i)), \overline{m}\right)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Пусть n —такое целое число, что $V_{\overline{m}}(\Omega_0) < \delta$, где $\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$. Положим $\pi_0 = \{\Omega_i \mid 0 \leq i \leq n\}$, если $V_{\overline{m}}(\Omega_0) \neq 0$, и $\pi_0 = \{\Omega_i \mid 0 < i \leq n\}$, если $V_{\overline{m}}(\Omega_0) = 0$. Для определенности мы будем считать, что $V_{\overline{m}}(\Omega_0) > 0$. Покажем, что для всякого $\pi \geq \pi_0$ имеет место неравенство $\|Tf_\pi - Tf_{\pi_0}\| < \varepsilon$.

Пусть $\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{p_j} E_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n$, где $E_{ij} \in \pi$. Заметим, что из того, что множество Ω_i обладает свойством $\left(T^{-1}(D_\delta(Tx_i)), \overline{m}\right)$, следует выполнение неравенства

$$\left\| \frac{T\overline{m}(\Omega_i)}{V_{\overline{m}}(\Omega_i)} - \frac{T\overline{m}(F)}{V_{\overline{m}}(F)} \right\| < 2\delta$$

для любого множества $F \subset \Omega_i$. Имеем

$$\|Tf_{\pi_0} - Tf_\pi\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{n} \frac{T\overline{m}(\Omega_i)}{V_{\overline{m}}(\Omega_i)} \chi_{\Omega_i} - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{T\overline{m}(E_{ij})}{V_{\overline{m}}(E_{ij})} \chi_{E_{ij}} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left(\frac{T\overline{m}(\Omega_i)}{V_{\overline{m}}(\Omega_i)} - \frac{T\overline{m}(E_{ij})}{V_{\overline{m}}(E_{ij})} \right) \chi_{E_{ij}} \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} V_{\overline{m}}(E_{ij}) \cdot 2\delta + \sum_{j=1}^{p_0} \left\| \frac{T\overline{m}(\Omega_0)}{V_{\overline{m}}(\Omega_0)} V_{\overline{m}}(E_{0j}) - T\overline{m}(E_{0j}) \right\| \leq$$

$$\leq 2\delta\, V_{\overline{m}}(\Omega) + 2\|T\| \sum_{j=1}^{p_0} V_{\overline{m}}(E_{0j}) =$$

$$= 2\delta\, V_{\overline{m}}(\Omega) + 2\|T\|\, V_{\overline{m}}(\Omega_0) < 2\delta(V_{\overline{m}}(\Omega) + \|T\|),$$

т.е. $\|Tf_{\pi_0} - Tf_\pi\| < \varepsilon$ для всех $\pi \geq \pi_0$. Следовательно, $\{Tf_\pi\}$ — последовательность Коши в $L_1(Y)$. Поэтому существует такая функция $g \in L_1(Y)$, что для любого множества $E \in \Sigma$ имеет место равенство $\int_E g\, dV_{\overline{m}} = \lim_\pi \int_E Tf_\pi\, dV_{\overline{m}}$.

Пусть $E \in \Sigma$. Положив $\pi_0 = \{E, \Omega \setminus E\}$, мы будем иметь $\int_E Tf_\pi\, dV_{\overline{m}} = T\overline{m}(E)$ для всех $\pi \geq \pi_0$. Отсюда следует, что $T\overline{m}(E) = \lim_\pi \int_E Tf_\pi\, dV_{\overline{m}}$. Таким образом, $T\overline{m} = gV_{\overline{m}}$. Теорема доказана. ■

Замечание 1.1. Доказательство импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) основано на конструкции Мэйнарда [108], модифицированной Хуффом [85] для установления следующего результата: если банахово пространство X обладает свойством Радона-Никодима, то всякое ограниченное множество B пространства X является заостренным.

Напомним, что ограниченное множество $B \subset X$ называется заостренным (s-заостренным) (см. [108],[85]), если оно является T-заостренным (Ts-заостренным) для тождественного оператора $T : X \to X$. Нетрудно видеть, что если $U \in \mathrm{L}(X, Y)$ и UB есть заостренное (s-заостренное) множество, где B — ограниченное подмножество пространства X, то B является U-заостренным (Us-заостренным) множеством.

Взаимно однозначные операторы типа RN, как показывает следующее утверждение, обладают более сильным свойством, чем свойство, указанное в условии 3) теоремы 1.1.

Следствие 1.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ — взаимно однозначное отображение. T является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда T переводит всякое ограниченное множество $B \subset X$ в s-заостренное множество $TB \subset Y$.*

Доказательство. Если для всякого ограниченного множества $B \subset X$ множество TB является s-заостренным, то из теоремы 1.1 непосредственно следует, что T есть оператор типа RN .

Пусть $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$ и $B \subset X$ — ограниченное множество. Нам надо показать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $y \in TB$, что $y \notin s - \mathrm{co}\,(TB \setminus D_\varepsilon(y))$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем элемент $x \in B$, не принадлежащий множеству $s - \mathrm{co}\{B \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx))\}$ (это возможно по теореме 1.1). Пусть $y = Tx$. Если $y \in s - \mathrm{co}\,(TB \setminus D_\varepsilon(y))$, то $y = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$, где $y_i \in TB \setminus D_\varepsilon(y)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим элемент $z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$, где $x_i = T^{-1} y_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как $Tz = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i = y = Tx$, то $z = x$. Кроме того, нетрудно видеть, что для всех $i = 1, 2, \ldots$ имеет место включение $x_i \in B \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(y))$. Следовательно, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$, $x_i \in S \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx))$, т.е. $x \in s - \mathrm{co}\{B \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx))\}$, что противоречит выбору точки $x \in X$. ∎

Замечание 1.2. Предположение о взаимно однозначности оператора T существенно (это можно показать, рассмотрев, например, какое-нибудь линейное непрерывное отображение T пространства l_1 на пространство c_0, — пространство l_1 обладает свойством Радона–Никодима, а пространство c_0 — нет). Однако требование это можно опустить, если T является сопряженным оператором (см. ниже предложение 6.2.1).

Теперь мы ненадолго отвлечемся от непосредственного рассмотрения операторов со свойством Радона-Никодима и займемся интересными самими по себе исследованиями геометрических свойств различного типа заостренных множеств в банаховых пространствах (на самом деле это будет неявным изучением дальнейших свойств операторов RN; см. ниже предложение 1.1, следствие 1.3 и особенно п. 6.2 и далее).

Мы будем сейчас иметь дело с наследственно заостренными множествами в банаховых пространствах. В частности, мы установим, что замкнутое выпуклое ограниченное множество B является наследственно заостренным тогда и только тогда, когда оно наследственно *f-заостренное* (или, что окажется тем же самым, наследственно s-заостренное): $\forall\, K \subset B,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, z \in K :\ z \notin \mathrm{co}\,(K \setminus \{x \mid \|x - z\| \leqslant \varepsilon\})$. Помимо этого мы, например, покажем, что последнее равносильно тому, что всякое *замкнутое подмножество* множества B имеет хотя бы одну экстремальную точку. Доказательство первой эквивалентности (которая является основной теоремой этой части работы) будет основываться только на определениях заостренности и существенно отличается от первого (довольно длинного) доказательства Дэйвиса–Фелпса [68] соответствующего факта для случая, когда множество B. имеет непустую внутренность (например, является шаром). Формулируемые ниже теорема 1.2 была установлена автором в [38] в 1979 году. У. Дж. Дэйвис и Р. Р. Фелпс получили свою теорему в 1974 г. [68],при этом их доказательство не могло быть применено для получения "локального" варианта ("B — с пустой внутренностью"). В том же 1974 г., "конкурируя" с ними, Р. Е. Хафф [85] подучил следующий локальный вариант, в котором он смог, однако, рассмотреть только s-, а не f-заостренные множества: наследственная заостренность произвольного замкнутого ограниченного выпуклого множества эквивалентна наследственной s-заостренности этого множества. Впервые в зарубежной литературе утверждение об эквивалентности понятий заостренности и f-заостренности для таких множеств появилось в работе [58, теорема 2.3.6] в 1983 г. (как пишет сам R. D. Bourgin в [58] "на возможность построений" того типа, которые появляются в доказательстве этого, "обратил мой внимание И. Намиока").

Вернемся к результатам из [68]. Дэйвис и Фелпс, используя простые геометрические соображения, дали в работе [68] доказательство следующего факта:

Предложение 1 [68]**.** *Для банахова пространства X равносильны утверждения:*
1) *всякое ограниченное множество B в X является заостренным, т. е.*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, x \in B: \; x \notin \overline{co}\,(B \setminus D_\varepsilon(x)),$$

где $D_\varepsilon(x) = \{z: \; \|z - x\| \le \varepsilon\}$;
2) *всякое ограниченное множество B в X является f-заостренным, т.е.*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, x \in B: \; x \notin co\,(B \setminus D_\varepsilon(x)),$$

Идея доказательства этого предложения в [68] сводилась к остроумной манипуляции с незаостренным ограниченным множеством в X. Поэтапно это доказательство выглядит так: если ограниченное множество B в X не является заостренным, то не являются заостренными и множества $B_1 = B \cup (-B)$, $B_2 = \overline{\mathrm{co}}(B_1)$, $B_3 = B_2 + D_1(0)$ и $B_4 = \overline{\mathrm{co}}(B_3)$; при этом множество B_4 имеет непустую внутренность. Последний и основной шаг в доказательстве Дэйвиса и Фелпса — лемма 2 в [68], утверждающая, что если замкнутое выпуклое ограниченное множество с непустой внутренностью не является заостренным, то его внутренность не есть f-заостренное множество.

Предложение 1 может быть переформулировано таким образом: единичный шар $D_1(0)$ в X является наследственнозаостренным тогда и только тогда, когда он является наследственно f-заостренным. Нетрудно видеть, что как сама основная идея работы [68], так и рассуждения, приведенные в этой работе, совершенно не пригодны для установления естественного аналога последнего утверждения, в котором шар $D_1(0)$ заменяется на произвольное замкнутое выпуклое ограниченное множество (с пустой внутренностью).

Исходя лишь из определений заостренности и f-заостренности множеств, мы даем элементарное и прямое доказательство следующей теоремы:

Теорема 1.2. *Пусть B — замкнутое выпуклое ограниченное множество в банаховом пространстве X. Эквивалентны утверждения:*
1) *множество B является наследственно заостренным;*
2) *множество B является наследственно f-заостренным.*
3) *всякое счетное подмножество множества B является заостренным*
4) *всякое счетное подмножество множества B является f-заостренным.*

Разумеется, на самом деле имеет место более общий факт — о наследственно T-заостренных множествах, который мы сформулируем после соответствующего определения. Следующие определение и теорема впервые появились в заметке автора [34].

Определение 1.6. Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ Ограниченное множество $B \subset X$ называется Tf-заостренным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in B$, что $x \notin \mathrm{co}(B \setminus T^{-1}(D_\varepsilon(Tx)))$, $D_\varepsilon(Tx) = \{y \mid \|y - Tx\| < \varepsilon\}$.

Теорема 1.2$'$. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и B — замкнутое выпуклое ограниченное множество в пространстве X. Эквивалентны утверждения:*

1) *множество B является наследственно T-заостренным;*
2) *множество B является наследственно Tf-заостренным.*
3) *всякое счетное подмножество множества B является T-заостренным*
4) *всякое счетное подмножество множества B является Tf-заостренным.*

Мы докажем лишь (для упрощения обозначений в доказательстве) теорему 1.2. Теорема 1.2$'$ доказывается совершенно аналогично.

Предложение 1, очевидно, есть непосредственное следствие нашей теоремы 1.2.

Доказательство. теоремы 1.2. Очевидно, что 1) влечет 2), 1) влечет 3), 2) влечет 4) и 3) влечет 4). Поэтому нам надо лишь установить справедливость импликации 4) $\implies$ 1). Предположим, что в B найдется подмножество K, которое не является заостренным, т.е. существует такое число ε, $\varepsilon > 0$, что $x \in \overline{\mathrm{co}}\,(K \setminus D_\varepsilon(x))$ для всех $x \in K$. Для дальнейшего нам удобно положить $k(i,0) = 0$, если $i = 1,2,\ldots$. Для произвольного $x_{01} \in K$ выберем такие $x_{ij} \in K$ $(j = 1,2,\ldots,k(0,1))$, что

$$\|x_{01} - x_{1j}\| > \varepsilon, \quad \left\| x_{01} - \sum_{j=1}^{k(0,1)} \alpha_{1j} x_{1j} \right\| < \varepsilon_0/2,$$

где $\alpha_{1j} \geq 0$, $\sum \alpha_{1j} = 1$, а $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \varepsilon/8$. Пусть ε_1 — такое число, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ и $\|x_{01} - x_{1j}\| > \varepsilon + \varepsilon_1$ для всех $j = 1,2,\ldots,k(0,1) = n(0)$. Для каждого x_{1m} выберем такие $x_{2j} \in K$ $(j = k(1,m-1)+1,\ldots,k(1,m))$, что

$$\|x_{1m} - x_{2j}\| > \varepsilon, \quad \left\| x_{1m} - \sum_{j=k(1,m-1)+1}^{k(1,m)} \alpha_{2j}\, x_{2j} \right\| < \varepsilon_1/2,$$

где $\alpha_{2j} \geq 0, \sum_{j=k(1,m-1)+1}^{k(1,m)} \alpha_{2j} = 1$. Пусть $n(1) = k(1,n(0))$ и ε_2 — такое число, что $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$ и $\|x_{1m} - x_{2j}\| > \varepsilon + \varepsilon_2$ для каждой пары индексов $m = 1,2,\ldots,n(0)$ и $j = k(1,m-1)+1,\ldots,k(1,m)$. Вообще, используя индукцию, для всякого x_{im} выберем такие $x_{i+1\,j} \in K$ $(j = k(i,m-1)+1,\ldots,k(i,m))$, что

$$\|x_{im} - x_{i+1\,j}\| > \varepsilon, \quad \left\| x_{im} - \sum_{j=k(i,m-1)+1}^{k(i,m)} \alpha_{i+1\,j}\, x_{i+1\,j} \right\| < \varepsilon_i/2,$$

где $\alpha_{i+1\,j} \geq 0, \sum_{j=k(i,m-1)+1}^{k(i,m)} \alpha_{i+1\,j} = 1$; и пусть ε_{i+1} — такое число, что $0 < \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i/2$ и $\|x_{im} - x_{i+1\,j}\| > \varepsilon + \varepsilon_{i+1}$ для каждой пары индексов $m = 1,2,\ldots,n(i-1)$ и

$j = k(i, m-1)+1, \dots, k(i,m)$. Построив указанным способом последовательности $\{x_{im}\}_{i=0,m=1}^{\infty, n(i-1)}$, (где $n(-1)=1$) и $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, мы для любых $q = 1, 2, \dots;\ i = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots, n(i-1)$ положим

$$\varphi(i, m; q) = \sum_{j_{m+1}=k(i,m-1)+1}^{k(i,m)} \alpha_{i+1\, j_{m+1}} \sum_{j_{m+2}=k(i+1,j_{m+1}-1)+1}^{k(i+1,j_{m+1})} \alpha_{i+2\, j_{m+2}}$$
$$\sum_{j_{m+3}=k(i+2,j_{m+2}-1)+1}^{k(i+2,j_{m+2})} \alpha_{i+3\, j_{m+3}} \cdots \sum_{j_{m+q}=k(i+q-1,j_{m+q-1}-1)+1}^{k(i+q-1,j_{m+q-1})} \alpha_{i+q\, j_{m+q}}\, x_{i+q\, j_{m+q}}.$$

Тогда $\|\varphi(i,m;q_1)-\varphi(i,m;q_2)\| \le \varepsilon_{\min(q_1,q_2)+i-1}$ и, в частности, $\|\varphi(i,m;q)-x_{im}\| \le \varepsilon_i$. Отсюда следует, что для любых i и m существует $z_{im} \in \overline{\mathrm{co}}(K)$, для которого $\|\varphi(i,m;q)-z_{im}\| \to 0$ при $q \to +\infty$, причем

$$\text{а) } \|z_{im} - x_{im}\| \le \varepsilon_q,$$

$$\text{б) } z_{im} = \sum_{j=k(i,m-1)+1}^{k(i,m)} \alpha_{i+1\, j}\, z_{i+1\, j}.$$

Зафиксируем числа $i = 0, 1, 2, \dots,;\ m = 1, 2, \dots, n(i-1)$ и $j = k(i, m-1) + 1, \dots, k(i,m)$. Так как $\|x_{im}-x_{i+1\, j}\| > \varepsilon+\varepsilon_{i+1}$, то из а) вытекает, что $\|z_{im}-z_{i+1\, j}\| > \varepsilon/5$. Поэтому множество $\{z_{im}\}$ не может быть f-заостренным в силу б). ■

Хаф и Моррис показали (см. [86], теорема 1), что если K — замкнутое выпуклое ограниченное не заостренное множество в X, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что $K = \overline{\mathrm{co}}\,(K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_\varepsilon(x_i))$ для любого набора $\{x_1, \dots, x_n\}$ элементов из K. Предположим снова, что в множестве B (из теоремы 1.2) содержится не заостренное подмножество K_0. Тогда множество $K = \overline{\mathrm{co}}(K_0)$ также не будет заостренным ([137], предложение 2) и, следовательно, к нему применимы рассуждения из доказательства теоремы 1.2 и указанный результат Хафа–Морриса. Используя теперь этот результат в качестве определения заостренности замкнутых выпуклых множеств и очевидным образом модифицируя предыдущее доказательство, мы получаем:

Теорема 1.3. *Пусть B — замкнутое выпуклое ограниченное множество в X, не являющееся наследственно заостренным. Тогда существуют число ε, $\varepsilon > 0$, и последовательность $\{z_{im}\}_{i=0,m=1}^{\infty,n(i-1)}$ $(n(-1) = 1)$ элементов множества B, обладающая следующими свойствами:*

1) $\|z_{im} - z_{jk}\| > \varepsilon$, *если* $i \ne j$;

2) *для каждого i существуют такие числа $k(i,m), k(i,0) = 0 < k(i,1) < \dots < k(i,m-1) < k(i,m) < \dots < k(i,n(i-1)) = n(i)$, что если $m = 1, 2, \dots, n(i-1)$, то*

$$z_{im} \in co\,(\{z_{i+1\, j} \mid j = k(i,m-1)+1, \dots, k(i,m)\}) \quad ■$$

Для случая $B = D_1(0)$ этот факт (так же, как и следующая ниже теорема 1.4) был установлен ранее Хафом и Моррисом (см. [86], теорема 4 и ее доказательство, а также [154]).

Теорема 1.4. *Для замкнутого выпуклого ограниченного множества B в X равносильны утверждения:*

1) *множество B является наследственно заостренным;*

2) *всякое замкнутое (не обязательно выпуклое) подмножество A множества B имеет экстремальную точку (т.е. такую точку $z \in A$, что $z \notin co(A \setminus \{z\})$).*

Импликация 2) $\implies$ 1) вытекает из теоремы 1.3, а импликация 1) $\implies$ 2) есть простое следствие замечательного результата Бургейна, полученного им в работе [56]: если множество B является наследственно заостренным, то всякое замкнутое выпуклое его подмножество совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих сильно выдвинутых точек[3]. ■

В работе [68] при доказательстве предложения 1 было установлено также, что наследственная заостренность шара $D_1(0)$ в X эквивалентна тому, что в любом пространстве, изоморфном пространству X, единичный шар является заостренным множеством. Следующее утверждение показывает, что аналогичный факт имеет место и в более общей ситуации. Для сокращения формулировки этого утверждения нам удобно ввести одно определение: если A и B — такие множества в X, что $a_1 A \subset B \subset a_2 A$ для некоторых положительных чисел a_1 и a_2, то множества A и B называются эквивалентными.

Теорема 1.5. *Пусть B — замкнутое абсолютно выпуклое ограниченное множество в X. Множество B является наследственно заостренным тогда и только тогда, когда всякое эквивалентное ему замкнутое абсолютно выпуклое множество является заостренным.*

Доказательство. Предположим, что всякое эквивалентное множеству B замкнутое абсолютно выпуклое множество является заостренным. Обозначим через X_B линейную оболочку множества B с нормой p_B (функционал Минковского множества B), а через Φ_B — канонический оператор из X_B в X. Пусть $|\cdot|$ — произвольная эквивалентная норма на X_B. Положим $D = \{z \in X_B : \ |z| \le 1\}$ и $A = \overline{\Phi_B(D)}$. Так как множества A и B эквивалентны, то по условию A — заостренное в X множество. Следовательно, множество $\Phi_B(D)$ также является заостренным ([137], предложение 2)[4], откуда вытекает, что множество D является Φ_B-заостренным в X_B (см. выше абзац после замечания 1.1 , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in D: \quad z \notin \overline{\text{co}}\left(D \setminus \Phi_B^{-1}\left(D_\varepsilon(\Phi_B z)\right)\right).$$

Таким образом, для любой эквивалентной на X_B нормы $|\cdot|$ единичный шар в $(X_B, |\cdot|)$ является Φ_B-заостренным множеством. Теперь рассуждения, совершенно

[3] Точка $x_0 \in D \subset X$ называется *сильно выдвинутой* ("strongly exposed"), если существует $x_0' \in X^*$ такой, что $\langle x_0', x_0\rangle > \langle x_0', x\rangle$ для всех $x \in D \setminus \{x_0\}$ и соотношение $\lim_n \langle x_0', x_n\rangle = \langle x_0', x_0\rangle$ влечет соотношение $\lim_n x_n = x_0$. К слову сказано будет, точка $x_0 \in D \subset X$ называется *выдвинутой* ("exposed"), если существует $x_0' \in X^*$ такой, что $\langle x_0', x_0\rangle > \langle x_0', x\rangle$ для всех $x \in D \setminus \{x_0\}$. См. [71, p. 138]

[4] Вообще, если $D \subset X$ — ограниченное множество и $\overline{\text{co}}(D)$ является заостренным, то и само множество D является заостренным; кроме цитированной статьи подобный факт можно найти в [71, p. 138, Th. 10] и [58, следствие 2.3.3].

аналогичные рассуждениям из доказательства упоминавшегося перед формулировкой теоремы 1.5 результата Дэйвиса–Фелпса (см. [68]), показывают, что всякое ограниченное множество в X_B является Φ_B-заостренным. Отсюда легко вытекает, что множество B является наследственно f-заостренным в X, и, следовательно, по теореме 1.2, наследственно заостренным. ■

Далее T — линейный непрерывный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y. Нам понадобится одно утверждение, формально не доказанное выше:

Лемма 1.1. *Если всякое счетное подмножество ограниченного замкнутого выпуклого множества $B \subset X$ является T-заостренным, то и само множество B является T-заостренным.*

Доказательство можно провести совершенно так же, как и в случае, когда T — тождественный оператор (см. [108].Конечно же лемма вытекает непосредственно из доказательства теоремы 1.2, либо из теоремы 1.2$'$. ■

Из леммы 1.1 и теоремы 1.1 следует

Предложение 1.1. *Оператор T является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда для всякого сепарабельного подпространства $X_0 \subset X$ оператор $T_0 = T|_{X_0} : X_0 \to Y$ есть оператор типа* RN. ■

Доказательство следующей простой леммы мы опускаем. Заметим лишь, что она, например, непосредственно вытекает из теоремы 1.1 (но это как выстрел из пушки по воробьям!).

Лемма 1.2. *Пусть $j : Y \to Z$ — изоморфное вложение пространства Y в банахово пространство Z. Оператор T принадлежит пространству* $\mathrm{RN}(X, Y)$ *тогда и только тогда, когда оператор jT является оператором типа* RN. ■

Предложение 1.2. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$; 2) *для всякого сепарабельного подпространства $X_0 \subset X$ оператор $T_0^* = (T|_{X_0})^* : Y^* \to X_0^*$ является оператором типа* RN.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $Z \subset Y^*$ — сепарабельное подпространство и $j : Z \to Y^*$ — тождественное вложение. Покажем, что оператор $T^*j : Z \to X^*$ есть оператор типа RN. Тогда, по предложению 1.1, оператор T^* также будет оператором типа RN.

Пусть $Z_1 = \overline{T^*j(Z)} \subset X^*$ и $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — плотная в пространстве Z_1 последовательность. Выберем в X такие элементы x_n, $n = 1, 2, \ldots$, что $\|x_n\| \le 1$ и $|\langle x_n, x'_n\rangle| \ge (1 - 1/n)\|x_n\|$. Положим $X_0 = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}] \subset X$. Ясно, что для любого $x' \in Z_1$ имеет место равенство $\|x'\| = \sup_n |\langle x', x_n\rangle|$. Рассмотрим отображение $\Phi : Z_1 \to X_0^*$, определяемое следующим образом: $\langle \Phi x', x_0\rangle = \langle x', x_0\rangle$ для $x' \in Z_1$, $x_0 \in X_0$ (т.е. $\Phi x' = x'|_{X_0}$). Нетрудно показать, что Φ — изометрическое вложение пространства Z_1 в пространство X_0^*. Пусть $i : X_0 \to X$ — тождественное вложение. Если $z \in Z$, $x_0 \in X_0$, то $\langle i^*T^*jz, x_0\rangle = \langle T^*jz, x_0\rangle = \langle \Phi T^*jz, x_0\rangle$, т.е. $i^*T^*j = \Phi T^*j$. По условию $i^*T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X_0^*.)$ Следовательно, $\Phi T^*j = i^*T^*j \in \mathrm{RN}$, и, так как Φ — изометрия, по лемме 1.2 оператор T^*j есть оператор типа RN . ■

В работах [108] и [164] показано, всякое слабо компактное множество в банаховом пространстве является заостренным. Из этого результата и из сказанного выше о заостренных множествах моментально вытекает

Следствие 1.2. *Всякий слабо компактный оператор является оператором типа* RN .

Ниже мы несколько раз передокажем это следствие совершенно разными способами, так же как и получим независимые доказательство заостренности слабо компактных множеств в банаховых пространствах.

Следствие 1.3. *Пусть B — замкнутое абсолютно выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства X. Эквивалентны утверждения:*

1) *каноническое отображение $\Phi_B : X_B \to X$ есть оператор типа* RN;
2) *B есть наследственно заостренное множество*;
3) *B есть наследственно s-заостренное множество*;
4) *B есть наследственно f-заостренное множество.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 1.2 и следствие 1.1, поскольку отображение Φ_B взаимно однозначно. ■

Замечание 1.3. После того как установлено следствие 1.3, возникает естественное желание ввести понятие RN-множества в банаховом пространстве: замкнутое абсолютно выпуклое ограниченное множество $B \subset X$ назовем *RN*-множеством, если $\Phi_B \in \mathrm{RN}(X_B, X)$. Более общо, *замкнутое выпуклое ограниченное* множество называется RN-множеством, если все его подмножества заостренные. Мы ограничимся лишь этим замечанием и отметим, что впервые, и именно так, понятие RN-множества было введено и изучено автором в [31, 34] и в дальнейших работах. Позже (§ 6, § 7 и далее) нас заинтересуют RN-множества в сопряженных пространствах.

§2. Операторы, действующие между банаховыми пространствами и векторными решетками

1. Аппроксимация конечномерными операторами: случай идеальных пространств измеримых функций. Здесь мы для каждой решетки E измеримых функций определяем операторный идеал $\mathrm{RN}_{E'}$. Мы покажем, что для любого идеального пространства E измеримых функций с недискретным дуальным E' класс $\mathrm{RN}_{E'}$ совпадает с классом операторов Радона-Никодима. Установим и другие, связанные с этой теоремой, характеристики операторов Радона-Никодима (см. [30, 129]). В частности, мы свяжем свойство оператора быть оператором типа RN с возможностями интегральных представлений (с сильно измеримыми ядрами) некоторых суперпозиций операторов. Во многих случаях интегральное представление оператора с сильно измеримым ядром равносильно принадлежности этого оператора замыканию множества конечномерных отображений в соответствующих пространствах операторов (лишь один пример — лемма 2.1.3 ниже). В этом разделе это явно в доказываемых утверждениях не отмечается. Исключение составит лишь следствие 2.1.5.

Ниже в разделе (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой, $L_0(\mu) = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначает решетку всех (классов эквивалентности) скалярнозначных μ-измеримых функций на Ω.

Пусть X — банахово пространство и E — векторная подрешетка в $L_0(\mu)$. Обозначим через $\mathfrak{M}(E, X)$ множество всех X-значных мер $\overline{m} : \Sigma \to X$ ограниченной вариации, обладающих следующим свойством: существует функция $g \in E'$ такая, что $\int |f|\, dV(\overline{m}) \leqslant \int |f| g\, d\mu$ для каждой $f \in E$, где $V(\overline{m})$ — вариация $\overline{m}$. Через $\mathfrak{M}_0(E, X)$ мы обозначим подмножество множества $\mathfrak{M}(E, X)$, состоящее из тех мер $\overline{m}$, для которых существуют функции $\overline{g}_{\overline{m}} \in E'(X)$ с тем свойством, что $\int f\, d\overline{m} = \int f \overline{g}_{\overline{m}}\, d\mu$ для всех $f \in E$. Если $E = L_\infty(\mu)$, то мы получаем в точности множество всех μ-абсолютно непрерывных X-значных мер ограниченной вариации (или множество всех таких мер, имеющих производные относительно μ).

Если E — векторная решетка, то $\mathrm{P}(X, E)$ обозначает векторное пространство линейных отображений из X в E, которые переводят единичный шар их X в порядково ограниченное подмножество из E. Если E — подрешетка в $L_0(\mu)$, то мы определяем векторное пространство $\overline{\mathrm{S}}(E, X)$ следующим образом: линейное отображение $T : E \to X$ лежит в $\overline{\mathrm{S}}(E, X)$ тогда и только тогда, когда существует функция $e' \in E'$ такая, что $\|Tx\| \leqslant \int |e| e'\, d\mu$ для всех $e \in E$. Через $\overline{\mathrm{S}}_0(E, X)$ обозначается векторное подпространство пространства $\overline{\mathrm{S}}(E, X)$, состоящее из отображений T, для которых существуют функции $\overline{g}_T \in E'(X)$ такие, что $Te = \int e \overline{g}_T\, d\mu$ для $e \in E$. Если E — банахова подрешетка в $L_0(\mu)$, то пространства $\mathrm{P}(X, E)$ и $\overline{\mathrm{S}}(E, X)$ — банаховы, если снабдить их нормами

$$p(T) = \inf\{\|\gamma\|_E \mid \gamma \in E,\, |Tx| \leqslant \|x\|\gamma \ \text{ для всех } \ x \in X\}$$

и, соответственно,

$$\overline{s}(T) = \inf\{\|e'\|_{E^*} \mid e' \in E',\, \|Tx\| \leqslant \int |e| e'\, d\mu \ \text{ для всех } \ e \in E\}.$$

Отметим, что $\mathrm{S}(L_1(\mu), X) = \mathrm{L}(L_1(\mu), X)$ есть пространство всех ограниченных линейных операторов из $L_1(\mu)$ в X.

Следующее утверждение весьма просто и мы опускаем его доказательство.

Предложение 2.1.1. *Если $E \subset L_1(\mu)$ — ИП с дискретным дуальным E', то для любого банахова пространства X*

$$\mathfrak{M}(E, X) = \mathfrak{M}_0(E, X) \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{S}}(E, X) = \overline{\mathrm{S}}_0(E, X).$$

Приведем еще одно предложение, которое будет полезным ниже.

Предложение 2.1.2. *Предположим, что $E \subset L_0(\mu)$ — такое ИП, что $L_\infty(\mu) \subset E \subset L_1(\mu)$. Тогда существует биекция π из $\overline{\mathrm{S}}(E,X)$ на $\mathfrak{M}(E,X)$ такая, что если $U \in \overline{\mathrm{S}}(E,X)$, то $Uf = \int f\,d\pi(U)$ для всех $f \in E$ и $\pi\left(\mathrm{S}_0(E,X)\right) = \mathfrak{M}_0(E,X)$. Более того, эта биекция π вполне определяется соотношениями $\pi(U)(A) := U(\chi_A)$ для $U \in \overline{\mathrm{S}}(E,X)$ и $A \in \Sigma$.*

Доказательство. Пусть $U \in \overline{\mathrm{S}}(E,X)$. Тогда существует такая функция $g \in E'$, что $\|Uf\| \leqslant \int |f|g\,d\mu$ для всех $f \in E$. Функция множества $\overline{m} : \Sigma \to X$, определяемая равенством $\overline{m}(A) = U(\chi_A)$ для $A \in \Sigma$, является счетно аддитивной: если $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$, $A_n \cap A_k = \emptyset$, $k \neq n$, то $\overline{m}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = U\left(\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}\right) = \sum_{n=1}^\infty U(\chi_{A_n})$ (последнее равенство следует из того факта, что

$$\left\| U\left(\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}\right) - \sum_{n=1}^\infty U(\chi_{A_n}) \right\| \leqslant \int_{\bigcup_{n=m+1}^\infty A_n} g\,d\mu \to 0$$

при $m \to +\infty$ и

$$\sum_{n=1}^\infty \|U(\chi_{A_n})\| \leqslant \int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} g\,d\mu < +\infty$$

так как $g \in E' \subset L_1(\mu)$). Ясно, что $\overline{m}$ имеет ограниченную вариацию и $\int |f|\,dV(\overline{m}) \leqslant \int |f|g\,d\mu$ для $f \in E$. Поэтому $\overline{m} \in \mathfrak{M}(E,X)$. Для доказательства равенства $Uf = \int f\,d\overline{m}$ при $f \in E$ достаточно проверить его (по предложению 0.2.1.1,(2) на функциях вида $\sum_{k=1}^\infty a_k\chi_{A_k}$, где $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из Σ. Пусть f — такая функция, и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда мы имеем

$$\left\| Uf - U\left(\sum_{k=1}^{m-1} a_k\chi_{A_k}\right) \right\| = \left\| U\left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k\chi_{A_k}\right) \right\| \leqslant \int_{\bigcup_{k=m}^\infty} |f|g\,d\mu,$$

и если m достаточно велико, то из абсолютной непрерывности интеграла следует, что число справа меньше ε. Следовательно, $Uf = \sum_{k=1}^\infty a_k\overline{m}(A_k)$ (ряд сходится в X, поскольку $U \in \overline{\mathrm{S}}(E,X)$). Ясно, что $\int f\,d\overline{m} = \sum_{k=1}^\infty a_k\overline{m}(A_k)$. Для завершения доказательства осталось только заметить, что $U \in \overline{\mathrm{S}}_0(E,X)$ тогда и только тогда, когда $\overline{m} \in \mathfrak{M}_0(E,X)$. ■

Пусть (Ω,Σ,μ) — снова конечное положительное измеримое пространство, $E \subset L_0(\mu)$ — ИП и $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Оператор T называется *оператором типа* $\mathrm{RN}_{E'}$, если для каждой меры $\overline{m} \in \mathfrak{M}(E,X)$ мера $T\overline{m}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_0(E,Y)$. Таким образом, операторы типа $\mathrm{RN}_{E'}$ из X в Y есть в точности те ограниченные линейные операторы, для которых ассоциированное отображение $\mathfrak{M}(E,X) \to \mathfrak{M}(E,Y)$ принимает значения во множестве $\mathfrak{M}_0(E,Y)$. Семейство всех операторов типа $\mathrm{RN}_{E'}$ из X в Y будет обозначаться через $\mathrm{RN}_{E'}(X,Y)$.

Наше первое предложение о свойствах таких операторов элементарно и следует немедленно из предложений 2.1.1 и 2.1.2 и из предложения 1 из [29] (см. замечание после основного определения 1.1.1).

Предложение 2.1.3. (1) *Если $E \in L_0(\mu)$ — ИП с дискретным дуальным E', то* $\mathrm{RN}_{E'}(X,Y) = \mathrm{L}(X,Y)$;

(2) *если мера μ — не чисто атомическая, то* $\mathrm{RN}_{(L_\infty)'}(X,Y) = \mathrm{RN}(X,Y)$.

Одним из основных результатов этого раздела является следующая теорема, которая утверждает (в свете части (1) предыдущего предложения), что каково бы не было идеальное пространство $E \subset L_0(\mu)$, операторный класс $\mathrm{RN}_{E'}$ есть либо идеал всех ограниченных линейных операторов, либо идеал оператор типа RN .

Теорема 2.1.1. *Пусть $E \subset L_0(\mu)$ — ИП, дуальное пространство E' которого не дискретно. Тогда для каждой пары банаховых пространств X и Y выполняется равенство $\mathrm{RN}(X,Y) = \mathrm{RN}_{E'}(X,Y)$. Таким образом, класс $\mathrm{RN}_{E'}$, снабженный обычной операторной нормой, является инъективным банаховым идеалом операторов.*

В качестве специального случая этой теоремы получаем:

Следствие 2.1.1. *Пусть $E \subset L_0(\mu)$ — ИП с недискретным дуальным E' и X — банахово пространство. Пространство X обладает свойством Радона-Никодима тогда и только тогда, когда X обладает свойством $\mathrm{RN}_{E'}$ (т. е. тождественное отображение $X \to X$ является оператором типа $\mathrm{RN}_{E'}$). Таким образом, если X имеет свойство RN, то X имеет свойство $\mathrm{RN}_{E'}$ для любого ИП E.*

Теорема 2.1.1 есть простое следствие части (2) предложения 2.1.3 и следующих трех утверждений, которые дают также некоторые другие характеристики RN-операторов.

Лемма 2.1.1. *Пусть E и F — два идеальных пространства на конечном положительном измеримом пространстве (Ω, Σ, μ). Предположи, что $E \prec F$ и* $\operatorname{supp} E' = \operatorname{supp} F'$ (см. пункт 1 по поводу обозначений). *Тогда* $\mathrm{RN}_{E'}(X,Y) \subset \mathrm{RN}_{F'}(X,Y)$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathrm{RN}_{E'}(X,Y)$ и $\overline{m} \in \mathfrak{M}(F,X)$. Пусть, далее, $g \in F'$ — такая функция, что $\int |f|\,dV(\overline{m}) \leqslant \int |f| g\,d\mu$ для всех $f \in F$. Нам надо показать, что $T\overline{m} \in \mathfrak{M}_0(F,Y)$. Так как $E \prec F$, то по предложению 0.2.1.1 найдется такая последовательность попарно дизъюнктных множеств $\Omega_n \in \Sigma$, что $\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n = \operatorname{supp} E$ и $L_\infty|_{\Omega_n} \subset E|_{\Omega_n} \subset F|_{\Omega_n}$ для каждого n. Поскольку $g \in F'$ и $E|_{\Omega_n} \subset F|_{\Omega_n}$, мы имеем $g\chi_{\Omega_n} \in E'$. Следовательно, если $\overline{m}_n(A) = \overline{m}(A \cap \Omega_n)$, то $\overline{m}_n \in \mathfrak{M}(E,X)$. По условию существует такая функция $\overline{g}_n \in E'(Y)$, что $\int f\,dT\overline{m}_n = \int f\overline{g}_n\,d\mu$ для всех $f \in E$. Теперь включение $L_\infty(\mu)|_{\Omega_n} \subset E|_{\Omega_n}$ влечет неравенство $\|\overline{g}_n\| \leqslant \|T\|\,g$ п.в. на Ω_n. Положим $\overline{g}(\omega) = \overline{g}(\omega)$, если $\omega \in \Omega$ и $\overline{g}(\omega) = 0$, если $\omega \in \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$. Так как $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\|\,g$ п.в. на Ω и $g \in F'$, то $\overline{g} \in F'(Y)$. Из равенства $\operatorname{supp} E' = \operatorname{supp} F'$ и из включения $\operatorname{supp} E' \subset \operatorname{supp} E = \bigcup_{n=1}^\infty$ вытекает, что $\overline{m}(A) = 0$ для каждого множества $A \in \Sigma$, которое лежит в $\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$. Поэтому для всех $f \in F$ мы имеем

$$\int_\Omega f\,dT\overline{m} = \sum_{n=1}^\infty \int_{\Omega_n} f\,dT\overline{m} == \sum_{n=1}^\infty \int_{\Omega_n} f\overline{g}_n\,d\mu = \int_\Omega f\overline{g}\,d\mu.$$

Таким образом, мы показали, что $T\overline{m} \in \mathfrak{M}_0(F,Y)$. ■

Лемма 2.1.2. *Пусть $E \subset L_0(\mu)$ — ИП и T — оператор из X в Y. Следующие утверждения эквивалентны:* (1) $T \in \mathrm{RN}_{E'}(X, Y)$;

(2) *для любого отображения $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ существует такая функция $\overline{g} \in E'(Y)$, что $TUf = \int f\overline{g}\,d\mu$ для всех $f \in E$; более того, если $g \in E'$ — такая функция, что $\|Ue\| \leqslant \int |e|g\,d\mu$ для $e \in E$, то $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\|g$ п.в. на Ω.*

Доказательство. То, что (2) влечет (1) очевидно. Для доказательства обратной импликации предположим, что $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ и $g \in E'$ — функция, для которой $\|Ue\| \leqslant \int |e|g\,d\mu$, если $e \in E$. При доказательстве существования такой функции $\overline{g} \in E'(Y)$, что $TUf = \int f\overline{g}\,d\mu$ для каждой $f \in E$ мы можем считать, что $\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} E'$ и $L_\infty(\mu) \prec E$ (по предложению 0.2.1.1). Теперь (снова по предложению 0.2.1.1) мы получаем, что $L_\infty(\mu) \prec E'$ и, следовательно, $E \prec L_1(\mu)$. Таким образом, мы имеем $L_\infty(\mu) \prec E \prec L_1(\mu)$. Пусть $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность попарно дизъюнктных множеств из Σ, для которой $\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega$ и $L_\infty(\mu)_|\Omega_n \subset E|_{\Omega_n} \subset L_1(\mu)|_{\Omega_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Зафиксируем $n = 1, 2, \dots$ Так как $\|Ue\| \leqslant \int_{\Omega_n} |e|g\,d\mu$ для всех $e \in E$ таких, что $e|_{\Omega\setminus\Omega_n} = 0$, то по предложению 2.1.2 существует такая мера $\overline{m}_n \in \mathfrak{M}(E, X)$, что $Ue = \int e\,d\overline{m}_n$ для каждой функции $e \in E$, носитель которой лежит в Ω_n. Следовательно, для любого $n = 1, 2, \dots$ существует такая функция $\overline{g}_n \in E'(Y)$, что $Ue = \int e\overline{g}_n\,d\mu$ для $e \in E$ с носителем в Ω_n. Так как $L_\infty(\mu)|_{\Omega_n} \subset E|_{\Omega_n}$, то $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\|g$ на Ω_n. Для завершения доказательства теперь достаточно положить $\overline{g}(\omega) = \overline{g}_n(\omega)$, если $\omega \in \Omega_n$. ■

Теперь мы готовы доказать следующую теорему (а вместе с ней и теорему 2.1.1).

Теорема 2.1.2. *Для линейного ограниченного оператора из X в Y следующие утверждения равносильны:*

1) $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$;

2) *для любого конечного положительного измеримого пространства (Ω, Σ, μ), любого ИП $E \subset L_0(\mu)$ и для всякого отображения $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ отображение TU принадлежит пространству $\overline{\mathrm{S}}_0(E, Y)$;*

3) *для любого конечного положительного измеримого пространства (Ω, Σ, μ), любого БИП $E \subset L_0(\mu)$ и для всякого отображения $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ существует такая функция $\overline{g} \in E'(Y)$, что $TUe = \int e\overline{g}\,d\mu, e \in E$, и $\|\overline{g}\|_{E'(Y)} \leqslant \|T\|\,\overline{s}(U)$;*

4) *существует пространство (Ω, Σ, μ) с конечной положительной не чисто атомической мерой и ИП E с недискретным дуальным, такие, что для любого отображения $U \in \overline{\mathrm{S}}(E, X)$ отображение TU лежит в пространстве $\overline{\mathrm{S}}_0(E, Y)$.*

Доказательство. Если $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$, то $T \in \mathrm{RN}_{L_\infty(\mu)'}(X.Y)$ для любого пространства $L_\infty(\mu)$. Теперь легко видеть, что $T \in \mathrm{RN}_{E'}(X, Y)$ для любого ИП E, упомянутого в утверждениях (2) и (3) (предложение 0.2.1.1 и лемма 2.1.1). Для доказательства импликации (1) $\Longrightarrow$ (2) достаточно применить лемму 2.1.2. Импликации (2) $\Longrightarrow$ (3) и (3) $\Longrightarrow$ (4) тривиальны. Таким образом, необходимо только показать, что (4) влечет (1).

Пусть T удовлетворяет условию (4). Конечно, без ограничения общности, мы можем считать, что $\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} E'$. В этом случае $L_\infty(\mu)|\operatorname{supp} E' \prec E'$ (предложение 0.2.1.1) и, следовательно, $E \prec L_1(\mu)|_{\operatorname{supp} E}$. По лемме 2.1.2 мы получаем, что $T \in \mathrm{RN}_{E'}(X,Y)$, а из леммы 2.1.1 теперь вытекает, что $T \in \mathrm{RN}_{F'}(X,Y)$, где $F = L_1(\mu)|_{\operatorname{supp} E}$. Покажем, что T удовлетворяет условию 2) леммы 2.1.2 при $E = L_\infty := L_\infty(\mu_0)$, где для краткости записи мы обозначили через μ_0 такую меру, что $L_\infty(\mu_0) = F$.

Пусть $U \in \overline{\mathrm{S}}(L_\infty, X)$ и $g \in L_1\,(L_1 := L_1(\mu_0))$ — такая функция, что $\|Uf\| \leqslant \int |f| g\, d\mu_0$ для $f \in L_\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $g \geqslant 1$. Определим оператор $U_1 : L_\infty \to L_1$ следующим образом: $U_1 f = gf$ $(f \in L_\infty)$. Тогда множество $U(L_\infty)$ плотно в L_1. Пусть $V : L_1 \to X$ — продолжение по непрерывности оператора $V_0 : U_1(L_\infty) \to X$, $V_0(gf) = Uf$ для $f \in L_\infty$. Ясно, что $Uf = VU_1 f\,(f \in L_\infty)$. По нашему предположению существует такая функция $\overline{g}_0 \in L_\infty(Y)$, что $TV = \int \varphi \overline{g}\, d\mu_0$ $(\varphi \in L_1)$. Следовательно, если $f \in L_\infty$, то $TUf = TVU_1 f = TV(gf) = \int g f \overline{g}\, d\mu_0$. Положим $\overline{g} := g\overline{g}_0$. Тогда $\|\overline{g}\| = g\,\|\overline{g}_0\| \in L_1$, т. е. $\overline{g} \in L_1(Y)$. Кроме того, $TUf = \int f \overline{g}\, d\mu_0$ для всех $f \in L_\infty$. Применение леммы 2.1.2 завершает доказательство теоремы. ■

Взяв в теореме 2.1.2 в качестве E пространство $L_1(\mu)$, мы получим (эквивалентность 1) $\iff$ 4)):

Следствие 2.1.2. *Оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ является оператором Радона–Никодима тогда и только тогда, когда для всякого (соответственно, для некоторого) пространства с мерой (соответственно, пространства с не чисто атомической мерой) (Ω, Σ, μ) и для всякого отображения $U \in \mathrm{L}(L_1(\mu), X)$ существует такая функция $\overline{g} \in L_\infty(\mu; Y)$, что $TUe = \int f\overline{g}\, d\mu, f \in L_1(\mu)$, и $\|\overline{g}\|_{L_\infty(\mu;Y)} \leqslant \|T\|\,\|U\|$.* ■

А если взять $E = L_\infty(\mu)$, то получим

Следствие 2.1.3. *Пусть (Ω, Σ, μ) —пространство с конечной положительной не чисто атомической мерой, $T \in \mathrm{L}(X, Y.)$ Оператор T есть оператор типа* RN *тогда и только тогда, когда для каждого отображения $U \in \overline{\mathrm{S}}(L_\infty(\Omega,\mu), X)$ существует такая функция $\overline{g} \in L_1(\Omega,\mu); Y$ что $TUf = \int f\,\overline{g}\, d\mu$ для всех $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$.* ■

Отвлечемся от "идеальных" исследований RN-операторов и приведем одно из применений предыдущей теоремы в общей теории нормированных операторных идеалов. Заметим, что обращение следующей теоремы также справедливо (см. теорему 4.1.2 ниже). Напомним, что "интегральность" и "ядерность" оператора означает у нас его "1-интегральность" и "1-ядерность" соответственно.

Теорема 2.1.3. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Если существует такой неразреженный компакт K что для каждого интегрального оператора $U : C(K) \to X$ оператор TU ядерный, то T — оператор типа* RN .

Доказательство. Пусть μ — не чисто атомическая мера Радона на K. Мы покажем, что T удовлетворяет условию (4) теоремы 2.1.2 для ИП $E = L_\infty(\mu)$. Пусть $U \in \overline{\mathrm{S}}(L_\infty(\mu), X)$ и пусть функция g такова, что $g \geqslant 1$ п.в. и $\|Uf\| \leqslant \int |f| g\, d\mu$ для всех $f \in L_\infty(\mu)$. Тогда существует отображение $U_2 \in \mathrm{L}(L_1(\mu), X)$ такое, что

$U = U_2U_1$, где $U_1 f = fg$ для $f \in L_\infty(\mu)$. Так как $|U_1 f| \leqslant \|f\|\, g$ п.в., то U_1 — интегральный оператор из $L_\infty(\mu)$ в $L_1(\mu)$ и, таким образом, U — также интегральный оператор. По условию TUj — ядерное отображение, где $j : C(K) \to L_\infty(\mu)$ — естественное вложение. Пусть $TUj = \sum\langle\cdot, \mu_n\rangle y_n$ — некоторое ядерное представление этого ядерного отображения ($\mu_n \in C^*(K), y_n \in Y_n$, $\sum\|\mu_n\|\,\|y_n\| < +\infty$). Пусть P — каноническая проекция из $C^*(K)$ на $L_1(\mu)$ и пусть $i : L_1(\mu) \to C^*(K)$ — инъекция $i(\varphi) - \varphi\mu$ для $\varphi \in L_1(\mu)$. Если $\widetilde{\mu}_n = f_n\mu = P\mu_n\,(f_n \in L_1(\mu))$, то $(TUj)^*(Y^*) \subset i(L_1(\mu))$ и для $f \in C(K)$ мы имеем: $(TUj)^*(f) = \sum\langle f, \widetilde{\mu}_n\rangle y_n$. Так как $g \geqslant 1$ п.в., то множество $U_1 j(C(K))$ плотно а $L_1(\mu)$ и, следовательно, $TUf = \sum\langle f, f_n\rangle y_n$ для всех $f \in L_\infty(\mu)$, где $\sum\|f_n\|\,\|y_n\| < \infty$. Таким образом, $TUf = \int f\overline{g}\,d\mu$, где $\overline{g} = \sum f_n \otimes y_n \in L_1(\mu; Y)$, и оператор T удовлетворяет условию (4) теоремы 2.1.2. Следовательно, он является оператором Радона-Никодима. ■

Используя установленные выше результаты, мы получим теперь некоторые другие необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейный ограниченный оператор был оператором типа RN . Как мы видели, RN операторы, взятые в композиции с некоторыми другими линейными отображениями, в каких-то смыслах улучшали их. Следующие теоремы показывают, что подобное встречается всякий раз, когда мы рассматриваем композиции RN операторов со скалярно измеримыми векторно-значными функциями и с "порядково ограниченными" отображениями. Всюду ниже X и Y — банаховы пространства.

Теорема 2.1.4. *Для оператора $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ следующие три утверждения эквивалентны:*

(1) T — *оператор типа* RN;

(2) *если* (Ω, Σ, μ) — *конечное положительное измеримое пространство,* $E \subset L_0(\mu)$ — *ИП,* $\overline{f} : \Omega \to X^{**}$ — X^**-скалярно измеримая функция такая, что* $\int f\overline{f}\,d\mu \in X$ *для каждой функции* $f \in E$ *и* $|\langle f, x'\rangle| \leqslant \varphi \in E'$ *для всех* $x' \in X^*$ *п.в., то существует функция* $\overline{g} \in E'(Y)$, *для которой функции* $\overline{g}$ *и* $T^{**}\overline{f}$ Y^**-скалярно эквивалентны*;

(3) *существуют конечное положительное измеримое пространство* (Ω, Σ, μ) *и ИП* $E \subset L_0(\mu)$ *с не дискретным дуальным* E' *такие, что для любой функции* $\overline{f}$ *со свойствами из (2) можно найти функцию* $\overline{g} \in E'(Y)$, Y^**-скалярно эквивалентную функции* $T^{**}\overline{f}$.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$ и $E \subset L_0(\mu)$ — ИП. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\operatorname{supp} E = \Omega$. Пусть $\overline{f}$ и φ — как в условии (2). По предложению 0.2.1.1 существует последовательность $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ попарно не пересекающихся множеств из Σ такая, что $\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega, L_\infty(\mu)|_{\Omega_n} \subset E|_{\Omega_n}$ и φ ограничена на каждом множестве Ω_n. Положим $\overline{f}_n = \overline{f}\chi_{\Omega_n}$ и определим оператор $U \in \mathrm{L}(L_1(\mu), X)$ соотношением $Uf = \int f\overline{f}_n\,d\mu$. Из теоремы 2.1.2 следует, что $TUf = \int f\overline{g}_n\,d\mu$, где $\overline{g}_n \in L_\infty(\mu)$. Если $y' \in Y^*$, то $\langle T^{**}, y'\rangle = \langle\overline{g}_n, y'\rangle$ п.в. на Ω_n. Далее, $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\|\varphi$ п.в. на Ω_n. Теперь достаточно положить $\overline{g} = \sum_{n=1}^\infty \overline{g}_n\chi_{\Omega_n}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть (Ω, Σ, μ) — конечное положительное не чисто атомическое измеримое пространство и пусть $E \in L_0(\mu)$ — ИП с недискретным дуальным E'. По

предложению 0.2.1.1 мы можем найти множество $\Omega_0 \in \Sigma$ такое, что сужение μ на Ω_0 является чисто не атомической мерой $\mu_0, L_\infty(\mu_0) = L_\infty(\mu)|_{\Omega_0} \subset E'|_{\Omega_0}$ и $E|_{\Omega_0} \subset L_1(\mu_0)$. Предположим, что для E выполнено условие (3). Если $U \in \mathrm{L}(L_1(\mu_0), X)$, то существует такая X^*-скалярно измеримая функция $\overline{f}_0 : \Omega_0 \to X^{**}$, что $Uf = \int f\overline{f}_0\, d\mu_0$ для всех $f \in L_1(\mu_0)$. Положим $\overline{f} = \overline{f}_0\chi_{\Omega_0}$. Так как $L_\infty(\mu_0) \subset E'|_{\Omega_0}$ и $E|_{\Omega_0} \subset L_1(\mu_0)$, то нетрудно понять, что функция $\overline{f}$ обладает свойствами, указанными в утверждении (2). Следовательно, существует такая функция $\overline{g} \in E'(Y)$, что $\langle T^{**}\overline{f}, y'\rangle = \langle \overline{g}, y'\rangle$ п.в. на Ω для любого $y' \in Y^*$. Теперь отсюда следует, что $TUf = \int f\overline{g}\, d\mu$ для каждой функции $f \in L_1(\mu)$ с носителем в Ω_0. По следствию 2.1.2 оператор T есть оператор типа RN. ■

Аналогичное теореме 2.1.4 утверждение может быть установлено для сопряженных операторов типа RN. Если $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, то $T^* \in \mathrm{RN}$ тогда и только тогда, когда для оператора T^* (вместо T^{**} в теореме 2.1.4) выполняются условия, соответствующие условиям (2) и (3) с заменой X^*-скалярной измеримости на X-скалярную измеримость. Мы сформулируем и докажем несколько более слабую теорему, достаточную, однако для наших применений.

Теорема 2.1.4$'$**.** *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$;

2) *для любого пространства (Ω, Σ, μ) с конечной положительной мерой и для всякой ограниченной Y-скалярно измеримой функции $\overline{f} : \Omega \to Y^*$ существует такая ограниченная измеримая по Бохнеру функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $T^*\overline{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\overline{g}$;*

2$'$) *для некоторого пространства (Ω, Σ, μ) с положительной не чисто атомической мерой и для всякой ограниченной Y-скалярно измеримой функции $\overline{f} : \Omega \to Y^*$ существует такая ограниченная измеримая по Бохнеру функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $T^*\overline{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\overline{g}$;*

3) *для любого пространства (Ω, Σ, μ) с конечной положительной мерой и для всякой Y-скалярно измеримой функции $\overline{f} : \Omega \to Y^*$ существует такая ограниченная измеримая по Бохнеру функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $T^*\overline{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\overline{g}$;*

3$'$) *для некоторого пространства (Ω, Σ, μ) с положительной не чисто атомической мерой и для всякой Y-скалярно измеримой функции $\overline{f} : \Omega \to Y^*$ существует такая ограниченная измеримая по Бохнеру функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $T^*\overline{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\overline{g}$;*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $T^* \in \mathrm{RN}$ и функция $\overline{f} : \Omega \to Y^*$ — Y-скалярно измерима и ограничена, $\|\overline{f}\| \leqslant c$ п. в. Определим меру $\overline{m} : \Sigma \to Y^*$ следующим образом: $\overline{m}(A) = \int_A \overline{f}\, d\mu$ $(A \in \Sigma)$. Ясно, что это определение корректно, так как для $A \in \Sigma$ и $y \in Y$ мы имеем

$$|\langle \overline{m}(A), y\rangle| = \left\|\langle \int_A \overline{f}\, d\mu, y\rangle\right\| = \left\|\int_A \langle \overline{f}, y\rangle\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_A |\langle \overline{f}, y\rangle|\, d\mu \leqslant c\,\|y\| \int_A d\mu = c\,\|y\|\,\mu(A)$$

и, следовательно, $\overline{m}(A) \in Y^*$. Очевидно, что $V_{\overline{m}}(A) \leqslant c\mu(A)$ для всех $A \in \Sigma$. Пусть $\varphi \in L_1$. Тогда $\int |\varphi|\, dV_{T^*\mu} \leqslant c\|T\|\,\|\varphi\|_1$. По условию $T^*\overline{m}(A) = \int_A \overline{g}\, d\mu$ для всех $A \in \Sigma$, где $\overline{g}$ — измеримая по Бохнеру X^*-значная функция. Следовательно, $\int |\varphi|\,\|\overline{g}\|\, d\mu = \int |\varphi|\, dV_{\overline{m}} \leqslant c\|T\|\,|\varphi|$ для любой функции $\varphi \in L_\infty$. Таким образом, $\|\overline{g}\| \in L_\infty$. Далее, $\int_A T^*\overline{f}\, d\mu = T^*\overline{m}(A) = \int_A \overline{g}\, d\mu\, (A \in \Sigma)$. Отсюда следует, что $\langle T^*\overline{f}, x\rangle = \langle \overline{g}, x\rangle$ п. в. для каждого фиксированного $x \in X$.

2) $\implies$ 3) и 2′) $\implies$ 3′). Пусть $\overline{f}$ — произвольная Y-скалярно измеримая функция, $f : \Omega \to Y$. Положим

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega :\ F(\omega) \leqslant n\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $F := \sup\{|\langle \overline{f}, x\rangle| :\ \|x\| \leqslant 1\}$. Пусть $\Sigma_n = \Sigma|_{\Omega_n}$. Очевидно, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ есть множество полной меры. По условию существуют такие функции $\overline{g}_n \in L_\infty(X^*)$, что $T^*\overline{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\overline{g}_n$ на Ω_n. Пусть $\sigma_n := \Omega_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \Omega_k$ и $\overline{g} : \Omega \to X^*$ — функция, равная $\overline{g}_n$ на σ_n и нулю вне $\bigcup_{k=1}^{\infty}$. Тогда, очевидно, функция $\overline{g}$ измерима и X-скалярно эквивалентна функции $T^*\overline{f}$.

3′) $\implies$ 1). Покажем, что $T^* \in \mathrm{RN}_{L_p}$ при $1 < p < \infty$. Пусть $q = p/(p-1)$ и $\overline{m} : \Sigma \to Y^*$ — такая мера, что для всех $\varphi \in L_q$ имеет место неравенство $\int |\varphi|\, dV_{\overline{m}} \leqslant \int |\varphi|\gamma\, d\mu$, где γ — некоторая функция из L_p. Рассмотрим оператор $U : L_q \to Y^*, U\varphi := \int \varphi\, d\overline{m}$ $(\varphi \in L_q)$. Очевидно, $U \in \overline{\mathrm{S}}(L_q, Y^*)$. Пусть $V := U^*|_Y : Y \to L_p$. Нетрудно видеть, что $U = V^*$. Так как $U^* \in \mathrm{P}(Y^{**}, L_p)$, то $V \in \mathrm{P}(Y, L_p)$. Отсюда, используя теорему о лифтинге [87, с. 46, теорема 3], мы получаем, что существует такая Y-скалярно измеримая функция $\Phi : \Omega \to Y^*$, что $\|\Phi\| \leqslant \Psi \in L_p$ и $Vy = \langle y, \Phi\rangle$ $(y \in Y)$. Поэтому $U\varphi = V^*\varphi = \int \varphi\Phi\, d\mu$ для $\varphi \in L_q$, т. е. $\int \varphi\, d\overline{m} = \int \varphi\Phi\, d\mu$ для всех $\varphi \in L_q$. Рассмотрим функцию $T^*\Phi$. По условию найдется измеримая по Бохнеру функция $\overline{g} : \Omega \to X^*, X$-скалярно эквивалентная функции $T^*\Phi$. Следовательно, $\int \varphi\, dT^*\overline{m} = T^*U\varphi = \int \varphi T^*\Phi\, d\mu = \int \varphi\overline{g}\, d\mu$ для всех $\varphi \in L_q$. Очевидно, что $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\|\,\varphi \in L_p$. Поэтому $\overline{g} \in L_p(X^*)$. Таким образом, $T^* \in \mathrm{RN}_{L_p}$. По теореме 2.1.1 $T^* \in \mathrm{RN}$. Теорема доказана. ■

Перед тем, как перейти к важнейшему применению только что установленной теоремы, посмотрим, что она дает в самых простейших ситуациях. Как известно, векторнозначная функция сильно измерима тогда и только тогда, когда она скалярно измерима и почти сепарабельнозначна (более подробно и точно — см. 0.2.2). Поэтому из теоремы 2.1.4′ с очевидностью вытекает классический результат, восходящий еще к Филлипсу (у него была, естественна другая формулировка): *сепарабельное сопряженное пространство обладает свойством Радона-Никодима.* Или более общо, мы получаем такое следствие: *если оператор $T : X \to Y$ таков, что $T^*(Y^*)$ — сильно сепарабельное подмножество в X^*, то он есть оператор типа* RN. Запомним это, и эти факты будут отмечаться нами во многих местах работы.

Теорема 2.1.5. *Для оператора $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ следующие три утверждения эквивалентны:*

(1) T^* *— оператор типа* RN;

(2) *для каждого конечного положительного измеримого пространства (Ω,Σ,μ) и для любого ИП $E \subset L_0(\mu)$, для всякого отображения $U \in \mathrm{P}(Y,E)$ существует такая функция $\overline{g} \in E(X^*)$, что $TUx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$; если E — БИП, то $\|\overline{g}\|_{E(X^*)} \leqslant \|T\|\, p(U)$.*

(3) *существуют конечное положительное измеримое пространство (Ω,Σ,μ) и недискретное ИП $E \subset L_0(\mu)$ такие, что для любого отображения $U \in \mathrm{P}(Y,E)$ найдется функция $\overline{g} \in E(X^*)$, удовлетворяющая соотношению $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ при $x \in X$.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Известно (см. [5], [7]),что если $P \in \mathrm{L}(Y,E)$, то существует такая Y-скалярно измеримая функция $\overline{f} : \Omega \to Y^*$, что $Uy = \langle y, \overline{f}\rangle$ для всех $y \in Y$. Поэтому $UTx = \langle x, T^*\overline{f}\rangle$ для $x \in X$. Если T^* — типа RN, то, используя теорему 2.1.4$'$, мы можем найти измеримую функцию $\overline{g} : \Omega \to X^*$, для которой $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$. Ясно, что $\overline{g} \in E(X^*)$ и, если E — БИП, то $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\|\, p(U)$. То, что (2) влечет (3) — тривиально. Для доказательства того факта, что (3) влечет (1), мы сначала покажем, что (3) влечет утверждение

(3a) для некоторого конечного не чисто атомического пространства с мерой $(\Omega_0,\Sigma_0,\mu_0)$ и для каждого оператора $U \in \mathrm{L}(Y, L_\infty(\mu_0))$ существует такая функция $\overline{g} \in L_\infty(\mu_0; X^*)$, что $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$.

Предположим, что T удовлетворяет (3). Так как E не дискретно, то сужение μ на supp E — не чисто атомическая мера. Из предложения 0.2.1.1 следует, что существует множество $\Omega_0 \subset \operatorname{supp} E, \Omega_0 \in \Sigma$, для которого $\mu_0 = \mu|_\Omega$ есть не чисто атомическая мера и $L_\infty(\mu_0) \subset E|_{\Omega_0}$. Теперь, если $U \in \mathrm{L}(Y, L_\infty(\mu_0))$ и $j : L_\infty(\mu_0) \to E$ — естественное вложение, то мы имеем $jU \in \mathrm{P}(Y,E)$ и, следовательно, $iUTx = \langle x, \overline{g}\rangle, x \in X$, где $\overline{g} \in E(X^*)$. Поскольку jUT отображает единичный шар пространства X в ограниченное подмножество из $L_\infty(\mu_0)$, то функция $\overline{g}|_{\Omega_0}$ лежит в $L_\infty(\mu_0)$.

Теперь мы установим, что из (3a) вытекает (1). Для упрощения обозначений мы обозначим на этом завершающем этапе доказательства пространство $(\Omega_0,\Sigma_0,\mu_0)$ снова через (Ω,Σ,μ). Мы покажем, что $T^* \in \mathrm{RN}_{L_\infty}$. Пусть $\overline{m} : \Sigma \to Y^*$ — такая мера, что $\int |f|\, dV_{\overline{m}} \leqslant \int |f| g\, d\mu \; (f \in L_1)$, где g — некоторая функция из L_∞. Эта мера порождает линейный непрерывный оператор $S : L_1 \to Y^*$. При этом для всякой функции $f \in L_1$ имеет место неравенство $\|Sf\| \leqslant \int |f|\, dV_{\overline{m}} \leqslant \int |f|\, d\mu$. Рассмотрим оператор $S^* : Y^{**} \to (L_1)^*$. Так как $\|Sf\| \leqslant \int |f| g\, d\mu \; (f \in L_1)$, то $|S^* y''| \leqslant \|y''\| g$ для всех $y'' \in Y^{**}$. Рассмотрим теперь отображение $U := S^*|_Y : Y \to L_\infty$. Очевидно, что $U^*|_{L_1} = S$. По условию (3a) существует такая функция $\overline{g} \in L_\infty(X^*)$, что $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для $x \in X$. Поэтому $T^*U^*f = \int f\overline{g}\, d\mu$ для $f \in L_1$.

Следовательно, $\int f\overline{g}\,d\mu = \int f\,dV_{\overline{m}}$ для $f \in L_1$. Нетрудно проверить, что $T^*\overline{m} = \overline{g}\mu$. Таким образом, $T^* \in \mathrm{RN}_{L_\infty}$. По теореме 2.1.1 оператор T^* является оператором типа RN. ■

Следствие 2.1.4. *Пусть (Ω, Σ, μ) —пространство с конечной положительной не чисто атомической мерой, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Оператор T^* есть оператор типа* RN *тогда и только тогда, когда для каждого отображения $U : Y \to L_1(\Omega, \mu)$, переводящего единичный шар пространства Y в порядково ограниченное множество пространства $L_1(\Omega, \mu)$, существует такая функция $\overline{g} \in L_1(\Omega, \mu; X^*)$, что $UTf = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$.* ■

Перед тем, как сформулировать одно из самых важных следствий из последней теоремы приведем без доказательства одну лемму (доказательство ее проводится аналогично доказательству леммы II.11.1 ниже. Отметим, что утверждение леммы было получено, по существу, в работах А. В. Бухвалова [4–8] и В. Л. Левина [19, 20].

Лемма 2.1.3. *Пусть E — БИП минимального типа и $V \in \mathrm{L}(X, E)$. Равносильны следующие утверждения:*

а) существует такая функция $\overline{g} \in E(X^*)$, что $Vx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$;

б) оператор V приближается конечномерными операторами в пространстве $\mathrm{P}(X, E)$. ■

Следствие 2.1.5. *Пусть E — недискретное БИП минимального типа и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$;

2) *для каждого оператора $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ существует такая функция $\overline{g} \in E(X^*)$, что $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$;*

3) *для каждого оператора $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ оператор UT приближается конечномерными операторами в пространстве* $\mathrm{P}(X, E)$. ■

2. Аппроксимация конечномерными операторами: случай абстрактных банаховых решеток. Выше были получены условия, характеризующие класс операторов Радона–Никодима в различных терминах, в частности (см. теоремы 2.1.2 и 2.1.5, следствие 2.1.5), в терминах свойств некоторых отображений, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками *измеримых функций.* Оказалось, например, что если T — непрерывное линейное отображение из X в Y (X, Y — банаховы пространства), то T^* есть оператор типа RN тогда и только тогда, когда для всякого пространства $L_p(\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ и любого правильного (в смысле В. Левина [19]) оператора $U : Y \to L_p(\mu)$ (т. е. оператора, переводящего единичный шар пространства Y в порядково ограниченное множество) суперпозиция UT принадлежит замыканию множества конечномерных отображений в банаховом пространстве $\mathrm{P}(X, L_p(\mu))$ правильных операторов из X в $L_p(\mu)$.

Можно попытаться обобщить результаты, полученные в предыдущем разделе, на случай векторных (или хотя бы банаховых) решеток произвольного рода, не обязательно являющихся решетками измеримых функций. При этом, конечно, на решетки придется накладывать какие-то дополнительные ограничения, а условия, фигурирующие в формулировках указанных теорем, — заменять на другие в том или ином смысле аналогичные условия. Один из возможных путей такого обобщения указывается ниже [40]. Отметим, что (в свете только что сказанного) условия 2) теорем 2.2.2 и 2.2.3 естественны: в случае банаховых идеалов в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ минимального типа они есть в точности соответственно условия 2) теоремы 2.1.2 и теоремы 2.1.5 (см. также следствие 2.1.5).

Пусть X, Y — банаховы пространства, E — векторная решетка. Мы будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathrm{S}(E, X)$ — векторное пространство таких линейных отображений $U : E \to X$, что существует положительный функционал e' на E, для которого $\|Ue\| \leqslant \langle e', |e| \rangle$ при всех $e \in E$; если решетка банахова, то функционал e' всегда непрерывен и в этом случае с нормой $s(U) = \inf\{\|e'\| \mid \|Ue\| \leqslant \langle e', |e| \rangle\}$ пространство $\mathrm{S}(E, X)$ банахово; для банаховой решетки E через $\mathrm{S}_0(E, X)$ обозначается замыкание в $\mathrm{S}(E, X)$ множества конечномерных операторов;

$\mathrm{P}(X, E)$ — векторное пространство таких линейных отображений $U : X \to E$, что существует положительный элемент $e \in E$, для которого $|Ux| \leqslant \|x\| \, e$ при всех $x \in X$; если E — банахова решетка, то с нормой $p(U) = \inf\{\|e\| \mid |Ux| \leqslant \|x\| \, e\}$ пространство $\mathrm{P}(X, E)$ банахово; в последнем случае через $\mathrm{P}_0(X, E)$ обозначается замыкание в $\mathrm{P}(X, E)$ множества конечномерных операторов. Несколько слов о пространствах $\mathrm{P}(X, E)$ в абстрактной ситуации уже было сказано выше.

Подробную информацию о пространствах $\mathrm{S}(E, X)$ и $\mathrm{P}(X, E)$ (по крайней мере, для случая банаховых решеток) можно найти в работах [6], [7], [8], [19] и [20].

Напомним, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ факторизуется через оператор $V \in \mathrm{L}(Z, W)$ (Z, W — банаховы пространства), если $T = U_1 V U_2$, где $U_1 \in \mathrm{L}(W, Y)$, $U_2 \in \mathrm{L}(X, Z)$. Оператор T факторизуется через пространство $l_1(\Gamma)$, если существует такое множество Γ_0, что T факторизуется через тождественное отображение $\mathrm{id} : l_1(\Gamma_0) \to l_1(\Gamma_0)$. Напомним также, что банахова решетка называется решеткой минимального типа, если всякий порядковый интервал $[-e, e] \subset E$ слабо компактен.

Ключевым моментом в доказательствах следующих ниже утверждений будет такой факт (его доказательство мы отложим на некоторое время; см. ниже § 3, п. 1):

Лемма 2.2.1 (см. [39, следствие 6]). *Отображение $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда для всякого (AL)-пространства Z (т. е. нормированной решетки Z с нормой, аддитивной на конусе положительных элементов из Z) и любого оператора $U \in \mathrm{L}(Z, X)$ отображение TU факторизуется через пространство $l_1(\Gamma)$.*

Отметим, что лемма 2.2.1 вытекает из следствия 2.1.2 после некоторых дополнительных манипуляций (это будет уточнено в § 3 ниже).

Изложение наших основных результатов раздела мы начнем в относительно простой характеризации операторов типа RN в терминах свойств отображений, заданных на произвольных векторных решетках. Всюду далее X и Y — банаховы пространства.

Теорема 2.2.1. *Оператор* $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда для всякой векторной решетки* E *и любого отображения* $U \in \mathrm{S}(E,X,)$ *отображение* TU *факторизуется через некоторое отображение* $V \in \mathrm{S}(E, l_1(\Gamma))$.

Доказательство. Достаточно ограничиться рассмотрением случая "только тогда", так как обратная импликация вытекает из леммы 2.2.1 (в качестве E рассматривается пространство $L_1(\mu)$). Пусть $U \in \mathrm{S}(E,X)$, т. е. существует такой положительный функционал e' на E, что $\|Ue\| \leqslant \langle |e|, e' \rangle$ для всех $e \in E$. Положим $p(e) = \langle |e|, e' \rangle$ для $e \in E$. Тогда p — полунорма на E, аддитивная на конусе положительных элементов решетки E. Отсюда следует, что ассоциированное с E и p нормированное пространство E_p (а значит, и его пополнение $\widehat{E}_p$) является (AL)-пространством. Поэтому композиция TU факторизуется таким образом:

$$E \xrightarrow{V_1} \widehat{E}_p \xrightarrow{V_2} Y,$$

где $V_1 \in \mathrm{S}(E, \widehat{E}_p)$ — каноническое отображение, $V_2 \in \mathrm{L}(\widehat{E}_p, Y)$. По лемме 1 V_2 факторизуется через пространство $l_1(\Gamma)$

$$V_2 : \widehat{E}_p \xrightarrow{W_1} l_1(\Gamma) \xrightarrow{W_2} Y.$$

Для завершения доказательства теоремы остается лишь заметить, что $\|W_1V_1e\| \leqslant \|W_1\| \langle |e|, e' \rangle$, т. е. $W_1V_1 \in \mathrm{S}(E, l_1(\Gamma))$. ■

Так как слабая компактность в $l_1(\Gamma)$ равносильна сильной компактности, то из доказанного факта немедленно вытекает

Следствие 2.2.1. *Если* $T \in \mathrm{RN}(X,Y)$, *то для всякой слабо компактно порожденной банаховой решетки* E *и для любого отображения* $U \in \mathrm{S}(E,X)$ *оператор* TU *факторизуется через некоторое отображение* $U_0 \in \mathrm{S}(E, l_1)$. ■

Теперь мы покажем, что если ограничиться лишь рассмотрением банаховых решеток минимального типа, то можно получить прямые аналоги теорем 2.1.2 и 2.1.5. Для этого нам будет нужна такая лемма (под регулярным оператором, действующим между банаховыми решетками, понимается, как всегда, оператор, представимый в виде разности двух положительных операторов):

Лемма 2.2.2. *Пусть* E *— произвольная банахова решетка. Тогда*

1) *если* $U \in \mathrm{L}(E, l_1(\Gamma))$ *— слабо компактное регулярное отображение, то* $U \in S_0(E, l_1(\Gamma))$;

2) *если* $U \in \mathrm{L}(l_\infty(\Gamma), E)$ *— регулярное отображение, непрерывное в топологиях* $\sigma(l_\infty(\Gamma), l_1(\Gamma))$ *и* $\sigma(E, E^*)$, *то* $U \in P_0(l_\infty(\Gamma), E)$.

Доказательство. Заметим сразу, что в обоих случаях из слабой компактности отображения U вытекает его компактность, так как пространство $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Шура, т. е. всякое его слабо компактное подмножество сильно компактно.

1) Пусть U — регулярный слабо компактный оператор из E в $l_1(\Gamma)$. Поскольку $U(E)$ — сепарабельное подмножество в $l_1(\Gamma)$, то без ограничения общности мы можем считать, что множество Γ счетно, т. е. $l_1(\Gamma) = l_1$. Из компактности оператора U следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $\sup_{\|e\|\leqslant 1} \|(Ue)\cdot\chi_{(N,+\infty)}\| < \varepsilon$ (мы рассматриваем пространство l_1 как пространство $L_1(\Omega,\mu)$, где $\Omega = [1,+\infty)$ и μ — дискретная мера с единичными нагрузками в целых точках). Покажем, что если $P_n : l_1 \to l_1$ — оператор проектирования на линейную оболочку в l_1 первых n ортов ($n = 1, 2, \dots$), то отображения $U_n = P_nU$ сходятся в $\mathrm{S}(E, l_1)$ к отображению U. Действительно, если обозначить через $|U|$ модуль регулярного оператора U, то для $s \in E$ и $\varphi \in l_\infty$, $\|\varphi\| \leqslant 1$, мы будем иметь:

$$|\langle (U-U_n)e,\varphi\rangle| = |\langle Ue, (\mathrm{id}-P_n)^*\varphi\rangle| = |\langle Ue, \varphi\chi_{(n+\infty)}\rangle| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}(Ue)(j)\,\varphi(j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty}|U|(|e|)(j)\,\varphi(j) \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty}|U|(|e|)(j) = \langle |U|(|e|), \chi_{(n,+\infty)}\rangle.$$

Отсюда следует, что $\|(U-U_n)e\| \leqslant \langle |e|, e_n'\rangle$, где $e_n' = (|U|)^*(\chi_{(n,+\infty)}) \in E^*$. Остается лишь заметить, что если $n \geqslant N$, то

$$\|U-U_n\| \leqslant \|e_n'\| = \sup_{\|e\|\leqslant 1} |\langle |U|(e), \chi_{(n,+\infty)}\rangle| \leqslant \sup_{\|e\|\leqslant 1} \||U|(e)\cdot\chi_{(n,+\infty)}\| < \varepsilon.$$

2) Если отображение $U \in \mathrm{L}(l_\infty, E)$ регулярно и непрерывно в $\sigma(l_\infty(\Gamma), l_1(\Gamma))$ и $\sigma(E, E^*)$, то U^* — слабо компактный регулярный оператор из E^* в $l_1(\Gamma)$. Из предыдущего доказательства видно, что в этом случае существуют такие конечномерные операторы $V_n \in \mathrm{L}(l_\infty, E)$ ($n = 1, 2, \dots$), что $s(U^* - V_n^*) \to 0$ при $n \to +\infty$, причем $V^*(E^*) \subset l_1(\Gamma)$. Так как $p(U - V_n) = s(U^* - V_n^*)$, то $p(U - U_n) \to 0$ при $n \to \infty$. ■

Теорема 2.2.2. *Для оператора $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ эквивалентны условия:*

1) $T \in \mathrm{RN}(X,Y)$;

2) *если E — такая банахова решетка, что E^* — банахова решетка минимального типа, и если $U \in \mathrm{S}(E,X)$, то $UT \in \mathrm{S}_0(E,Y)$;*

3) *если E — такая банахова решетка, что E^* — банахова решетка минимального типа, и если $U \in \mathrm{S}(E,X)$, то UT факторизуется через некоторый оператор $V \in \mathrm{S}_0(E,l_1)$.*

Доказательство. Ясно, что 3) влечет 2). Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1)вытекает из теоремы 2.1.2 (достаточно в качестве E взять произвольное пространство $L_p(\mu)$ при $1 < p < +\infty$). Пусть $T \in \mathrm{RN}(X,Y)$ и E и U — как в условии 3). Пусть, далее, $\widehat{E}_p$ — пополнение нормированного пространства E_p, ассоциированного с парой (E,p), где p — полунорма на E, определяемая таким элементом $e' \in E^*$, что $\|Ue\| \leqslant \langle |e|, e'\rangle$ для всех $e \in E$ (т. е. $p(e) = \langle |e|, e'\rangle$). Тогда $\widehat{E}_p$ — (AL)-пространство; поэтому (лемма 2.2.1) TU факторизуется следующим образом:

$$E \xrightarrow{V_1} \widehat{E}_p \xrightarrow{V_2} l_1(\Gamma) \xrightarrow{V_3} Y,$$

где V_1 — каноническое отображение, V_2 и V_3 — линейные непрерывные операторы. Так как $V_1^*V_2^* \in \mathrm{P}(l_\infty(\Gamma), E^*)$, и E^* — банахова решетка минимального типа, то $V_1^*V_2^*$ (а значит, и V_2V_1) — слабо компактное отображение. Поскольку всякий оператор, действующий в (AL)-пространствах, является регулярным (см., например, [80, стр. 66]), то V_2, а следовательно, и V_2V_1 — регулярные отображения. По лемме 2.2.2 $V_2V_1 \in \mathrm{S}_0(E, l_1(\Gamma))$. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $V_2V_1(E)$ — сепарабельное множество в $l_1(\Gamma)$, и поэтому в указанной выше факторизации оператора TU множество Γ можно взять счетным. ■

Теорема 2.2.3. *Для оператора $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ эквивалентны условия:*
1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$;
2) *для всякой банаховой решетки минимального типа E и для любого оператора $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ оператор UT принадлежит пространству $\mathrm{P}_0(X, E)$;*
3) *для всякой банаховой решетки минимального типа E и для любого оператора $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ оператор UT факторизуется через некоторый оператор $\mathrm{P}_0(l_\infty.E)$.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна, а импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из следствия 2.1.5 Поэтому нам надо доказать лишь импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть T^* является оператором типа RN и пусть E — банахова решетка минимального типа, $U \in \mathrm{P}(Y, E)$ и $e \in E$ — такой положительный элемент, что $|Uy| \leqslant \|y\|\, e$ для всех y. Так как интервал $[-e, e] \subset E$ слабо компактен, то каноническое отображение $\Phi : E_{[-e,e]} \to E$ слабо компактно ($E_{[-e,e]}$ — банахово пространство, топология которого порождается единичным шаром $[-e, e]$); при этом $E_{[-e,e]}$ является абстрактным M-пространством и, следовательно, по теореме Какутани изоморфно как банахово пространство и как векторная решетка некоторому пространству $C(K)$. Таким образом, оператор UT допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{V_1} C(K) \xrightarrow{\Phi} E$$

(здесь $V_1 \in \mathrm{L}(Y, C(K))$ — отображение, индуцированное оператором U). По лемме 2.2.1 существуют такие операторы $W_1 \in \mathrm{L}(l_1(\Gamma), X^*)$ и $W_2 \in \mathrm{L}(C(K)^*, l_1(\Gamma))$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "T^*"] \arrow[dr, "W_1"'] & Y^* \arrow[r, "V_1^*"] & C(K)^* \arrow[r, "\Phi^*"] & E^* \\ & l_1(\Gamma) \arrow[ur, "W_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Заметим, что в этой диаграмме оператор $W_2\Phi^*$ является регулярным в силу регулярности отображений Φ^* (как сопряженного к регулярному оператору) и W_2 (поскольку всякий оператор, действующий в (AL)-пространствах регулярен). Так как $W_2\Phi^*$ — слабо компактное отображение, то существует такое счетное подмножество Γ_0 в Γ, что $\operatorname{supp} W_2\Phi^*(E^*) \subset \Gamma_0$. Кроме того, в силу слабой компактности оператора Φ множество $\Phi^{**}(C(K)^{**})$ содержится в E. Из всего сказанного мы можем заключить, что UT допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{U_1} l_\infty \xrightarrow{U_2} E,$$

где $U_1 \in \mathrm{L}(X, l_\infty)$, а U_2 — непрерывный в топологиях $\sigma(l_\infty, l_1)$ и $\sigma(E, E^*)$ регулярный оператор из l_∞ в E. Применение леммы 2.2.2 к отображению U_2 завершает доказательство теоремы. ■

Выделим особо один частный случай последних двух теорем:

Следствие 2.2.2. *Банахово пространство X обладает свойством* RN *тогда и только тогда, когда для всякой банаховой решетки E, сопряженное пространство к которой является решеткой минимального типа, выполняется равенство* $\mathrm{S}(E,X) = \mathrm{S}_0(E,X)$ *(эквивалентно, всякий оператор $U \in \mathrm{S}(E,X)$ факторизуется через некоторый оператор $V \in \mathrm{S}_0(E, l_1)$). Сопряженное к X пространство X^* обладает свойством* RN *тогда и только тогда, когда для всякой банаховой решетке E минимального типа выполняется равенство* $\mathrm{P}(X,E) = \mathrm{P}_0(X,E)$ *(эквивалентно, всякий оператор $U \in \mathrm{P}(X,E)$ факторизуется через некоторый оператор $V \in \mathrm{P}_0(l_\infty, E)$).* ■

Замечание 2.2.1. Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и $T^*(Y^*)$ — сепарабельное подмножество в X^*, то $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$ (см. также теоремы 6.1.1 и 6.2.2). Кроме того, всякий слабо компактный оператор есть оператор типа RN (следствие 1.2). Поэтому теорема 2.2.3 является обобщением теорем 4.20, 4.21 и 4.23 из [112], где импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) нашей теоремы доказана для слабо компактных операторов T и для тождественного отображения в пространстве, имеющем сепарабельное сопряженное.

Следствие 2.2.3. *Если E — произвольная банахова решетка и H — гильбертово пространство, то всякий оператор $T \in \mathrm{S}(E,H)$ является p-абсолютно суммирующим для любого $p > 0$. Если, кроме того, E^* — банахова решетка минимального типа, то T — даже p-квазиядерный оператор* (определения см. выше в 0.3.2.)

Доказательство. Если $T \in \mathrm{S}(E,H)$, то по теореме 2.2.1 T факторизуется через пространство $l_1(\Gamma)$. С другой стороны (см. [136]), всякое линейное непрерывное отображение из $l_1(\Gamma)$ в H принадлежит классу Π_p при любом $p > 0$. Поэтому T — p-абсолютно суммирующий оператор. Если E^* — банахова решетка минимального типа, то воспользовавшись следствием 2, мы можем найти такую факторизацию $E \xrightarrow{V} l_1 \xrightarrow{U} H$ оператора T, что V — компактное отображение. Пусть $p > 0$ и K — единичный шар пространства l_∞, снабженный топологией $\sigma(l_\infty, l_1)$. Так как $U \in \Pi_p(l_1, H)$, то [27] на компакте K существует такая положительная мера

Радона μ, что для всех $x \in l_1$ выполняется неравенство $\|Ux\| \leqslant \left(\int_K |\langle x, x'\rangle|^p \, d\mu\right)^{1/p}$. Поэтому, если $e \in E$, то

$$\|UYe\| \leqslant \left(\int_K |\langle Ve, x'\rangle|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_K |\langle e, V^* x'\rangle|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_{V^*(K)} |\langle e, e'\rangle|^p \, dV^*(\mu)\right)^{1/p}.$$

Ввиду того, что оператор V компактен, мера $V^*(\mu)$ является мерой Радона на пространстве $(E^*, \|\cdot\|)$, откуда вытекает, что $T = UV$ есть p-квазиядерный оператор (см. [107]). ■

§3. Операторы, действующие из $\mathcal{L}_1$-пространств

Исследуем пространства $\mathrm{RN}(Z, X)$ для случая, когда банахово пространство Z является $L_1(\mu)$, либо, более общо, $\mathcal{L}_1$-пространством. Затем применим некоторые из полученных фактов к изучению операторов со значениями в L_∞-пространствах. На протяжении всего этого параграфа фиксированы следующие обозначения:

(Ω, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, обладающее следующим свойством: существует разбиение $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ множества Ω на множества $\Omega_i \in \Sigma$ конечной меры такое, что $A \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $A \cap \Omega_i \in \Sigma$ при любом $i \in I$ и $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap \Omega_i)$; $\alpha = \mathrm{card}\ I$; $L_1 = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$; D — единичный шар в L_1.

Пусть, как обычно X, Y — произвольные банаховы пространства.

Напомним, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ факторизуется через оператор $U \in \mathrm{L}(Z, W)$, если существуют такие операторы $V_1 \in \mathrm{L}(X, Z)$ и $V_1 \in \mathrm{L}(W, Y)$, что $T = V_2 U V_1$. Оператор T факторизуется через банахово пространство Z, если он факторизуется через тождественный оператор $Z \to Z$; при этом мы полагаем

$$n_Z(T) = \inf\{\|V_2\| \, \|V_1\| \mid T = V_2 V_1, \ V_2 \in \mathrm{L}(Z, Y), V_1 \in \mathrm{L}(X, Z)\}.$$

Напомним также, что характер плотности $\chi(X)$ банахова пространства X — это минимальное кардинальное число β, для которого в X существует всюду плотное подмножество мощности β.

Лемма 3.1. *Если $f : \Omega \to X$ — μ-измеримая ограниченная функция, то существует такое множество $F \in \Sigma$ нулевой меры, что $f(\Omega \setminus F) \subset \overline{B}$, где $\overline{B}$ — замыкание множества $B = \{\mu(A)^{-1} \int_A f \, d\mu \mid 0 < \mu(A) < +\infty, A \in \Sigma\}$.*

Лемма 3.2. *Пусть $U \in \mathrm{L}(L_1, X)$. Если для любого множества $\Omega_0 \in \Sigma$ конечной меры существует такая μ-измеримая функция $f_0 : \Omega \to X$, что $Ug = \int g f_0 \, d\mu$ для всех функций $g \in L_1$, равных нулю вне Ω_0, то существует такая μ-измеримая функция $f : \Omega \to X$, что $\|f(\omega)\| \leqslant \|U\|, \omega \in \Omega$, и $Ug = \int g f \, d\mu, g \in L_1$.*

Лемма 3.1 есть простое следствие теоремы Егорова, а лемма 3.2 вытекает непосредственно из леммы 3.1 и из условий, наложенных на (Ω, Σ, μ).

Лемма 3.3. *Пусть* $U \in \mathrm{L}(L_1, X)$. *Если* $U\varphi = \int \varphi f\, d\mu$, $\varphi \in L_1$, *где* f — μ*-измеримая ограниченная функция из* Ω *в* X, *то существует такая* μ*-измеримая функция* $G : \Omega \to X$, *что* $\overline{U(D)} = \overline{\Gamma(g(\Omega))}$ *и* $U\varphi = \int \varphi g\, d\mu$ *для всех* $\varphi \in L_1$.

Доказательство. По лемме 3.1 можно найти множество $F \in \Sigma$, $\mu(F) = 0$, для которого $f(\Omega \setminus F) \subset \overline{U(D)}$. Положим $g(\omega) = f(\omega)$ для $\omega \in \Omega \setminus F$ и $G(\omega) = 0$ для $\omega \in F$. Тогда $g(\Omega) \subset \overline{U(D)}$ и $U\varphi = \int \varphi g\, d\mu$ для всех $\varphi \in L_1$. Пусть $\varphi \in D$ и $x' \in [\overline{\Gamma(g(\Omega))}]^{\circ}$. Тогда $|\langle U\varphi, x'\rangle| \leqslant 1$. Поэтому $U\varphi \in [\overline{\Gamma(g(\Omega))}]^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(g(\Omega))}$. Таким образом, $U(D) \subset \overline{\Gamma(g(\Omega))}$, и лемма доказана. ■

1. Пространство $\mathrm{RN}(L_1, X)$. Вот та теорема, которую мы частично использовали выше как лемму 2.2.1.

Теорема 3.1.1. *Для оператора* $T \in \mathrm{L}(L_1, X)$ *равносильны условия:*

1) $T \in \mathrm{RN}(L_1, X)$;

2) *существует такая* μ*-измеримая функция* $f : \Omega \to X$, *что* $\|f(\omega)\| \leqslant \|T\|$ *для всех* $\omega \in \Omega$ *и* $T\varphi = \int \varphi f\, d\mu$ *для* $\varphi \in L_1$;

3) *оператор* T *факторизуется через пространство* $l_1(\Gamma)$; *при этом множество* Γ *можно выбрать так, что* $\operatorname{card}\Gamma = \min\{\alpha; \chi(X)\}$; *кроме того, в этом случае* $\|T\| = n_{l_1(\Gamma)}(T)$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) по следствию 2.1.2; 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидно (пространство $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Радона–Никодима).

2) $\Longrightarrow$ 3). Идея доказательства, приводимого здесь, использовалась многими математиками. Пусть оператор T удовлетворяет условию 2) и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Пусть далее Γ — некоторое множество мощности $\chi(X)$, $\Phi : l_1(\Gamma) \to X$ — такой гомоморфизм, что $\|\Phi\| \leqslant 1$ и $\|\Phi_0\| \leqslant 1 + \varepsilon$, где Φ_0 — ассоциированное с Φ отображение из $Z = l_1(\Gamma)/\Phi^{-1}(0)$ в X (легко видеть, что такой гомоморфизм существует; для этого достаточно взять плотное а единичном шаре из X множество $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ и положить $\Phi(\{\zeta_\gamma\}) = \sum \zeta_\gamma x_\gamma$ для $\{\zeta_\gamma\} \in l_1(\Gamma)$). Тогда (см. [109]) существует такое (вообще говоря, нелинейное) непрерывное отображение $\Delta : Z \to l_1(\Gamma)$, что $\|\Delta(z)\| \leqslant \|z\| + \varepsilon$ и $\Phi_0\Delta(z) = z$ для всех $z \in Z$. Положим $g = \Delta\Phi_0^{-1} f : \Omega \to X \to Z \to l_1(\Gamma)$, $V_1\varphi = \int g\varphi\, d\mu$ для $\varphi \in L_1$ и $V_2 = \Phi$. Тогда $T = V_2V_1 : L_1 \to l_1(\Gamma) \to X$, причем

$$\begin{aligned}\|T\| \leqslant \|V_1\|\,\|V_2\| \leqslant \|V_1\| \leqslant \sup_{t\in\Omega}\|g(t)\| = \sup_{t\in\Omega}\|\Delta\Phi_0^{-1} f(t)\| \leqslant \\ \leqslant \sup_{t\in\Omega}\|\Phi_0^{-1} f(t)\| + \varepsilon \leqslant (1+\varepsilon)\,\|T\| + \varepsilon.\end{aligned}$$

Если $\alpha \leqslant \chi(X)$, то в этой факторизации, пользуясь локальной почти сепарабельнозначностью функции g, множество Γ можно выбрать мощности α, так как $V_1(L_1) \subset \overline{\operatorname{span}}(g(\Omega \setminus E))$ для всякого множества $E \in \Sigma$ нулевой меры. Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) доказана. ■

Следствие 3.1.1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — такая система ограниченных подмножеств пространства X, что вместе со всяким множеством $B \in \mathfrak{S}$ в $\mathfrak{S}$ входят и все подмножества множества $\overline{\Gamma(B)}$. Для оператора $U \in \mathrm{L}(L_1, X)$ эквивалентны утверждения:*

1) $U \in \mathrm{RN}(L_1, X)$ *и* $U(D) \in \mathfrak{S}$;

2) *существует такая μ-измеримая функция $f : \Omega \to X$, что $\|f(\omega)\| \leqslant \|U\|$ для всех $\omega \in \Omega$, $Ug = \int gf\,d\mu$ для $g \in L_1$ и $f(\Omega) \in \mathfrak{S}$.*

Для доказательства достаточно применить теорему 3.1.1 и лемму 3.3. ■

Следствие 3.1.2 (Данфорд, Филлипс, Петтис)**.** *Пусть τ — топология на X, согласованная в двойственностью (X, X^*). Оператор $U \in \mathrm{L}(L_1, X)$ является τ-компактным тогда и только тогда, когда для него существует такая представляющая μ-измеримая функция $f : \Omega \to X$, что множество $f(\Omega)$ относительно компактно в (X, τ).*

Пояснений в доказательстве требует только случай "только тогда", а в этом случае по условию предполагается (согласованность с двойственностью!), что оператор U, в частности, слабо компактен. Следовательно, он является оператором Радона–Никодима (следствие 1.2) и применима наша последняя теорема. ■

Воспользовавшись известной теоремой Какутани о представлении (AL)-пространств, мы из теоремы 3.1.1 получаем

Следствие 3.1.3. *Пусть Z — произвольное* (AL)*-пространство. Оператор $U \in \mathrm{L}(Z, X)$ является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда он факторизуется через пространство $l_1(\Gamma)$, при этом $\|U\| = n_{l_1(\Gamma)}(U)$.* ■

Применяя теорему 3.1.1 (либо следствие 3.1.3) и следствие 2.2.2, получаем:

Следствие 3.1.4. *Оператор $U \in \mathrm{L}(X, Y)$ является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда для всякого* (AL)*-пространства Z и для любого оператора $V \in \mathrm{L}(Z, X)$ отображение UV факторизуется через некоторое пространство $l_1(\Gamma)$.* ■

Следствие 3.1.5. *Пусть Z — произвольное* (AL)*-пространство. Если $T : X \to Z$ — слабо компактный оператор, а U — оператор типа* RN *из Z в Y, то отображение UT приближается конечномерными операторами в пространстве* $\mathrm{L}(X, Y)$.

Для доказательства достаточно применить следствие 3.1.3 и воспользоваться тем, что в $l_1(\Gamma)$ понятия слабой и сильной компактности совпадают. ■

2. О факторизации операторов, действующих из $\mathcal{L}_1$-пространств. Выше мы получили необходимые и достаточные условия для возможности факторизации отображений, действующих из (AL)-пространств, через пространств $l_1(\Gamma)$. Заменяя (AL)-пространство на $\mathcal{L}_1$-пространство, мы сталкиваемся с естественной задачей об установлении аналогичных условий для операторов, заданных на $\mathcal{L}_1$-пространствах. Перенести утверждение, сформулированное в следствии 3.1.3, на общие $\mathcal{L}_1$-пространства, однако, не удается. Это показывает следующий простой пример.

Пусть Z — не изоморфное пространству l_1 подпространство в l_1, являющееся $\mathcal{L}_1$пространством (см. [104]). Тогда тождественное отображение $\mathrm{id} : Z \to Z$ есть оператор типа RN. Если id факторизуется через l_1, то Z дополняемо в l_1. Но всякое дополняемое подпространство пространства l_1 изоморфно пространству l_1 (см., например, [138]). Поэтому оператор id не факторизуется через l_1.

Следующая теорема дает условия, необходимые и достаточные для возможности факторизации через $l_1(\Gamma)$ отображений, заданных на $\mathcal{L}_1$пространствах.

Теорема 3.2.1. *Пусть X — произвольное $\mathcal{L}_1$-пространство, Y — банахово пространство, $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Отображение T факторизуется через пространство $l_1(\Gamma)$ в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих равносильных условий:*

1) *T факторизуется через оператор типа* RN, *заданный на банаховом пространстве Z, имеющем дополнение в Z^{**};*

2) *T факторизуется через сопряженный оператор типа* RN;

3) *T факторизуется через сопряженное банахово пространство, обладающее свойством Радона-Никодима.*

Если X — WCG-пространство, то каждое из условий 1) — 3) равносильно тому, что оператор T факторизуется через пространство l_1.

Доказательство. Нам надо лишь показать, что из 1) следует, что T факторизуется через $l_1(\Gamma)$ (через l_1, если X является WCG-пространством). Пусть выполнено условие 1), т. е. существуют такие банахово пространство Z и операторы $R \in \mathrm{L}(X,Z)$ и $U \in \mathrm{RN}(Z,Y,)$ что Z дополняемо в Z^{**} и $T = UR$. Так как X — $\mathcal{L}_1$-пространство, то существует такое пространство $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ с положительной мерой, что X^{**} изоморфно и дополняемо вкладывается в $L_1(\widetilde{\mu}) = l_1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ [103]. Пусть $j : X^{**} \to L_1(\widetilde{\mu})$ — такое вложение, $P : L_1(\widetilde{\mu}) \to j(X^{**})$ и $P_0 : Z^{**} \to Z$ — непрерывные проекторы. Рассмотрим оператор v

$$L_1(\widetilde{\mu}) \xrightarrow{P} j(X^{**}) \xrightarrow{j^{-1}} X^{**} \xrightarrow{R^{**}} Z^{**} \xrightarrow{P_0} Z \xrightarrow{U} Y.$$

Так как $U \in \mathrm{RN}(Z,Y)$, то V есть оператор типа RN. По следствию 3.1.3 V факторизуется через $l_1(\Gamma)$. Поскольку $T = Vj|_X$, то отсюда вытекает, что оператор T также факторизуется через $l_1(\Gamma)$, т. е. существуют отображения $V_1 \in \mathrm{L}(X, l_1(\Gamma))$ и $V_2 \in \mathrm{L}(l_1(\Gamma), Y)$, для которых $V_2V_1 = T$. Если X — WCG-пространство, то $X = \overline{\mathrm{span}}(K)$, где K — некоторое слабо компактное множество из X. Тогда $V_1(X) \subset \overline{\mathrm{span}}(V_1(K)) \subset l_1(\Gamma)$. Так как всякое слабо компактное множество в $l_1(\Gamma)$ сильно компактно, то $\overline{\mathrm{span}}(V_1(K))$ — сепарабельное подпространство в $l_1(\Gamma)$ и, следовательно, существует такое счетное подмножество $A \subset \Gamma$, что для всякого числового семейства $\{\zeta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in \overline{\mathrm{span}}(V_1(K))$ при всех $\gamma \in \Gamma \setminus A$ имеют место равенства $\zeta_\gamma = 0$. Отсюда вытекает, что в случае, когда пространство X является WCG-пространством, оператор T факторизуется через l_1. ■

Так как банахово пространство, сопряженное к $\mathcal{L}_\infty$-пространству является $\mathcal{L}_1$-пространством, то из теорем 3.1.1 и 3.2.1 немедленно вытекает

Следствие 8-3.2.1. *Пусть T — оператор из Y в $\mathcal{L}_\infty$-пространство Z. Отображение T^* является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда T^* факторизуется через $l_1(\Gamma)$.* ■

Следствие 3.2.2. *Всякий слабо компактный оператор T из $\mathcal{L}_1$-пространства X в банахово пространство Y факторизуется через пространство l_1.*

Действительно, пусть $B \subset Y$ —замыкание образа единичного шара из X при отображении T. Тогда, так как B — слабо компактное множество, канонический оператор $Y_B \to Y$ является оператором типа RN (следствие 1.2), причем Y_B — сопряженное пространство. Остается применить теорему 3.2.1. ■

Следствие 3.2.3. *Всякое $\mathcal{L}_1$-пространство X (и, следовательно, всякое $\mathcal{L}_\infty$-пространство) обладает свойством Данфорда-Петтиса* (т. е. всякий слабо компактный оператор из X переводит слабо сходящиеся в себе последовательности в сильно сходящиеся).

Для доказательства достаточно применить следствие 3.2.2 и тот факт, что пространство $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Шура. ■

Замечание 3.2.1. Утверждение следствия 3.2.3 в то время, когда оно появилось в [39], было, конечно же, хорошо известно. Например, оно является простым следствием [103, следствие 2 из теоремы 7.1], где установлено, в частности, что сопряженное пространство к $\mathcal{L}_1$-пространству изоморфно дополняемому подпространству некоторого $C(K)$.

3. Применения к операторам со значениями в L_∞-пространствах. В заключение параграфа рассмотрим вопрос о возможности аналитических представлений операторов, действующих из X в $L_\infty(\mu)$. Везде далее (Ω, Σ, μ) — пространство с положительной мерой, обладающее указанными в начале параграфа свойствами. Нетрудно видеть, что сопряженное к $L_1(\mu)$ пространство естественным образом отождествляется с пространством $L_\infty(\mu)$. В этом разделе для банахова пространства X нам удобно будет обозначать единичный шар в X через $D(X)$. Напомним, что если $B \subset X$, то $\overline{\Gamma(B)}$ — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества B.

Теорема 3.3.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, L_\infty(\mu))$ и $j : L_1(\mu) \to L_\infty(\mu)^*$ — тождественное вложение. Оператор T^*j является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда 1) существует такая μ-измеримая функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $\|\overline{g}(t)\| \leqslant \|T\|$ для всех $t \in \Omega$, 2) $Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$ и 3) $\sigma(X^*, X)$-замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества $\overline{g}(\Omega) \subset X^*$ совпадает с множеством $T^*(D(L_\infty(\mu)^*))$.*

Доказательство. Пусть T^*j — оператор типа RN и пусть $i : X \to X^{**}$ — тождественное вложение. Для произвольных $x \in X$ и $f \in L_1(\mu)$ мы имеем

$$\langle j^*T^{**}i(x), f\rangle = \langle i(x), T^*j(f)\rangle = \langle x, T^*j(f)\rangle = \langle Tx, jf\rangle = \langle Tx, f\rangle.$$

Поэтому $T = j^*T^{**}i$. Так как T^*j есть оператор типа RN, то по теореме 3.1.1 и лемме 3.3, существует такая μ-измеримая функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $\|\overline{g}(t)\| \leqslant \|T^*j\| \leqslant \|T\|$ при $t \in \Omega, T^*j(f) = \int f\overline{g}\, d\mu$ для всякой функции $f \in L_1(\mu)$ и $\overline{\Gamma(\overline{g}(\Omega))} = T^*j(D(L_1(\mu)))$. Следовательно, если $x \in X$ и $f \in L_1(\mu)$, то $\langle Tx, f\rangle = \langle J^*T^{**}i(x), f\rangle = \langle x, \int f\overline{g}\, d\mu\rangle = \int f \langle x, \overline{g}\rangle\, d\mu$, т. е. $Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$. Наконец, так как множество $D(L_1(\mu))$ $\sigma((L_\infty)^*, L_\infty)$-плотно в $D(L_\infty(\mu)^*)$, то $\sigma(X^*, X)$-замыкание множества $\overline{\Gamma(\overline{g}(\Omega))}$ совпадает с $T^*(D(L_\infty(\mu)^*))$.

Обратно, если $Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$, где функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$ μ-измерима и удовлетворяет условиям 1) – 3), то $T^*j(f) = \int f\overline{g}\, d\mu$ для $f \in L_1(\mu)$. По теореме 3.1.1 T^*j есть оператор типа RN . ■

Замечание 3.3.1. Оператор T^* не обязан быть оператором типа RN, даже если для T и существует представляющая функция $\overline{g}$, удовлетворяющая условиям 1) – 3) (см., однако, следствие 3.3.3 и следствие 6.2.2 ниже. Действительно, пусть μ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим произвольные отображения $P_1 \in \mathrm{L}(l_1, c_0)$ и $P_2 \in \mathrm{L}(L_1(\mu), l_1)$, для которых $P_1(l_1) = c_0$ и $P_2(L_1(\mu)) = l_1$. Так как $P_2P_1(L_1(\mu)) = c_0$, то отображение $T = (P_2P_1)^* : l_1 \to l_\infty \to L_\infty(\mu)$ является изоморфным вложением. С другой стороны, по теореме 3.1.1 существует такая ограниченная μ-измеримая функция $\overline{f} : [0, 1] \to c_0$, что $P_2P_1f = \int f\overline{f}\, d\mu$ для всех $f \in L_1(\mu)$, откуда следует, что $Tx = \langle x, \overline{f}\rangle$ для $x \in l_1$. Таким образом, оператор T обладает свойством, указанным в теореме 3.3.1. Однако, нетрудно видеть, что если изоморфное вложение $R : X \to Y$ таково, что R^* есть оператор типа RN, то пространство X^* обладает свойством RN . Поэтому в нашем примере отображение T^* не может быть оператором типа RN, поскольку пространство l_∞ свойством RN не обладает.

Используя теорему 3.3.1, мы можем получить утверждение об аналитических представлениях слабо компактных отображений из X в $L_\infty(\mu)$, аналогичное теореме представления Данфорда-Филлипса-Петтиса для слабо компактных операторов, действующих из пространства $L_1(\mu)$.

Следствие 3.3.1. *Оператор $T \in \mathrm{L}(X, L_\infty(\mu))$ слабо компактен тогда и только тогда, когда существует такая μ-измеримая функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $\|\overline{g}(t)\| \leqslant \|T\|$ для всех $t \in \Omega, Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$ и множество $\overline{g}(\Omega)$ относительно слабо компактно в X^*.*

Доказательство. Если оператор T — слабо компактен, то его сопряженный T^* является оператором типа RN (см. следствие 1.2).Поэтому существование функции $\overline{g}$ с указанными в формулировке следствия свойствами вытекает непосредственно из теоремы 3.3.1 и из того, что $T^*(D(L_\infty(\mu)^*))$ слабо компактно. Обратно, пусть $Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$, где $\overline{g} : \Omega \to X^*$ — такая ограниченная μ-измеримая функция, что множество $\overline{g}(\Omega)$ относительно слабо компактно в X^*. Тогда по теореме Данфорда-Филлипса-Петтиса (см. следствие 3.1.2) отображение $T^*j : L_1(\mu) \to X^*$ (где j — каноническое вложение $L_1(\mu) \to L_\infty(\mu)^*$) является слабо компактным, поскольку оно допускает интегральное представление со слабо компактнозначной

μ-измеримой функцией $\overline{g}$. Таким образом, множество $B = \overline{T^*(D(L_1(\mu)))} \subset X^*$ слабо компактно. Так как T^* — непрерывное в *-слабых топологиях отображение из $L_\infty(\mu)^*$ в X^* и множество $D(L_1(\mu))$ *-слабо плотно в $D(L_\infty(\mu)^*)$, то имеет место включение $D(L_\infty(\mu)^*) \subset (T^*)^{-1}(B)$, т. е. оператор T^* (а значит, и оператор T) слабо компактен. ■

Совершенно аналогично доказывается

Следствие 3.3.2. *Отображение $T \in \mathrm{L}(X, L_\infty(\mu))$ компактно тогда и только тогда, когда существует такая μ-измеримая функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $\|\overline{g}(t)\| \leqslant \|T\|$ для всех $t \in \Omega, Tx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$ и множество $\overline{g}(\Omega)$ относительно компактно в X^*.* ■

Следующее наше утверждение дополняет результат, сформулированный в теореме 2.1.5.

Следствие 3.3.3. *Для отображения $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ равносильны условия:*

1) *T^* является оператором типа* RN;

2) *для всякого пространства $L_\infty(\mu)$ (построенного на пространстве (Ω, Σ, μ) с мерой, удовлетворяющей указанным выше условиям) и для любого оператора $U \in \mathrm{L}(Y, L_\infty(\mu))$ существует такая μ-измеримая функция $\overline{g} : \Omega \to X^*$, что $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$;*

3) *существует такое пространство (Ω, Σ, μ) с конечной не чисто атомической мерой, что суперпозиция UT оператора T с любым отображением $U \in L(Y, L_\infty(\mu))$ допускает аналитическое представление $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ с μ-измеримой ограниченной функцией $\overline{g} : \Omega \to X^*$.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) по теореме 3.3.1; 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидно. Пусть оператор T удовлетворяет условию 3) и пусть $V \in \mathrm{L}(L_1(\mu), Y^*)$ — произвольное отображение. Положим $U = V^*|_Y$. Тогда по условию $UTx = \langle x, \overline{g}\rangle$ для всех $x \in X$, где $\overline{g} : \Omega \to X^*$ — ограниченная μ-измеримая функция. Отсюда следует, что

$$T^*Vf = T^*(U^*|_{L_1(\mu)})f = \int f\overline{g}\, d\mu.$$

Поэтому по по следствию 2.1.2 отображение T^* принадлежит классу RN . ■

Еще одно важное следствие из теоремы 3.3.1 будет сформулировано и доказано ниже (в нем будут описаны все операторы со значениями в пространствах $L_\infty(\mu)$, сопряженные к которым являются операторами Радона–Никодима; ср. замечание 3.3.1 и см. следствие 6.2.2).

§4. Операторы Радона–Никодима, условно слабо компактные операторы и I_p–N_p мультипликаторы

1. Операторы Радона–Никодима как I_p-N_p мультипликаторы. Первым кульминационным применением развитой выше части теории операторов типа RN в общей теории банаховых операторных идеалов являются следующие три теоремы.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Если* T^* *— оператор типа* RN, *то для всякого банахова пространства* Z *и любого оператора* $U \in \mathrm{I}_p(Y, Z)$ *оператор* UT *принадлежит пространству* $\mathrm{N}_p(X, Z)$. *При этом* $\nu_p(UT) \leqslant \|T\| \, j_p(U)$.

Доказательство. Пусть $U \in \mathrm{I}_p(Y, Z)$. Тогда U факторизуется следующим образом:

$$U : Y \xrightarrow{V} C(K) \xrightarrow{i} L_p(K, \mu) \xrightarrow{W} Z,$$

где K — отделимый компакт, ν — положительная конечная мера Радона на K, i — тождественное вложение, V и W — непрерывные операторы, для которых $\|V\| = \|W\| = 1$. Очевидно, что $iV \in \mathrm{P}(Y, L_p)$. По теореме 2.1.5 найдется такая функция $\overline{g} \in L_p(X^*)$, что $iVTx = \langle x, \overline{g} \rangle$ для всех $x \in X$. Согласно [120, теорема 1] $iVT \in \mathrm{N}_p(X, L_p)$, причем $\nu_p(iVT) \leq \|\overline{g}\|_{L_p(X^*)}$. Следовательно, $UT \in \mathrm{N}_p(X, Z)$. Неравенство для норм вытекает из доказательства и из определения нормы i_p. ■

Замечание 4.1.1. В случаях, когда оператор T слабо компактен или пространство X^* сепарабельно, теорема 4.1.1 получена впервые при $p = 1$ в [80], а при произвольном $p \in [1, \infty)$ в [120].

Теорема 4.1.2. *Пусть* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Следующие условия равносильны:*

1) $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$;

2) *для всякого банахова пространства* Z *и любого оператора* $U \in \mathrm{I}(Z, X)$ *оператор* TU *является ядерным;*

3) *для некоторого пространства* (Ω, Σ, μ) *с конечной положительной не чисто атомической мерой и всякого оператора* $U \in \mathrm{I}(L_\infty(\Omega, \mu), X)$ *оператор* UT *является ядерным.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) по следствию 2.1.3.

2) $\Longrightarrow$ 3) очевидно.

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $L_\infty = L_\infty(\Omega, \mu)$ и $L_1 = L_1(\Omega, \mu)$. Воспользуемся следствием 2.1.3: покажем, что если $U \in \overline{S}(L_\infty, X)$, то $TUf = \int f \Phi \, d\mu$, $f \in L_\infty$, где Φ — некоторая функция из $L_1(Y)$.

Пусть $U \in \overline{S}(L_\infty, X)$, т. е. $U \in \mathrm{L}(L_\infty, X)$, и существует такая функция $g \in L_1$, что $\|Uf\| = \int |f| \, g \, d\mu$ для всех $f \in L_\infty$. Можно считать, что $g \geqslant 1$ почти всюду. Тогда существует такой непрерывный оператор $U_2 : L_1 \to X$, что $Uf = U_2 U_1 f$, $f \in L_\infty$, где $U_1 : L_\infty \to L_1$ — оператор, определяемый следующим образом: $U_1 f = gf$, $f \in L_\infty$. Так как $|U_1 f| \leqslant ||f||_\infty \, g$ почти всюду, то $U_1 \in \mathrm{I}(L_\infty, L_1)$. Следовательно, $U \in \mathrm{I}(L_\infty, X)$. По условию оператор $TU \in \mathrm{N}(L_\infty, Y)$. Обозначим TU через V. Так как $V \in \overline{S}(L_\infty, Y) \cap \mathrm{N}(L_\infty, Y)$, то $V^*(Y^*) \subset L_1$ и $Vf = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \varphi_n \rangle \, y_n$ для $f \in L_\infty$, где $\varphi_n \in (L_\infty)^*$, $y_n \in Y$ и $\sum_{n=1}^\infty \|\varphi_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$. Пусть P — проектор из $(L_\infty)^*$ на L_1. Рассмотрим отображение $V^* : Y^* \to L_1 \subset (L_\infty)^*$. Имеем:

$$V^* y' = P V^* y' = P \left(\sum_{n=1}^\infty \langle y', y_n \rangle \, P\varphi_n \right).$$

Кроме того, если $f \in L_\infty$, то

$$\langle (PV^*)^* f, y' \rangle = \langle f, V^* y' \rangle = \langle Vf, y' \rangle.$$

Следовательно, $(PV^*)^* = V$, т. е. $V = \sum_{n=1}^\infty \langle \cdot, P\varphi_n \rangle y_n$, причем $P\varphi_n \in L_1$, $y_n \in Y$, $\sum_{n=1}^\infty \|P\varphi_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$. Положим $\Phi = \sum_{n=1}^\infty P\varphi_n \otimes y_n \in L_1(Y)$. Тогда $Vf = \int f\Phi \, d\mu$, и теорема доказана. ■

Замечания 4.1.2. 1. Из следствия 2.1.3 вытекает, что если $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$ и $U \in \mathrm{I}(Z, X)$, то $\|TU\|_{\mathrm{N}(Z,X)} \leqslant \|T\| \, \|U\|_{\mathrm{I}(Z,X)}$.

2. В случаях, когда оператор T слабо компактен или Y — сепарабельное сопряженное пространство, выполнение условия 2 теоремы 4.1.2 доказано в работе [80].

Теорема 4.1.3. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$;

2) *для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in \mathrm{I}(Y, Z)$ оператор UT является ядерным;*

3) *для некоторого пространства (Ω, Σ, μ) с конечной положительной не чисто атомической мерой и всякого оператора $U \in \mathrm{I}(Y, L_1(\Omega, \mu))$ оператор UT является ядерным.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из теоремы 2.1.5 (напомним, что $L_1(X^*) = \mathrm{N}(X, L_1)$ естественным образом [80]). ■

Замечания 4.1.3. 1. Как следует из теоремы 4.1.1, если $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$ и $U \in \mathrm{I}(Y, Z)$, то $\|TU\|_{\mathrm{N}(X,Z)} \leqslant \|T\| \, \|U\|_{\mathrm{I}(Y,Z)}$.

2. В случаях, когда оператор T слабо компактен или X^* — сепарабельное сопряженное пространство, выполнение условия 2 теоремы 4.1.3 доказано в работе [80].

В теории операторов типа RN до сих пор привлекают внимание (в связи с предыдущими теоремами о мультипликаторах) также следующая проблема:

(*) Будет ли сопряженный оператор T^* к отображению $T : X \to Y$, действующему в банаховых пространствах, оператором типа RN, если выполнено одно из следующих условий:

а) для каждого $p \in (1, +\infty)$ и всякого $U \in \mathrm{I}_p(Y, Z)$ (т.е. p-интегрального по А.Пичу оператора U) отображение UT p-ядерно.

б) для некоторого $p \in (1, +\infty)$ и всякого $U \in \mathrm{I}_p(Y, Z)$ отображение UT p-ядерно.

Известно, что если T удовлетворяет условию (*) б) при $p = 1$, то $T^* \in \mathrm{RN}$ (теорема 4.1.3), а если $T^* \in \mathrm{RN}$, то T удовлетворяет условию (*) а) при всех $p \in [1, +\infty)$ (теорема 4.1.1).

Частично отрицательный ответ на вопрос б) впервые дал Ж.Пизье (устное сообщение). Ж.Пизье использовал один очень сложный пример Р.Джеймса (Р.Джеймс, "Нерефлексивное банахово пространство типа 2"), исходя из которого показал, что существует такое банахово пространство R, что R^* — пространство типа 2, не обладающее свойством RN, и для любого $p \in (1,2]$ всякий p-интегральный (по А.Пичу) оператор из R является p-ядерным, т.е. $\mathrm{I}_p(R,\cdot) = \mathrm{N}_p(R,\cdot)$. Однако, долго оставалась нерешенной проблема 2а)[5], так же, как неизвестно сейчас, влечет ли равенство $\mathrm{I}_p(X,\cdot) = \mathrm{N}_p(X,\cdot)$ для некоторого $p \in (2,+\infty)$ равенство $\mathrm{I}_q(X,\cdot) = \mathrm{N}_q(X,\cdot)$ для $q \in (1,p)$. Мы вернемся к рассмотрению этих проблем после некоторого отступления, — для более детального исследования их нам нужны свойства так называемых условно слабо компактных операторов. Этот класс операторов, видимо, был введен почти одновременно многими математиками, в частности, автором, и поэтому в каком-то смысле их определение можно отнести к математическому фольклору.

2. Условно слабо компактные операторы (общие факты). В этом пункте мы рассмотрим простейшие свойства условно слабо компактных отображений в банаховых пространствах (см. определение 4.2.1) и, в частности, в $C(K)$-пространствах: мы охарактеризуем операторы $T : X \to Y$, переводящие ограниченные множества банахова пространства X в условно слабо компактные множества банахова пространства Y, а также рассмотрим частный случай, когда $X = C(K)$.

Пусть, как обычно, X, Y — банаховы пространства; $T : X \to Y$ — линейное непрерывное отображение.

Если S — локально компактное отделимое топологическое пространство, то через $C_0(S)$ мы будем обозначать банахово пространство непрерывных на S функций, обращающихся в нуль на бесконечности. В случае, когда S — компакт, пространство $C_0(S)$ совпадает с пространством $C(S)$ всех непрерывных на S функций.

Введем определение, выделяющее один класс линейных непрерывных операторов в банаховых пространствах.

Определение 4.2.1. Оператор $T : X \to Y$ называется условно слабо компактным, если из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\{Tx_{n_k}\}$ — последовательность Коши в $(Y, \sigma(Y, Y^*))$.

Ниже в этом пункте через X, Y мы обозначаем произвольные банаховы пространства, K (соответственно, S) — отделимое компактное (соответственно, локально компактное) топологическое пространство, Δ — канторово множество.

Теорема 4.2.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) *T не является условно слабо компактным оператором;*

2) *существует такое изоморфное l_1 подпространство $Z \subset X$, что $T|_Z$ — изоморфизм;*

3) *существует такое изоморфное $C^*[0,1]$ подпространство $W \subset Y^*$, что $T^*|_W$ —изоморфизм;*

4) *существует такое изоморфное $L_1[0,1]$ подпространство $W \subset Y^*$, что $T^*|_W$ —изоморфизм.*

[5] Проблема была решена в [10]

Если Y — слабо компактно порожденное пространство, условия 1) – 4) эквивалентны условию

5) *существует такой оператор $U \in \mathrm{L}(Y, C[0,1])$, что UT есть отображение "на".*

Доказательство. Импликации 2) $\implies$ 1), 3) $\implies$ 4) и 5) $\implies$ 3) тривиальны. Импликация 1) $\implies$ 2) легко следует из результатов [141].

4) $\implies$ 1). Хорошо известно, что в $L_1[0,1]$ существует подпространство, изоморфное l_2. Пусть $\Phi : l_2 \to W$ — изоморфное вложение, $i : W \to Y^*$ и $j : Y \to Y^{**}$ — тождественные вложения. Положим $A = \Phi^* i^* j$ и рассмотрим отображение

$$AT : X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{j} Y^{**} \xrightarrow{i^*} W^* \xrightarrow{\Phi^*} l_2.$$

Так как $T^* i\Phi$ — изоморфное вложение l_2 в X^*, то AT есть отображение "на". Следовательно, существует такая ограниченная последовательность $\{x_n\} \subset X$, что $ATx_n = e_n$, где $\{e_n\}$ — последовательность единичных ортов в l_2. Если оператор T условно слабо компактен, то из $\{x_n\}$ мы можем выделить подпоследовательность $\{z_k\}$, для которой $\{Tz_k\}$ есть слабая последовательность Коши в Y. Тогда $\{i^* jTz_k\}$ есть слабая последовательность Коши в пространстве W^*, которое изоморфно $L_\infty[0,1]$ и, следовательно, обладает строгим свойством Данфорда-Петтиса (см. [55, стр. 878]). Поэтому последовательность $\{ATz_k\}$ сходится в l_2 по норме, что противоречит выбору последовательности $\{x_n\}$. Таким образом, T не является условно слабо компактным оператором.

2) $\implies$ 3) и 2) $\implies$ 5). Пусть выполнено условие 2) и пусть Z — такое изоморфное l_1 подпространство пространства X, что $T|_Z$ — изоморфное вложение. Пусть U_0 — непрерывное линейное отображение из $T(Z)$ на $C = C[0,1]$. Рассматривая U_0 как отображение из $T(Z)$ в C^{**}, продолжим его без увеличения нормы до линейного отображения U_1 из Y в C^{**}. Для того, чтобы доказать 3), заметим, что $U_1 T(X) \supset C$; поэтому, как нетрудно видеть, отображение $T^* U_1^*|_{C^*} : C^* \to Y^* \to X^*$ является изоморфным вложением. Предположим теперь, что Y — WCG-пространство, и пусть P — проектор из Y на сепарабельное подпространство пространства Y, содержащее $T(Z)$ (см. [102, теорема 2.1]). Так как пространство $\overline{U_1 P(Y)}$ сепарабельно и содержит C, то существует дополняемое изометричное C подпространство Z_0 пространства $\overline{U_1 P(Y)}$, которое содержится в $C[0,1] \subset \overline{U_1 P(Y)}$ (см. [82, следствие 9]). Пусть P_0 — непрерывный проектор из $\overline{U_1 P(Y)}$ на Z_0. Положим $U = P_0 U_1 P$. Очевидно, $UT : X \to Z_0$ есть отображение "на". Теорема доказана. ■

Следствие 4.2.1. *Если существует не условно слабо компактный оператор из X в слабо компактно порожденное банахово пространство, то существует фактор пространство пространства X, изоморфное пространству $C[0,1]$.* ■

Следствие 4.2.2. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Если T^* есть оператор типа* RN, *то T — условно слабо компактное отображение. В частности, если Y — слабо секвенциально полное пространство, то T^* является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда оператор T условно слабо компактен.* ■

Обратное утверждение, вообще говоря , не верно (см. [105],[10] — сложные нетривиальные примеры для случая тождественных отображений в банаховых пространствах, или ниже теорему 4.3.1, а также ниже п. 4.5). Однако, если $X = C(K)$, то всякий условно слабо компактный оператор T из X имеет своим сопряженным оператор типа RN (см. теорему 4.2.2).

Следующее наше утверждение является обобщением хорошо известного факта о полной непрерывности произведения двух слабо компактных отображений $Z \to C(K) \to Y$, а также усилением [112, теорема 4.12].

Предложение 4.2.1. *Пусть* $U \in \mathrm{L}(X, C(K))$, $T \in \mathrm{L}(C(K), Y)$. *Если* U^* *есть оператор типа* RN, *а* T *– слабо компактный оператор, то существует последовательность конечномерных отображений* $A_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \dots$, *такая, что* $\|A_n - TU\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Так как T^* — слабо компактный оператор, то существует положительная мера $\mu \in C^*(K)$ такая, что $T^*(Y^*) \subset L_1(\mu)$ ($L_1(\mu)$ естественным образом отождествляется с подпространством пространства $C^*(K)$). Пусть $j : L_1(\mu) \to C^*(K)$ —естественное отображение, $T_1 : Y^* \to L_1(\mu)$ — отображение, индуцированное оператором T^*. Так как T — слабо компактное отображение, то $T^*(L_\infty) = T(C^{**}(K)) \subset Y$. Далее, так как U^*j есть оператор типа RN, то из теоремы 3.1.1 следует, что

$$U^*j = \Phi\varphi, \text{ где } \varphi \in \mathrm{L}(L_1(\mu), l_1),\ \Phi \in \mathrm{L}(l_1, X^*).$$

Поэтому $(TU)^* = U^*T^* = \Phi\varphi T_1$ и TU факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{\ i\ } X^{**} \xrightarrow{\ \Phi^*\ } l_\infty \xrightarrow{\ \varphi^*\ } L_\infty(\mu) \xrightarrow{\ T_1^*\ } Y,$$

где i —тождественное вложение. Так как всякое слабо компактное множество в l_1 сильно компактно и φT_1 — слабо компактное отображение из Y^* в l_1, то $T_1^*\varphi^*$ — компактный оператор. Следовательно, существует последовательность конечномерных отображений $B_n : l_\infty \to Y$, для которой $\|B_n - T_1^*\| \to 0$ при $n \to \infty$. Для завершения доказательства нашего утверждения достаточно положить $A_n = B_n\Phi^*i$. ■

Теорема 4.2.2. 1) *Пусть* $T \in \mathrm{L}(C(K), X)$. *Следующие условия эквивалентны:*

а) оператор T *условно слабо компактен;*

б) T^* *есть оператор типа* RN;

в) для любого сепарабельного подпространства $Z \subset C(K)$ *множество* $(T|_Z)^*(X^*)$ *сепарабельно в* Z^**;*

г) не существует изометричного пространству $C(\Delta)$ *подпространства* $Z \subset C(K)$, *для которого* $T|_Z$ *есть изоморфное вложение* Z *в* X.

2) *Пусть* $U \in \mathrm{L}(C_0(S), X)$. *Если существует такая конечная положительная мера Радона* μ *на* S, *что* $U^*(X^*) \subset L_1(\mu)$, *то* U^* *есть оператор типа* RN . *Если* S *— метризуемый компакт, то верно и обратное.*

Доказательство. 1) б) $\Longrightarrow$ а) по следствию 4.2.2 из теоремы 4.2.1. а) $\Longrightarrow$ г) очевидно. Импликация в) $\Longrightarrow$ б) вытекает из теоремы 2 [32] или из теоремы 6.2.2

ниже (если $V \in \mathrm{L}(Y, X)$ и для каждого сепарабельного подпространства $Z \subset Y$ множество $(V|_Z)^*(X^*) \subset Z^*$ сепарабельно, то V^* есть оператор типа RN .)

Для доказательства первого пункта теоремы 4.2.2 нам осталось показать, что г) $\Longrightarrow$ в). Пусть $Z \subset C(K)$ — сепарабельное подпространство. Рассмотрим на K отношение эквивалентности $R : k \sim k'$ $(k, k' \in K)$ тогда и только тогда, когда $g(k) = g(k')$ для всех $g \in Z$. Пусть K/R — фактор-пространство пространства K по этому отношению эквивалентности. Имеем изометрическое вложение $\Phi : C(K/R) \to C(K)$, $(\Phi\tilde{g})(k) = \tilde{g}(\varphi(k))$ для $k \in K$, $\widetilde{g} \in C(K/R)$, где $\varphi : K \to K/R$ — фактор-отображение. Если функция $g \in C(K)$ такова, что $g(k) = g(k')$ для $k \sim k'$, то функция $\widetilde{g}(\varphi(k)) = g(k)$ принадлежит пространству $C(K/R)$. Таким образом, рассматривая $C(K/R)$ как подпространство пространства $C(K)$, мы получаем включение $Z \subset C(K/R)$. Заметим, что K/R — метризуемый компакт, так как Z — сепарабельное пространство. Пусть $i : Z \to C(K/R)$ — указанное выше изометрическое вложение. Тогда $T|_Z = T\Phi i : Z \to X$. Если $\Phi^* T^*(X^*) \subset C^*(K/R)$ несепарабельно, то по [140, теорема 1] существует изометричное пространству $C(Q)$ подпространство $Z_0 \subset C(K/R)$, для которого сужение $T\Phi|_{Z_0}$ является изоморфизмом, что противоречит условию г). Поэтому $\Phi^* T^*(X^*)$ (а значит, и $(T|_Z)^*(X^*)$) является сепарабельным подпространством пространства $C^*(K/R)$ (соответственно пространства Z^*).

2) Пусть μ — такая конечная положительная мера Радона на S, что $U^*(X^*) \subset L_!(\mu)$ (где $L_1(\mu)$ естественным образом отождествляется с подпространством пространства $C_0^*(S)$). Мы воспользуемся покажем, что для любого сепарабельного подпространства $Z \subset C_0(S)$ множество $(U|_Z)^*(X^*)$ сепарабельно как подмножество пространства Z^*. Рассмотрим одноточечную компактификацию S множества S, $\overline{S} = S \cap \{\infty\}$. Пространство $C_0(S)$ можно отождествить с подпространством $C(\overline{S}, \infty)$ пространства $C(\overline{S})$, состоящим из всех непрерывных на $\overline{S}$ функций f, для которых $f(\infty) = 0$. Как и выше, пространство Z порождает на $\overline{S}$ отношение эквивалентности R, фактор-пространство $\overline{S}/R$ по которому является метризуемым компактом. Пусть $\varphi : \overline{S} \to \overline{S}/R$ — каноническое отображение, $\Phi : C(\overline{S}/R) \to C(\overline{S})$ — естественное изометрическое вложение. Положим $C(\overline{S}/R, \infty) = \Phi^{-1}(C(\overline{S}, \infty))$. Тогда отображение $U|_Z$ факторизуется следующим образом:

$$Z \xrightarrow{\Phi^{-1}} C(\overline{S}/R, \infty) \xrightarrow{\Phi_0} C(\overline{S}, \infty) = C_0(S) \xrightarrow{U} X,$$

где Φ_0 — оператор, индуцированный отображением Φ. Теперь, так как компакт $\overline{S}/R$ метризуем, легко получается, что множество $(U\Phi_0)^*(X^*)$ сепарабельно. Следовательно, сепарабельно и множество $(U|_Z)^*(X^*) \subset Z^*$.

Если S — метризуемый компакт и U^* — оператор типа RN, то из п. 1) (б) $\Longrightarrow$ а)) следует, что $U^*(X^*)$ — сепарабельное подмножества пространства $C^*(S)$. Поэтому с помощью теоремы Радона-Никодима оно отождествляется с подмножеством пространства $L_1(\mu)$ для некоторой меры Радона $\mu \in C_+^*$. Теорема полностью доказана. ■

Замечание 4.2.1. Первое утверждение п. 2) теоремы 4.2.2 нетрудно получить также, используя [163, теорема 1] и [29, теорема 7 (3) $\Longrightarrow$ 1))].

3. О композициях операторов с p-интегральными отображениями. В этом разделе мы возвращаемся к вопросу (*).

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — каноническая система открыто–замкнутых подмножеств канторова дисконтинуума Δ. Определим оператор $Q : l_1 \to C(\Delta)$, положив $Q\{\zeta_j\} = \sum \zeta_j \chi_{A_j}$ для $\{\zeta_j\} \in l_1$.

Теорема 4.3.1. *Оператор Q обладает следующими свойствами:*

1) *Q условно слабо компактен, т.е. переводит ограниченные последовательности в последовательности, содержащие слабые подпоследовательности Коши;*

2) *Q^* не является оператором типа* RN;

3) *для любого p-интегрального отображения $U : C(\Delta \to Z,)$ где $p \in (1, 2]$ и Z — произвольное банахово пространство, отображение UQ p-ядерно;*

4) *для любого абсолютно p-суммирующего отображения $U : C(\Delta \to Z,)$ где $p \in (1, 2]$ и Z — произвольное банахово пространство, отображение UQ квази-p-ядерно;*

5) *для любого p-интегрального отображения $U : C(\Delta) \to L_q(\mu)$, где $p \in (1, +\infty)$ и $q \in [2, 1]$, отображение UQ p-ядерно.*

Более того, для всякого гильбертова оператора $U : C(\Delta) \to Z$ (т.е. факторизуемого через гильбертово пространство) отображение UQ является p-ядерным для любого $p \in (1, 2]$ и квази-p-ядерным (но не p-ядерным) для любого $p \in (0, 2]$.

Доказательство. То, что Q — условно слабо компактный оператор, легко вытекает из критерия условной слабой компактности множества в $C(K)$ А.Гротендика; а так как $Q^*|_\Delta$ — инъективное отображение и $Q^*(\Delta)$ состоит из изолированных в нормированной топологии точек, то Q^* не может быть оператором типа RN. Далее, поскольку в утверждениях 3), 4), 5) оператор U является гильбертовым[6] (для случая 5) это следует из теоремы 5 [97]), то для установления свойств 3)–5) оператора Q достаточно показать, что Q обладает свойством, указанным в конце формулировки теоремы.

Итак, пусть $U \in \mathrm{L}(C(\Delta)), H$, где H — гильбертово пространство. Так как $C(\Delta)$ обладает свойством Данфорда–Петтиса, то UQ — компактное отображение из l_1 в H. По знаменитой теореме А.Гротендика, $\mathrm{L}(l_1, H) = \Pi_1(l_1, H)$ (даже более того, $\mathrm{L}(l_1, H) = \Pi_p(l_1, H)$ при всех $p \in [0, +\infty)$; подробный обзор результатов об идеалах операторов см. в [136]). В частности, $\mathrm{L}(l_1, H) = \Pi_2(l_1, H) = \mathrm{I}_2(l_1, H)$. Отсюда вытекает, что $UQ \in \mathrm{N}_2(l_1, H)$. Но $\mathrm{N}_2(l_1, H) = \mathrm{N}_p(l_1, H)$ для любого $p \in (1, 2]$ (это следует, например, из теоремы 5 [97] по двойственности между классами N_p и Π_q). Таким образом, оператор UQ является p-ядерным для всякого $p \in (1, 2]$. Если же $p \leqslant 1$, то из тех же соображений, используя равенство $\mathrm{L}(l_1, H) = \Pi_0(l_1, H)$, мы получаем, что UQ — квази-p-ядерное отображение. Ясно, что операторы UQ не могут быть ядерными для всех U, так как иначе отображение Q^* было бы оператором типа RN. ■

Замечания 4.3.1. 1). Так как всякий оператор из $C(K)$ в пространство котипа

[6] Т.е. факторизуется через гильбертово пространство.

2 является гильбертовым (см. [136]), то отображение обладает свойством 5а): если Z — пространство котипа 2, $p \in (1, +\infty)$ и $U \in \mathrm{I}_p(C(\Delta), Z)$, то $UQ \in \mathrm{N}_p(l_1, Z)$.

2). Если $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и T^* — оператор типа RN, то оператор T обладает свойствами, аналогичными свойствам 1), 3)–5) (с заменой Q на T, l_1 на X и $C(\Delta)$ на Y). Это вытекает из результатов п. 4.1. Теорема показывает, таким образом, что обратное не верно, т.е. отображение, обладающее свойствами, подобными свойствам 1), 3)–5), не обязано иметь сопряженным оператор типа RN .

Приведенный в теореме 4.3.1 пример показывает, что даже если оператор T действует в банаховых решетках, нет оснований надеяться, что для него утвердительно решается вопрос (*) б). Однако, в некоторых случаях все же можно получить положительные результаты, касающиеся проблемы (*) б). Приведем одну теорему такого типа.

Теорема 4.3.2. *Для оператора* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ *вопрос* (*) б) *имеет положительный ответ в каждом из следующих случаев:*

1) Y — *банахова решетка,* X — *произвольное банахово пространство, образ единичного шара из* X *при отображении* T *есть телесное в* Y *множество* (см. [9]);

1*a*) $X = Y, T = \mathrm{id}$, X — *банахова решетка*;

2) X — *подпространство сепарабельного* $\mathcal{L}_\infty$*-пространства, обладающее сепарабельным аннулятором,* Y — *любое пространство*;

2*a*) X *сепарабельное* $\mathcal{L}_\infty$*-пространство*;

3) X — *такое подпространство в* $C(K)$ (K — *произвольный отделимый компакт), что* $C(K)/X$ *не содержит* l_1, Y — *любое банахово пространство*;

3*a*) $X = C(K)$, K — *произвольный отделимый компакт.* ■

В случае 3) имеет место даже формально более сильный результат, чем указанный в утверждении теоремы 4.3.2. А именно, справедливо такое обобщение теоремы 7 из [17]:

Предложение 4.3.1. *Пусть* K — *произвольный отделимый компакт,* X — *такое подпространство в* $C(K)$, *что* $C(K)/X$ *не содержит* l_1. *Пусть, далее.* T — *оператор из* X *в любое банахово пространство* Y. *Если* T^* *не является оператором типа* RN, *то в* X *найдется подпространство, изоморфное* $C[0,1]$, *сужение оператора* T *на которое есть изоморфизм.* ■

Доказательство теоремы 4.3.2. Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что во всех указанных случаях из условной слабой компактности T следует принадлежность его сопряженного T^* классу RN .

Если T — оператор из X в банахову решетку, переводящий шар D пространства X в телесное множество, то $T(D)$ — условно слабо компактное и телесное в Y множество, и, следовательно, каноническое отображение $Y_{T(D)} \to Y$ факторизуется через банахову решетку E (см. [9]), которая не содержит l_1 (достаточно применить основную лемму из [66] и теорему Розенталя). Последнее же эквивалентно тому, что E^* обладает свойством RN (см. [71], замечания к главе 3), откуда мы получаем, что $T^* \in \mathrm{RN}$.

Пусть теперь X — подпространство сепарабельного $\mathcal{L}_\infty$-пространства Z, обладающее сепарабельным аннулятором $X^\perp$. Так как Z^* изоморфно $C^*[0,1]$ (см. [152]), то любое *-слабо компактное выпуклое несепарабельное подмножество K_0 пространства X^* будет содержать канонический образ такого же подмножества K пространства $C^*[0,1]$; а поскольку аннулятор $X^\perp$ в $C^*[0,1]$ сепарабелен и, значит, $X^\perp \subset L_1(\mu)$ для некоторой меры $\mu \in C^*[0,1]$, то в K найдется такая несчетная система попарно сингулярных мер $\{\mu_\alpha\}$, что сужение канонического гомоморфизма $C^*[0,1] \to X^*$ на нее взаимно однозначно и ее образ эквивалентен стандартному базису в $l_1(\Gamma)$ для несчетного Γ (это легко получается из результатов работы [140]). Пусть теперь $T : X \to Y$ — условно слабо компактный оператор, сопряженный к которому имеет несепарабельный образ (т.е. $T^* \notin \mathrm{RN}$; см. [32] или теорему 6.2.2). Тогда в образе единичного шара пространства Y^* при отображении T^* мы можем выбрать несчетное семейство $\{x'_\alpha\}$, эквивалентное стандартному базису в $l_1(\Gamma)$, и, значит, в шаре пространства Y^* мы можем найти такое семейство $\{y'_\beta\}$, что $T^* y'_\beta \in \{x'_\alpha\}$ для всех β и система $\{Ty'_\beta\}$ эквивалентна стандартному базису в $l_1(\Gamma)$. Другими словами, в Y^* существует такое подпространство, изоморфное $l_1(\Gamma)$, что сужение оператора T^* на него — изоморфизм. Это противоречит условной слабой компактности отображения T. Действительно, с одной стороны, оператор T, будучи условно слабо компактным, факторизуется через сепарабельное пространство W, не содержащее l_1, а с другой стороны, из полученного факта с очевидностью вытекает, что W^* содержит $l_1(\Gamma)$ для несчетного Γ, что невозможно (см. [152]).

Доказательство предложения 4.3.1. Если T^* не является оператором типа RN, то существует такое сепарабельное подпространство $X_0 \subset X$, что $(T|_{X_0})^*(Y^*)$ — несепарабельное в X_0^* множество (см. [32] или теорему 6.2.2 ниже). Рассмотрим на K отношение эквивалентности $R : k \sim k'\, k, k' \in K$ тогда и только тогда, когда $f(k) = f(k')$ для всех $f \in X_0$. В силу сепарабельности X_0 фактор–пространство K/R компакта K по этому отношению эквивалентности есть метризуемый компакт. Пусть $\varphi : K \to K/R$ — фактор–отображение, $\Phi : C(K/R) \to C(K)$ — естественное изометрическое вложение, $(\Phi\widetilde{f})(k) = \widetilde{f}(\varphi(k))$ для $k \in K$ и $\widetilde{f} \in C(K/R)$. Если функция $f \in C(K)$ такова, что $f(k) = f(k')$ для $k \sim k'$, то функция $\widetilde{f}(\varphi(k)) = f(k)$ принадлежит пространству $C(K/R)$. Таким образом, рассматривая $C(K/R)$ как подпространство в $C(K)$, мы видим, что $X_0 \subset C(K/R)$. Пусть $X_1 = C(K/R) \cap X \subset C(K)$. Тогда X_1 — сепарабельное подпространство в $C(K)$ и $(T|_{X_1})^*(Y^*)$ — несепарабельное в X_1^* множество. При этом

$$X_1^\perp = (C(K/R) \cap X)^\perp = \overline{\mathrm{co}}^*[C(K/R)^\perp \cup X^\perp] \subset C^*(K).$$

Отсюда следует, что аннулятор пространства X_1 в $C^*(K/R)$ есть образ подпространства $X^\perp$ пространства $C^*(K)$ при каноническом фактор–отображении Φ^*. Так как $C(K)/X$ не содержит l_1, то и $C(K/R)/X_1$ не содержит l_1. Поэтому в пространстве $C^*(K/R)$ аннулятор множества X_1 сепарабелен (см. [140]). Следовательно, по теореме 7 из [17] в X_1 найдется изоморфное $C[0,1]$ подпространство, сужение на которое оператора T есть изоморфизм. ■

4. Дальнейшие свойства условно слабо компактных операторов, связанные I_p-N_p мультипликаторами. Один из наших основных вопросов (*) б) можно поставить в такой форме:

($*$) Будет ли сопряженный к оператору T, действующему в банаховых пространства X и Y, оператором типа RN, если существует такое число $p \in (1, +\infty)$, что суперпозиция UT оператора T с любым p-интегральным отображением U из Y приближается в пространстве I_p конечномерными операторами?

Совсем не очевидно и, по-видимому, неизвестно, эквивалентны ли эти два вопроса (с подобного рода проблемами мы будем иметь дело в следующей главе).

Ниже мы рассматриваем указанный вопрос как с точки зрения его отрицательного решения, так и с точки зрения положительного решения в некоторых частных случаях.

При доказательстве основных наших утверждений нам понадобится следующий вспомогательный факт, представляющий и самостоятельный интерес. Заметим, что в случае, когда $X = Y$, $T = \mathrm{id}$ и $p = 2$, эквивалентность 1) $\iff$ 5) была ранее установлена Пелчинским и Овсепяном (см. [119]).

Лемма 4.4.1. *Для оператора $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ равносильны утверждения:*

1) *оператор T условно слабо компактен;*

2) *для любого $p \in [1, +\infty)$ и всякого $U \in \mathrm{I}_p(Y, Z)$ оператор UT компактен;*

3) *существует такое число $p \in [1, +\infty)$, что для всякого $U \in \mathrm{I}_p(Y, Z)$ оператор UT компактен;*

4) *для любого $p \in (0, +\infty)$ и всякого $U \in \Pi_p(Y, Z)$ оператор UT компактен;*

5) *существует такое число $p \in (0, +\infty)$, что для всякого $U \in \Pi_p(Y, Z)$ оператор UT компактен.*

Доказательство. Так как импликации 4) $\implies$ 2) $\implies$ 3) $\implies$ 5) тривиальны, то нам надо лишь показать, что 1) влечет 4) и 5) влечет 1). Если $U \in \Pi_p(Y, Z)$, то U переводит слабые последовательности Коши в сильно сходящиеся, как всякий абсолютно p-суммирующий оператор. Поэтому если T условно слабо компактен, то UT —компактный оператор. Обратно, предположим, что имеет место утверждение 5). Пусть R — произвольный гомоморфизм из l_1 на l_2. Если оператор T не является условно слабо компактным, то по известной теореме Розенталя в X найдется подпространство W, изоморфное l_1, сужение оператора T на которое есть изоморфное вложение пространства W в Y (см. теорему 4.2.1, импликацию 1) $\implies$ 2) и ее доказательство). Пусть A — изоморфизм из $T(W)$ на l_1 и j — произвольное изоморфное вложение в некоторое инъективное пространство G (например, в l_∞). Оператор jRA действует из $T(W)$ в G и принадлежит классу Π_0 (как и любой оператор из l_1 в l_2, см. [136]); поэтому в силу инъективности G он может быть продолжен до линейного отображения $U \in \Pi_p(Y, G)$. Из 5) теперь вытекает, что отображение UT должно быть компактным. С другой стороны, его сужение на подпространство W в X не компактно, так как $UT|_W$ есть гомоморфизм изоморфной копии W пространства l_1 на подпространство l_2 в G. ■

Следствие 4.4.1. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ и существует $p \in [1,+\infty)$ (соответственно, $p \in (0,+\infty)$), для которого $UT \in \mathrm{N}_p(X,Z)$ при всех $U \in \mathrm{I}_p(Y,Z)$ (соответственно, $UT \in \mathrm{QN}_p(X,Z)$ при всех $U \in \Pi_p(Y,Z)$), то оператор условно слабо компактен.* ■

Замечание 4.4.1. Неизвестно, верно ли обращение следствия 1 для $p > 1$. Некоторые положительные результаты в этом направлении содержатся в формулируемых ниже теоремах 4.4.1 и 4.4.2 и следствии 4.4.2.

Замечание 4.4.2. Следствие 4.4.1 позволяет свести получение утвердительного ответа на вопрос $(*)$ для конкретного оператора T к положительному решению такого вопроса: будет ли T^* оператором типа RN, если T — условно слабо компактный оператор? Отметим, что положительное решение последнего вопроса в конкретных случаях будет означать также, что обращение следствия 4.4.1 в этих случаях справедливо.

Следующие две теоремы носят очень специальный характер и выброшенные из контекста могли бы представлять интерес только для весьма узкого круга специалистов. Но получается так, что без них не видно пути, на котором могли бы быть установлены важнейшие свойства очень просто выглядящих операторов из следующего раздела.

Теорема 4.4.1. *Пусть $0 < s \leqslant r < +\infty, r \geq 1, T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Предположим, что пространство X таково, что $\mathrm{L}(X,l_r) = \Pi_s(X,l_r)$.*[7] *Тогда если оператор T условно слабо компактен, то для всякого $U \in \Pi_r(Y,Z)$ отображение UT квази-s-ядерно, т.е. $UT \in \mathrm{QN}_s(X,Z)$; в частности, для любого $q \in [s,r]$ и всякого $U \in \Pi_q(Y,Z)$ отображение UT принадлежит классу QN_q.*

Доказательство. Пусть $U \in \Pi_r(Y,Z)$. Тогда существует такой отделимый компакт K с мерой Радона μ и вложение j пространства Z в некоторое пространство[8] G, что коммутативна диаграмма

$$
\begin{array}{ccccc}
Y & \xrightarrow{U} & Z & \xrightarrow{j} & G \\
 & \searrow^{B} & & \nearrow^{A} & \\
 & & C(K) \xrightarrow{i} L_r(K,\mu) & &
\end{array}
$$

(здесь i — тождественное вложение, A и B — непрерывные операторы; см. [27]). Если T — условно слабо компактный оператор, то отображение iBT из X в $L_r(K,\mu)$ компактно (лемма 4.4.1). В силу равенства $\mathrm{L}(X,l_r) = \Pi_s(X,l_r)$ последнее означает, что $iBT \in \mathrm{QN}_s(X, L_r(K,\mu))$ (так как замыкание конечномерных операторов

[7] Примеры: $\mathrm{L}(L_1,l_2) = \Pi_0(L_1,l_2)$; $\mathrm{L}(C(K),l_2) = \Pi_2(C(K),l_2)$.
[8] Например, в $L_\infty(\nu)$.

в пространстве $\Pi_s(X,L_r)$ есть в точности пространство $\mathrm{QN}_s(X,L_r)$). Поэтому операторы $jUT=AiBT$ (а значит, и оператор UT) являются квази-s-ядерными. ■

Теорема 4.4.2. *Пусть $0<s\leqslant 2\leqslant r<+\infty$ и $T\in \mathrm{L}(X,Y)$. Предположим, что $\mathrm{L}(X,l_r)=\Pi_s(X,l_r)$ и X — пространство котипа 2. Тогда если T — условно слабо компактное отображение, то для любого $U\in \mathrm{I}_2(Y,Z)$ отображение UT p-ядерно при всяком $p\in(1,+\infty)$; в частности, для любого $p\in(1,2]$ и всякого $U\in \mathrm{I}_p(Y,Z)$ отображение UT принадлежит классу N_p.*

Доказательство. Пусть оператор условно слабо компактен. Так как $\mathrm{I}_2(Y,Z)=\Pi_2(Y,Z)$, то из теоремы 4.4.1 вытекает, что для любого $U\in \mathrm{I}_2(Y,Z)$ оператор UT является квази-2-ядерным, а значит, и 2-ядерным. Так как X — пространство котипа 2, то для любого $q\in[2,+\infty)$ существует такая константа C_q, что $\pi_2(V)\leqslant C_q\pi_q(V)$, если V — конечномерный оператор со значениями в X (см. [136]). Отсюда по двойственности между нормами π_q и i_p легко вытекает, что для любого оператора A, действующего из X, выполняется неравенство $i_p(A)\leqslant C_p\, i_2(A)$ ($p\in(1,2]$), где C_p — константа, зависящая только от p (и конечно от X). Таким образом, для любого пространства $L_2(\mu)$ и всякого числа $p\in(1,2]$ $\mathrm{I}_p(X,L_2)=\mathrm{I}_2(X,L_2)$ и, следовательно, $\mathrm{N}_p(X,L_2)=\mathrm{N}_2(X,L_2)$ (пространство $\mathrm{N}_p(X,L_2)$ есть замыкание конечномерных операторов в пространстве $\mathrm{I}_p(X,L_2)$). Поэтому для любого $U\in \mathrm{I}_2(Y,Z)$ оператор UT принадлежит классу N_p при всяком $p\in(1,+\infty)$. ■

Так как любое $\mathcal{L}_1$-пространство X является пространством котипа 2 и, кроме того, $\mathrm{L}(X,l_2)=\Pi_0(X,l_2)$,[9] то из теорем 4.4.1 и 4.4.2 мы получаем

Следствие 4.4.2. *Если X — $\mathcal{L}_1$-пространство и T — условно слабо компактный оператор из X в произвольное пространство Y, то*

1) для всякого $U\in\Pi_2(Y,Z)$ отображение UT квази-p-ядерно при любом $p\in(0,+\infty)$, в частности, $UT\in \mathrm{QN}_p(X,Z)$ для всякого $U\in\Pi_p(Y,Z)$, если $p\in(0,2]$;

2) для всякого $U\in \mathrm{I}_2(Y,Z)$ отображение UT p-ядерно при любом $p\in(1,+\infty)$, в частности, $UT\in \mathrm{N}_p(X,Z)$ для всякого $U\in \mathrm{I}_p(Y,Z)$, если $p\in(1,2]$. ■

5. Еще несколько (контр)примеров. Используя следствие 4.4.2, мы сейчас покажем, что существует достаточно много операторов T, для которых вопрос $(*)$ имеет отрицательный ответ.

(1) Пусть Δ — канторово множество, $\{A_i\}$ — каноническая система открыто–замкнутых множеств в Δ, $\{\chi_{A_i}\}$ — соответствующая система характеристических функций множеств A_i, h_i — нормированная в $C(\Delta)$ система функций Хаара. Определим операторы из l_1 в $C(\Delta)$: $Q_1\{\xi_i\}=\sum\xi_i\,\chi_i$, $Q_2\{\xi_i\}=\sum\xi_i\,h_i$. Легко проверяется, что оба этих операторов условно слабо компактны, а их сопряженные не явля-

[9] Под классом Π_0 можно понимать следующее: $T\in\Pi_0 \iff T\in\Pi_p\ \forall p>0$. Море (B.Maurey) доказал, что *если X – пространство котипа 2, то* $\Pi_2(X,\cdot)=\Pi_0(X,\cdot)$; здесь мы также использовали терему Гротендика для $\mathrm{L}(L_1,L_2)$. Доказательство Море можно найти в работе *B.Maurey, Théorem de factorisation pour les opérateurs lineaires à valeurs dans les espaces L_p, Astérisque 11 (1974), 1-163.*

ются операторами Радона–Никодима (по поводу первого оператора см. теорему 4.3.1; пример оператора Q_2 рассмотрен, по существу, в работе [66]). Из следствия 4.4.2 вытекает, что если $p \in (1,2], q \in (0,2],$, $U_1 \in \mathrm{I}_p(C(\Delta), Z), U_2 \in \Pi_q(C(\delta), Z)$, то $U_1 Q_j \in \mathrm{N}_p(l_1, Z)$ и $U_2 Q_j \in \mathrm{QN}_q(l_1, Z)$.

(2) Пусть Y — произвольное сепарабельное банахово пространство, не содержащее изоморфно l_1, сопряженное к которому не обладает свойством RN (такими будут, например, оба промежуточных пространства для операторов Q_1 и Q_2, построенные по схеме работы [66]; см. также [66], [88], [105], [10]). Пусть, далее, R — произвольный гомоморфизм из l_1 на Y. Тогда по теореме Розенталя оператор R условно слабо компактен, но его сопряженный R^* не есть оператор типа RN, так как он осуществляет изоморфное вложение пространства Y^* в l_∞, а $Y^* \notin \mathrm{RN}$. Тем не менее по следствию 4.4.2 для любых $p \in (1,2], q \in (0,2],$, $U_1 \in \mathrm{I}_p(Y, Z), U_2 \in \Pi_q(Y, Z)$, имеют место включения $U_1 R \in \mathrm{N}_p(l_1, Z)$ и $U_2 R \in \mathrm{QN}_q(l_1, Z)$.

(3) Пусть T — оператор из $L_1[0,1]$ в $C[0,1]$, определяемый формулой $(Tf)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$. Тогда ни оператор T, ни его сопряженный не являются операторами типа RN. С другой стороны, оператор T условно слабо компактен и, следовательно, для T имеют место утверждения 1) и 2) следствия 4.4.2.

Мы опустим доказательство несущественной в этом параграфе части утверждения "T не является оператором типа RN" (отметим лишь, что оно сводится к простой проверке того, что T не допускает интегрального представления с сильно измеримой $C[0,1]$-значной функцией). Покажем, что $T^* \notin \mathrm{RN}$. Для этого заметим, что для $a \in [0,1]$ $T^*(\delta_a) = \chi_{[0,a]}$ и, значит, функция $a \mapsto \delta_a \mapsto \chi_{[0,a]} = T^*(\delta_a)$ не эквивалентна скалярно сильно измеримой функции, хотя функция $a \mapsto \delta_a$ скалярно измерима. Следовательно, T^* не может быть оператором Радона–Никодима (теорема 2.1.4$'$). Пусть теперь $\{f_n\}$ — ограниченная в $L_1[0,1]$ последовательность функций (предположим для определенности, что $\|f\| \leqslant 1$). С помощью стандартного диагонального процесса выделим подпоследовательность $\{Tg_n\} \subset \{Tf_n\}$, сходящуюся в каждой рациональной точке отрезка $[0,1]$. Теперь, если $t \in [0,1]$, то для любой рациональной точки $r \in [0,t]$ мы имеем:

$$
\begin{aligned}
|(Tg_n)(t) - (Tg_m)(t)| &= \left| \int_0^t (g_m(s) - g_n(s))\,ds \right| \leqslant \\
&\leqslant \int_r^t |g_m(s)| + \left| \int_0^r (g_m(s) - g_n(s))\,ds \right| + \int_r^t |g_n(s)| \leqslant \\
&\leqslant 2|t-r| + \left| \int_0^r (g_m(s) - g_n(s))\,ds \right|.
\end{aligned}
$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{Tg_n\}$ функций сходится в каждой точке $t \in [0,1]$. Следовательно, она является слабо фундаментальной в $C[0,1]$.

§5. Применение к аппроксимации операторов конечномерными в топологии компактной сходимости

Мы сейчас установим первоначальный и упрощенный вариант обобщенной теоремы А. Гротендика, а затем покажем, что эта теорема в определенном смысле точна, ответив одновременно на один из основных вопросов А. Гротендика из его знаменитой работы 1955 г.

1. Операторы типа RN **и аппроксимация линейных непрерывных отображений конечномерными: первые связи.** Наша теорема 5.1.1 аналогична (по формулировке и доказательству) теореме 15 из [80]. Центральные различия состоят в том, что требование слабой компактности оператора заменено требованием принадлежности оператора классу RN и (этого не было в [80]) предполагается дополняемость одного из банаховых пространств, где действуют рассматриваемые операторы, во его втором сопряженном. Без последнего предположения, как мы увидим ниже, обойтись нельзя. Несколько позже мы докажем более общие результаты. Однако представляется уместным привести самый простой и явно обобщающий теорему А. Гротендика результат до этих общих фактов: доказательство нижеследующей теоремы достаточно прозрачно и выявляет основные моменты и идеи. Кроме того, в этом доказательстве явно видно, где требуется существование соответствующего проектора и почему без этого требования вряд ли какое-либо другое доказательство пройдет. Саму теорему А. Гротендика, также как и ее доказательство в [80], мы еще обсудим.

Теорема 5.1.1. *Пусть* X, Y, Z *— банаховы пространства,* $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, $U \in \mathrm{L}(Y,Z)$. *Предположим, что существует непрерывный проектор* $P : X^{**} \to X$ *и выполнено одно из следующих условий:*

1) U *равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями,* $T \in \mathrm{RN}(X,Y)$;

2) T *равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями,* $U \in \mathrm{RN}(Z^*, Y^*)$.

Тогда UT *есть равномерный на каждом компакте предел конечномерных отображений, норма которых не превосходит* $\|P\| \cdot \|UT\|$.

Доказательство теоремы мы разобьем на несколько пунктов.

I. Некоторые предварительные замечания.

1). Обозначим UT через V. Очевидно, можно считать, что $\|V\| = 1$. Заметим, что заменяя норму в Y на эквивалентную, мы не изменим ни условий (чисто топологических), ни заключения теоремы. Пусть D_1, D_2 и D_3 — единичные шары соответственно в X, Y и Z. Тогда $TD_1 \subset U^{-1}D_3$. Заменим норму в Y на эквивалентную так, чтобы единичный шар D_2' пространства Y с новой нормой содержал множество TD_1, и положим $D = D_2' \cap U^{-1}D_3$. Если теперь взять D в качестве единичного шара в Y, то получится пространство Y с новой нормой, эквивалентной исходной, причем мы будем иметь $\|T\| \leqslant 1$, $\|U\| \leqslant 1$, $\|V\| \leqslant 1$. Следовательно, нам достаточно доказать, что если выполнено одно из условий теоремы, то V равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями, норма которых не превосходит $\|P\| \cdot \|T\| \cdot \|U\|$.

2). Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{I}_0(Z, X)$ — замыкание подпространства $L_0(Z, X)$ конечномерных отображений в пространстве $\mathrm{I}(Z, X^{**})$ интегральных операторов из Z в X^{**}. Так как пространство $\mathrm{I}(Z, X^{**})$ является сопряженным к $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Z$ (предложения 27 и 28 из [80]), то $\mathrm{I}_0(Z, X)$ есть пополнение пространства $Z^* \otimes X$ по норме

$$\| \cdot \|_1 = \sup\{|\langle A, \cdot\rangle| \mid A \in X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Z, \|A\| \leqslant 1\}.$$

По теореме 3.1 [148] сопряженным к $\mathrm{I}_0(Z, X)$ пространством является некоторое пространство операторов $G \subset \mathrm{L}(X, Z^{**})$, причем для любого оператора $B \in G$ имеет место неравенство $\|B\| \leqslant \|B\|_G$. С другой стороны, если $B \in X^* \otimes Z$, то

$$\|B\| = \sup_{\substack{F\in \mathrm{I}(Z,X^{**})\\ \|F\|_1 \leqslant 1}} |\langle B, F\rangle| \geqslant \sup_{\substack{F\in \mathrm{I}_0(Z,X)\\ \|F\|_1 \leqslant 1}} = \|B\|_G,$$

т. е. $\|B\| = \|B\|_G$ для всех $B \in X^* \otimes Z$. Таким образом, $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Z$ является подпространством пространства G и, следовательно, единичный шар сопряженного к $\mathrm{I}_0(Z, X)$ пространства есть замыкание единичного шара пространства $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Z$ в G в топологии $\sigma(G, \mathrm{I}_0(Z, X))$. По лемме 20 из [80] это замыкание совпадает с замыканием единичного шара пространства $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Z$ в $\mathrm{L}(X, Z^{**})$ в топологии компактной сходимости (эквивалентно в топологии простой сходимости). Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно показать, что V принадлежит шару радиуса $\|P\| \cdot \|T\| \cdot \|U\|$ пространства G.

3). Если $W \in \mathrm{I}_0(Z, X)$, то $W \in \mathrm{I}(Z, X^{**})$ и $W = PW : Z \xrightarrow{W} X^{**} \xrightarrow{P} X$. Следовательно, $W \in \mathrm{I}(Z, X)$ и $\|W\|_{\mathrm{I}(Z,X)} \leqslant \|P\| \cdot \|W\|_{\mathrm{I}(Z,X^{**})} = \|P\| \cdot \|W\|_{\mathrm{I}_0(Z,X)}$.

II. Доказательство утверждения теоремы.

1). Пусть выполнено условие 1 теоремы. Если $A \in \mathrm{I}_0(Z, X)$, то по теореме 4.1.2 оператор $TA : Z \to Y$ является ядерным, т. е. принадлежит пространству $Z^*\widehat{\otimes}Y/K$, где K — ядро канонического линейного отображения $Z^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{N}(Z, Y)$, причем $\|TA\|_{\mathrm{N}} \leqslant \|T\| \cdot \|A\|_{\mathrm{I}(Z,X)} \leqslant \|T\| \cdot \|P\| \cdot \|A\|_{\mathrm{I}_0(Z,X)}$. Следовательно, T определяет непрерывное линейное отображение Q :

$$\mathrm{I}_0(Z, X) \to Z^*\widehat{\otimes}Y/K,\ QA = TA,$$

норма которого не превосходит $\|P\| \cdot \|T\|$. Рассмотрим сопряженное к $Z^*\widehat{\otimes}Y/K$ пространство. Оно совпадает с аннулятором $K^\perp$ пространства K в сопряженном к $Z^*\widehat{\otimes}Y$ пространстве $\mathrm{L}(Y, Z^{**})$. Так как $K = (Z \otimes Y^*)^\perp$, то $K^\perp$ есть замыкание множества $Z \otimes Y^*$ в $\mathrm{L}(Y, Z^{**})$ в топологии $\sigma(\mathrm{L}(Y, Z^{**}), Z^*\widehat{\otimes}Y)$. С другой стороны, по условию и по определению 22 из [80] оператор U принадлежит пространству $K^\perp$. Следовательно, Q^*U есть элемент пространства $\mathrm{I}_0(Z, X)^*$, причем $\|Q^*U\| \leqslant \|P\| \cdot \|T\| \cdot \|U\|$. Из определения Q немедленно следует, что $Q^*U = UT$.

2). Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы. Если $A \in \mathrm{I}_0(Z,X)$, то по теореме 4.1.3 оператор $AU : Y \to X$ принадлежит пространству $Y^*\widehat{\otimes}X/M$, где M — ядро канонического линейного отображения $Y^*\widehat{\otimes}X \to \mathrm{N}(Y,X)$, причем $\|AU\|_N \leqslant \|P\| \cdot \|U\| \cdot \|A\|_{\mathrm{I}_0(Z,X)}$. Поэтому U определяет линейное отображение R :

$$\mathrm{I}_0(Z,X) \to Y^*\widehat{\otimes}X/M,\ RA = AU,$$

норма которого не превосходит $\|P\| \cdot \|U\|$. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим пространство $M^\perp \subset \mathrm{L}(X,Y^{**})$, сопряженное к $Y^*\widehat{\otimes}X/M$. Оператор T принадлежит пространству $M^\perp$. Следовательно, $R^*T \in \mathrm{I}_0(Z,X)^*$, причем $\|R^*T\| \leqslant \|P\| \cdot \|T\| \cdot \|U\|$. Из определения отображения R мы получаем, что $R^*T = UT$. Теорема доказана. ∎

Замечание 5.1.1. Предположение о существовании непрерывного проектора из X^{**} на X существенно. Используя результаты работ [101, 76], можно найти такое банахово пространство X, что X и X^* обладают свойством RN, X удовлетворяет условию аппроксимации, но не удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации. Впрочем, см. следующий раздел.

Следствие 5.1.1. *Пусть X — банахово пространство, имеющее дополнение в X^{**} (например, X изоморфно сопряженному пространству) и пусть либо X, либо X^* обладает свойством Радона-Никодима. Если X удовлетворяет условию аппроксимации, то X удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации. В частности, если X $(1+\varepsilon)$-изометрично сопряженному пространству и удовлетворяет условию аппроксимации, то X удовлетворяет условию $(1+\varepsilon)$-метрической аппроксимации. Таким образом для сопряженного банахова пространства Y^*, обладающего свойством* RN, *условия аппроксимации и метрической аппроксимации эквивалентны.* ∎

Замечание 5.1.2. Для рефлексивных пространств последнее утверждение в следствии 5.1.1 получено А. Гротендиком (следствие 2 и предложение 40 из [80]) и по признанию ряда ведущих специалистов является одной из красивейших его теорем.

Следствие 5.1.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если X^* удовлетворяют условию аппроксимации, то каждый оператор $T \in \mathrm{L}(X^*,Y)$, сопряженный к которому является оператором Радона-Никодима, приближается равномерно на каждом компакте конечномерными отображениями, нормы которых $\leqslant \|T\|$.* ∎

Следствие 5.1.3. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Если Y удовлетворяют условию аппроксимации, то каждый оператор $T \in \mathrm{RN}(X^*,Y)$ приближается равномерно на каждом компакте конечномерными отображениями, нормы которых $\leqslant \|T\|$.* ∎

2. Контрпример к гипотезе А. Гротендика. В мемуаре [80], Chap. 2, p. 135, "Questions non Résolues", А. Гротендик сформулировал

Предположение. *Пусть E и F — два банаховых пространства, $U : E \to F$ — слабо компактный оператор. Если U может быть аппроксимирован, равномерно на каждом компактном подмножестве в E, конечномерными операторами, то U можно аппроксимировать в топологии компактной сходимости конечномерными операторами, нормы которых $\leqslant \|U\|$.*

Отметим, что если $E = F$ и $U = \mathrm{id}_E$, то это предположение верно (см. [80], Chap. 1, p. 181). Этот результат и формулировка теоремы 15 (Chap.1) позволяли считать, что сформулированное предположение справедливо также и в общем случае (см. [80], Chap. 2, p. 135). Отметим, что А. Гротендик в [80] доказал только одну часть своей теоремы 15; он написал "вторая часть доказывается аналогично".

Основной результат раздела следующий [133]:

Теорема 5.2.1. *Существуют банаховы пространства*[10] *E и F и компактный оператор $U : E \to F$ такие, что*

(1) *E сепарабельно, также как и все его сопряженные;*
(2) *E удовлетворяет условию аппроксимации;*
(3) *если $d < \infty$, то нельзя аппроксимировать U, равномерно на каждом компакте из E, операторами конечного ранга с нормами $\leqslant d$.*

Таким образом, мы показываем, что сформулированное предположение не верно, так же как и неверны некоторые части теоремы 15 и ее следствий 1 и 2 в [80], chapitre 1.[11]

Доказательство теоремы. Мы покажем. что для каждого $C > 0$ существуют банахово пространство X_C (сепарабельное, так же как и все его сопряженные), которое удовлетворяет условию аппроксимации, рефлексивное банахово пространство Z_C и компактный оператор U_C из X_C в $Z_C, \|U\| \leqslant 1$, такие, что U_C не может быть аппроксимирован, равномерно на каждом компактном подмножестве из X_C, конечномерными операторами с нормами $\leqslant C$. Отсюда моментально получается, что пространства

$$E = \left(\sum X_{2^n}\right)_{l_2}, \quad F = \left(\sum Z_{2^n}\right)_{l_2}$$

[10] Оба пространства сепарабельны, а F даже рефлексивно.

[11] Вот выдержки из [80, p. 182-184].

THÉORÈME 15. – Soient E, F, G trois espaces de Banach, u est une application linéaire continue de E dans F, v est une application linéaire continue de F dans G. On suppose que l'une des deux applications u, v est faiblement compacte, et l'autre limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues de rang fini. Alors $w = vu$ est limite, uniforme sur tout compact, d'applications de rang fini et de norme $\leq ||w||$.

COROLLAIRE 1. – Soient E est F deux espaces de Banach, dont l'un au moins satisfasse à la condition d'approximation (definition 9, n° 1). Alors toute application linéaire faiblement compacte u de E dans F est limite uniforme sur tout compact, d'applications linéaires de rang fini et de norme $\leq ||u||$.

Следствие 2 отличается от теоремы лишь тем, что там внутреннее пространство — локально выпукло.

и оператор

$$U = \sum n^{-2} U_{2^n}$$

удовлетворяют требуемым условиям.

Пусть $C > 0, Y$ и Z — сепарабельные рефлексивные банаховы пространства, $V : Y \to Z$ — компактный оператор единичной нормы такие, что V не может быть аппроксимирован в топологии компактной сходимости конечномерными операторами. Из результатов работы [101] следует, что найдутся банахово пространство X (сепарабельное, так же как и все его сопряженные), которое удовлетворяет условию метрической аппроксимации, оператор $H : X \to Y$ такой, что $H(X) = Y, \|H\| \leqslant 1$, и существует проектор S единичной нормы из пространства X^* на $H^*(Y^*)$. Пусть $P = (H^*)^{-1}S : X^* \to H^*(Y^*) \to Y^*$ и $W = VH : X \to Y \to Z$.

Оператор V^* не может быть аппроксимирован в топологии компактной сходимости операторами конечного ранга, нормы которых $\leqslant C$. Из леммы 20 [80] вытекает, что существуют такие $\varepsilon > 0$ конечное подмножество J (соответственно, G) единичного шара B_{Z^*} пространства Z^* (соответственно, пространства Y), что если $R \in Z \otimes Y^*$, то

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} |\langle V^*z', y\rangle - \langle Rz', y\rangle| < \varepsilon \text{ для всех } z' \in J \text{ и } y \in G \\ \qquad\qquad \Longrightarrow \|R\| \geqslant C. \end{cases}$$

Пусть $A > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что $3A^{-1/2} + \delta < \varepsilon$ и $A^{1/2} > C$. Пусть, наконец, D — такое конечное подмножество в $W^*(B_{Z^*})$, что для каждого $x' \in W^*(B_{Z^*})$ можно найти $f \in D$, для которого $\|x' - f\| \leqslant A^{-1}$.

Положим $L = \mathrm{span}(D \cup W^*(J))$. Для $y \in G$ выберем такой $x_y \in X$, что

$$\|x_y\| \leqslant 2 \text{ и } x_y|_L = P^*y|_L.$$

Пусть, наконец,

$$|||x'||| = \max\{||x'||, A\, d(x', L)\}, \; x' \in X^*,$$

где $d(x', L) = \inf\{\|x' - l\| : l \in L\}$.

Тогда $(X^*, ||| \cdot |||) = (X, ||| \cdot |||_0)^*$ и $||| \cdot |||_0$ эквивалентна исходной норме.

Мы покажем, что пространства $X_C = (X, ||| \cdot |||_0), Z_C = Z$ и оператор $U_C = W$ удовлетворяют требуемым условиям.

Если $z' \in Z^*, ||z'|| \leqslant 1$, то

$$|||W^*z'||| \leqslant \max\{\|z'\|; A\, d(W^*z', L)\} \leqslant \max\left\{1; A \cdot A^{-1}\right\} = 1,$$

откуда $|||W|||_0 \leqslant 1$.

Предположим, что Q такой конечномерный оператор из X в Z, что $\|Qx_y - Wx_y\| < \delta$ для каждого $y \in G$. Нам осталось лишь доказать, что $|||Q|||_0 \geqslant C$.

Пусть $z' \in J, y \in G$, и пусть $l \in L$ таково, что

$$\|l - Q^* z'\| = d(Q^* z', L).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
|||Q^*||| \geqslant |||Q^* z'||| \geqslant A\, d(Q^* z', L) = A\|Q^* z' - l\| \\
\geqslant \frac{A}{3}\, |\langle Q^* z' - l, x_y - P^* y\rangle| = \frac{A}{3}\, |\langle Q^* z', x_y - P^* y\rangle| \\
= \frac{A}{3} |\langle z', Q x_y\rangle \langle Q^* z', P^* y\rangle| \\
\geqslant \frac{A}{3} \left(|\langle z', W x_y\rangle - \langle PQ^* z', y\rangle| - |\langle z', Q x_y - W x_y\rangle|\right) \\
\geqslant \frac{A}{3}\, |\langle W^* z', x_y\rangle - \langle PQ^* z', y\rangle| - \frac{A}{3}\,\delta \\
\geqslant \frac{A}{3}\, |\langle H^* V^* z', P^* x_y\rangle - \langle PQ^* z', y\rangle| - \frac{A}{3}\,\delta \\
\geqslant \frac{A}{3}\, |\langle V^* z', y\rangle - \langle R z', y\rangle| - \frac{A}{3}\,\delta,
\end{aligned}$$

где $R = PQ^* \in Z \otimes Y^*$.

Таким образом, если $z' \in J$ и $y \in G$, то

$$\frac{A}{3}\, |||Q^*||| + \delta \geqslant |\langle V^* z', y\rangle - \langle R z', y\rangle|.$$

Так как для $f \in Z^*$

$$||Q^*|| \leqslant |||Q^* f||| \leqslant |||Q^*|||\, ||f||,$$

то $||Q^*|| \leqslant |||Q^*|||$.

Если

$$|||Q^*||| \geqslant A^{1/2} \quad \text{то} \quad |||Q|||_0 \geqslant C,$$

так как $A^{1/2} > C$.

Если $|||Q^*||| \leqslant A^{1/2}$, то

$$|\langle V^* z', y\rangle - \langle R z', y\rangle| \leqslant \delta + 3A^{-1/2}. \tag{2}$$

Вследствие (1) и (2), $||R|| \geqslant C$; поэтому $|||Q^*||| \geqslant C$, что завершает доказательство. ■

Замечание 5.2.1. Пространство E, построенное при доказательстве теоремы, обладает свойством Радона–Никодима (так как E^{**} сепарабельно), удовлетворяет условию аппроксимации, но не удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации. Следовательно, в частности, мы передоказали основной результат работы [76].

3. Дополняемые операторы, операторы RN и операторы с аппроксимационными свойствами. Здесь мы покажем, в каких направлениях можно ожидать нетривиальных дальнейших обобщений красивой теоремы А. Гротендика о совпадении свойств аппроксимации и метрической аппроксимации для рефлексивных пространств (см. замечание 5.1.2). Мы установим два результата [52], наиболее общих на момент написания этих строк, и обобщающих, как будет понятно ниже, теорему 5.1.1. Доказательства этих двух теорем достаточно сильно отличаются от "прозрачного" доказательства теоремы 5.1.1, хотя идейно все эти доказательства схожи.

Первая часть следующего определения давно и хорошо известна и появлялась в неявном виде (либо явно в других терминах) в ряде работ различных авторов (например, в нескольких статьях Ж. Пизье). Однако мы уже видели, что уже А. Гротендик рассматривал "операторы со свойством аппроксимации" и "операторы со свойством C-метрической аппроксимации", не вводя явно никаких определений. Поэтому мы сейчас лишь формализуем понятия, известные еще с 1950-х годов. Что касается второй части, то определение дополняемых операторов впервые было введено автором именно в контексте результатов данного раздела. Здесь не место подробно исследовать идеал дополняемых операторов, но представляется ясным, что на пути изучения этого идеала возникают (по крайней мере, должны возникать) достаточно любопытные вещи.

Определения 5.3.1. 1) Оператор $U \in \mathrm{L}(Z, W)$ *обладает свойством аппроксимации,* $U \in \mathrm{AP}(Z, W)$, если равномерно на каждом компакте из Z он приближается конечномерными отображениями; если существует такая константа $C \geqslant 1$, что равномерно на каждом компакте оператор U приближается конечномерными, нормы которых не превосходят C, то мы говорим, что U обладает свойством C-метрической аппроксимации, $U \in C\text{-}\mathrm{MAP}(Z, W)$. Гротендиковские свойства аппроксимации — частный случай (при $Z = W$, $U = \mathrm{id}_Z$).

2) Мы говорим, что оператор $T \in \mathrm{L}(Y, E)$ *дополняем в своем втором сопряженном,* если существует такой оператор $S \in \mathrm{L}(Y^{**}, E)$, что $T = S\pi_Y$. Для удобства мы будем называть в этом случае S *проекцией оператора* T^{**} *на подпространство* $\mathrm{L}(Y^{**}, E)$ пространства $\mathrm{L}(Y^{**}, E^{**})$ (точнее было бы говорить о проекции на подпространство $\mathrm{L}(Y^{**}, \pi_E E)$).

Очевидно, что проекция, если существует, определяется, вообще говоря, не единственным образом, но по проекции своего второго сопряженного оператор восстанавливается однозначно. Совокупность всех дополняемых в своих вторых сопряженных операторов образует линейное пространство, совокупность же всех проекций для таких операторов является даже замкнутым линейным подпространством в $\mathrm{L}(Y^{**}, E)$. Ясно также, что если оператор T дополняем в T^{**} и S — одна из возможных его проекций, то $(S\pi_Y)^{**} = T^{**}$ и $\|T\| \leqslant \|S\|$.

Примеры 5.3.1. 1) Если Y или E дополняемо соответственно в Y^{**} или E^{**} (например, если одно из пространств Y или E сопряжено), то всякий оператор $T \in \mathrm{L}(Y, E)$ дополняем в своем втором сопряженном.

2) Всякий слабо компактный оператор T дополняем в своем втором сопряженном. Его проекцией может служить оператор T^{π}.

2′) Если оператор T факторизуется через пространство, дополняемое в своем втором сопряженном (например, через сопряженное пространство, — всякий слабо компактный таков), то T дополняем в своем втором сопряженном.

2″) Наконец, если некоторый оператор факторизуется через дополняемый во втором сопряженном оператор, то он сам является дополняемым в своем втором сопряженном.

Таким образом, класс Dpl всех дополняемых в своих вторых сопряженных операторов образует операторный идеал, содержащий идеал всех слабо компактных линейных отображений. Для $T \in \mathrm{Dpl}$ обозначим через $\|T\|_{\mathrm{Dpl}}$ величину

$$\|T\|_{\mathrm{Dpl}} := \inf\{\|S\| : \ S \text{ — проекция } T^{**}\}.$$

Замечание 5.3.1. Можно ввести общее понятие дополняемости одного оператора T в другом операторе U. Вот одно из подобных определений, относящееся к специфической ситуации, когда рассматриваемые операторы весьма тесно связаны между собой. Пусть наши операторы таковы, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{rccc} T: & X_0 & \longrightarrow & Y_0 \\ & \cap & & \cap \\ U: & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Диагр. 1

Здесь X_0, Y_0 подпространства в X, Y соответственно и отображение U таково, что $U|_{X_0} = T$. Будем говорить, что оператор T дополняем в U, если найдется такой оператор $U_0 : X \to Y_0$, что $U_0|_{X_0} = T$. Например, в обозначениях этого определения, всякий конечномерный T $\sqrt{\dim T}$-дополняем в любом операторе U (мы не станем обсуждать сейчас, что означает последняя фраза, думается, что это должно быть понятно). Рассмотрение различных фактов и свойств, связанных с понятием дополняемости операторов увело бы нас далеко от тематики настоящей работы, поэтому мы отложим это рассмотрение до лучших времен.

Ниже, как обычно, когда мы говорим о сопряженных к тензорным произведениям пространствах, мы всегда имеем в виду двойственность, определяемую с помощью следа суперпозиции соответствующих тензорных элементов и операторов. Напомним также, что мы часто отождествляем банахово пространство с его каноническим образом во втором сопряженном пространстве (в тех случаях, когда это не приводит к недоразумению).

Теорема 5.3.1. *Если X, Y, Z, W — банаховы пространства, $S \in \mathrm{Dpl}(X,Y)$, $T \in \mathrm{RN}(Y,Z)$ и $U \in \mathrm{AP}(Z,W)$, то $UTS \in C$-MAP, где $C = \|UT\|\,\|S\|_{\mathrm{Dpl}}$.*

Доказательство. Рассуждения, подобные тем, что были приведены в начале доказательства теоремы 5.1.1, показывают, что нам достаточно установить утверждение теоремы с константой $C = \|U\|\,\|T\|\,\|S\|_{\mathrm{Dpl}}$.

Вот диаграмма, которую надо иметь в виду в приводимом ниже доказательстве:

$$\begin{array}{ccccccccc} W & \xrightarrow{\widetilde{v}} & X & \xrightarrow{S} & Y & \xrightarrow{T} & Z & \xrightarrow{U} & W. \\ & & \searrow^{\pi_X} & \nearrow^{S_0} & & & & & \\ & & & X^{**} & & & & & \end{array}$$

Диагр. 2

Сопряженное к $W^*\widehat{\otimes}_1 Z$ пространство есть $\mathrm{L}(Z, W^{**})$. Если $\Phi:\ W^*\widehat{\otimes}_1 Z \to \mathrm{N}_1(W,Z)$ — каноническое факторотображение, то его ядро $\mathrm{Ker}\,\Phi$ состоит из тех тензоров в $W^*\widehat{\otimes}_1 Z$, которые обращаются в нуль на конечномерных операторах из $\mathrm{L}(Z, W^{**})$. Сопряженное к $\mathrm{N}_1(W,Z)$ пространство поэтому есть подпространство $\mathrm{L}_0(W, Z^{**})$ в $\mathrm{L}(W, Z^{**})$, состоящее из операторов, приближающихся в *-слабой топологии конечномерными (оператор U как раз таков, так как каждый элемент $u \in W^*\widehat{\otimes}_1 Z$ представим в виде ряда $\sum w_k' \otimes z_k$, где $(w_k') \in l_1(W^*)$ и $(z_k) \in c_0(Z)$). Поскольку U аннулируется на $\mathrm{Ker}\Phi$, то след $\mathrm{trace}\ U \circ \widetilde{u}$ корректно определен для любого $\widetilde{u} \in \mathrm{N}_1(W,Z)$, порожденного тензором $u \in W^*\widehat{\otimes}_1 Z$, причем $|\,\mathrm{trace}\ U \circ u| \leqslant \|U\|\,\nu_1(\widetilde{u})$. В частности, если $v \in W^*\widehat{\otimes}_1 X$, то $(\mathbb{1} \otimes TS)v \in W^*\widehat{\otimes}_1 Z$ и имеет смысл след $\mathrm{trace}\ U \circ (\widetilde{\mathbb{1} \otimes TS})v = \mathrm{trace}\ U \circ ((TS) \circ v)$. Если S_0 — дополнение оператора S в его втором сопряженном S^{**}, то $\mathrm{trace}\ U \circ ((TS) \circ v) = \mathrm{trace}\ U \circ ((TS_0\pi_X) \circ v)$.

Пусть $v = \sum w_k' \otimes x_k$ — какое-либо представление v в пространстве $W^*\widehat{\otimes}_1 X$. Тогда

$$|\,\mathrm{trace}\ U \circ ((TS) \circ v)| = \left|\sum \langle w_k', UTSx_k\rangle\right| \leqslant$$
$$\|U\|\,\nu_1\left(\sum w_k' \otimes TSx_k\right) = \|U\|\,\nu_1\left((TS)\widetilde{v}\right) = \|U\|\,\nu_1\left(T(S_0\pi_X\widetilde{v})\right).$$

Теперь пора использовать принадлежность оператора T идеалу RN. Произведение AB оператора A типа RN и (строго) 1-интегрального оператора B является ядерным оператором, причем норма произведения не превосходит произведения соответствующих норм: $\nu_1(AB) \leqslant \|A\| i_1(B)$ (теорема 4.1.2). Поэтому мы можем продолжить цепочку наших соотношений, получая следующее:

$$\mathrm{trace}\ U \circ (\widetilde{\mathbb{1} \otimes TS})v \leqslant \|U\|\,\|T\|\,i_1(S_0\pi_X\widetilde{v}) \leqslant$$
$$\|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|\,i_1(\pi_X\widetilde{v}) = \|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|\,i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).$$

Из приведенных выкладок видно, что отображение $\mathbb{1} \otimes TS$ индуцирует оператор R из $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ в $\mathrm{N}_1(W, Z)$, норма которого не превосходит $\|T\|\,\|S_0\|$ и такое, что для $\widetilde{v} \in \mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$

$$|\langle< R^*U, \widetilde{v}\rangle| = |\langle U, R\widetilde{v}\rangle| = |\,\mathrm{trace}\; U \circ (TS_0\pi_X\widetilde{v})| \leqslant \|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|\, i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).$$

Оператор U лежит в шаре радиуса $\|U\|$ пространства $\mathrm{L}_0(Z, W^{**}) \subset \mathrm{L}(Z, W^{**})$. Следовательно, отображение R^* переносит U в шар радиуса $\|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|$ пространства $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)^*$. Так как $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ канонически изометрично подпространству $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, \pi_X X)$ пространства $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X^{**})$, то R^*U продолжается до функционала U_0 на $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$ без увеличения нормы. Пространство $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$ сопряжено к инъективному тензорному произведению $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_\infty W$, и, следовательно, U_0 лежит в *-слабом замыкании шара радиуса $\|T\|\,\|S_0\|\,\|U\|$ пространства $X^* \otimes_\infty W$, что гарантирует равномерную на каждом компакте аппроксимацию оператора $UTS = UTS_0\pi_X$ конечномерными операторами, нормы которых не превосходят $\|T\|\,\|S_0\|\,\|U\|$. ■

Теорема 5.3.2. *Если X, Y, Z, W — банаховы пространства, $S \in \mathrm{Dpl}(X, Y)$, $T \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}(Z, W)$ и $U \in \mathrm{AP}(Y, Z)$, то $TUS \in C$-MAP, где $C = \|TU\|\,\|S\|_{\mathrm{Dpl}}$.*

Доказательство. Снова, как и при доказательстве предыдущей теоремы, мы можем считать, что $C = \|T\|\,\|U\|\,\|S\|_{\mathrm{Dpl}}$. Вот диаграмма, которая соответствует приводимому ниже доказательству:

$$\begin{array}{ccccccccc} Y & \xrightarrow{U} & Z & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{\widetilde{v}} & X & \xrightarrow{S} & Y \\ & & & & & & \searrow^{\pi_X} & \nearrow^{S_0} & \\ & & & & & & & X^{**} & \end{array}$$

Диагр. 3

Мы будем следовать схеме доказательства предыдущей теоремы. Сейчас у нас $U \in \mathrm{AP}$ и, следовательно, U принадлежит подпространству $\mathrm{L}_0(Y, Z) \subset \mathrm{L}(Y, Z^{**})$ (мы сейчас отождествляем Z с $\pi_Z Z$), состоящему из операторов, приближающихся в топологии $\sigma\left(\mathrm{L}(Y, Z^{**}), Z^*\widehat{\otimes}_1 Y\right)$ конечномерными отображениями. Как и в доказательстве теоремы 5.3.1, мы получаем, что след $\mathrm{trace}\; U \circ \widetilde{u}$ корректно определен для всякого оператора $\widetilde{u} \in \mathrm{N}_1(Z, Y)$, порожденного элементом $u \in Z^*\widehat{\otimes}_1 Y$, и при этом $|\,\mathrm{trace}\; U \circ \widetilde{u}| \leqslant \|U\|\nu_1(\widetilde{u})$. В частности, если $v \in W^*\widehat{\otimes}_1 X$, то $\widetilde{T^* \otimes S)v} \in Z^*\widehat{\otimes}_1 Y$ и имеет смысл след $\mathrm{trace}\; U \circ (\widetilde{T^* \otimes S})v = \mathrm{trace}\; U \circ (T^* \otimes (S_0\pi_X) \circ v)$, где S_0 — дополнение оператора S в его втором сопряженном S^{**}.

Пусть $v = \sum w_k' \otimes x_k$ — представление v в пространстве $W^*\widehat{\otimes}_1 X$. Тогда

$$\mathrm{trace}\; U \circ (\widetilde{T^* \otimes S})v = \left|\sum \langle T^* w_k', US_0\pi_X x_k\rangle\right| \leqslant$$
$$\|U\|\,\nu_1\left(\sum T^* w_k' \otimes S_0\pi_X x_k\right) = \|U\|\,\nu_1\left(S_0\pi_X\widetilde{v}T\right) = \|U\|\,\nu_1\left((S_0\pi_X\widetilde{v})T\right).$$

Произведение BA оператора A типа $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$ и (строго) 1-интегрального оператора B является ядерным оператором, причем норма произведения не превосходит произведения соответствующих норм: $\nu_1(BA) \leqslant \|A\| i_1(B)$ (теорема 4.1.3). Поэтому

$$\operatorname{trace} U \circ (\widetilde{T^* \otimes S})v \leqslant \|U\| \, \|T\| \, i_1(S_0 \pi_X \widetilde{v}) \leqslant \\ \|U\| \, \|T\| \, \|S_0\| \, i_1(\pi_X \widetilde{v}) = \|U\| \, \|T\| \, \|S_0\| \, i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).$$

Таким образом, отображение $T^* \otimes S$ индуцирует оператор R из $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ в $\mathrm{N}_1(Z, Y)$, норма которого не превосходит $\|T\| \, \|S_0\|$ и такое, что для $\widetilde{v} \in \mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$

$$|\langle R^* U, \widetilde{v} \rangle| = |\langle U, R\widetilde{v} \rangle| = |\operatorname{trace} U \circ (S_0 \pi_X \widetilde{v} T)| \leqslant \|U\| \, \|T\| \, \|S_0\| \, i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).$$

Оператор U лежит в шаре радиуса $\|U\|$ пространства $\mathrm{L}_0(Y, Z^{**}) \subset \mathrm{L}(Y, Z^{**})$. Следовательно, образ U при отображении R^* лежит в шаре радиуса $\|U\| \, \|T\| \, \|S_0\|$ пространства $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)^*$. Так как $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ канонически изометрично подпространству $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, \pi_X X)$ пространства $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$, то $R^* U$ продолжается до функционала U_0 на $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$ без увеличения нормы. Пространство $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$ сопряжено к инъективному тензорному произведению $X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_\infty W$, и, следовательно, U_0 лежит в *-слабом замыкании шара радиуса $\|T\| \, \|S_0\| \, \|U\|$ пространства $X^* \otimes_\infty W$, что гарантирует равномерную на каждом компакте аппроксимацию оператора $TUS = TUS_0 \pi_X$ конечномерными операторами, нормы которых не превосходят $\|T\| \, \|U\| \, \|S_0\|$. ■

§6. Операторы RN и меры в сопряженных банаховых пространствах

1. Центральные результаты. Как обычно везде далее в этом параграфе X и Y — банаховы пространства. Напомним, что через $W(S)$ мы обозначаем совокупность всех мер Радона на топологическом пространстве S (см. 0.2.3).

Определение 6.1.1. Пусть F — банахово пространство, $K \subset F^*$ — $\sigma(F^*, F)$-борелевское множество и μ — мера Радона на K. Мера μ называется S-мерой, если существует последовательность сильных компактов $\{K_n\}_{n=1}^\infty$, $K_n \subset F^*$, такая, что $\mu\left(K \setminus \bigcup_{n=1}^\infty K_n\right) = 0$.

Замечание 6.1.1. Нетрудно видеть, что μ является S-мерой на K тогда и только тогда, когда μ единственным образом продолжается до меры Радона, заданной на сильно борелевских подмножествах множества K. Ясно, что само множество K является сильно борелевским в пространстве F^*. Таким образом, S-меры — это сужения мер Радона $\widetilde{\mu} \in W(F^*, \|\cdot\|)$ на σ-алгебру $\sigma(F^*, F)$-борелевских подмножеств пространства F^*.

Если каждая мера Радона $\mu \in W(K)$ является S-мерой, мы пишем $W(K) = W(K, \|\cdot\|)$ или, подробней, $W(K, \sigma(X^*, X)) = W(K, \|\cdot\|)$.

Теорема 6.1.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, K — единичный шар пространства Y^*, снабженный топологией $\sigma(Y^*,Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*,X^*)$;

2) *оператор T^* переводит всякую меру $\mu \in W(K)$ в S-меру на T^*K;*

3) *функция $f = T^*|_K : K \to X^*$, порожденная оператором T^*, универсально сильно измерима;*

4) *для всякого отделимого компакта Ω с мерой Радона μ_0 и для любой $\sigma(Y^*,Y)$-измеримой функции $\overline{g} : \Omega \to Y^*$ функция $T^*\,\overline{g} : \Omega \to X^*$ является сильно измеримой.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $T^* \in \mathrm{RN}$, D — единичный шар в X, $\mu \in W(K)$, $V : Y \to C(K)$ — каноническое изометрическое вложение, $R : C(K) \to L_1(K,\mu)$ — тождественное отображение. Рассмотрим оператор $U = RV : Y \to L_1(K,\mu.)$ Очевидно, образ единичного шара пространства Y при отображении U является порядково ограниченным множеством в $L_1(K,\mu)$. Следовательно, по теореме 2.1.5 найдется такая функция $\overline{f} \in L_1(K,\mu;X^*)$, что $UTx = \langle x,\overline{f}\rangle$ для $x \in X$. Так как $\overline{f}$ — сильно измеримая функция, то существуют такие компакты $K_n \subset K, n = 1,2,\ldots,$ что $\mu\left(K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$ и на каждом множестве K_n функция $\overline{f}$ непрерывна. Не умаляя общности, можно считать, что носитель меры $\mu|_{K_n}$ есть весь компакт K_n. Так как $|\langle x,\overline{g}\rangle| \leqslant \|\overline{f}\|$ для всех $x \in D$, то множество UTD совпадает на каждом компакте K_n с равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на K_n множестве A_n функций на $C(K_n)$, т. е. $(UTD)|_{K_n} = A_n$. Пусть $U_n = V_nV : Y \xrightarrow{V} C(K) \xrightarrow{V_n} C(K_n)$, где V_n — оператор сужения. Из предыдущих рассуждений видно, что $U_nTD = A_n$. Следовательно, оператор U_nT компактен. Так как $T^*U_n^*(D_{C^*}) \supset T^*(K_n)$, где D_{C^*} — единичный шар в $C^*(K_n)$, и $T^*(K_n)$ — $\sigma(X^*,X)$-замкнутое множество, то $T^*(K_n)$ — сильный компакт в X^*.

Рассмотрим меру $\nu = T^*\mu$ на T^*K : если множество $B \subset T^*K$ борелевское, то $\nu(B) = \mu(T^{*-1}(B))$. Очевидно, $\|\nu\| = \|\mu\|$. Пусть $B_n = T^*(K_n)$. Так как

$$\|\nu\| \geqslant \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(T^{*^{-1}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \|\mu\| = \|\nu\|,$$

то $\nu\left(T^*(K) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$. Таким образом, мера ν сосредоточена на множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = T^*(K_n)$ — сильный компакт в X^* для каждого $n = 1,2,\ldots$. Так как мера μ произвольна, то импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана.

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $\mu \in W(K)$. Нам надо показать, что функция $\overline{f} = T^*|_K : K \to X^*$ сильно измерима относительно μ. Пусть ν — образ меры μ при отображении T^*, т. е. $\nu(B) = \mu(\overline{f}^{-1}(B))$ для всех борелевских подмножеств $B \subset T^*(K)$. По условию, ν — S-мера, поэтому можно найти последовательность таких сильных компактов B_n в X^*, что $\nu\left(T^*(K) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$. Пусть $K_n = \overline{f}^{-1}(B_n)$. Так как отображение T^* непрерывно в *-слабых топологиях, то K_n — $\sigma(Y^*,Y)$-компакты для $n = 1,2,\ldots$. Очевидно, что меры μ сосредоточена на множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Далее, так как множество $\overline{f}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$ сильно сепарабельно, то функция $\overline{f}$ почти

сепарабельнозначна. Очевидно, что $\overline{f}$ — $\sigma(X^*, X)$-измерима. Нам осталось лишь показать, что $\|\overline{f}\|$ является измеримой функцией. Действительно, пусть $Z \subset X^*$ — сепарабельное пространство, содержащее $\overline{f}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$. Тогда существует сепарабельное подпространство X_0 в X такое, что Z изометрично вкладывается в X_0^* (см. [55], лемма А, с. 802). Так как $\|\overline{f}(k)\| = \sup_n |\langle \overline{f}(k), x_n\rangle|$, где $k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — плотная в единичном шаре пространства X_0 последовательность, то функция $\|\overline{f}\|$ является измеримой как супремум последовательности измеримых функций. Следовательно, функция $\|\overline{f}\|$ сильно измерима относительно μ.

3) $\implies$ 4). Пусть (Ω, μ_0) — компактное хаусдорфово пространство с конечной положительной мерой Радона μ_0, $\overline{g} : \Omega \to Y^*$ — $\sigma(Y^*, Y)$-измеримая функция. Предположим сначала, что $\|\overline{g}(\omega)\| \leqslant 1$, $\omega \in \Omega$.

Пусть $\mu \in W(K)$ — образ меры μ_0 при отображении $\overline{g}$. По условию, функция $\overline{f} = T^*|_K$ сильно измерима относительно μ. Пусть $\Omega_n \subset \Omega$ — возрастающая последовательность таких компактов, что функция $\overline{g}$ непрерывна на каждом Ω_n как отображение из Ω_n в K и $\mu_0\left(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = 0$. Используя сильную измеримость отображения $\overline{f}$, найдем такие компакты $\widetilde{K}_n \subset K$, $\widetilde{K}_n \subset \widetilde{K}_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, что отображение $\overline{f}|_{\widetilde{K}_n} : \widetilde{K}_n \to X^*$ непрерывно и $\mu\left(K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{K}_n\right) = 0$. Положим $K_p = \widetilde{K}_p \cap \overline{g}(\Omega_p)$ для $p = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что если $\sigma_p = \overline{g}^{-1}(K_p) \cap \Omega_p$, то σ_p для каждого $p = 1, 2, \ldots$ является компактным подмножеством пространства Ω, $\mu_0\left(\Omega \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} \sigma_p\right) = 0$ и $T^*\,\overline{g} : \Omega \to X^*$ — непрерывное на каждом из множеств σ_p отображение. Таким образом, $T^*\,\overline{g}$ — сильно измеримая функция.

Если функция $\|\overline{g}\|$ не ограничена, то доказательство импликации 3) $\implies$ 4) сводится к рассмотрению множеств $\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \leqslant n\}$, где $F = \sup\{|\langle \overline{g}, y\rangle| \mid \|y\| \leqslant 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$, и повторению предыдущих рассуждений.

4) $\implies$ 3) очевидно.

3) $\implies$ 1). Пусть Z — произвольное банахово пространство и $U \in \mathrm{I}(Y, Z)$. Покажем, что $UT \in \mathrm{N}(X, Z)$. Тогда по теореме 4.1.3 мы получим, что $T^* \in \mathrm{RN}$. Рассмотрим факторизацию оператора U :

$$Y \xrightarrow{\;R\;} C(K) \xrightarrow{\;j\;} L_1(K, \mu) \xrightarrow{\;V\;} Z,$$

где $\mu \in W(K)$, R — каноническое изометрическое вложение, j — тождественный оператор, V — непрерывное линейное отображение. Так как $(jR)y = \langle y, \cdot\rangle$, то $(jRT)x = \langle Tx, \cdot\rangle$. Пусть $k \in K$. Тогда, если $\overline{f} = T^*|_K : K \to X^*$, то

$$(jRT)x(k) = \langle Tx, k\rangle = \langle x, T^*k\rangle = \langle x, \overline{f}(k)\rangle.$$

По условию 3 функция $\overline{f}$ сильно измерима относительно μ. Остается только заметить, что $\|\overline{f}\| \leqslant \|T^*\| \cdot \mathbf{1} \in L_1(K, \mu)$ и $(jRT)x = \langle x, \overline{f}, \rangle$ т. е.[12] $jRt \in \mathrm{N}(X, L_1(K, \mu))$. Теорема доказана. ■

---

[12] Следуя А. Гротендику, мы отождествляем каноническим образом пространства $\mathrm{N}(X, L_1(K, \mu))$ и $L_1(K, \mu; X^*)$: по одной из его теорем в [80] $X^*\widehat{\otimes} L_1(K, \mu) = L_1(K, \mu; X^*)$, и так как $L_1(K, \mu)$ обладает свойством аппроксимации, то, снова по теореме из [80], $\mathrm{N}(X, L_1(K, \mu)) = X^*\widehat{\otimes} L_1(K, \mu)$.

Следствие 6.1.1. *Пусть K — единичный шар пространства X^* с $\sigma(X^*, X)$-топологией. Для того, чтобы пространство X^* обладало свойством* RN, *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1) *всякая мера $\mu \in W(K)$ является S-мерой;*

2) *тождественное отображение $j : K \to X^*$ универсально сильно измеримо;*

3) *для всякого отделимого компакта Ω с конечной положительной мерой Радона μ множество $\sigma(X^*, X)$-измеримых X^*-значных функций на Ω совпадает с множеством сильно измеримых X^*-значных функций.* ■

Следствие 6.1.2 Данфорд–Петтис [74]**.** *Всякое сепарабельное сопряженное пространство обладает свойством* RN . ■

Следствие 6.1.3. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*;)$

2) *оператор T^* переводит всякую меру $\mu \in W(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ в S-меру $T^*\mu$ на* $(X^*, \sigma(X^*, X);)$

2*a*) *для любой меры $\mu \in W(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ мера $T^*\mu$ единственным образом продолжается до меры $\nu \in W(X^*, \|\cdot\|)$;*

3) *отображение $T^* : (Y^*, \sigma(Y^*, Y)) \to X^*$ универсально сильно измеримо;*

4) *для всякого отделимого вполне регулярного топологического пространства Z с мерой Радона μ и для любой $\sigma(Y^*, Y)$-измеримой функции $\overline{g} : Z \to Y^*$ функция $T^* \overline{g} : Z \to X^*$ является сильно измеримой.* ■

Следствие 6.1.4. *Пространство X^* обладает свойством* RN *в том и только в том случае, когда выполнено равенство $W(X^*, \|\cdot\|) = W(X^*, \sigma(X^*, X))$.* ■

Замечание 6.1.2. Утверждение, сформулированное в последнем следствии, одновременно с автором было получено также Л. Шварцем [151] (см. также [147]).

2. Первые применения; немного об RN-множествах. Перед тем, как ввести в рассмотрение понятие RN-множества, вернемся ненадолго к геометрическим свойствам операторов Радона–Никодима (§1) и докажем обещанное в замечании 1.2 после следствия 1.1 утверждение. После этого мы обсудим свойства сопряженных операторов Радона–Никодима с одной метрико–топологической точки зрения. Затем мы перейдем к "локальному варианту" свойства Радона–Никодима.

Предложение 6.2.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$;*

2) *для каждого ограниченного множества $B \subset Y^*$ множество T^*B является заостренным.*

2) *для каждого ограниченного множества $B \subset Y^*$ множество T^*B является s-заостренным.*

2) *для каждого ограниченного множества $B \subset Y^*$ множество T^*B является f-заостренным.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает непосредственно из теоремы 1.1. Надо только вспомнить, что s-заостренность образа некоторого множества при любом линейном непрерывном отображении U влечет U-заостренность самого множества. То,что утверждения 2)–4) эквивалентны между собой, вытекает непосредственно из теоремы 1.1. Поэтому нам остается лишь доказать импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3).

Пусть $B \subset Y^*$ — ограниченное множество. Обозначим через Z замыкание множества TX в пространстве Y, а через K_1 и K_2 соответственно единичные шары в пространствах Y^* и Z^* со *-слабыми топологиями. Пусть $j : Z \to Y$ — тождественное вложение. Так как оператор $T_0^* : Z^* \to X^*$, где $T_0 \in \mathrm{L}(X, Z)$, $T_0 x = Tx$ для $x \in X$, взаимно однозначен, то для доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 3) достаточно показать, что $T_0^* \in \mathrm{RN}(Z^*, X^*)$ (см. следствие 1.1).Пусть $\mu \in C_+^*(K_2)$. Так как $j^*(K_1) = K_2$, то $C(K_2)$ естественным образом изометрично вкладывается в $C(K_1)$. Считая $C(K_2)$ подпространством пространства $C(K_1)$, продолжим функционал μ с $C(K_2)$ до линейного непрерывного положительного функционала μ_0 на $C(K_1)$ [14, стр. 344, 2.11]. Нетрудно видеть, что образ меры μ_0 при отображении $j^* : K_1 \to K_2$ совпадает с мерой μ. Так как $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$, то по теореме 6.1.1 мера $T^*(\mu_0) = T_0^*(j^*(\mu_0)) = T_0^*(\mu)$ сосредоточена на сильном σ-компакте пространства X^*. Применяя эту теорему 6.1.1 еще раз (в другую сторону), мы получаем, что оператор T_0^* есть оператор типа RN. ■

Введем в рассмотрение пространство операторов $U(X, Y)$.

Определение 6.2.1. Линейный оператор T принадлежит пространству $U(X, Y)$ тогда и только тогда, когда он непрерывен и для каждого сепарабельного подпространства $X_0 \subset X$ пространство $\overline{(T|_{X_0})^*(Y^*)} \subset X_0^*$ сепарабельно.

Следующая лемма дает простейшие примеры таких операторов.

Лемма 6.2.0. *Если T — слабо компактный оператор, то $T \in U(X, Y)$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что пространство X сепарабельно. Множество $T^*(D^\circ)$, где D — единичный шар в Y, слабо компактно в X^*. Следовательно, топологии $\sigma(X^*, X^{**})$ и $\sigma(X^*, X)$ совпадают на $T^*(D^\circ)$. Так как пространство X сепарабельно, то $T^*(D^\circ)$ является метризуемым слабо компактным множеством и, следовательно, это множество слабо, а значит, и сильно сепарабельно. ■

Теорема 6.2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) $T \in U(X, Y)$;
2) $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). По предложению 1.2 достаточно показать, что для всякого сепарабельного подпространства $X_0 \subset X$ оператор $(T|_{X_0})^*$ является оператором типа RN. Поэтому мы с самого начала можем предполагать, что пространство X сепарабельно. Тогда, по условию, пространство $\overline{T^*(Y^*)}$ также сепарабельно. По теореме 6.1.1 отсюда следует, что $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Без ограничения общности мы можем считать, что пространство X сепарабельно. Предположим, что T^*Y^* не является сепарабельным подмноже-

ством в X^*. Пусть K — единичный шар пространства Y^*, снабженный топологией $\sigma(Y^*,Y)$, $K_0 = T^*K \subset X^*$. Тогда K_0 — $\sigma(X^*,X)$-компактное множество, не являющееся сильно сепарабельным. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1/2$. По следствию 1 из теоремы 1 [153] существуют: а) подмножество $\Delta_0 \subset K_0$, гомеоморфное канторову множеству в топологии $\sigma(X^*,X)$; б) система функций $\{h_{n,i}\}_{n=0,i=0}^{\infty,2^n-1} \subset C(\Delta_0)$, каждая из которых является характеристической функцией некоторого открытого и замкнутого множества $A_{n,i}$, причем $A_{0,0} = \Delta_0$, $A_{n,i} \neq \emptyset$ для всех $n = 0,1,\ldots$, $i = 0,1,\ldots,2^n-1$, $\Delta_0 = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} A_{n,i}$ для каждого $n = 0,1,\ldots$, множества $A_{n,i}$ при фиксированном n и при $i = 0,1,\ldots,2^n-1$ попарно не пересекаются и для любых индексов $0 \le i_n \le 2^n-1$ пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n,i_n}$ либо пусто, либо состоит в точности из одной точки; в) последовательность $\{x_{n,i}\}_{n=0,i=0}^{\infty,2^n-1} \subset X$ и постоянная $C > 0$ такие, что $\|x_{n,i}\| \le C$ для всех $n = 0,1,\ldots$, $i = 0,1,\ldots 2^n-1$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2^n-1} \|jx_{n,i} - h_{n,i}\| < \varepsilon$, где $j : X \to C(\Delta_0)$ — каноническое отображение, $jx(t) = \langle x,t\rangle$ для $t \in \Delta_0$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta_0 = \left\{ z \in \Delta_0 \mid z = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n,i_n}, 0 \le i_n \le 2^n - 1 \right\}.$$

Пусть $z, y \in \Delta_0$, $z \neq y$. Тогда существуют такие индексы n_0 и i_0, $0 \le i_0 \le 2^{n_0} - 1$, что $z \in A_{n_0,i_0}$, $y \notin A_{n_0,i_0}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|z-y\| \ge C^{-1}|\langle z-y, x_{n_0,i_0}\rangle| = \\
&= C^{-1}\left|(jx_{n_0,i_0})(z) - (jx_{n_0,i_0})(y) - h_{n_0,i_0}(z) + h_{n_0,i_0}(y) + h_{n_0,i_0}(z)\right| \ge \\
&\ge C^{-1}\left|h_{n_0,i_0}(z)\right| - C^{-1}\left|(jx_{n_0,i_0} - h_{n_0,i_0})(z) - (jx_{n_0,i_0} - h_{n_0,i_0})(y)\right| \ge \\
&\ge C^{-1}\left(1 - 2\left\|jx_{n_0,i_0} - h_{n_0,i_0}\right\|\right) \ge C^{-1}(1-2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Таким образом, для любых $z, y \in \Delta_0$, $z \neq y$, выполняется неравенство $\|z-y\| \ge a$, где $a = \frac{1-2\varepsilon}{C}$ не зависит от z и y.

Пусть $\mu \in C_+^*(\Delta_0)$ — не чисто атомическая мера, $\Delta = (T^*)^{-1}(\Delta_0) \cap K, U : C(\Delta_0) \to C(\Delta)$ — естественное изометрическое вложение, т.е. $(Uf)(t) = f(T^*t)$ для $t \in \Delta$. Рассматривая μ как линейный непрерывный функционал на подпространстве $U(C(\Delta_0)) \subset C(\Delta)$, продолжим его с $U(C(\Delta_0))$ на все пространство $C(\Delta)$ с сохранением нормы и положительности [14, стр. 344] и обозначим полученный функционал через μ_0. Пусть $\Phi : \Delta \to \Delta_0$ — непрерывное отображение, индуцированное оператором T^*, и $\nu \in C_+^*(\Delta_0)$ — образ меры μ_0 при отображении Φ. Если $f \in C(\Delta_0)$, то

$$\langle \nu, f\rangle = \int_{\Delta_0} f(s)\,d\nu(s) = \int_{\Delta} (f\Phi)(t)\,d\mu_0(t) = \int_{\Delta} (Uf)(t)\,d\mu_0(t) = \langle f, \mu\rangle,$$

т. е. $\nu = \mu$.

Из всего сказанного мы можем заключить, что на K существует положительная конечная мера Радона, образом которой при отображении T^* является мера Радона, не сосредоточенная на сепарабельном подмножестве пространства X^*. По теореме 6.1.1 оператор T^* не может быть оператором типа RN. Полученное противоречие доказывает импликацию 2) $\implies$ 1). ■

Теперь мы можем привести еще одно доказательство (вероятно, более простое, чем в параграфе 1 утверждения следствия 1.2. Конечно же это доказательство не будет зависеть от результатов из §1.

Предложение 6.2.2. *Всякий слабо компактный оператор является оператором типа* RN.

Доказательство. Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ — слабо компактный оператор, Тогда оператор T^* также является слабо компактным и, следовательно, принадлежит пространству $U(Y^*, X^*)$ по лемме 6.2.0. Применяя теперь теорему 6.2.2 (к оператору T^*) и лемму 1.2, мы получаем, что $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$. ■

Как уже упоминалось, в работах [108] и [164] показано, что всякое слабо компактное множество в банаховом пространстве является заостренным. Мы сейчас приведем другое доказательство этого утверждения, существенно отличающееся от доказательств, приведенных в [108] и [164].

Следствие 6.2.1. *Всякое относительно слабо компактное множество в банаховом пространстве является заостренным.*

Доказательство. Пусть $B \subset X$ — относительно слабо компактное подмножество пространства X, A — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества B, X_A — банахово пространство с единичным шаром A, $T : X_A \to X$ — каноническое отображение. Тогда T — есть взаимно однозначный оператор типа RN (предложение 6.2.2) и, следовательно, множество A является наследственно s-заостренным (следствие 1.1) в X. А последнее для A равносильно, как мы знаем, его наследственной заостренности (теорема 1.2). ■

Мы завершим этот параграф небольшим отступлением к результатам из §3. Именно, как отмечалось в замечании 3.3.1, условия теоремы 3.3.1 не гарантируют принадлежность оператора T^* для $T \in \mathrm{L}(X, L_\infty(\mu))$ классу RN. Сейчас мы достигли того уровня, на котором уже имеется возможность привести соответствующие достаточные (и необходимые) условия в терминах интегральных представлений операторов T из X в $L_\infty(\mu)$ для справедливости включения $T^* \in \mathrm{RN}$. Это будет совместное следствие теорем 3.3.1 и 6.1.1. Чтобы сформулировать это следствие, нам понадобится такое определение. Будем говорить, что *-слабо компактное множество $A \subset X^*$ *является* RN-*множеством*, если всякая конечная мера Радона на $(A, \sigma(X^*, X))$ сосредоточена на объединении счетного числа компактов из X^*. Если множество A абсолютно выпукло, то в силу теоремы 6.1.1 это определение означает, что каноническое отображение $X_A^* \to X^*$ является оператором типа RN. В общем случае нетрудно показать (см. лемму 6.2.1), что A является

RN-множеством тогда и только тогда, когда RN-множеством является и его абсолютно выпуклая $\sigma(X^*, X)$-замкнутая оболочка $\overline{\Gamma(A)}^*$. Поэтому приведенное здесь определение RN-множества для частного случая сопряженных пространств равносильно определению RN-множества из [34] (см. также замечание 1.3).

Лемма 6.2.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $K \subset D(X^*)$ — $\sigma(Y^*, Y)$-компактное множество, $\sigma(Y^*, Y)$-замкнутая абсолютно выпуклая оболочка которого совпадает с $D(Y^*)$. Эквивалентны условия:*

1) *T^* есть оператор типа* RN;

2) *образ любой меры Радона $\mu \in C_+^*(K)$ при отображении T^* является мерой Радона на $(X^*, \|\cdot\|)$.*

В частности, если $A \subset X^*$ — $\sigma(X^*, X)$-компактное RN-*множество, то* RN-*множеством является и $\sigma(X^*, X)$-замкнутая абсолютно выпуклая оболочка $\overline{\Gamma(A)}^*$ множества A.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) по теореме 6.1.1. Пусть оператор T удовлетворяет условию 2) и пусть $U : Y \to Z$ — произвольное интегральное отображение (Z — банахово пространство), т. е. отображение, допускающее факторизацию вида

$$Y \xrightarrow{V_1} L_\infty(\nu) \xrightarrow{i} L_1(\nu) \xrightarrow{V_2} Z,$$

где ν — конечная мера, $V_1 \in \mathrm{L}(Y, L_\infty(\nu)), V_2 \in \mathrm{L}(L_1(\nu), Z), i$ — тождественное вложение. Обозначим через R каноническое изометрическое вложение $Ry = \langle y . \cdot \rangle$ пространства Y в $C(K)$. Пусть $V : C(K) \to L_\infty(\nu)$ — продолжение оператора V_1 с сохранением нормы. Тогда (см. [121]) отображение $V_2 i V$ факторизуется следующим образом:

$$C(K) \xrightarrow{j} L_1(\mu) \xrightarrow{W} Z$$

(здесь $\mu \in C_+^*(K,)\ j$ — тождественное вложение, $W \in \mathrm{L}(L_1(\mu), Z)$). Следовательно, $UT = WjRT$. Для $x \in X$ мы имеем $jRTx = \langle Tx, \cdot \rangle \in L_1(\mu)$. Полагая $\overline{g}(k) = T^* k$ для $k \in K$, мы отсюда получаем, что $jRTx = \langle x, \overline{g} \rangle$, причем функция $\overline{g} : K \to X^*$ является μ-измеримой в силу условия 2). Поэтому отображение $jRT : X \to L_1(\mu)$ ядерно, и значит ядерно и отображение UT. Воспользовавшись теперь теоремой 4.1.3, мы приходим к выводу, что T^* — оператор типа RN.

Если $A \subset X^*$ — $\sigma(X^*, X)$-компактное RN-множество, то применяя импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1) к каноническому оператору

$$\Phi = T^* : X^*_{\overline{\Gamma(A)}^*} \to X^*,$$

мы заключаем, что Φ есть оператор типа RN и, следовательно, по теореме 6.1.1 $\overline{\Gamma(A)}^*$ — RN-множество. ∎

Следствие 6.2.2. *Пусть* $T \in \mathrm{L}(X, L_\infty(\mu))$. *Отображение* T^* *является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда существует такая* μ*-измеримая функция* $\overline{g} : \Omega \to X^*$, *что* $\|\overline{g}(t)\| \leqslant \|T\|$ *для всех* $t \in \Omega$, $Tx = \langle x, \overline{g} \rangle$ *для всех* $x \in X$ *и* $\sigma(X^*, X)$*-замыкание множества* $\overline{g}(\Omega)$ *является* RN*-множеством в* X^*.

Доказательство. Необходимость существования функции $\overline{g}$ с указанными свойствами вытекает непосредственно из теоремы 3.3.1 и теоремы 6.1.1.

Достаточность. Из условия и из теоремы 3.1.1 мы получаем, что отображение T^*j есть оператор типа RN (j — каноническое вложение $L_1(\mu) \to L_\infty(\mu)^*$). По теореме 3.3.1 можно считать, что

$$\overline{\Gamma(\overline{g}(\Omega))}^* = T^*(D(L_\infty(\mu)^*)).$$

Поэтому $T^*(D(L_\infty(\mu)^*))$ является RN-множеством (лемма 6.2.1). Из теоремы 6.1.1 теперь вытекает, что T^* есть оператор типа RN. ■

§7. RN-множества в сопряженных пространствах.

Для каждого нетривиального идеала операторов J в банаховых пространствах возникает своя теория "операторов типа J", иначе говоря, "теория идеала J". И одним из наиболее интересных вопросов в такого рода теории является вопрос: всякий ли оператор из J факторизуется через банахово пространство, тождественное отображение в котором принадлежит идеалу J? Не тема этой работы подробно обсуждать варианты решений в зависимости от свойств идеала J или для множества конкретных операторных идеалов. Приведем лишь одну, ставшую теперь классической, теорему [66]: любой слабо компактный оператор факторизуется через рефлексивное банахово пространство.

В связи с тематикой, которая сейчас обсуждается нами в этих параграфах (теория операторов типа RN) наше внимание привлекает вопрос:

Всякий ли оператор типа RN факторизуется через банахово пространство, обладающее свойством RN?

Эта проблема интересовала как автора этой работы, так и, например, французского математика Б.Бозами, немецкого математика С.Хейнриха и других. Для частного случая сопряженных операторов типа RN положительное решение этой проблемы получили, в частности, независимо друг от друга (и разными методами) С.Хейнрих [84] и автор [34, 36].

Ниже мы приводим короткое доказательство возможности факторизации сопряженного оператора типа RN.

В качестве одного из самых простых определений (эквивалентных соответствующему определению 1.1 из §1) операторов типа RN таково: линейное непрерывное отображение T из банахова пространства X в банахово пространство Y называется оператором типа RN, если для любого пространства $L_1(\mu)$ и всякого $U \in \mathrm{L}(L_1\mu, X)$ отображение TU факторизуется через некоторое пространство $l_1(\Gamma)$ (см. следствие 2.1.2 и теорему 3.1.1). Таким образом из этого определения уже следует, что всякий оператор типа RN, действующий из $L_1(\mu)$, факторизуется через банахово пространство со свойством RN. Другой обширный класс операторов типа RN, факторизующихся подобным образом, представляет собой класс слабо компактных операторов — эти отображения допускают факторизацию даже через рефлексивные пространства (это уже отмечалось выше). В частности, всякий оператор $T \in \mathrm{RN}(C(K), Y)$ факторизуется через пространство со свойством RN, так как любой такой T удовлетворяет условию леммы 0.4.1.1 и, следовательно, слабо компактен. Однако в самом общем случае произвольных X и Y уже трудно сказать что–либо определенное насчет возможности такой факторизации и вопрос, в каких случаях каждый $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$ можно профакторизовать через Z со свойством RN, труден (какие условия, накладываемые на пространства X, Y достаточны для положительного ответа?) Однако, ответ на данную задачу в самой общей постановке отрицателен; это установлено в [77][13].

Одна из задач в этом параграфе — показать как без существенных усилий этот вопрос решается положительно для сопряженных операторов типа RN . Наше доказательство основывается на факторизационной технике Дэйвиса–Фигеля–Джонсона–Пелчинского [66], теореме 7 из [29] (нашей теореме 6.1.1), лемме А. В. Бухвалова [9, лемма 1] и следующем утверждении, которое является непосредственным следствием теоремы 6.2.2.

Предложение 7.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если T^{**} — взаимно-однозначное отображение (эквивалентно, $T^*(Y^*)$ — плотное в X^* множество) и T^* — оператор типа* RN, *то X^* обладает свойством* RN .

Доказательство. Если $X_0 \subset X$ — сепарабельное подпространство, то множество $(T|_{X_0})^*(Y^*)$ сепарабельно по теореме 6.2.2 и плотно по норме в X_0^*. Следовательно, пространство X_0^* сепарабельно. Поэтому оно обладает свойством RN . Поэтому (например, по той же теореме, примененной к тождественному оператору в X) пространство X^* обладает свойством RN . ■

Теорема 7.1. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $T^* \in \mathrm{RN}(Y^*, X^*)$. Тогда существуют такие банахово пространство Z и операторы $U \in \mathrm{L}(X, Z), V \in \mathrm{L}(Z, Y)$, что Z^* обладает свойством* RN *и $T = VU$. Кроме того, если множество $T(X)$ сепарабельно в Y, то и Z^* — сепарабельное пространство.*

Доказательство. Поскольку ассоциированное с T отображение $\widetilde{T} : X/T^{-1}(0) \to \overline{T(X)}$ имеет сопряженным оператор типа RN (например, по теореме 6.1.1) то, не умаляя общности, мы можем предполагать, что оператор T взаимно однозначен и действует на плотное в Y множество. В частности, отображение T^* взаимно однозначно. Для множества $T^*(D) \subset X^*$, где D — единичный шар в Y^*, построим, следуя схеме работы [66], банахово пространство W. Из основной леммы работы [66] и построения W мы заключаем, что $W = Z^*$ и естественные отображения $Y^* \to W$ и $W \to X^*$ сопряжены к некоторым операторам $V \in \mathrm{L}(Z, Y)$ и

[13]Там показано вот что. *Для каждого $1 \leqslant p < \infty$ существуют банахова решетка X_p и решеточный гомоморфизм T_p из X_p на c_0, который удовлетворяет условиям: (1) T_p не сохраняет изоморфной копии c_0. (2) T_p оператор Радона–Никодима. (3) T_1 переводит слабые последовательности Коши в сходящиеся по норме. (4) Если T_p записан в виде произведения двух операторов, то один из них сохраняет копию c_0.*

$U \in \mathrm{L}(X, Z)$, причем $T = VU$; кроме того, множество $V^*(Y^*)$ плотно в Z^*. По лемме 1 из [9], отображение $U^*|_{V^*(D)}$ есть гомеоморфизм в нормированных топологиях пространств Z^* и X^*, что вместе с теоремой 6.1.1 показывает, что V^* есть оператор типа RN . Из предложения 7.1 теперь следует, что Z^* обладает свойством RN . Второе утверждение теоремы вытекает из теоремы 6.2.2. ■

Для дальнейшего напомним определение из предыдущего параграфа: *-слабо компактное множество $K \subset X^*$ называется RN-*множеством,* если всякая мера Радона на K есть мера Радона на $(K, \|\cdot\|)$. В силу теоремы 6.1.1 и следствия 1.3 для абсолютно выпуклых K это эквивалентно также тому, что всякое подмножество в K является s-заостренным. Можно показать, что то же справедливо и для произвольных выпуклых K. Однако, в общем случае не всякий наследственно s-заостренный *-слабый компакт K в X^* будет RN-множеством (хотя обратное всегда справедливо, что вытекает из теоремы 7.2). Чтобы показать это, рассмотрим в пространстве $C^*[0,1]$ *-слабо компактное множество $K = \{\delta_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$, эквивалентное в нормированной топологии естественному базису в $l_1(\Gamma)$ для несчетного Γ. Так как $l_1(\Gamma)$ обладает свойством RN, то любое его ограниченное подмножество будет заостренным; в частности, множество K будет наследственно заостренным в $C^*[0,1]$. С другой стороны, канонический образ лебеговской меры на K не является мерой Радона на $(K, \|\cdot\|)$.

Приведем общую теорему, в которой собран обширный список свойств RN-множеств (интересный весьма частный случай рассмотрен в [13]). Дополнения к этому списку появятся у нас в следующем параграфе после детального изучения свойств универсально измеримых отображений (мы получим результаты, интересные сами по себе).

Теорема 7.2. *Пусть K — *-слабо компактное множество в X^* и $B = \overline{\mathrm{co}}^*(K)$ — его *-слабо замкнутая выпуклая оболочка. Рассмотрим следующие утверждения:*

1) *B есть* RN-*множество;*

2) *K есть* RN-*множество;*

3) *множество K гомеоморфно как в *-слабых, так и в нормированных топологиях некоторому множеству из сопряженного банахова пространства со свойством* RN;

4) *каждое *-слабо замкнутое выпуклое подмножество B_0 множества B есть *-слабо замкнутая выпуклая оболочка своих *-слабо острых точек (т.е. таких точек $z \in B_0$, что $z \notin \overline{\mathrm{co}}^*(B_0 \setminus D_\varepsilon(z))$ для любого $\varepsilon > 0$, где $D_\varepsilon(z) = \{y : \|y - z\| \leqslant \varepsilon\}$);*

5) *каждое подмножество $B_0 \subset B$ является *-слабо заостренным, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $z \in B_0$, что $z \notin \overline{\mathrm{co}}^*(B_0 \setminus D_\varepsilon(z))$;*

6) *каждое подмножество $B_0 \subset B$ является заостренным, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $z \in B_0$, что $z \notin \overline{\mathrm{co}}(B_0 \setminus D_\varepsilon(z))$;*

7) *для любых $B_0 \subset B$ и $\varepsilon > 0$ существует такой $z \in B_0$, что $z \notin \mathrm{co}(B_0 \setminus D_\varepsilon(z))$;*

8) *существует такое* RN-*множество $L \subset X^*$, что $K \subset \overline{\mathrm{span}}(L)$;*

9) *множество K наследственно *-слабо заостренное;*

10) *множество K гомеоморфно как в *-слабых, так и в нормированных топологиях некоторому множеству из сепарабельного сопряженного банахова пространства.*

Утверждения 1) – 8) равносильны между собой и, если всякое сепарабельное подмножество компакта K метризуемо в индуцированной топологии, то равносильны утверждению 9). Если сам компакт K метризуем, то все утверждения эквивалентны между собой.

Доказательство. Тривиальны импликации $1) \implies 2), 4) \implies 5) \implies 6) \implies 7)$, $2) \implies 8)$, $5) \implies 9)$ и $10) \implies 2)$. Из теоремы 7.1 (с использованием леммы 1 [9]) мы получаем, что $2) \implies 3)$ и, если компакт K метризуем, $2) \implies 10)$. Таким образом, осталось лишь установить справедливость импликаций $3) \implies 4), 7) \implies 1)$, $8) \implies 2)$ и (в случае, когда сепарабельные подмножества в K метризуемы) импликации $9) \implies 2)$. Что касается первой из них (т. е. $3) \implies 4)$), то она вытекает из такого полученного Ч. Стигалом факта: если Z^* обладает свойством RN, то Z — пространство Асплунда[14] (см. [71], замечания к главе 7); таким образом, если Z^* обладает свойством RN, то всякое *-слабо компактное выпуклое множество в Z^* совпадает с *-слабо замкнутой выпуклой оболочкой своих $\sigma(Z^*, Z)$-сильно достижимых (и тем более *-слабо острых) точек (см. там же, либо [110]).[15]

Если множество B не является RN-множеством, то канонический оператор $\Phi_B : X^*_{\overline{\Gamma(B)}^*} \to X^*$ не принадлежит классу RN и, следовательно, найдется такое сепарабельное подпространство $X_0 \subset X$, что множество $\overline{\Gamma(B)}^*|_{X_0}$ не сепарабельно в X_0^* (теорема 6.2.2). Так как $\overline{\Gamma(B)}^* = \mathrm{co}(B \cup (-B))$, то несепарабельно и множество $B|_{X_0}$. Поэтому в $B|_{X_0}$ содержится гомеоморфный канторову множеству *-слабый компакт M_0, состоящий из изолированных в нормированной топологии точек (более того, этот компакт можно выбрать таким образом, что в X_0 существует ограниченная последовательность элементов x_i $(i = 1, 2, \dots)$, равномерно близких к характеристическим функциям χ_{A_i} канонической системы открыто–замкнутых множеств A_i канторова дисконтинуума M_0; см [153, теорема 1 и следствие 1]). Пусть $M = (\Phi)^{-1}(M_0) \cap B$ и μ — такая мера Радона на компакте M, что $\Phi_B(\mu)$ — стандартная мера–произведение на канторовом множестве $M_0 = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Положим

$$B_0 = \{x_i' \in X^* : x_i' = \int_{\Phi^{-1}(A_i)} x' \, d\mu(x') \cdot \mu(\Phi^{-1}(A_i))^{-1}\}.$$

В силу выпуклости и *-слабой компактности B множество B_0 лежит в B. С другой стороны, так как элементы $x_i \in X_0 \subset X$ ведут себя как характеристические

[14] Банахово пространство Y называется *пространством Асплунда,* если каждая непрерывная вещественнозначная выпуклая функция, заданная на открытом подмножестве пространства Y, дифференцируема по Фреше на плотном G_δ-подмножестве своей области определения. Сам Асплунд называл такие пространства "Strong Differtiability Spaces".

[15] Точка $x' \in B$ называется X-сильно достижимой, если существует $x \in X$ такой, что $\langle x', x \rangle$ есть супремум x на B и из сходимости $\langle x_n', x \rangle \to \langle x', x \rangle$, где $\{x_n'\} \subset B$, вытекает сходимость x_n' к x' по норме.

функции множеств A_i, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для каждого $x'_n \in B_0$ существуют x'_m и $x'k \in B_0$, для которых $x'_n = 1/2(x'_m + x'_k)$ и $\|x'_m - x'_n\| > \varepsilon$ и $\|x'_k - x'_n\| > \varepsilon$. Таким образом, если B не является RN-множеством, то утверждение 7) не может иметь места.

Для доказательства импликаций 8) $\Longrightarrow$ 2) и 9) $\Longrightarrow$ 2) предположим, что K — не RN-множество в X^*. Тогда существует такое сепарабельное подпространство $X_0 \subset X$, что множество $K|_{X_0}$ несепарабельно в X_0^* (теорема 6.2.2 и лемма 6.2.1). Теперь, если верно 8), то $K|_{X_0} \subset \overline{\mathrm{span}}(L|_{X_0})$ и, значит, множество $L|_{X_0}$ несепарабельно в X_0^*, т.е. L не может быть RN-множеством в X^*. Если же имеет место утверждение 9), то в K, очевидно, нет подмножества, *-слабо гомеоморфного канторову множеству и состоящего из изолированных в нормированной топологии точек. Однако мы придем к противоречию с этим фактом, если предположим, что *-слабо сепарабельные подмножества в K *-слабо метризуемы. Действительно, в $K|_{X_0}$ возьмем гомеоморфный канторову дисконтинууму *-слабый компакт M_0, состоящий из изолированных в X_0^* точек, и пусть M — такое *-слабо метризуемое компактное подмножество в K, что $\Phi_B(M) = M_0$. Тогда в M можно выбрать *-слабо замкнутое подмножество K_0, на котором Φ_B будет инъективным, такое, что $\Phi(K_0) = M_0$. ■

Отметим простые следствия из теоремы 7.2.

Следствие 7.1. *Если K — *-слабо компактное множество в X^*, то $\overline{\Gamma(K)}^*$ обладает свойствами* 1) – 8) *из теоремы* 7.2, *где вместо K или B рассматривается* $\overline{\Gamma(K)}^*$. ■

Следствие 7.2. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если существует такое *-слабо компактное* RN-*множество $L \subset X^*$, что $T^*(Y^*) \subset \overline{\mathrm{span}}(L,)$ то T^* — оператор типа* RN. *В частности, если U — такой оператор из X, что $U^* \in$* RN *и $T^*(Y^*)$ лежит в образе U^*, то T^* —оператор типа* RN. ■

Следствие 7.3. *Если существует такое *-слабо компактное* RN-*множество $L \subset X^*$, что $X^* \subset \overline{\mathrm{span}}(L,)$ то $X^* \in$* RN. ■

Следствие 7.4. *Оператор T^* является оператором типа* RN *тогда и только тогда, когда он переводит *-слабые компакты в *-слабо заостренные множества из X^*.* ■

Замечания 7.1. 1). Ясно, что все сказанное выше остается справедливым (при соответствующей модификации формулировок), если K — такое множество в произвольном банаховом пространстве Z, что существует нормирующее $Z' \subset Z^*$, для которого как K, так и его $\sigma(Z, Z')$-замкнутая абсолютно выпуклая оболочка являются компактами в топологии $\sigma(Z, Z'.)$

2). Отказаться от требования метризуемости сепарабельных подмножеств компакта K в импликации 9) $\Longrightarrow$ 2) можно (это будет установлено в следующем параграфе, когда мы разовьем соответствующую технику).

3). Естествен вопрос: если K не является RN-множеством, то содержит ли K гомеоморфный канторову дисконтинууму *-слабый компакт, состоящий из изолированных в нормированной топологии точек? Ответ отрицателен. Приведем пример. Шар пространства $(l_\infty)^*$ не является RN-множеством, но не содержит гомеоморфный канторову дисконтинууму *-слабый компакт, несепарабельный по норме. Это вытекает из того, что всякое *-слабо метризуемое компактное множество в $(l_\infty)^*$ слабо компактно (так как l_∞ есть пространство Гротендика[16]).

4). Эквивалентность 6) $\iff$ 7) справедлива для любого замкнутого выпуклого множества B в произвольном банаховом пространстве, и это уже было доказано в §1.

§8. Об универсальной измеримости с применением к теории RN-множеств

Напомним (см. формулировку теоремы 7.2), что ограниченное множество A в сопряженном банаховом пространстве X^* называется w^*-заостренным (w^*-dentable), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует точка $a \in A$, не принадлежащая w^*-замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\text{co}}^*(B)$ множества $B = A \setminus D(\varepsilon; a)$, где $D(\varepsilon; a)$ — шар радиуса ε с центром в a. В предыдущем параграфе установлен, в частности, такой факт:

а) *для w^*-компакта K в X^* эквивалентны утверждения:*

1) *всякая вероятность Радона на $(K, \sigma(X^*, X))$ сосредоточена на сильном σ-компакте из X^*;*

2) *всякое w^*-компактное подмножество множества $\overline{\text{co}}^*(K)$ является w^*-заостренным.*

Напомним также, что w^*-компакт K является RN-множеством, если для него верно утверждение 1). Таким образом, из а) вытекает, что если K — RN-множество в X, то

3) *всякое w^*-замкнутое его подмножество является w^*-заостренным;*

4) *множество $\overline{\text{co}}^*(K)$ также есть RN-множество.*

Импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1) мы доказали лишь для таких w^*-компактов K, в которых все сепарабельные подмножества метризуемы (это довольно сильное ограничение на K). Вопрос о том, верна ли импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) для произвольных w^*-компактов в сопряженных пространствах остался пока, таким образом, открытым. Этот вопрос интересен также ввиду следующих обстоятельств. Как мы видели выше, утверждение 1) равносильно тому, что всякое подмножество в $\overline{\text{co}}^*(K)$ является заостренным. С другой стороны, мы привели пример, показывающий, что w^*-компакт K не обязан быть RN-множеством, даже если все его подмножества — заостренные.

В этом параграфе рассматривается следующий класс $\mathcal{D}$ отображений со значениями в метрических пространствах. Пусть S — отделимое топологическое

---

[16] Банахово пространство X есть пространство Гротендика, если *-слабая и слабая сходимости последовательностей в X^* — одно и то же. См., например, на с. 150 книгу *J.Diestel, Geometry of Banach spaces, Lecture Notes in Math. 485, Berlin-Hiedelberg-New York 1975.*

пространство. Обозначим через $\mathcal{D}(S,R)$ совокупность всех отображений из S в R, обладающих следующим свойством: (ω) для любого компакта $S_0 \subset S$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое открытое (в индуцированной топологии) множество V в S_0, что колебание $\omega(f;V)$ R-значной функции f на V меньше, чем ε (здесь $\omega(F;V) = \sup_{s,t\in V} \rho(f(s), f(t))$, где ρ — метрика на R).

Основной в параграфе является

Теорема 8.1. *Если S — отделимое топологическое пространство, а R — метрическое пространство, то всякое отображение из $\mathcal{D}(S,R)$ универсально измеримо.*

Напомним, что отображение f из S в R универсально измеримо, если оно измеримо по Лузину относительно каждой конечной положительной меры Радона на S.

Ниже будет показано, что простым следствием теоремы 8.1 является импликация 3) $\implies$ 1) для произвольного w^*-компакта в сопряженном банаховом пространстве.

1. Характеризация универсально измеримых отображений. Теорема 8.1 вытекает из из формулируемой ниже теоремы 8.1.1, которая дает интересную характеристику универсально измеримых отображений. В свою очередь, теорема 8.1.1 является непосредственным следствием более общей теоремы 8.1.2. Последняя представляет собой, в некотором смысле, аналог известной теоремы Бэра о характеризации бэровских функций 1 класса. Для формулировки этих теорем понадобятся некоторые определения и обозначения. Всюду далее S — произвольное отделимое топологическое пространство, а R — метрическое пространство с метрикой ρ. Через $W(S)$ мы обозначаем множество всех конечных положительных мер Радона на S.

Пусть f — отображение из S в R, $\mu \in W(S), A \subset S$ и $q \in S$. Положим

$$\omega_\mu(f;A) = \inf\{\sup\{\rho(f(s), f(t)) \mid s,t \in A \setminus N\} \,|\mu(N) = 0\},$$

$$\omega_\mu(f;q) = \inf\{\omega_\mu(f;B) \mid q \in B \subset S, B \text{ — борелевское}, \mu(B) > 0\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_\mu(S,R)$ совокупность всех отображений f из S в R, обладающих свойством

(ω_μ) для любого компакта $S_0 \subset S$, $\mu(S_0) > 0$, и для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое борелевское множество $V \subset S$, что $\mu(V \cap S_0) > 0$ и $\omega_\mu(f; V \cap S_0) < \varepsilon$.

Нетрудно проверить, что $(\omega) \implies (\omega_\mu)$ и, следовательно, $\mathcal{D}(S,R) \subset \mathcal{D}_\mu(S,R)$.

Теорема 8.1.1. *Для отображения f из S в R равносильны утверждения:*

1) *отображение f — универсально измеримо*;

2) $f \in \bigcap_{\mu\in W(S)} \mathcal{D}_\mu(S,R)$.

Теорема 8.1.2. *Пусть f — отображение из S в R и $\mu \in W(S)$. Эквивалентны утверждения:*

1) *отображение f — μ-измеримо;*
2) $f \in \mathcal{D}_\mu(S, R)$;
3) *для всякого компакта $Q \subset S$*[17]

$$\mu_*\{t \in Q \mid \omega_\mu(f|_Q; t) = 0\} = \mu(Q).$$

Замечание 8.1.1. Утверждение 3) теоремы 8.1.2 означает, что если Q — компакт в S, то существует такой σ-компакт P в Q, что $\mu(Q \setminus P) = 0$ и для любой точки $t \in P$ $\omega_\mu(f|_Q; t) = 0$. Таким образом, получаем, что отображение $f : S \to R$ измеримо тогда и только тогда, когда колебание (относительно меры μ) $\omega_\mu(f|_Q; t)$ его сужения на произвольное компактное множество Q равно нулю почти во всех точках t этого компакта Q.

Доказательство теоремы 8.1.2. Импликация 3) $\implies$ 2) очевидна. Если отображение f μ-измеримо, то найдутся такие компакты K_n $(n = 1, 2, \dots)$, что $K_n = \mathrm{supp}(\mu|K_n)$, $\mu(S \setminus \cup K_n) = 0$ и сужение $f|_{K_n}$ — непрерывно. В каждой точке t множества K_n колебание функции $f|_{K_n}$ равно нулю, причем для всякой окрестности $V = V(t)$ $\mu(V \cap K_n) > 0$. Отсюда вытекает, что $\omega_\mu(f|_Q; t) = 0$. Таким образом, 1) $\implies$ 3). Пусть, наконец, $f \in \mathcal{D}_\mu(S, R)$, где $\mu \in W(S)$, и пусть $\varepsilon > 0$. По условию для всякого компакта $K \subset S, \mu(K) > 0$, существует такое борелевское в S множество V, что $\omega_\mu(f; V \cap K) < \varepsilon$ и $\mu(V \cap K) > 0$. Пусть $n_0 > 2$ — наименьшее целое, для которого существуют такие компакт $K_0 \subset S$ и борелевское множество $V_0 \subset S$, что $\omega_\mu(f; V_0 \cap K_0) < \varepsilon$ и $\mu(V_0 \cap K_0) > n_0^{-1}$. Положим $S_1 = S \setminus (V_0 \cap K_0)$. Если $\mu(S_1) > 0$, то выберем наименьшее целое $n_1 > 2$, для которого существуют такие компакт $K_1 \subset S_1$ и борелевское множество $V_1 \subset S$, что $\omega_\mu(f; V_1 \cap K_1) < \varepsilon$ и $\mu(V_1 \cap K_1) > n_1^{-1}$. Положим

$$S_2 = S \setminus (V_1 \cap K_1).$$

Если $\mu(S_2) > 0$, то аналогичным образом выберем целое $n_2 > 2$, компакт $K_2 \subset S_2$ и борелевское множество $V_2 \subset S$. Действуя так дальше, мы либо остановимся на каком-то шаге, либо построим последовательности целых чисел $\{n_k\}_{k=0}^\infty$, компактов $\{K_k\}_{k=0}^\infty$ и борелевских множеств $\{S_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{V_k\}_{k=0}^\infty$ $(S_0 = S)$, обладающие следующими свойствами:

1) $S_{k+1} = S_k \setminus (V_k \cap K_k)$;
2) $K_k \subset S_k$;
3) $\mu(V_k \cap K_k) > n_k^{-1}$;
4) $\omega_\mu(f; V_k \cap K_k) < \varepsilon$;
5) если K — компакт в S_k и V — такое борелевское множество в S, что $\omega_\mu(f; V \cap K) < \varepsilon$, то $\mu(V \cap K) \leqslant (n_k - 1)^{-1}$.

[17] Для меры $\mu \in W(S)$ через $\mu_*(A)$ обозначается внутренняя мера, т. е. верхняя грань мер компактных множеств, содержащихся в A (таким образом, $\mu_*(A) = \mu(A)$ для борелевских множеств A из S).

Возьмем какой-либо компакт $K \subset S \setminus \bigcup(V_k \cap K_k)$. Очевидно, что $K \subset \bigcap S_k$. Из 1) – 3) вытекает, что $n_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, а из 5) — что $\mu(V \cap K) \leqslant (n_k - 1)^{-1}$ для любого k и любого борелевского множества V, если только $\omega_\mu(f; V \cap K) < \varepsilon$. Поэтому $\mu(K) = 0$ и, значит,

$$\mu(S \setminus \bigcup(V_k \cap K_k)) = 0.$$

Пусть для каждого k N_k — такое борелевское множество нулевой меры, что

$$\sup\{\rho(f(s), f(t)) \mid s, t \in V_k \cap K_k \setminus N_k\} < \varepsilon.$$

Положим $U_k = V_k \cap K_k \setminus N_k$. Тогда $\mu(\bigcup U_k) = \mu(S)$, множества U_k попарно не пересекаются и $\omega(f; U_k) < \varepsilon$ для каждого k. Пусть t_k — произвольная точка в U_k. Положим $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\,\chi_{U_k}$. Очевидно, что отображение φ — μ-измеримо, причем для всякой точки $t \in \bigcup U_k$ выполняется неравенство $\rho(\varphi(t), f(t)) < 2\varepsilon$. В силу произвольности ε отсюда вытекает, что f — μ-измеримое отображение из S в R. ■

2. Применения. В качестве одного из интересных применений теоремы 8.1 мы сначала отметим хорошо известную теорему Филлипса (еще раз доказывая, что слабо компактные множества являются RN-множествами, или, эквивалентно, что слабо компактные операторы являются операторами RN):

Следствие 8.2.1 (Филлипс). *Если X — банахово пространство, то*

$$W(X, \sigma(X, X^*)) = W(X, \|\cdot\|).$$

Более того, если K — слабый компакт в X, то

$$W(K, \sigma(X, X^*)) = W(K, \|\cdot\|).$$

Действительно, всякое слабо компактное множество в X является заостренным (это известный нам сравнительно простой факт, доказываемый непосредственно; см., например, [108]). Отсюда и из теоремы Хана-Банаха легко вытекает, что тождественное отображение $(K, \sigma(X, X^*)) \to (K, \|\cdot\|)$ принадлежит классу $\mathcal{D}$. По теореме 8.1 оно универсально измеримо, что равносильно выполнению равенства

$$W(K, \sigma(X, X^*)) = W(K, \|\cdot\|).$$

Из аналогичных соображений, используя утверждение а), получаем

Следствие 8.2.2. *Для w^*-компакта K в сопряженном банаховом пространстве X^* равносильны утверждения:*

1) *K является RN-множеством;*

2) *всякое w^*-замкнутое подмножество множества K является w^*-заостренным.*

■

Так как w^*-компакт K является RN-множеством тогда и только тогда, когда такова его w^*-замкнутая абсолютно выпуклая оболочка $\overline{\Gamma(K)}^*$ (лемма 6.2.1), то из следствия 8.2.2 вытекает

Следствие 8.2.3. *Если любое w^*-замкнутое подмножество w^*-компакта $K \subset X^*$ является w^*-заостренным, то таким же свойством обладает и множество* $\overline{\Gamma(K)}^*$. ■

Из теоремы 6.1.1 и из теорем 8.1 и 8.1.1 получаем

Следствие 8.2.4. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $Y'_\sigma = (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$. Для оператора T из X в Y равносильны утверждения:*

1) *T^* есть оператор Радона-Никодима;*
2) $T^* \in \mathcal{D}(Y'_\sigma, X^*)$;
3) $T^* \in \bigcap_{\mu \in W(Y'_\sigma)} \mathcal{D}_\mu(Y'_\sigma, X^*)$. ■

Следствие 8.2.5. *Если в X^* найдется такой w^*-компакт K, что все его w^*-замкнутые подмножества w^*-заостренные, а линейная оболочка множества $\overline{\Gamma(K)}^*$ плотна по норме в X^*, то пространство X^* обладает свойством Радона-Никодима.* ■

Утверждение вытекает из следствий 8.2.2 и 8.2.3, так как любое сопряженное пространство X^*, порожденное w^*-компактным RN-множеством, обладает свойством Радона-Никодима (см. следствие 7.3).

Приведем еще одно простое следствие теоремы 8.1 и утверждения а).

Следствие 8.2.6. *Пусть A — произвольное подмножество в X, X' — такое подпространство в X^*, что топология $\rho = \sigma(X, X')$ отделима. Предположим, что всякое ρ-компактное множество в A является X'-заостренным* в определении w^*-заостренности оболочку $\overline{\text{co}}^*$ надо заменить на оболочку $\overline{\text{co}}^\rho$). *Тогда тождественное отображение $(A, \rho) \to (A, \|\cdot\|)$ универсально измеримо и $W(A, \rho) = W(A, \|\cdot\|)$. Обратно, если $W(A, \rho) = W(A, \|\cdot\|)$ и X' — нормирующее для A подпространство в X^*, то всякое ρ-компактное множество в A является X'-заостренным.* ■

§9. Функции I класса Бэра и их применения к аппроксимации операторов конечномерными

В этом параграфе мы приведем некоторые наши исследования, связанные со свойствами функций I класса Бэра со значениями в метрических пространствах, и установим (в качестве применения полученных результатов) следующие теоремы.

Теорема 9.1. *Для линейного непрерывного отображения T из банахова пространства X в банахово пространство Y эквивалентны утверждения:*

1) *T^* есть оператор Радона–Никодима;*

2) *для всякого *-слабого компакта $K \subset Y^*$ отображение $T^*|_K : (K, \sigma(Y^*, Y)) \to X^*$ имеет на K хотя бы одну точку непрерывности.*

Теорема 9.2. *Для оператора T из X в Y эквивалентны утверждения:*

1) *множество $T(X)$ сепарабельно и T^* — оператор Радона–Никодима;*

2) *T^* является векторно значной функцией I класса Бэра из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в X^*, где $D(T^*)$ — единичный шар в Y^* (т.е. существует последовательность непрерывных отображений из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в X, сходящаяся поточечно к T^*);*

3) *множество $T(X)$ сепарабельно и для всякого *-слабого компакта $K \subset Y^*$ отображение $T^*|_K : (K, \sigma(Y^*, Y)) \to X^*$ непрерывно везде на K за исключением быть может множества точек I категории в $(K, \sigma(Y^*, Y))$.*

Теорема 9.3. *Пусть X, Y, W — банаховы пространства, T и U —линейные непрерывные отображения соответственно из X в Y и из X^* в W. Предположим, что множество $T(X)$ сепарабельно в Y, а оператор U приближается равномерно на каждом компакте пространства X^* конечномерными операторами из X^* в W. Если T^* является оператором Радона–Никодима, то существует последовательность $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных отображений из Y^* в W, обладающая следующими свойствами:*

1) *$\|U_n\| \leqslant \|UT^*\|$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$;*

2) *все отображения U_n непрерывны из $(Y^*, \sigma(Y^*, Y)))$ в W;*

3) *последовательность $\{U_n\}$ сходится поточечно к отображению UT^*, т.е. $\|U_n f - UT^* f\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого элемента $f \in Y^*$.*

Отметим некоторые непосредственные следствия этих теорем (другие следствия будут приведены в конце параграфа).

Следствие 9.1. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $V \in \mathrm{L}(Z, X)$ —линейные непрерывные отображения. Предположим, что множество $T(X)$ сепарабельно в Y, а T^* есть оператор Радона–Никодима. Тогда если V^* равномерно на каждом компакте пространства X^* приближается конечномерными операторами из X^* в Z^*, то существует последовательность конечномерных операторов из Z в Y, нормы которых не превосходят $\|TV\|$, и сопряженные к которым поточечно сходятся к $(TV)^*$.*

Следствие 9.2. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ — такой оператор, что множество $T(X)$ сепарабельно. Предположим, что пространство X^* удовлетворяет условию аппроксимации. Тогда T^* принадлежит классу* RN *в том и только том случае, когда существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных отображений из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant \|T\|$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и операторы U_n^* сходятся поточечно к T^*.*

Ясно, что утверждение следствия 9.2 (при выполнении в X условия аппроксимации) в части необходимости существенно сильнее, чем импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) теоремы 9.2.

Следствие 9.3. *Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и пространство X^* удовлетворяет условию аппроксимации. Если существует последовательность $\{\varphi_n\}$ непрерывных отображений из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в X^*, сходящаяся к T^* поточечно, то существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных операторов из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant \|T\|$ для всех n и $U_n^* \to T^*$ поточечно.*

Следствие 9.4. *Для банахова пространства X эквивалентны утверждения:*

1) X^* — *сепарабельное пространство, удовлетворяющее условию аппроксимации;*

2) *существует такая последовательность конечномерных операторов $\{U_n\}$ из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant 1$ и $\|U_n^* x' - x'\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x' \in X^*$.*

Заметим, что последнее следствие вытекает также из результатов работы А.Гротендика [80] и теоремы Банаха–Штейнгауза.

1. Бэровские функции I класса со значениями в метрических пространствах. Наша цель — обобщение а нескалярный случай ряда хорошо известных утверждений о вещественнозначных бэровских функциях I класса. Следует, однако отметить, что приводимые ниже доказательства отличаются от соответствующих доказательств для скалярного случая (см., например, [24]) и позволяют установить более сильный результат уже в случае вещественнозначных функций.

Мы рассматриваем только отделимые топологические пространства. Пусть M и R — два топологических пространства, f — произвольное отображение из M в R. Мы будем говорить, что f есть *бэровская функция I класса* из M в R, если существует последовательность непрерывных функций из M в R, сходящаяся поточечно к f. Функцию f мы будем называть *квазибэровской функцией I класса*, если для всякого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ функции f на K имеет по крайней одну точку непрерывности.

Хорошо известная теорема Бэра утверждает, что вещественнозначная функция, заданная на польском пространстве, является бэровской функцией I класса тогда и только тогда, когда она является квазибэровской функцией I класса (теорема верна даже для более широкого класса топологических пространств M; см., например, [113], замечание на стр. 376–377). Мы хотим, в частности, обобщить эту теорему на случай функций со значениями в некоторых метрических пространствах.

Лемма 9.1.1. *Пусть M — нормальное топологическое пространство, R — топологическое векторное пространство, f — счетно-значное отображение из M в R, множество значений которого есть множество $\{r_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R$. Если для каждого j $f^{-1}(j)$ — множество типа F_σ, то f — бэровская R-значная функция I класса.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 3 на стр. 377 в [24]. ■

Ниже нам понадобится следующее свойство топологического пространства M :

(σ) всякая строго убывающая вполне упорядоченная система замкнутых множеств в M не более чем счетна.

Напомним, что топологическое пространство M совершенно нормально, если всякое замкнутое его подмножество есть множество типа G_δ.

Предложение 9.1.1. *Пусть M — совершенно нормальное топологическое пространство, обладающее свойством (σ), R — метризуемое топологическое век-*

торное пространство. Пусть, далее, f — отображение, для которого выполнено условие

(d) *для любого замкнутого подмножества K в M м для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество V в M, что колебание $\omega(f; V \cap K)$ функции f на множестве $V \cap K$ меньше ε (здесь $\omega(f; A) = \sup\{\rho(f(s), f(t)) \,|\, s, t \in A\}$, где ρ — метрика на R).*

Тогда f — R-значная функция I класса Бэра.

Доказательство предложения 9.1.1. Пусть $\varepsilon > 0, \omega_1$ первый несчетный ординал и $S_1 = M$. Используя условие d, построим по трансфинитной индукции (стандартным образом) такое семейство $\{S_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ замкнутых подмножеств в M, что $S_\alpha \supsetneq S_\beta$ и $\omega(f; S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}) < \varepsilon$, если $\alpha < \beta < \omega_1$ и $S_\alpha \neq \emptyset$. Так как пространство M обладает свойством (σ), то существует такой счетный ординал $\gamma < \omega_1$, что $S_\gamma = \emptyset$, но $S_\alpha \neq \emptyset$ при $\alpha < \gamma$. По условию каждое из множеств $S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$ есть множество типа F_σ. Выберем в каждом таком множестве по точке $s_\alpha \in S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$ и положим $\varphi(s) = f(s_\alpha)$, если $s \in S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$. Так как $M = \cup_{\alpha<\gamma} S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$, то φ — R-значная функция I класса Бэра из M в K (лемма 9.1.1). При этом, очевидно, $\sup \rho(\varphi(t), f(t)) < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что отображение f есть равномерный предел последовательности R-значных функций I класса Бэра из M в R и, значит, само принадлежит этому классу. ■

Из предложения 9.1.1 и классической теоремы Бэра мы получаем:

Следствие 9.1.1. *Если M- польское пространство, то всякая вещественно-значная функция на M, удовлетворяющая условию (d) (в котором R — вещественная прямая), является функцией I класса Бэра и, тем самым, имеет точки непрерывности на всяком замкнутом подмножестве пространства M.* ■

Следствие 9.1.2. *Если M — совершенно нормальный компакт и R — метризуемое топологическое векторное пространство, то любое отображение из M в R, удовлетворяющее условию (d) (в частности, всякое квазибэровское отображение I класса), имеет сепарабельный образ* ■

По поводу компактных пространств см. прекрасный мемуар [2].

Замечание 9.1.1. Условие (d) является аналогом в случае абстрактных отображений f понятия наследственно заостренного (*dentable*) множества в банаховом пространстве (напомним, что множество B в банаховом пространстве называется наследственно заостренным, если для любого его подмножества B_0 и всякого числа $e > 0$ найдется точка $x \in B_0$, не принадлежащая множеству $\overline{\text{co}}(B_0 \setminus D_\varepsilon(x))$, где $D_\varepsilon(x)$ — шар радиуса ε с центром в x). Из теоремы Хана–Банаха легко вытекает, что если B — наследственно заостренное множество множество в банаховом пространстве X, то тождественное отображение $(B, \sigma(X, X^*)) \to X$ удовлетворяет условию (d). Условие (d) конечно же тесно связано с условием (ω) из § 8.

Лемма 9.1.2 (см. [3], стр. 125, упр. 22a). *Пусть M — бэровское пространство, R — метрическое пространство, f — отображение из M в R. Если f является* *бэровской функцией I класса, то f непрерывно везде на M за исключением быть может множества точек I категории в M.* ■

Из предложения 9.1.1 и леммы 9.1.2 вытекает

Предложение 9.1.2. *Пусть M — совершенно нормальное топологическое пространство, всякое замкнутое подмножество которого бэровское и которое обладает свойством (σ) (например, M — польское пространство, либо совершенно нормальный компакт). Для отображения f из M в любое метризуемое топологическое векторное пространство R равносильны утверждения:*

1) *f принадлежит I классу Бэра;*

2) *для любого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ непрерывно везде на K за исключением быть может множества точек I категории в K;*

3) *для любого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ имеет на K хотя бы одну точку непрерывности;*

4) *f удовлетворяет условию (d).* ■

2. Универсальная измеримость квазибэровских функций. Очевидно, что всякая функция I класса Бэра из любого топологического пространства M в метрическое пространство R универсально измерима (т. е. измерима по Лузину относительно каждой конечной положительной меры Радона на M). Следующее утверждение показывает, что таким же свойством обладают и квазибэровские функции I класса. Конечно же, предложение 9.2.1 вытекает из теоремы 8.1. Мы приводим более простое и непосредственное доказательство для полноты картины.

Предложение 9.2.1. *Всякая квазибэровская функция I класса из любого топологического пространства M в метрическое пространство R универсально измерима.*

Доказательство. Универсальная измеримость функции f означает, что для любого компакта K в M и для любой конечной положительной меры Радона μ на K существует такой счетный набор $\{K_n\}$ компактов в K, что $\mu(K \setminus \cup K_n) = 0$ и функция f непрерывна на каждом компакте K_n. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что M — компактное пространство. Пусть μ — конечная положительная мера Радона на M. Зафиксируем произвольное натуральное число m. Положим $K_0 = \operatorname{supp}\mu$. Тогда существует такое открытое множество V_0 в M, что $\mu(V_0 \cap K_0) > 0$ и $\omega(f; V_0 \cap K_0) < 1/m$. Рассмотрим компакт $K_1 = \operatorname{supp}(\mu|_{K_0 \setminus V_0})$. Существует открытое в M множество V_1, для которого $\mu(V_1 \cap K_1) > 0$ и $\omega(f; V_1 \cap K_1) < 1/m$. Используя стандартным образом трансфинитную индукцию и учитывая конечность меры μ, мы построим такие семейства компактов $\{K_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ (где λ — некоторый счетный ординал) т открытых в M множеств $\{V_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$, что $K_\beta \subset K_\alpha \setminus V_\alpha$ при $\alpha < \beta < \lambda, \mu(V_\alpha \cap K_\alpha) > 0, \omega(f; V_\alpha \cap K_\alpha) < 1/m$ и $\mu(\cup_{\alpha<\lambda}(K_\alpha \setminus K_{\alpha+1})) = \mu(M)$. Выберем по точке s_α из каждого множества $K_\alpha \setminus K_{\alpha+1}$ и положим $f_m(s) = f(s_\alpha)$, если $s \in K_\alpha \setminus K_{\alpha+1}$ и $f_m(s) = 0$ в противном случае. По построению для почти всех точек $s \in M$ выполняется неравенство $\rho(f_m(s), f(s)) \leqslant 2m^{-1}$ (а именно, для множества точек $A = \cup_{al<\lambda}(V_\alpha \cap K_\alpha))$. Отсюда следует, что существует последовательность $\{f_m\}$ измеримых по Лузину R-значных функций, сходящаяся равномерно на множестве полной меры к f. Поэтому функция f также измерима относительно μ и, следовательно, универсально измерима в силу произвольности меры μ. ■

Замечание 9.2.1. На самом деле мы показали, что универсально измеримым является всякое отображение из M в R, удовлетворяющее условию (d).

Прежде чем переходить к доказательствам теорем 9.1 – 9.3, отметим некоторые простые утверждения, которые можно получить, применяя доказанное только что предложение. Первое немедленно вытекает из предложения 9.2.1 и следующего результата H. Rosenthal'а (см. [143, предложение 1] и [113, лемма 2]): если банахово пространство X не содержит подпространства, изоморфного l_1, то всякая функция вида $x''(\cdot)$, $x'' \in X^{**}$, на любом *-слабо компактном подмножестве пространства X^{**} имеет точки непрерывности (и, следовательно, является функцией I класса Бэра на *-слабо компактном шаре из X^{**}, если пространство X сепарабельно).

Следствие 9.2.1 (Haydon [83]). *Пусть K — единичный шар в сопряженном банаховом пространстве X^*, снабженный топологией $\sigma(X^*, X)$. Если пространство X не содержит подпространства, изоморфного пространству l_1, то для любого элемента $x'' \in X^{**}$ функция вида $x''(\cdot)$ на K универсально измерима.* ■

Обращение следствия 9.2.1 (также как и следствия 9.2.2) тоже верно, что давно хорошо известно и доказывается довольно просто.

Следствие 9.2.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если не существует такого подпространства Z в X, что Z изоморфно l_1 и сужение $T|_Z$ — изоморфизм, то для всякого топологического пространства S с мерой Радона μ и для любой Y^*-значной μ-измеримой функции $f : S \to (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ функция $T^* f : S \to X^*$ является X^{**}-скалярно μ-измеримой. В частности, отображение T^* универсально X^{**}-скалярно измеримо как отображение из $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ в X^**

Очевидно, достаточно показать, что имеет место последнее утверждение следствия 9.2.2. Хорошо известно, что если T обладает указанным выше свойством, то T факторизуется через банахово пространство, не содержащее l_1 (это по–существу установлено в работе [66]). Отсюда легко вытекает, что для любого $x'' \in X^{**}$ функция $\langle T^*(\cdot), x'' \rangle$ является квазибэровской функцией I класса из $(D(Y^*), \sigma(Y^*, Y))$ в вещественную прямую (надо воспользоваться упоминавшимся выше результатом H. Rosenthal'а). Поэтому всякая такая функция универсально измерима. ■

Представляется интересным сравнить утверждение следствия 9.2.2 с эквивалентностью 1) $\iff$ 4) теоремы 6.1.1.

Следствие 9.2.3. *Для банахова пространства X эквивалентны утверждения:*

1) *X не содержит l_1;*

2) *для любого топологического пространства S с мерой Радона μ всякая μ-измеримая функция из S в $(X^*, \sigma(X^*, X))$ является X^{**}-скалярно измеримой.* ■

Импликация 1) $\implies$ 2) вытекает из предыдущего следствия. нетрудное доказательство обратной импликации мы опускаем; отметим только, что она сводится к проверке того факта, что для пространства $X = l_1$ утверждение 2) не имеет места. ■

3. Доказательство основных теорем. *Доказательство теоремы* 9.1. Нам понадобится следующий факт, установленный в § 7 (см. теорему 7.2, 1) $\Longrightarrow$ 4)):

Лемма 9.3.1. *Если T^* —оператор Радона–Никодима, то для всякого выпуклого *-слабого компакта $S \subset Y^*$ существует такая точка $x' \in T^*(S)$, что $x' \notin \overline{\mathrm{co}}^*(T^*(S) \setminus D_\varepsilon(x'))$ для любого числа $\varepsilon > 0$ (здесь через $\overline{\mathrm{co}}^*(A)$ обозначается выпуклая *-слабо замкнутая оболочка множества A, а через $D_\varepsilon(x')$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x').* ■

Предположим, что выполнено условие 1) теоремы 9.1, и пусть K — произвольное *-слабо компактное множество в Y^*. Если $M = \overline{\mathrm{co}}^*(T^*(K))$, то по лемме 9.3.1 мы можем найти точку $x' \in M$, не принадлежащую множеству $\overline{\mathrm{co}}^*(M \setminus D_\varepsilon x')$ ни при каком $\varepsilon > 0$. очевидно, x' — экстремальная точка множества M, откуда вытекает, что $x' \in T^*(K)$. Покажем, что $A = (T^*)^{-1}(D_\varepsilon(x') \cap T^*(K)) \cap K$ есть *-слабая окрестность в K любой точки $y' \in (T^*)^{-1}(x')$ для всякого числа $\varepsilon > 0$ (тогда импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) будет доказана). Так как $x' \notin \overline{\mathrm{co}}^*(M \setminus D_\varepsilon(x'))$, то существует элемент $x \in X$, для которого выполнено неравенство $\langle x, x' \rangle > \alpha = \sup\{\langle x, k\rangle : k \in \overline{\mathrm{co}}^*(M \setminus D_\varepsilon(x'))\}$. Положим $V = \{f \in X^* : |\langle x, f\rangle - \langle x, x'\rangle| < 1/2\,(\langle x, x'\rangle - \alpha)\} \cap T^*(K)$. Это окрестность в $(T^*(K), \sigma(X^*, X))$ точки x'. Если $f \in V$, то $\langle x, f\rangle > 1/2\,(\langle x, x'\rangle + \alpha) > \alpha$, поэтому $V \cap \overline{\mathrm{co}}^*(M \setminus D_\varepsilon(x')) = \emptyset$. Отсюда следует, что

$$V \subset T^*(K) \setminus \overline{\mathrm{co}}^*(M \setminus D_\varepsilon(x')) \subset D_\varepsilon(x') \cap T^*(K)$$

и, значит, $(T^*)^{-1}(V) \cap K$ — *-слабая окрестность в K, содержащаяся в множестве A. Этим импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана.

Для доказательства обратной импликации достаточно воспользоваться предложением 9.1.2 и теоремой 6.1.1: согласно предложению 9.2.1, из 2) вытекает, что отображение T^* из $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ в $(X^*, \|\cdot\|)$ универсально измеримо, а по теореме 6.1.1 последнее равносильно принадлежности T^* классу RN . ■

Доказательство теоремы 9.2. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) является простым следствием теоремы 9.1 и предложения 9.1.2. Далее, из 2) вытекает, что $T^*(Y^*)$ — сепарабельное множество в X^* и, значит, 2) влечет 3) по лемме 9.1.2. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 9.1. ■

Доказательство теоремы 9.3. Мы будем использовать два следующих (вообще говоря, нетривиальных факта). Первый (см. теорему 7.1 или [84]): *Если T^* — оператор Радона–Никодима, то существуют такие банахово пространство Z и операторы T_1 из X в Z и T_2 из Z в Y, что $T = T_2 T_1$ и пространство Z^* обладает свойством Радона–Никодима.* Второй, принадлежащий Гротендику (см. [80, следствие на стр. 129]), мы сформулируем в удобной для нас форме, используя лемму 20 той же работы А. Гротендика.

Лемма 9.3.2. *Пусть Z, W — банаховы пространства и $A : Z^* \to W$ — конечномерный оператор. Тогда для всякого компакта K в Z^* и любого числа*

$\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор B из Z^* в W, непрерывный из $(Z^*, \sigma(Z^*, Z))$ в W, что $\sup_K \|Ak - Bk\| < \varepsilon$ *и* $\|B\| \leqslant \|A\|$.

Пусть теперь выполнены все условия теоремы 9.3. Ясно, что при ее доказательстве мы можем считать, что пространство Y сепарабельно и $\|UT^*\| \leqslant 1$. Пусть Z, T_1 и T_2 — как выше.

Предположим сначала, что $\|U\| \leqslant 1$, $\|T_1\| \leqslant 1$ и $\|T_2\| \leqslant 1$. Рассмотрим отображение $UT_1^* : Z^* \to X^* \to W$. Нам известно, что T_1^* есть оператор Радона–Никодима, а U приближается в топологии компактной сходимости конечномерными отображениями (нормы которых, вообще говоря, не обязаны быть равномерно ограниченными). По теореме 5.1.1 суперпозиция UT_1^* принадлежит замыканию множества всех конечномерных операторов из Z^* в W, нормы которых не превосходят $\|UT_1^*\|$, в топологии компактной сходимости. Из леммы 9.3.2 вытекает, что UT_1^* принадлежит замыканию в этой топологии множества всех *-слабо непрерывных конечномерных операторов из Z^* в W, нормы которых не превосходят UT_1^* и, значит, единицы. С другой стороны, по теореме 9.2 существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных (не обязательно аффинных) отображений из $(D, \sigma(Y^*, Y))$ в $(Z^*, \|\cdot\|)$, где D — единичный шар в Y^*, сходящаяся поточечно к T_2^*. Положим $S_n = \varphi_n(D)$. Тогда для всякого n S_n — компактное подмножество в Z^* и, следовательно, для любого n существует такой *-слабо непрерывный конечномерный оператор V_n из Z^* в W, что $\|V_n\| \leqslant 1$ и $\sup_{s \in S_n} \|V_n s - UT_1^* s\| < n^{-1}$. Покажем, что операторы $U_n = V_n T_2^*$ удовлетворяют заключению теоремы 9.3. Действительно, свойство 2) операторов U_n очевидно, а свойство 1) вытекает из предположения о том, что $\|T_2^*\| \leqslant 1$ (и, значит, $\|U_n\| \leqslant 1$). Пусть $k \in D$ и $\varepsilon > 0$. Выберем такое натуральное число $N > 2\varepsilon^{-1}$, что $\|T_2^* k - \varphi_n(k)\| < \varepsilon/4$, если $n > N$. Тогда при $n > N$ мы получим:

$$\begin{aligned}
&\|U_n k - UT^* k\| = \|V_n T_2^* k - UT_1^* T_2^* k\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|V_n T_2^* k - V_n \varphi_n(k)\| + \|V_n \varphi_n(k) - UT_1^* \varphi_n(k)\| + \|UT_1^* \varphi_n(k) - UT_1^* T_2^* k\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant (\|V_n\| + \|UT_1^*\|)\, \|T_2^* k - \varphi_n(k)\| + \sup_{z \in S_n} \|V_n s - UT_1^* s\| \leqslant \varepsilon + n^{-1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Поэтому операторы U_n обладают и свойством 3).

Нам осталось, таким образом, показать, как общий случай сводится к уже рассмотренному. Так как $\|UT^*\| \leqslant 1$, то $UT^*(D) \subset D_1$, где D_1 — единичный шар в W. Заметим, что заменяя в пространствах X и Z нормы на эквивалентные, мы не заменим ни условий (чисел топологических), ни заключения теоремы. Поэтому, если мы сможем выбрать в X и Z нормы (эквивалентные старым) так, чтобы выполнялись неравенства $\|U\| \leqslant 1$, $\|T_1\| \leqslant 1$ и $\|T_2\| \leqslant 1$, то доказательство теоремы будет завершено. Рассмотрим в пространстве X^* единичный шар D_2. Если $\lambda > 0$ — такое число, что $\lambda\, D_2 \supset T_1^* T_2^*(D)$, то мы положим $D_0 = (\lambda\, D_2) \cap U^{-1}(D_1)$. Это множество порождает на X^* эквивалентную норму (заметим, однако, что D_0 не обязано быть *-слабо замкнутым). При этом, $U(D_0) \subset D_1$ и $T_1^* T_2^*(D) \subset D_0$. Если мы возьмем теперь *-слабо компактное абсолютно выпуклое множество $\widetilde{D}$ в X^*, содержащееся в D_0 и порождающее в X^* эквивалентную норму (уже сопряженную), то множество $B = \text{co}\left(\widetilde{D} \cup T_1^* T_2^*(D)\right)$ будет *-слабо замкнутым абсолютно выпуклым подмножеством в D_0, порождающим на X^* эквивалентную (сопряженную норму). Для нового единичного шара B в X мы будем иметь: $U(B) \subset D_1$ и $T_1^* T_2^*(D) \subset B$, т.е. $\|U\| \leqslant 1$ и $\|T_1^* T_2^*\| \leqslant 1$. Аналогичным образом мы можем заменить норму в Z^* на эквивалентную (сопряженную) норму так, чтобы выполнялись неравенства $\|T_1^*\| \leqslant 1$ и $\|T_2^*\| \leqslant 1$. ■

4. Применения. В начале работы мы привели несколько непосредственных следствий из теорем 9.1 – 9.3. Формулируемые ниже утверждения также без особых трудностей вытекают из этих результатов, однако несколько слов по поводу их доказательств все же следует сказать.

Первые следствия относятся к случаю слабо компактных отображений (всякий слабо компактный оператор в банаховых пространствах является оператором Радона–Никодима). Мы сначала сформулируем это утверждения, а затем покажем, как они выводятся из наших теорем.

Следствие 9.4.1. *Если K — метризуемое слабо компактное множество в банаховом пространстве X, то тождественное отображение $(K, \sigma(X, X^*)) \to (K, \|\cdot\|)$ есть функция I класса Бэра.*

Следствие 9.4.2. *Если f — непрерывное отображение из сепарабельного банахова пространства X в произвольное топологическое пространство R, то сужение f на всякое слабо компактное множество $K \subset X$ является функцией I класса Бэра из $(K, \sigma(X, X^*))$ в R.* ■

Следствие 9.4.3. *Если T — слабо компактный оператор из X в Y с сепарабельным образом, то T — Y-значная функция I класса Бэра из $D, \sigma(X, X^*)$ в Y, где D — единичный шар в X.* ■

Следствие 9.4.4. *Если T — слабо компактный оператор из X в Y с сепарабельным образом и если пространство Y обладает свойством аппроксимации, то существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных операторов из X в Y, что $\|U_n\| \leqslant \|T\|$ и $U_n \to T$ поточечно.*

Следствие 9.4.5. *Если K — метризуемое слабо компактное множество в X, то базы окрестностей в сильной и слабой топологиях совпадают в каждой точке множества K за исключением быть может множества точек I категории в $(K, \sigma(X, X^*))$.* ■

Следствия 9.4.2 и 9.4.3 вытекают непосредственно из следствия 9.4.1. Для доказательства следствия 9.4.1 и следствия 9.4.5 рассмотрим каноническое отображение $\Phi : X_B \to X$ (здесь $B = \overline{\Gamma(K)}$ — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества K, X_B — банахово пространство с "единичным шаром" B). В силу слабой компактности множества B, пространство X_B сопряжено к банахову пространству $\widehat{X}^*_{B^\circ}$, а оператор $j\Phi : X_B \to X^{**}$, где $j : X \to X^{**}$ — естественное вложение, является сопряженным к оператору $\Psi : X^* \to \widehat{X}^*_{B^\circ}$. Так как компакт K метризуем, то пространство $\widehat{X}^*_{B^\circ}$ сепарабельно. Применяя импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3) теоремы 9.2, мы получаем, что сужение тождественного вложения $(B, \sigma(X, X^*)) \to (B, \|\cdot\|)$ на любое слабо замкнутое подмножество $S \subset B$ непрерывно во всех точках множества S кроме множества точек I категории в $(S, \sigma(X, X^*))$. Отсюда с одной стороны вытекает следствие 9.4.5, а с другой стороны после применения предложение 9.1.2 — следствие 9.4.1. При доказательстве следствия 9.4.4, очевидно, можно считать, что $\|T\| = 1$. Пусть $A = \overline{T(D)}$, где D — единичный шар в X, и $\Psi : Y^* \to \widehat{Y}^*_{A^\circ}$ — каноническое отображение. Тогда Ψ факторизуется через рефлексивное пространство, откуда вытекает, что существует такое рефлексивное пространство Z и такие операторы $V_1 : Y_A \to Z$ и $V_2 : Z \to Y$, что $V_2 V_1 = \Phi$ — каноническое отображение из Y_A в Y, причем V_1 непрерывно из $\left(Y_A, \sigma(Y_A, \widehat{Y}^*_{A^\circ})\right)$ в $(Z, \sigma(Z, Z^*))$. Если пространство Y удовлетворяет условию аппроксимации, то по теореме 9.3 существует такая последовательность $\{W_n\}$ конечномерных отображений из Y_A в Y, что $\|W_n\| \leqslant \|\Phi\| \leqslant 1$ для всех n и $W_n \to \Phi$ поточечно. Ясно, что это доказывает следствие 9.4.4. ■

Замечание 9.4.1. Следствие 9.4.5 может быть доказано значительно проще. Поскольку это другое его доказательство с одной стороны довольно коротко, а с другой стороны представляется нам интересным, мы воспроизведем его здесь. Пусть K — метризуемый слабый компакт в X. Ясно, что мы можем считать, что $X = C[0,1]$. Так как пространство $C[0,1]$ обладает базисом, то существует последовательность P_n конечномерных операторов в C, сходящаяся поточечно к тождественному отображению $C \to C$. Отсюда вытекает, что тождественное вложение $(K, \sigma(C, C^*)) \to C$ является C-значной функций I класса Бэра. По лемме 9.2.1 базы окрестностей в сильной и слабой топологиях на K совпадают во всех точках множества K, кроме некоторого множества точек I категории в $(K, \sigma(X, X^*))$. ■

Еще несколько следствий из теорем 9.1 – 9.3 связаны с понятием RN-множества в сопряженном банаховом пространстве. Мы знаем, что если K — *-слабо компактное RN-множество, то такова и его *-слабо замкнутая абсолютно выпуклая оболочка $B = \overline{\Gamma(K)}^*$ (см. лемму 6.2.1). Последнее равносильно тому, что каноническое отображение $X^*_B \to X^*$ является оператором типа RN, сопряженным к естественному отображению $\Psi : X \to \widehat{X}_{B^\circ}$. Таким образом, к Φ_B применимы теоремы 9.1 – 9.3. Используя их, лемму 9.1.2 и предложение 9.1.2, мы получаем такое следствие.

Следствие 9.4.6. *Пусть K — *-слабый компакт в X^*. Если K является RN-множеством, то существует точка $k \in K$, в которой базы окрестностей в сильной и *-слабой топологиях на K совпадают. Если, кроме того, *-слабый компакт K метризуем, то базы окрестностей в сильной и *-слабой топологиях на K совпадают во всех точках, кроме множества точек I категории в $(K, \sigma(X^*, X))$, и тождественное отображение $(K, \sigma(X^*, X)) \to (K, \|\cdot\|)$ является функцией I класса Бэра. Обратно, если в любом *-слабо замкнутом подмножестве $K_0 \subset K$ есть точка, в которой базы окрестностей в сильной и *-слабой топологиях на*

K_0 совпадают, то K — RN-множество. Если тождественное отображение $(K, \sigma(X^*, X)) \to (K, \|\cdot\|)$ является функцией I класса, то K — *-слабо метризуемое RN -множество. ■

Следствие 9.4.7. *Пусть K — метризуемый *-слабый компакт в сопряженном банаховом пространстве X, удовлетворяющем условию аппроксимации. Если K является RN-множеством, то существует такая последовательность V_n конечномерных операторов в X, что на K отображения V^* сходятся поточечно к тождественному отображению $K \to X^*$ и для всякого n имеет место включение $V_n^*(K) \subset D_a$, где D_a — шар в X^* с центром в нуле и радиуса $a = \max_{k \in K} \|k\|$.*

Действительно, по теореме 9.3 существует такая последовательность $\{U_n\}$ конечномерных операторов из X в $\widehat{X}_{K^\circ}$, что $\|U_n\| \leqslant \|\Psi\|$ (Ψ — каноническое отображение из X в $\widehat{X}_{K^\circ}$) и $U_n^* \to U^*$ поточечно. Пусть $U_n = \sum_{m=1}^{N(n)} x'_{m,n} \otimes z_{m,n}$. Выберем в X такие элементы $x_{m,n}$, что

$$\|\Psi(x_{m,n}) - z_{m,n}\| < 2^{-n} \left(N(n) \sum_{m=1}^{N(n)} \|x'_{m,n}\| \right)^{-1},$$

и положим

$$V_n = \left(\sum_{m=1}^{N(n)} x'_{m,n} \otimes x_{m,n} \right) \|\Psi\| \, (\|\Psi\| + 2^{-n})^{-1}.$$

Тогда $\|\Psi V_n\| \leqslant \|\Psi\|$ и $\|\Psi V_n - U_n\| \leqslant 2^{-n+1}$. Отсюда вытекает, что $V_n^*(K) \subset D_a$ (так как $\|\Psi\| = a$) и последовательность $\{V_n\}$ поточечно на K сходится к тождественному вложению $K \to X^*$. ■

ГЛАВА II

АППРОКСИМАЦИЯ

В теории аппроксимации операторов в квазинормированных операторных идеалах важную роль играют как различные так называемые аппроксимационные свойства нормированных пространств, так и квазинормированные тензорные произведения, рассматриваемые наряду с порождаемыми ими (либо порождающими их) квазинормированными операторными идеалами. Пусть, к примеру, α — некоторая тензорная норма на классе всех тензорных произведений банаховых пространств, так что сопряженное к любому тензорному произведению вида $X^* \otimes_\alpha Y$, где X, Y — банаховы пространства, есть некоторое пространство операторов $A(Y, X^{**})$ (двойственность задается стандартным способом при помощи следа суперпозиции тензорного элемента и оператора, порождающего соответствующий функционал). Пусть, далее, $A_0(Y, X)$ — замыкание в $A(Y, X^{**})$ множества всех конечномерных линейных непрерывных отображений (операторов) из Y в X. Предположим, что существует ненулевой тензорный элемент z из пополнения $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$ тензорного произведения $X^* \otimes_\alpha Y$, который порождает нулевой оператор $\widetilde{z}$. Тогда мы получаем, что след $\operatorname{tr} R \circ z$ суперпозиции любого одномерного (а, значит, и конечномерного) оператора R с тензором z равен нулю, тогда как, в силу нетривиальности z, для некоторого оператора $T \in A(Y, X^{**})$ мы должны иметь: $\operatorname{tr} T \circ z = 1$. Упростив ситуацию (например, предположив, что пространство X рефлексивно), мы находим оператор $T \in A(Y, X)$, не лежащий в замыкании множества $A_0(Y, X)$ всех конечномерных операторов в топологии $\sigma(A(Y, X), X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y)$. Тем самым, мы получаем и оператор $T \in A(Y, X)$, не аппроксимируемый конечномерными по норме пространства $A(Y, X)$. Можно пройтись и в обратную сторону.

Конечно, в каждом конкретном случае весьма неочевидно, что существует тензорный элемент z с описанными выше свойствами. Впервые существование подобного рода тензоров установил в 1972 г. шведский математик П.Энфло [75], решив отрицательно знаменитые проблемы базиса С.Банаха и аппроксимации А.Гротендика: он показал, что тензоры указанного характера существуют, если в качестве α взять проективную норму А.Гротендика [80]. В этом случае соответствующая *-слабая топология на сопряженном к проективному тензорному произведению $X^* \widehat{\otimes} Y$ пространстве $\mathrm{L}(Y, X^{**})$ — пространстве всех операторов из Y в X^{**} —

тесно связана с топологией компактной сходимости, и П.Энфло установил существование сепарабельного рефлексивного банахова пространства, для которого тождественный оператор id_X в X не аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными, — по определению из [80] это означает, что пространство X не обладает свойством аппроксимации AP . В [80], по существу, введено и понятие условия ограниченной аппроксимации: банахово пространство X удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации BAP, если тождественное отображение id_X лежит в замыкании, в топологии компактной сходимости, шара радиуса C пространства $\mathrm{L}_0(X, X)$ всех конечномерных отображений (с обычной операторной нормой) для некоторой постоянной $C > 0$. Весьма не очевидно, что свойства AP и BAP различаются между собой, и соответствующая проблема А.Гротендика [80] была отрицательно решена в работе [76]: BAP $\neq$ AP .

Конструкция П.Энфло экстремальна в том смысле, что в ней указан пример ненулевого тензорного элемента, порождающего нулевой оператор и являющегося s-ядерным при любом $s > 2/3$; отметим, что при $s = 2/3$ подобная конструкция невозможна, и это еще в 1955 г. установил А.Гротендик [80]. Мы, не объясняя подробно только что сказанное, сформулируем одно утверждение, в котором содержатся и упомянутые факты.

Предложение. 1) *Если X, Y — банаховы пространства и z — элемент проективного тензорного произведения $X^*\widehat{\otimes}Y$, представимый в виде*

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x'_k \otimes y_k, \ \text{где} \ \ \mu_k \searrow 0, \, \mu_k = o(\frac{1}{k^{3/2}}), \, \|x'_k\| \, \|y_k\| = 1,$$

то оператор $\widetilde{z}$, ассоциированный с z, нулевой тогда и только тогда, когда сам элемент z равен нулю.

2) *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство X и ненулевой тензорный элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}X$, порождающий нулевой оператор и допускающий разложение в ряд*

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x'_k \otimes x_k,$$

где $(x'_k) \subset X^*$, $(x_k) \subset X$ — ограниченные последовательности, а числовая последовательность (μ_k) такова, что $\mu_k = O(\dfrac{\sqrt{\ln k}}{k^{3/2}})$.

Первая часть предложения — это обобщение соответствующей теоремы А. Гротендика, полученное автором в [44] и [48] (с доказательства этого утверждения мы и начнем изложение результатов данной главы). Вторая — пример П. Энфло (см. [27], [125], [106]), и эту конструкцию П. Энфло мы интенсивно используем ниже.

Примеры Энфло, Фигеля-Джонсона и многих других известных специалистов привели к многочисленным вопросам, связанным как с аппроксимацией операторов в некоторых конкретных операторных идеалах конечномерными, так и с так называемой регулярностью ставших теперь классических операторных идеалов, таких как идеалы p-ядерных операторов, $p > 0$. Вот лишь несколько таких проблем (перечень, естественно, далеко не исчерпывающий). Некоторые из них мы формулируем в терминах настоящей работы, относительно других надо смотреть первоисточники.

1 (А. Пич [125 и 27, п. 19.2.16]). Верно ли, что для $p \neq 2$ существует квази-p-ядерный оператор, не аппроксимируемый по квази-p-ядерной норме конечномерными отображениями?

1а (А. Пич [125 и 27, п. 19.2.16]). Является ли идеал квази-p-ядерных операторов минимальным? Иными словами, каждый ли квази-p-ядерный оператор U допускает факторизацию $U = A_1 V A_2$ с операторами $v \in \Pi_p$ и аппроксимируемыми A_1, A_2 (т.е. которые в замыкании конечномерных операторов по обычной операторной норме)?

2 (А. Пич [125 и 27, п. 18.1.7]). Описать все показатели p, r, q, для которых идеал (p, r, q)-ядерных операторов регулярен.

3 (П. Сафар [146], А. Пелчинский (устный вопрос в 1979 г.; см. [130])). Всякое ли банахово пространство обладает свойством аппроксимации AP_p порядка p при $\neq 2$?

3а. Каждое ли банахово пространство обладает свойством BAP_p?

4. Если банахово пространство имеет свойство AP_p, то имеет ли оно и свойство BAP_p?

5. Если банахово пространств имеет свойство $\mathrm{AP}(= \mathrm{AP}_1)$, то имеет ли оно свойство BAP_p для некоторого $p \neq 2$?

6 (А. Пелчинский, А. Пич [125 и 27, п. 19.2.15). Совпадают ли между собой классы операторов, интегральных по А. Пичу и по А. Гротендику?

7 (А. Пелчинский [118]). Обладает ли пространство H^∞ ограниченных аналитических функций в кругу свойством аппроксимации А. Гротендика?

8 (О. И. Рейнов [130], А. Пелчинский (устный вопрос в 1995 г. на конференции в Таллинне), П. Касаза [59, Problem 3.8]). Верно ли, что если сопряженное к некоторому банахову пространству X пространство X^* обладает свойством аппроксимации, то X^* обладает свойством метрической аппроксимации?

9. (О. И. Рейнов [45], П. Касаза, Х. Ярхов [60]). Эквивалентны ли свойства компактной аппроксимации и метрической компактной аппроксимации?

10. Существует ли банахово пространство X без свойства аппроксимации, в котором все конечномерные подпространства $E \subset X$ "хорошо дополняемы", а именно, $\log^A(\dim E)$-дополняемы? $\log^A(\dim E)$-евклидовы?

11. Существует ли банахово пространство, которое является асимптотически гильбертовым[18] и которое не обладает свойством аппроксимации А. Гротендика?

[18] Пусть $n \geq 0$, $m \geq 1$ — целые числа и K — некоторая постоянная. Говорят, что банахово пространство X удовлетворяет условию $H(n, m, K)$ [91], если существует n-мерное подпространство X_m пространства X, такое, что каждое m-мерное подпространство в X_m K-изометрично евклидову пространству ℓ_2^m. Банахово пространство X называется *асимптотически гильбертовым* [128], если существует такая константа K, что для любого m найдется n, для которого X

Обо всех этих вполне естественных вопросах пойдет, в частности, речь в данной главе, и в своем месте для каждого из них будет объяснена мотивация постановки вопроса. Из перечисленных проблем лишь две до сих пор остаются открытыми, — это проблемы 7 и 8. Все, что сейчас известно относительно них, это следующее. Во-первых, H^∞ обладает всеми свойствами AP_p $(p \in (0, \infty] \setminus \{1\})$ аппроксимации порядка p, а также свойством аппроксимации "с точностью до log" [1985, 57]. Кроме того, H^∞ обладает так называемыми свойствами равномерной метрической аппроксимации порядка $p\,\mathrm{UMAP}_p$ для $p > 1$ [2000, 64]. Во-вторых, если X^* обладает свойством Радона–Никодима, то X^* обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда X^* обладает свойством метрической аппроксимации [1955, 80].

На вопросы 1, 1a, 3, 3a, 4, 5, 6 ответы (отрицательные) получены автором [1981, 41]. Вопрос 9 также имеет отрицательный ответ [1983, 45] и [1996, 60]. Ответы на вопросы 10–11 положительны [1982, 42], [2000, 61].

Вопрос 2, весьма красивый, поставлен в очень общей форме и до нынешнего времени далек от своего окончательного решения (часть положительных результатов можно найти в монографии А. Пича). Поэтому мы приведем переформулировку второго вопроса для трех частных случаев, в которых между показателями p, r, q имеются определенные соотношения (детали и определения, однако, надо смотреть в книге [27]). Пусть $p \neq 2$, p' — сопряженный показатель и $T : X \to Y$ — ограниченный оператор в банаховых пространствах.

(i) (А. Пелчинский, А. Пич). Верно ли, что если второй сопряженный T^{**} является p-ядерным, то таким же свойством обладает и сам оператор T?

(ii) Верно ли, что если сопряженный к T оператор T^* является p-ядерным, что сам оператор T является дуально p-ядерным, т.е. допускает факторизацию через некоторый диагональный оператор $l_{p'} \to l_1$?

(iii) Верно ли, что если сопряженный к T оператор T^* факторизуется компактно через пространство l_p, то сам оператор T допускает (строгую) факторизацию через пространство $l_{p'}$?

Ответы на вопросы (i)-(ii) отрицательны при любом $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ (см. [76], [41], [130], [43], [50], [48] и §§7-8, 12-13 настоящей главы). Ответ на вопрос (iii) — отрицателен, если $p = 1$ или $p = \infty$ (см. [41], [130], [51]и §§7, 12 настоящей работы). Ответ на вопрос (iii) до сих пор неизвестен при других значениях показателя p, т.е. при $1 < p \neq 2 < \infty$.

Остановимся немного на ситуации, поясняющей сложности при решении задачи (iii) (примерно такие же трудности возникали и при решении задач (i), (ii)). Мы укажем на ядро проблемы, на первый взгляд далекое от (iii) именно в приведенной формулировке, но на самом деле эквивалентное (iii).

Рассмотрим банахово тензорное произведение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, ассоциированное с идеалом K_p компактно l_p-факторизуемых операторов в банаховых пространствах (в частности, всякий тензор в рассматриваемой ситуации порождает оператор, фак-

удовлетворяет условию $H(n, m, K)$.

торизуемый через пространство l_p компактным образом). Соответствующая норма на $X^* \otimes Y$ определяется следующим образом. Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $z \in X^* \otimes Y$

$$k_p^0(z) := \inf \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} |a_i| \, \varepsilon_p(x'_k) \, \varepsilon_{p'}(y_k),$$

где $1/p+1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X^* \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^N a_k x'_k \otimes y_k$.

Каждый тензор $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, как и всякий оператор $S \in \mathrm{K}_p(X, Y)$, допускает представление вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \, x'_j \otimes y_j, \qquad \alpha_j \to 0, \tag{0.1}$$

причем для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление для z может быть выбрано так, что

$$\sup_j |a_j| \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_j |\langle x'_j, \, x \rangle|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\| \leq 1} \left(\sum_j |\langle y_j, \, y' \rangle|^{p'} \right)^{1/p'} \leq k_p^0(z) + \varepsilon, \tag{0.2}$$

где $k_p^0(z)$ — норма элемента z в его тензорном произведении. Каждый оператор S, как говорилось только что, также допускает подобного рода разложение в ряд одномерных операторов, но с оценкой справа через его K_p-норму: $\cdots \leq k_p(S) + \varepsilon$. При этом нормы k_p^0 и k_p на конечномерных операторах вида

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x'_j \otimes y_j. \tag{0.3}$$

определяются весьма схожим способом.

На первый взгляд, различия между тензором $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ и соответствующим ему оператором $S = \widetilde{z}$ не видно, особенно, если посмотреть на их разложения в ряды вида (0.1). Однако, существенная разница в их определении прослеживается при рассмотрении конечномерных операторов (или тензоров): для конечномерного оператора S из (0.3) (пусть ему соответствует тензор z) его норма в пространстве $\mathrm{K}_p(X, Y)$ вычисляется как инфимум левой части соотношения (0.2) *по всем* соответствующим представлениям вида (0.1) оператора S, тогда как норма ассоциированного тензорного элемента z — как инфимум левой части соотношения (0.2) по всем разложениям оператора S *в конечную сумму одномерных отображений.* Эта разница оказывается весьма существенной, и нам известно, что, по-крайней мере для $p = 1, p = \infty$, рассматриваемые две нормы, вообще говоря, не совпадают между собой даже на конечномерных операторах (относительно случая $p = \infty$ см. [130, следствие 3.4 и предшествующие этому следствию доказательства];

случай $p = 1$ рассмотрен в [52, следствие 4.25]), но без подробного доказательства соответствующее утверждение появилось уже в статье [130, следствие 4.2]). Для остальных $p \neq 2$ ситуация вот уже более 20-ти лет не ясна.

В этой главе мы как раз и будем иметь дело с ситуацией, связанной с кругом вопросов, возникающих, в частности, в связи с проблемами 1–11, и, естественно, затронем некоторые области как их приложений, так и близких по тематике проблем.

Мы начнем с того, что приведем совсем простое доказательство п. (1) сформулированного выше предложения (а с ним и теоремы А. Гротендика о 2/3).

§1. Простое доказательство двух теорем А. Гротендика о $2/3$

В своей фундаментальной работе [80] Гротендик установил два следующих интересных факта (см. [80, Chap. 2,§1, п. 4]).

Если элемент z проективного тензорного произведения $X \widehat{\otimes} Y$ двух банаховых пространств таков, что $z = \sum x_j \otimes y_j, x_j \in X,\ y_j \in Y, \sum (\|x_j\|\,\|y_j\|)^{2/3} < \infty$, то:

А) $z = 0$ тогда и только тогда, когда ассоциированный с z оператор $\widetilde{z} : Y^* \to X$ нулевой;

Б) при $X = Y^*$ последовательность (μ_j) собственных чисел оператора $\widetilde{z}$ абсолютно суммируема и $\sum \mu_j = \mathrm{trace}\ z$.

Оригинальное доказательство Гротендика является довольно сложным и основывается на тонких результатах теории аналитических функций, а также теории Фредгольма, развитой Гротендиком. Кроме того, доказательство Гротендика не выявляет основных причин, из-за которых в указанном утверждении появляется показатель 2/3 (то, что 2/3 — точный показатель, установил в 1973 г. Дэви [65]), модифицируя пример П. Энфло [75].

Основная цель параграфа — привести элементарные доказательства сформулированных теорем Гротендика и прояснить суть появления в теореме А) числа 2/3. А именно, как мы увидим, возникновение в теореме числа 2/3 связано с существованием на каждое n-мерное подпространство в банаховом пространстве проектора с нормой, не превышающей $\sqrt{n}$ (см. [27] и 0.4.4). Отметим, что эту теорему А. Гротендика мы еще не раз будем передоказывать и получать как "by-product" по мере изложения материала. Одно из самых простейших доказательств на настоящий момент, по-видимому, нижеследующее.

Введем некоторые обозначения только для этого параграфа. Пусть (мы следуем обозначениям А. Гротендика) $X \overset{2/3}{\otimes} Y$ — линейное подпространство в проективном тензорном произведении $X \widehat{\otimes} Y$, состоящее из тех элементов z, которые допускают представления вида $\sum x_j \otimes y_j, \sum (\|x_j\|\,\|y_j\|)^{2/3} < \infty$. Обозначим через $A_{2/3}(X, Y)$ множество элементов $z \in X \widehat{\otimes} Y$, для которых можно найти такое представление $z = \sum x_j \otimes y_j$, что $\|x_j\|\,\|y_j\| \leqslant 3^{-1}\, j^{-3/2}\, \|z\|_1$, при $j > N(z)$, где $\|z\|_1 = \|z\|_{X \widehat{\otimes} Y}$.

Следующий основной результат параграфа является в некотором смысле тривиальным.

Теорема 1.1. *Если* $z \in A_{2/3}(X,Y)$ *и оператор* $\widetilde{z}$, *ассоциированный с* z, *тождественно равен нулю, то* $z = 0$.

Теорема А) непосредственно вытекает из теоремы 1, если заметить, что $X \overset{2/3}{\otimes} Y \subset A_{2/3}(X,Y)$. Действительно, пусть $z \in X \overset{2/3}{\otimes} Y$, $z \neq 0$, и $\sum \lambda_j\, x_j \otimes y_j$ — такое представление для z, что $\|x_j\|\,\|y_j\| \leqslant 1$, $\sum \lambda_j^{2/3} < \infty$, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_j \geqslant \ldots$. Тогда $\lambda_j^{2/3} = o(j^{-1})$ и, следовательно, $\lambda_j < \varepsilon_j j^{-3/2}$, где $\varepsilon_j \to 0$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $z \in X\widehat{\otimes}Y, z = \sum \lambda_j\, x_j \otimes y_j, \|x_j\|\,\|y_j\| < 1, 0 \leqslant \lambda_j \leqslant 3^{-1}\, j^{-3/2}\, \|z\|_1$ для $j > N(z)$. Предположим, что $\mathrm{trace}\, R \circ z = 0$ для каждого конечномерного оператора $R : Y \to X^*$. Пусть $U \in \mathrm{L}(Y, X^*), N > N(z), P$ — такой проектор из X^* на линейную оболочку множества $\{U(y_j)\}_{j=1}^N$, что $\|P\| \leqslant \sqrt{N}$. Имеем

$$|\,\mathrm{trace}\; U \circ z| = |\,\mathrm{trace}\; U \circ z - \mathrm{trace}\,(PU) \circ z| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_j\,(\langle x_j, Uy_j - PUy_j\rangle)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|U\|\;(1 + \|P\|)\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_j \leqslant 3^{-1}\,\|U\|\,(1+\sqrt{N})\,\|z\|_1 \sum_{N+1}^{\infty} j^{-3/2} \leqslant$$

$$\leqslant 3^{-1}\,\|U\|\,(1+\sqrt{N})\,\|z\|_1 \int_N^{\infty} t^{-3/2}\,dt = (2/3)\,\|z\|_1\,\|U\|\,(1 + N^{-1/2}).$$

Следовательно, $\|z\|_1 = \sup\limits_{\substack{U: Y \to X^* \\ \|U\| \leqslant 1}} |\,\mathrm{trace}\; U \circ z| \leqslant (3/4)\,\|z\|_1$. ■

Замечание 1.1. Из доказательства видно, что если $z \in X\widehat{\otimes}Y, z = \sum x_j \otimes y_j$ и $\sum_N^\infty \|x_j\|\,\|y_j\| \leqslant \dfrac{2}{3}\,\|z\|_1\, N^{-1/2}$ при $N > N(z)$, то $z = 0$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{z} = 0$.

Замечание 1.2. Видимо, теорема 1.1 останется справедливой, если в определении множества $A_{2/3}$ заменить константу 3^{-1} на произвольное число. В последнем случае мы получим линейное подпространство $X \overset{2/3}{\otimes}_\infty Y$ в $X\widehat{\otimes}Y$, соответствующее пространству Лоренца $l_{2/3,\infty}$. Однако, не известно, верно ли, что каноническое отображение $X \overset{2/3}{\otimes}_\infty Y \to \mathrm{L}(X^*, Y)$ всегда взаимно однозначно. См., также, ниже §10.

Из теоремы 1.1 и теоремы Лидского [21] легко вытекает теорема Б). Действительно, пусть $T = \sum \lambda_j, x'_j \otimes x_j$, где $\lambda_j > 0, \sum \lambda_j^{2/3} < \infty, (x'_j), (x_j)$ — ограниченные последовательности в X^* и X соответственно. По теореме 1.1 след оператора T не зависит от ядерного представления T. Таким образом, надо показать, что $\sum \mu_j = \sum \lambda_j\,\langle x'_j, x_j\rangle$. Оператор T можно факторизовать следующим образом:

$$X \xrightarrow{T_1} l_2 \xrightarrow{T_2} X.$$

Здесь $T_1 x = \sum \lambda_j^{2/3} \langle x'_j, x\rangle e_j; T_2\xi = \sum \lambda_j^{1/3} \langle \xi_j, e_j\rangle x_j$; где e_j — j-й орт в l_2. Оператор T_1 ядерный, T_2 —непрерывный. Ясно, что собственные числа оператора T_1T_2 — в точности μ_j и, следовательно, $\sum |\mu_j| < \infty$, причем trace $T_1T_2 = \sum \mu_j$. С другой стороны, для $\xi \in l_2$

$$T_1T_2(\xi) = \sum_k \lambda_k^{2/3} \langle x'_k, \sum_j \lambda_j^{1/3} \langle \xi, e_j\rangle x_j\rangle e_k = \sum_k \lambda_k^{2/3} \langle \sum_j \lambda_j^{1/3} \langle x'_k, x_j\rangle e_j, \xi\rangle e_k.$$

Следовательно, trace $T_1T_2 =$ trace T. ■

В оригинальном доказательстве Гротендика сначала, по существу, устанавливалась справедливость теоремы Б), и затем из нее выводилась теорема о взаимной однозначности естественного отображения $X \overset{2/3}{\otimes} Y \to \mathrm{L}(X^*, Y)$.

Замечание 1.3. После того, как заметка [44] была подготовлена для печати, Т. Фигель сообщил автору (устно), что он нашел другое простое доказательство теоремы А), основанное лишь на том, что всякое подпространство в l_2 обладает свойством аппроксимации. Это позволяет взглянуть на теорему с другой точки зрения: возникновение в ней числа 2/3 связано с "двойкой" — обычным показателем гильбертовости того или иного объекта, или, точнее, с существованием в гильбертовом (и только в гильбертовом) пространстве проектора на каждое конечномерного подпространство с нормой, равной единице. Доказательство Т. Фигеля, однако, по всей вероятности не дает в полной общности нашу теорему 1.1.

§2. Насколько плохим может быть банахово пространство со свойством аппроксимации?

Ясно, что такая постановка вопроса является слишком общей и ответ здесь можно искать в совершенно различных направлениях. Вот один из возможных ответов: в банаховом пространстве со свойством аппроксимации может не выполняться условие ограниченной аппроксимации (см. [76]). В свете этого результата мы и будем рассматривать сформулированный вопрос (часть результатов взята из статьи автора [45]; обзор такого рода результатов можно найти в [132]). Для более детального его обсуждения сейчас весьма удобно вспомнить известные определения.

Пусть $a \in [1, +\infty]$. Напомним, что банахово пространство E имеет свойство a-метрической аппроксимации ($E \in a$-MAP), если тождественное отображение id : $E \to E$ принадлежит замыканию в топологии компактной сходимости шара радиуса a нормированного пространства $E^* \otimes E$ всех конечномерных операторов из E в E (с обычной операторной нормой); если ($E \in a$-MAP) для $a = +\infty$, то говорят, что E обладает свойством аппроксимации; если ($E \in a$-MAP) для некоторого $a < +\infty$, то E обладает свойством ограниченной аппроксимации.

Приведем теперь естественный и конкретный вопрос, инспирированный примером точнее, контрпримером) Фигеля–Джонсона [76(]. Пусть банахово пространство E обладает свойством аппроксимации. Вообще говоря, нельзя ожидать, что id приближается равномерно на компактах из E конечномерными операторами с ограниченными нормами. Но, быть может, id можно аппроксимировать в топологии компактной сходимости слабо компактными операторами, нормы которых равномерно ограничены? Или даже компактными операторами? Понятно, что такого рода вопросы могут быть сформулированы в общем виде, так что мы приходим к вполне конкретной задаче, которая и имелась в виду в заглавии.

Вот другая сторона этой задачи. Свою конструкцию Фигель и Джонсон применили в [76] для построения неядерного оператора с ядерным сопряженным. Иными словами, они привели пример линейного непрерывного функционала на нормированном пространстве $E^* \otimes E$, который порождается неядерным оператором $T : E \to E$ (пространство E^* в [76] сепарабельно, так что оператор T^* обязательно будет ядерным). В связи с этим возникает, например, такой естественный вопрос: существует ли неядерный оператор $T : E \to E$, порождающий линейный непрерывный функционал на пространстве всех слабо компактных (или хотя бы компактных) операторов в E. Понятно, что это — вопрос типа "насколько хорошим может быть неядерный оператор?".

Основная цель этого параграфа — дать по возможности достаточно полные ответы на сформулированные вопросы. В частности, мы покажем, что существует банахово пространство со свойством аппроксимации, для которого id не приближается в топологии компактной сходимости слабо компактными операторами с равномерно ограниченными нормами, а также что существует неядерный оператор, порождающий линейный непрерывный функционал на пространстве всех слабо компактных отображений (точные формулировки см. ниже).

Следует отметить, что используемый нами метод отличается от метода работы [76] — лишь при перенормировке банахова пространства мы используем формулу для выражения новой нормы через старую, аналогичную формуле в [76].

1. Аппроксимация операторами из замкнутых идеалов: свойства аппроксимации λ-MAP(I). Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Напомним, что

T — строго сингулярный оператор, если ни на каком бесконечномерном подпространстве в X он не действует как изоморфизм (см. [27]);

T — вполне непрерывный оператор, если слабо сходящиеся последовательности он переводит в сильно сходящиеся (см. [27]);

T — условно слабо компактный, если для каждой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ из $\{Tx_n\}$ можно извлечь слабо фундаментальную подпоследовательность (см. [35] и п. I.4.2);

$T \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$, если $T^* \in \mathrm{RN}$.

Пусть $\mathrm{I}(X, Y)$ — линейное подпространство в $\mathrm{L}(X, Y)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$ (символ I резервируется как обозначение для подпространства или некоторого идеала только на этот параграф!)

Определение 2.1.1. Пространство Y обладает свойством λ-MAP(I), (λ-метрической аппроксимации относительно I), если для всякого компакта $K \subset Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $R \in \mathrm{I}(Y, Y)$ такой, что $\|R\| \leqslant \lambda$ и $\sup_K \|Ry - y\| < \varepsilon$. Мы условимся писать $Y \in \lambda$-MAP(I), если Y обладает свойством λ-MAP(I). Если $\lambda < +\infty$

и $Y \in \lambda$-MAP(I), то Y обладает свойством BAP(I). Если $Y \in +\infty$-MAP(I), то Y обладает свойством AP(I).

Рассмотрим совсем кратко некоторые частные случаи.

а) $\mathrm{I}(Y,Y) = Y^* \otimes Y$. Свойство λ-MAP(I) есть не что иное, как свойство λ-метрической аппроксимации Гротендика. Неравносильность свойств BAP и AP установлена Фигелем и Джонсоном в [76].

б) $\mathrm{I}(Y,Y) = \mathrm{K}(Y,Y)$ — множество всех компактных операторов. Свойство AP(K) — это свойство компактной аппроксимации CAP (см. [162]). Есть примеры подпространств в $l_p, p \neq 2,\ 1 \leq p \leq \infty$, не обладающих свойством CAP [162]. Вопрос об эквивалентности свойств BAP(K) и AP(K) был открыт до 1983 г. (более того, неизвестно было, влечет ли свойство аппроксимации Гротендика свойство BAP(I), где I — какой–либо замкнутый идеал операторов, отличный от идеала всех аппроксимируемых (см. [27]) и идеала всех ограниченных операторов). В 1983 г. в [45] автор показал, что эти свойства не равносильны (и это будет проделано в данном параграфе). Через 13 лет в [60] П. Касаза и Х. Ярхов передоказали этот результат автора (не зная о нем, как сообщил автору П. Касаза в 2001 г.).

в) $\mathrm{I}(Y,Y) = \mathrm{WK}(Y,Y)$ — множество всех слабо компактных операторов. Поскольку в l_1 есть подпространство без свойства CAP и l_1 обладает свойством Шура, то существует банахово пространство, не обладающее свойством AP(WK). Этот факт будет использован в дальнейшем. Ясно, что всякое рефлексивное пространство обладает свойством 1-MAP(WK), так что BAP(WK) не влечет CAP (см. б)).

г) $\mathrm{I}(Y,Y) = \mathrm{L}(Y,Y)$. Всякое банахово пространство обладает свойством 1-MAP(L), и этот тривиальный случай мы исключим из дальнейшего рассмотрения.

Нам удобно переформулировать определение 2.1.1 в несколько других терминах (впрочем, это представляет и самостоятельный интерес). Это делается в нижеследующих утверждениях. Далее в этом параграфе Y — фиксированное банахово пространство, $\mathrm{I}(Y,Y)$ — фиксированное линейное подмножество в $\mathrm{L}(Y,Y)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Лемма 2.1.1. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin \lambda$-MAP(I);

2) *существуют* $\delta > 0, \varepsilon > 0$ *и конечномерное подпространство* E *в* Y *такие, что*

$$\{\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y); \|\Phi e - e\| \leqslant \varepsilon\, \|e\|\ \forall\, e \in E\} \implies \{\|\Phi\| \geqslant \lambda + \delta\}.$$

Доказательство. Если $Y \notin \lambda$-MAP(I), то существуют $\varepsilon > 0$ и конечномерное $E \subset Y$ такие, что из $\{\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y); \|\Phi e - e\| \leqslant \varepsilon\, \|e\|\ \forall\, e \in E\}$ вытекает $\{\|\Phi\| > \lambda\}$. Предположим, что утверждение 2) не имеет места. Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ таковы, что $\varepsilon_1 + \delta(\lambda + \delta)/\lambda < \varepsilon$. В силу предположения мы можем найти такой оператор $\Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$, $\|\Phi\| < \lambda + \delta$, для которого $\sup\{\|\Phi e - e\| :\ e \in E, \|e\| \leqslant 1\} \leqslant \varepsilon_1$; при этом $\|\Phi\| > \lambda$. Рассмотрим оператор $\Psi = \lambda\Phi/\|\Phi\|$. Для $e \in E$ имеем

$$\|\Psi e - e\| \leqslant \|\Psi e - \Phi e\| + \varepsilon_1\|e\| \leqslant \|\Phi\| \cdot \left\|\left(\frac{\lambda}{\|\Phi\|} - 1\right)e\right\| + \varepsilon_1\|e\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[(\lambda+\delta)\frac{\|\Phi\|-\lambda}{\|\Phi\|} + \varepsilon_1\right]\|e\| \leqslant \left(\frac{\lambda+\delta}{\lambda}\delta\right) \leqslant \varepsilon\|e\|.$$

Поэтому $\|\Phi\| > \lambda$, что противоречит определению оператора Ψ. ■

Следствие 2.1.1. $Y \notin \lambda$-MAP(I) $\iff$ $\exists\, \delta > 0 :\ Y \notin (\lambda+\delta)$-MAP(I). *Таким образом,* $\{\lambda \in [1, +\infty) :\ Y \notin \lambda\text{-MAP(I)}\} = [\lambda_Y, +\infty)$, *где* $\lambda \leqslant +\infty$.

По определению $Y \in \lambda$-MAP(I) тогда и только тогда, когда id_Y принадлежит замыканию шара радиуса λ из $\mathrm{I}(Y,Y)$ в $\mathrm{L}(Y,Y)$ в топологии компактной сходимости. Последнее равносильно тому (см. [80], стр. 114), что id_Y лежит в замыкании этого шара в $\mathrm{L}(Y,Y)$ в слабой топологии $\sigma\left(\mathrm{L}(Y,Y), Y^*\widehat{\otimes}Y\right)$. Отсюда вытекает

Следствие 2.1.1. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin \lambda$-MAP(I);
2) $\exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y :$ trace $z = 1$, $|\,\text{trace } z \circ \Phi| < \lambda^{-1}\|\Phi\|\ \forall\, \Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$;
3) $\exists\, \varepsilon > 0, \exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y :$ trace $z = 1$, $|\,\text{trace } z \circ \Phi| \leqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon)\,\|\Phi\|\ \forall\, \Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$.

Следствие 2.1.3. *Пусть* $j :\ Y^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{I}(Y,Y)^*$ *— естественное отображение (пространство* $\mathrm{I}(Y,Y)$*, снабжено обычной операторной нормой). Если* I *— операторный идеал, то пространство* Y *не обладает свойством* λ-MAP(I) *тогда и только тогда, когда* $\|j^{-1}\| > \lambda$ *(эквивалентно,* $\|j^{-1}\| > \lambda + \varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$*). Таким образом,* $Y \in \lambda$-MAP(I) $\iff$ $\lambda^{-1}\|z\|_{Y^*\widehat{\otimes}Y} \leqslant \|j(z)\|_{\mathrm{I}(Y,Y)^*} \leqslant \|z\|_{Y^*\widehat{\otimes}Y}$ $\forall\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y$ *(т.е.* j *является* λ*-изометрическим вложением или, что здесь равносильно, является* $\lambda+\varepsilon$*-изометрией для каждого* $\varepsilon > 0$*).*

В случае $\lambda = +\infty$ аналогичные рассуждения показывают, что имеет место

Лемма 2.1.2. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin$ AP(I);
2) $\exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y :$ trace $z = 1$, trace $z \circ \Phi = 0\ \forall\, \Phi \in \mathrm{I}(Y,Y)$;
3) *естественное отображение* $j : Y^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{I}(Y,Y)^*$ *не взаимно однозначно.*

2. AP **не влечет** BAP(I). Пусть Y — банахово пространство, I —операторный идеал. Через $\mathrm{I}^{\mathrm{dual}}$ мы как обычно обозначаем дуальный к I идеал ($T \in \mathrm{I}^{\mathrm{dual}} \iff T^* \in \mathrm{I}$). Нам будет удобно также обозначать через $\mathrm{I}_*(Y^*, Y^*)$ линейное подпространство в $\mathrm{L}(Y^*, Y^*)$, состоящее из операторов, сопряженных к операторам из $\mathrm{I}(Y,Y)$,

$$\mathrm{I}_*(Y^*, Y^*) = \{U \in \mathrm{L}(Y^*, Y^*) :\ \exists\, T \in \mathrm{I}(Y,Y),\ U = T^*\}.$$

Для $A \geqslant 0$ конечномерного подпространства L в Y^* определим нормы $|||\cdot|||^1_{A,L}$ и $|||\cdot|||^\infty_{A,L}$ в Y^*, эквивалентные исходной: если $y' \in Y^*$, то

$$|||y'|||^1_{A,L} = \|y'\| + Ad(y', L),$$
$$|||y'|||^\infty_{A,L} = \max\{\|y'\|; Ad(y', L)\},$$

где $d(y', L) = \inf\{\|y' - l\| : \ l \in L\}$. Эти нормы дуальны к некоторым нормам на Y, которые мы будем обозначать теми же символами. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — совокупности всех норм (на Y) $|||\cdot|||^1_{A,L}$ и $|||\cdot|||^\infty_{A,L}$ соответственно.

Для банахова пространства X нам удобно будет писать $X \in (A_{\mathrm{I}})$, если

a_1) $X^* \in \mathrm{BAP(I)}$, либо

a_2) единичный шар пространства $\mathrm{I}(X^*, X^*)$ плотен в топологии поточечной сходимости в множестве операторов

$$\{U\Phi : \ \Phi \in \mathrm{I}(X^*, X^*),\ U \in \mathrm{L}(X^*, X^{***}),\ \|U\Phi\| \leqslant 1\}.$$

Теорема 2.2.1. *Если $Y \in (A_{\mathrm{I}})$ и для любой нормы $\alpha \in \mathcal{A}_1$ $(Y, \alpha) \in 1\text{-}\mathrm{MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, то $Y^* \in 1\text{-}\mathrm{MAP(I)}$.*

Теорема 2.2.2. 1) *Если $Y \in (A_{\mathrm{I}})$ и для любой нормы $\alpha \in \mathcal{A}_1$ $(Y, \alpha) \in \lambda\text{-}\mathrm{MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, где $\lambda < +\infty$, то $Y^* \in 2\lambda\,(4\lambda - 3)\text{-}\mathrm{MAP}(I)$.*

2) *Если $Y \in (A_{\mathrm{I}})$ и для любой нормы $\alpha \in \mathcal{A}_\infty$ $(Y, \alpha) \in \lambda\text{-}\mathrm{MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, где $\lambda < +\infty$, то $Y^* \in 8\lambda^2\text{-}\mathrm{MAP}(I)$.*

Теорема 2.2.3. *Для каждого из перечисленных ниже идеалов операторов I существует банахово пространство Z со свойством аппроксимации (Гротендика), не обладающее свойством $\mathrm{BAP(I)}$.*

1) *идеал компактных операторов;*

2) *идеал слабо компактных операторов;*

3) *идеал строго сингулярных операторов;*

4) *идеал условно слабо компактных операторов;*

5) *идеал $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$;*

6) *идеал вполне непрерывных операторов.*

Теорема 2.2.4. *Для каждого из идеалов I, перечисленных в теореме 2.3, существуют банахово пространство Z и оператор $T \in \mathrm{L}(Z, Z)$ со следующими свойствами:*

а) $T = \sum z'_n \otimes z_n$, $z'_n \in Z^*$, $z_n \in Z$ *(ряд сходится в $\mathrm{L}(Z, Z)$);*

б) $T \notin \mathrm{N}(Z, Z)$; *ряд $\sum \langle z'_n, z_n\rangle$ расходится;*

в) $|\operatorname{trace} TU| = |\sum \langle z'_n, Uz_n\rangle| \leqslant \|U\|$ *для всякого $U \in \mathrm{I}(Z, Z)$;*

г) $T^* \in \mathrm{N}(Z^*, Z^*)$.

Перед тем, как приступить к доказательству, сделаем несколько замечаний по поводу первых двух теорем.

В случае, когда $\mathrm{I}(Y, Y) = Y^* \otimes Y$ (тогда условие a_2 выполнено; см. [80, стр. 129]), утверждение теоремы 2.2.1 доказано Джонсоном [90]. Следует отметить, что идея его доказательства используется нами ниже (в основном при доказательстве теоремы 2.2.1). Теорема 2.2.1, однако, не является центральной в параграфе и приведена главным образом для полноты (тем более, что она получается в процессе доказательства остальных теорем как побочный результат).

В [76] установлено. что если $(Y, \alpha) \in \lambda$-MAP для всех $\alpha \in \mathcal{A}_1$, то $Y^* \in 2\lambda\,(4\lambda+1)$-MAP. Небольшое улучшение константы (теорема 2.2.2) по сравнению с [76], по–видимому, представляет интерес. Однако более любопытным было бы выяснить (хотя бы в предположениях теоремы 2.2.2), верна ли следующая

Г и п о т е з а. Существует абсолютная постоянная $C \geqslant 1$ такая, что если $(Y, \alpha) \in \lambda$-MAP($\mathrm{I}^{\mathrm{dual}}$) для всякой нормы α на Y, эквивалентной исходной, то $Y^* \in C\lambda$-MAP(I).

Возможно, что $C = 1$. Однако, вопрос по-прежнему открыт.

3. Доказательства теорем 2.2.1 – 2.2.4. Мы начнем с рассмотрения банахова пространства X, сопряженное к которому не обладает свойством C-MAP(I). В результате некоторой эквивалентной перенормировки пространства X возникнет банахово пространство Y без свойства $(1+\tau)$-MAP($\mathrm{I}^{\mathrm{dual}}$), если только $(1+\tau)C^{-1}(1+A)+2A^{-1}\tau < 1$ (число A можно варьировать). Попутно будет доказана теорема 2.2.1 (надо положить $\tau = 0$ и воспользоваться следствием 2.1.1). Полагая в последнем неравенстве $A = 4\tau$ (при $\tau \neq 0$), мы получим теорему 2.2.2,1) (а также, немного видоизменяя рассуждения, 2.2.2,2)). Одновременно будет подготовлен фундамент для построения банахова пространства Z из теоремы 2.2.3 и оператора T из теоремы 2.2.4. Нам останется лишь взять в качестве X некоторое конкретное пространство со специальными свойствами и закончить конструкцию, а вместе с тем и доказательства всех теорем из п. 2.

Итак, пусть $C \in [1, +\infty)$ и X — такое банахово пространство, что $X^* \notin C$-MAP(I), где I — некоторый операторный идеал. Пусть, далее, $\tau \geqslant 0$, $A \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$.

1) *Перенормировка пространства* X. По следствию 2.1.1 найдется такое число $\nu > 0$, $\nu^{-1} > C$, что $X^* \notin \nu^{-1}$-MAP(I). По следствию 2.1.2

$$\exists\, z \in X^* \widehat{\otimes} X^{**} : \ \mathrm{trace}\ z = 1, |\,\mathrm{trace}\ z \circ \Phi| \leqslant \nu \|\Phi\| \ \ \forall\, \Phi \in \mathrm{I}(X^*, X^*).$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $\|z\|_\wedge = \|z\|_{X^* \widehat{\otimes} X^{**}} = 1$. Действительно, если для X выполнено условие a_1), то $\lambda_{X^*} < \infty$ (см. следствие 2.1.1) и мы можем взять ν^{-1} сколь угодно близким к λ_{X^*}; в этом случае норма $\|z\|_\wedge$ должна быть близка к 1 (следствие 2.1.3). Пусть выполнено условие a_2). Тогда существует такой оператор $U \in \mathrm{L}(X^{**}, X^{**})$, что $\|U\| = 1$ и $\mathrm{trace}\ Uz = \|z\|_\wedge$. Положим $z_1 = Uz/\|z\|_\wedge \in X^* \widehat{\otimes} X^{**}$. Тогда $\mathrm{trace}\ z_1 = 1$ и $\|z\|_\wedge = 1$, так как

$$1 \leqslant |\,\mathrm{trace}\ z_1| \leqslant \|z\|_\wedge = \sup_{\|V\| \leqslant 1} \leqslant \|U\| \leqslant 1.$$

Кроме того, $|\,\mathrm{trace}\ z_1 \circ \Phi| \leqslant \nu \|\Phi\|$ в силу условия a_2).

Пусть $z = \sum y_n' \otimes x_n'', y' \in Y^*, x_n'' \in X^{**}, \sum \|y_n'\| \leqslant 1, \max\{\|x_n''\| : \ 1 \leqslant n < +\infty\} \leqslant 1 + \varepsilon$.

Выберем такое N, что для $T_0 = \sum_1^N y_n' \otimes x_n''$

а) $\mathrm{trace}\ T_0 > 1 - \varepsilon$;

б) $|\,\mathrm{trace}\ T_0 \Phi| < (\nu + \varepsilon)\,\|\Phi\| \ \ \forall\, \Phi \in \mathrm{I}(X^*, X^*)$.

Пусть $L = [y'_n]_1^N$; $\{x_n\}_1^N$ — такой набор векторов в X, что $x_n|_L = x''_n|_L$ и $\max\{\|x_n\| : n \leqslant N\} \leqslant 1 + 2\varepsilon$; $E = [x_n]_1^N$.

Определим оператор в X :

$$T = \sum_1^N y'_n \otimes x_n \in X^* \otimes X \quad (\text{trace } T = \text{trace } T_0 > 1_\varepsilon).$$

Наконец для $x' \in X^*$ положим

$$|||x'||| = |||x'|||^1_{A,L} = \|x'\| + Ad(x', L),$$

где $d(x', L) = \inf\{\|x' - l\| : l \in L\}$. Пространство $\{X, |||\cdot|||\}$ с соответствующей нормой (предсопряженное к $\{X^*, |||\cdot|||\}$) обозначим через X_A (потом будет ясно, почему мы опустили индекс L); кроме того, в своем месте мы посмотрим, что получится, если в качестве $|||\cdot|||$ взять $|||\cdot|||^\infty_{A,L}$.

2) *Следствие из утверждения* $X_A \in (1+\tau)$-MAP$(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$. Предположение о том, что X_A обладает свойством $(1+\tau)$-MAP$(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}},)$ позволяет нам, в частности, найти такой оператор $\Phi \in \mathrm{I}^{\mathrm{dual}}(X, X)$, что $|||\Phi||| \leqslant 1+\tau$ и $|||\Phi e - e||| \leqslant \varepsilon\,\|e\|\ \forall e \in E$. Более того, существует сеть $\{\Phi_\alpha\} \subset \mathrm{I}^{\mathrm{dual}}(X, X)$ таких операторов Φ_α, что $|||\Phi_\alpha||| \leqslant 1+\tau$ и $\Phi_\alpha x \to x\ \ \forall x \in X$. Если $l \in L$, то $\langle \Phi^*_\alpha l, x\rangle = \langle l, \Phi_\alpha x\rangle \to \langle l, x\rangle$. Поэтому $\Phi^*_\alpha l \xrightarrow{w^*} l$ и, следовательно, $\varliminf\limits_\alpha \|\Phi^*_\alpha l\| \geqslant \|l\|$. Но

$$\|\Phi^*_\alpha l\| + Ad(\Phi^*_\alpha, L) = |||\Phi^*_\alpha l||| \leqslant (1+\tau)\,\|l\|.$$

Отсюда

$$\|l\| + \varliminf_\alpha Ad(\Phi^*_\alpha l, L) \leqslant \varliminf_\alpha \|\Phi^*_\alpha l\| + \varliminf_\alpha Ad(\Phi^*_\alpha l, L) \leqslant \varliminf_\alpha \left(\|\Phi^*_\alpha l\| + Ad(\Phi^*_\alpha l, L)\right) \leqslant (1+\tau)\,\|l\|$$

и, таким образом, $\varliminf\limits_\alpha Ad(\Phi^*_\alpha l, L) \leqslant \tau\|l\| \quad \forall\, l \in L$. Выбирая δ-сеть в шаре из L при достаточно малом $\delta > 0$, мы получаем, что существует такой оператор $\Phi \in \mathrm{I}^{\mathrm{dual}}(X, X)$, что $|||\Phi||| \leqslant 1+\tau$, $|||\Phi e - e||| \leqslant \varepsilon\,|||e|||$ для всех $e \in E$; $d(\Phi^* l, L) \leqslant A^{-1}(\tau+\varepsilon)\,\|l\|$ для всех $l \in L$.

Оператор Φ^* не слишком далеко от подпространства L "разбрасывает" его элементы.

3) *Двусторонняя оценка числа* $|\,\text{trace } T\Phi|$. Она даст нам неравенство, о котором говорилось в начале параграфа. Для оператора Φ из 2) мы имеем, во-первых,

$$|\,\text{trace } T\Phi| = \left|\sum_1^N \langle y'_n, \Phi x_n\rangle\right| \geqslant \left|\sum_1^N \langle y'_n, x_n\rangle\right| - \left|\sum_1^N \langle y'_n, \Phi x_n - x_n\rangle\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\sum_1^N \langle y'_n, x''_n\rangle\right| - \sum_1^N |||\Phi x_n - x_n|||\,|||y'_n||| \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \varepsilon - \max\{\varepsilon\,|||x_n||| : n \leqslant N\} \geqslant 1 - \varepsilon - \varepsilon\,(1+2\varepsilon).$$

Во-вторых, если $l_n \in L$ и $d(\Phi^* y_n', L) = \|\Phi^* y_n' - l_n\|$, то

$$|\operatorname{trace} T\Phi| =$$

$$= \left| \sum_1^N \langle \Phi^* y_n', x_n \rangle \right| \leqslant \left| \sum_1^N \langle \Phi^* y_n', x_n - x_n'' \rangle \right| + |\operatorname{trace} T_0 \Phi^*| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_1^N \langle \Phi^* y_n' - l_n, x_n - x_n'' \rangle \right| + (\nu + \varepsilon)\, \|\Phi\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n \leqslant N} \{\|x_n - x_n''\|\} \left| \sum_1^N d\,(\Phi^* y_n', L) \right| + (\nu + \varepsilon)\, \|\Phi\|.$$

Из сопоставления этих оценок уже можно получить утверждение 2) теоремы 2.2.2. Действительно, не используя оценку для $d(\Phi^* y_n', L)$, установленную в 2) для нормы $|||\cdot||| = |||\cdot|||^1_{A,L}$, можем продолжить последнее неравенство следующим образом

$$\leqslant (2 + 3\varepsilon) \sum_1^N A^{-1}\, |||\Phi^* y_n'|||^\infty_{A,L} + (\nu + \varepsilon)\, A\, |||\Phi|||^\infty_{A,L} \leqslant$$

$$\leqslant \left[(2 + 3\varepsilon)\, A^{-1} + A\,(\nu + \varepsilon) \right]\, |||\Phi|||^\infty_{A,L},$$

и если $|||\Phi|||^\infty_{A,L} \leqslant 1 + \tau$, то, объединяя оценки сверху и снизу, мы получаем

$$1 - \varepsilon - \varepsilon\,(1 + 2\varepsilon) \leqslant |\operatorname{trace} T\Phi| \leqslant (1 + \tau)\, \left[(2 + 3\varepsilon)\, A^{-1} + A\,(\nu + \varepsilon) \right].$$

Так как $\nu < C^{-1}$, то, взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, получим

$$1 < (1 + \tau)\, \left(2A^{-1} + A\, C^{-1} \right),$$

откуда при $A = 4\,(1 + \tau)$ вытекает, что $1 < 2^{-1} + 4\, C^{-1}\, (1 + \tau)^2$, или $C < 8(1 + \tau)^2$. Это означает, что если $X^* \notin C\text{-MAP(I)}$ и $X \in \lambda\text{-MAP}(\mathrm{I}^{\mathrm{dual}})$, то $C < 8\lambda^2$.

Продолжим теперь оценку сверху для $|\operatorname{trace} T\Phi|$, считая X_A снова снабженным нормой $|||\cdot|||^1_{A,L}$. Отметим сначала, что если не использовать оценки для $d(\Phi^* y_n', L)$ из 2), а продолжать неравенство также, как и в случае нормы $|||\cdot|||^\infty_{A,L}$ (как это только что было), то получится оценка Фигеля–Джонсона $C < 2\lambda\,(4\lambda + 1)$. Мы, однако, воспользуемся неравенством $d(\Phi^* y_n', L) \leqslant A^{-1}\,(\tau + \varepsilon)\, \|y_n'\|$ из 2), что даст нам

$$|\operatorname{trace} T\Phi| \leqslant (2 + 3\varepsilon) \sum_1^N A^{-1}\,(\tau + \varepsilon)\, \|y_n'\| + (\nu + \varepsilon)\, \|\Phi\| \leqslant$$

$$\leqslant (2 + 3\varepsilon)\, A^{-1}\,(\tau + \varepsilon) + (\nu + \varepsilon)\,(1 + A)\,(1 + \tau).$$

Наконец, принимая во внимание тот факт, что $\nu < C^{-1}$, и взяв ε малым, получим

$$1 < 2\tau\, A^{-1} + (1+A)\,(1+\tau)\,C^{-1}.$$

Здесь надо различать два случая: $\tau = 0$ и $\tau \neq 0$. Если $\tau = 0$, то $1 < (1+A)\,C^{-1} \iff C < 1+A$. Если $X^* \notin C$-MAP(I), но $X_A \in 1$-MAP($\mathrm{I}^{\mathrm{dual}}$), то $C < 1+A$, каково бы ни было A. Это противоречит следствию 1.3-2.1.1 при малых A (если $C = 1$, то его можно немного увеличить). Таким образом, доказана теорема 2.1-2.2.1.

Если $\tau \neq 0$, то взяв $A = 4\tau$, мы получим $C < 2\,(1+4\tau)\,(1+\tau)$. Поэтому для $\lambda = 1+\tau$ из $X_A \in \lambda$-MAP($\mathrm{I}^{\mathrm{dual}}$) и $X^* \notin C$-MAP(I) вытекает, что $C < 2\lambda\,(4\lambda - 3)$.

4) *Подведение итогов.* Итак, теоремы 2.2.1 и 2.2.2 нами уже доказаны, и мы должны приступать к доказательству теорем 2.2.3 и 2.2.4. Все необходимое для этого уже имеется. Мы, в частности, установили (см. 1)–3)), что *если* $X \in (A_{\mathrm{J}})$ *и* $X^* \notin$ BAP(J), *где* J *— некоторый операторный идеал, то для любого* $\lambda \geqslant 1$ *существует эквивалентная норма* $|||\cdot|||_\lambda$ *на* X, *с которой пространство* $X_\lambda = (X, |||\cdot|||_\lambda)$ *обладает следующими свойствами:*

(*i*) $X_\lambda \notin \lambda$-MAP($\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$);

(*ii*) *существует оператор* $T_\lambda \in X_\lambda^* \otimes X_\lambda$ *такой, что* trace $T_\lambda \geqslant \lambda$, $|\,\mathrm{trace}\ T_\lambda\Phi| \leqslant 2^{-\lambda}\,|||\Phi|||_\lambda\ \ \forall \Phi \in \mathrm{J}^{\mathrm{dual}}(X_\lambda, X_\lambda)$.

Образуем из пространств X_n $(\lambda = n = 1, 2, \dots)$ новое пространство $Z = (\sum X_n)_{l_2}$. В силу (i) пространство Z не обладает свойством BAP($\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$). Кроме того, если мы рассмотрим действующий в Z оператор $T = \oplus T_n$, то в силу (ii) для T можно найти представление $T = \sum_1^\infty z_n' \otimes z_n$ такое, что

$$|\,\mathrm{trace}\ TU| \leqslant \sum_1^\infty 2^{-n}\,\|U\|_Z \leqslant \|U\|_Z$$

для всякого $U \in \mathrm{J}^{\mathrm{dual}}(Z, Z)$, но оператор T не является ядерным и $\sum \langle z_n', z_n\rangle = +\infty$. Далее, если предположить, что пространство X обладает свойством AP(I_1,) где I_1 — некоторый операторный идеал, то, конечно, $Z \in$ AP(I_1).

В частности, нами доказан пункт A) следующей теоремы.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathrm{J}, \mathrm{I}, \mathrm{I}_1$ *— три идеала операторов.*

A) *Пусть банахово пространство* X *таково, что* $X \in$ AP(I_1), *но* $X^* \notin$ BAP(J). *Если* X *удовлетворяет условию* a_2) *для идеала* J, *то*

1) *существует банахово пространство* Z *со свойством* AP(I_1), *не обладающее свойством* BAP($\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$), *и*

2) *существует оператор* $T \in \mathrm{L}(Z, Z)$ *такой, что*

а) $T = \sum z_n' \otimes z_n$, $z_n' \in Z^*$, $z_n \in Z$ (*ряд сходится в* $\mathrm{L}(Z, Z)$);

б) $T \notin \mathrm{N}(Z, Z)$; *ряд* $\sum \langle z_n', z_n\rangle$ *расходится;*

в) $|\,\mathrm{trace}\ TU| = |\sum \langle z_n', Uz_n\rangle| \leqslant \|U\|$ *для всякого* $U \in \mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$.

Если пространство X^* сепарабельно, то пространство Z может быть выбрано так, что Z^* тоже сепарабельно; в этом случае $T^* \in \mathrm{N}(Z^*, Z^*)$.

Б) *Если банахово пространство X таково, что $X^* \notin \mathrm{AP}(\mathrm{I}_*)$, но $X \in \mathrm{AP}(\mathrm{I}_1)$, то кроме* 1) *и* 2) *из пункта* А) (*где вместо* $\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$ *рассматривается идеал* I) *верно*

2г) $T^* \in \mathrm{N}(Z^*, Z^*)$.

Для доказательства пункта Б) достаточно установить, что если $X^* \notin \mathrm{AP}(\mathrm{I}_*)$ (здесь, возможно, $X \notin (A_{\mathrm{I}_*})$), то в (ii) можно дополнительно утверждать, что

(iii) $\|T_\lambda^*\|_{\mathrm{N}(X_\lambda^*, X_\lambda^*)} \leqslant 2^{-\lambda}$

(идеал $\mathrm{J}^{\mathrm{dual}}$ в (i) и (ii) надо, конечно, заменить на I).

Действительно, по лемме 2.1.2 найдется элемент $z \in X^* \widehat{\otimes} X^{**}$ такой, что $\operatorname{trace} z = 1$, но $\operatorname{trace} z \circ \Phi = 0$ для любого $\Phi \in \mathrm{I}_*(X^*, X^*)$. Будем считать, что именно этот элемент z и взят нами в начале этого раздела (см. 1)); теперь, однако, не обязательно $\|z\|_\wedge = 1$). Оценим ядерную норму оператора T^* в X_A^*, построенного по элементу z (см. 1)–3)). Имеем

$$T^* = \sum_1^N x_n \otimes y_n' = \sum_1^N (x_n - x_n'') \otimes y_n' + \sum_1^N x_n'' \otimes y_n' = \sum_1^N (x_n - x_n'') \otimes y_n' - \sum_{N+1}^\infty x_n'' \otimes y_n'$$

(мы используем тот факт, что элемент z порождает нулевой оператор). Таким образом,

$$\|T^*\|_{\mathrm{N}(X_A^*, X_A^*)} \leqslant \sum_1^N |||x_n - x_n''|||\, |||y_n'||| + \sum_{N+1}^\infty |||x_n''|||\, |||y_n'|||.$$

Если $x' \in X^*$, $|||x'||| \leqslant 1, l \in L, \|x' - l\| = d(x', L)$, то при $n \leqslant N$

$$|\langle x_n - x_n'', x' \rangle| = |\langle x_n - x_n'', x' - l \rangle| \leqslant \|x_n - x_n''\|\, d(x', L) \leqslant C\, A^{-1}$$

(константа C зависит от $\|z\|_\wedge$). Кроме того, $|||y_n'||| \leqslant (1+A)\, \|y_n'\|$, $n > N$, и $|||y_n'||| = \|y_n'\|$, $n \leqslant N$. Поэтому

$$\|T^*\|_{\mathrm{N}(X_A^*, X_A^*)} \leqslant C A^{-1} \sum_1^N \|y_n'\| + (1 + A)\,(1 + \varepsilon) \sum_{N+1}^\infty \|y_n'\|.$$

Положив $A = \left(\sum_{N+1}^\infty \|y_n'\|\right)^{-1/2}$, мы получим, что для больших N ядерная норма оператора T^* мала (заметим, что в 3) оценка сверху упрощается).

5) *Завершение доказательств теорем* 2.2.3 и 2.2.4. В силу теоремы 2.3.1,Б) нам осталось лишь показать, что для каждого из операторных идеалов I, перечисленных в теореме 2.2.3 (1)–6)), найдется банахово пространство X со свойством аппроксимации такое, что $X^* \notin \mathrm{AP}(I_*)$.

Пусть для идеалов 1)–5) Y — подпространство в l_1, не обладающее свойством CAP, а для идеала 6) — подпространство в c_0 без свойства CAP (см. [162]). Существует банахово пространство X с базисом и гомоморфизм $\varphi : X \to Y$ такие, что φ^* изоморфно отображает Y^* на дополняемое подпространство в X^*, причем в случае $Y \subset c_0$ X^* сепарабельно (см. [101] и п. 0.4.9). Обозначим через P суперпозицию проектора из X^* на $\varphi^*(Y^*)$ и отображения $(\varphi^*)^{-1}$.

Если $U \in \mathrm{I}(X,X)$, то $\varphi U \in \mathrm{I}(X,Y)$. Для идеалов 1)–5) пространство Y слабо секвенциально полно; поэтому всякий условно слабо компактный оператор со значениями в Y слабо компактен и, следовательно, компактен (Y обладает свойством Шура). Если $\varphi U \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$, то оператор φU условно слабо компактен (см. следствие I.4.2.2), следовательно, компактен. Если φU — строго сингулярный оператор, то φU не является изоморфизмом ни на какой изоморфной копии в Y пространства l_1; поэтому оператор φU — условно слабо компактный (см. теорему I.4.2.1) и, значит, компактный. Наконец, пусть I — идеал из 6) и φU — вполне непрерывный оператор. Так как в этом случае пространство X^* сепарабельно, то всякая ограниченная последовательность в X имеет слабую подпоследовательность Коши, откуда следует, что φU — компактный оператор. Итак, во всех случаях операторы φU (для $U \in \mathrm{I}(X,X)$) компактны.

Так как $Y \notin$ CAP, то найдется такой элемент $w \in Y^*\widehat{\otimes}Y$, что trace $w = 1$ и trace $w \circ \Phi = 0 \quad \forall \Phi \in \mathrm{K}(Y,Y)$. Пусть $w = \sum y'_n \otimes y_n$, где $y'_n \in Y^*$, $y_n \in Y$, причем $\sum \|y'_n\| \, \|y_n\| < \infty$. Положим

$$z = \sum \varphi^*(y'_n) \otimes P^*(y_n) \in X^*\widehat{\otimes}X^{**}.$$

Тогда trace $z = 1$. Если же $U \in \mathrm{I}(X,X)$, то trace $z \circ U^* = \sum \langle PU^*\varphi^*(y'_n), y_n \rangle$. Так как оператор φU компактен, то $U^*\varphi^*$ переводит единичный шар B из Y^* в компактное множество в X^*; следовательно, образ $PU^*\varphi^*(B)$ — компактное в Y^* множество, откуда вытекает, что оператор $PU^*\varphi^*$ сопряжен к некоторому компактному оператору $\Phi \in \mathrm{L}(Y,Y)$. Следовательно,

$$\operatorname{trace} z \circ U^* = \sum \langle y'_n, \Phi y_n \rangle = \operatorname{trace} w \circ \Phi = 0.$$

По лемме 2.1.2 $X^* \notin \mathrm{AP}(\mathrm{I}_*)$.

4. Другой подход: насколько хорошими могут быть операторы без свойства C-MAP(J)?

В этом разделе на тот же вопрос, который обсуждался выше и который помещен в название параграфа, мы посмотрим с другой стороны. Мы также применим несколько другой метод для получения более сильных (в некоторых направлениях) результатов, но не столько относительно тождественных отображений в банаховых пространствах, сколько относительно произвольных операторов, действующих между "хорошими" и "плохими" пространствами.

Напомним, что банахово пространство X вполне сепарабельно, если как оно, так и все его сопряженные пространства сепарабельны. Определения инъективных и сюръективных операторных идеалов см. в [27] или в п. 0.3.1 (отметим, что примерами одновременно инъективных и сюръективных операторных идеалов могут служить идеалы компактных и слабо компактных операторов).

Нам удобно в этом месте еще раз сформулировать одно из центральных утверждений из [101] (см. лемму 4.2.9 в п. 0.4.9):

Лемма 2.4.1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства G существуют сепарабельное банахово пространство Z с базисом и линейный гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to G$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно), подпространство $\varphi^* G^*$ дополняемо в Z^{***} и ядро гомоморфизма φ есть $\pi_Z Z$.*

Вот центральный результат этого раздела.

Теорема 2.4.1. *Пусть J — какой-либо замкнутый инъективный и сюръективный идеал операторов, содержащийся в идеале слабо компактных операторов. Пусть, далее, сепарабельное банахово пространство G не обладает свойством $\mathrm{AP}(\mathrm{J})$ и Z, φ — из леммы 2.4.1, так что, в частности,*

1) *Z^{**} имеет базис; $Z^{**}/Z \cong G$ и $Z^{***} \cong \varphi^* G^* \oplus \pi_Z Z$ (следовательно, пространство Z вполне сепарабельно, если G таково).*

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует оператор $t_1 \in \mathrm{L}(Z^{**}/Z, Z)$ такой, что

2.0) *оператор $t_1 : Z^{**}/Z \to Z^{**}$ — ядерный;*

2.1) *$t_1(Z^{**}/Z) \subset Z$ и оператор t_1, рассматриваемый как отображение из Z^{**}/Z в $Z (= \pi_Z Z)$, не является ядерным;*

3) $\operatorname{trace} \varphi \circ t_1 = 1$;

4) *для любого $\alpha \geqslant 1$ существует эквивалентная норма $|||\cdot|||_\alpha$ на Z^{**} (не зависящая от ε), с которой пространство $W_\alpha := (Z^{**}, |||\cdot|||_\alpha)$ обладает свойствами:*

  a) *$W_\alpha \in \alpha$-MAP; $W_\alpha \notin \beta$-MAP(J), $\forall \beta < \alpha$;*

  b) $\|\varphi\|_{\mathrm{L}(W_\alpha, Z^{**}/Z)} \leqslant 1/\alpha$;

  c) $\|t_1\|_{\mathrm{N}(Z^{**}/Z, W_\alpha)} \geqslant \alpha$;

  d) *$|\operatorname{trace} U \circ t_1| \leqslant \|U\|(1+\varepsilon)$ для каждого $U \in \mathrm{J}(W_\alpha, Z^{**}/Z)$; таким образом, $t_1 \in \mathrm{J}(W_\alpha, Z^{**}/Z)^*$, причем в этом сопряженном пространстве $\|t_1\| \leqslant 1+\varepsilon$; тем более $\|t_1\|_{\mathrm{I}(Z^{**}/Z, W_\alpha)} \leqslant 1+\varepsilon$;*

5) *если $t := t_1 \circ \varphi \in Z^{***} \widehat{\otimes} Z^{**}$, $W := Z^{**}$ и W_α — пространство их 4), то*

  a) $\operatorname{trace} t = 1$,

  b) $1/\alpha \leqslant \|t\|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)} \leqslant \|t\|_{\mathrm{J}^*(W_\alpha, W_\alpha)} \leqslant (1+\varepsilon)\, 1/\alpha$,

  c) $1 \leqslant \|t\|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} \leqslant (1+\varepsilon)$,

  d) $\|t\|_{\mathrm{I}(W, W_\alpha)} \leqslant \|t\|_{\mathrm{J}^*(W, W_\alpha)} \leqslant 1+\varepsilon$,

  e) *$\|t\|_{\mathrm{N}(W, W_\alpha)} \geq c\,\alpha$ для некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.*

Доказательство. Оно будет представлять из себя некоторую комбинацию методов, примененных в предыдущих разделах и в работах [76], [52] ("метод перенормировок") и в [25], [52] ("метод лифтинга").

Итак, пусть Z — банахово пространство Линденштраусса, построенное согласно лемме 2.4.1 по пространству G, так что пространство $F := Z^{**}/Z$ не обладает свойством $\mathrm{AP}(\mathrm{J})$. Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$, используя лифтинг из

F в Z^{**}, мы можем найти тензорный элемент $t_1 \in F^*\widehat{\otimes}Z^{**}$ с тем свойством, что $\operatorname{trace}(U\varphi)\circ t_1 = 0$ для любого J-оператора $U : F \to F$ и

$$(\star) \qquad t_1(F) \subset \pi_Z Z,\ \operatorname{trace}\varphi\circ t_1 = 1 \geqslant (1+\varepsilon)^{-1/3}\|\varphi\circ t_1\|_{F^*\widehat{\otimes}F} \geqslant (1+\varepsilon)^{-1}\,\|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes}Z^{**}}$$

(в частности, тензорный элемент $\varphi\circ t_1$, где $\varphi : Z^{**} \to F$ — фактор отображение, порождает нулевой оператор).

Более подробно: пусть $t_0 \in F^*\widehat{\otimes}F$ — такой тензор

$$t_0 = \sum_{j=1}^{\infty} f'_j \otimes f_j,$$

что $\operatorname{trace} t_0 = 1 \geqslant (1+\varepsilon)^{-1/3}\|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes}F}$, $\sum_j \|f'_j\|\,\|f_j\| \leqslant (1+\varepsilon)^{1/3}\,\|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes}F}$ и $\operatorname{trace} U\circ t_0 = \sum_j\langle f'_j, Uf_j\rangle = 0$ для каждого J-оператора $U \in \mathrm{L}(F,F)$ (лемма 2.1.2). Поскольку φ есть фактороотображение и, в частности, переводит единичный шар из Z^{**} на единичный шар пространства F, то найдется последовательность $\{z''_j\} \in Z^{**}$ такая, что $\|z''_j\| \leqslant (1+\varepsilon)^{1/3}\,\|f_j\|$ и $\varphi(z''_j) = f_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. Положим $t_1 := \sum_j f'_j \otimes z''_j \in F^*\widehat{\otimes}Z^{**}$. Так как в Z^{**} имеется свойство аппроксимации, то след тензорного элемента $t := t_1\circ\varphi \in Z^{***}\widehat{\otimes}Z^{**}$ (отождествимого в данном случае с соответствующим оператором) корректно определен и равен

$$\operatorname{trace} t_1 \circ \varphi \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\langle \varphi^* f'_j, z''_j\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\langle f'_j, \varphi z''_j\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\langle f'_j, f_j\rangle \;=\; \operatorname{trace} t_0 \;=\; 1.$$

Поэтому также $\operatorname{trace}\varphi\circ t_1 = 1$. С другой стороны, $\widetilde{U\circ t_0} = 0$ для любого $U \in \mathrm{J}(F,F)$, так как $\operatorname{trace}(VU)\circ t_0 = 0$ для всех $V \in \mathrm{L}(F,F)$ и $U \in \mathrm{J}(F,F)$. Следовательно, для таких U имеет место равенство $\widetilde{(U\varphi)\circ t_1} = 0$, что, вместе с предыдущим, дает соотношения из $(\star)$:

$$\|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes}Z^{**}} = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f'_j \otimes z''_j\right\| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)^{1/3}\sum_{j=1}^{\infty}\|f'_j\|\,\|f_j\| \leqslant (1+\varepsilon)^{2/3}\,\|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes}F} = (1+\varepsilon)^{2/3}\,\|\varphi\circ t_1\|_{F^*\widehat{\otimes}F} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Мы покажем, что пространство Z и тензорный элемент t_1 удовлетворяют всем условиям теоремы.

Так как $1 = \operatorname{trace}\varphi\circ t_1 = \operatorname{trace} t_1\circ\varphi \leqslant \|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes}F} \leqslant 1+\varepsilon$, то мы получаем, что $1 = \operatorname{trace} t_0 \leqslant \|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes}F} \leqslant 1+\varepsilon$.

Для произвольного фиксированного числа $\alpha \geqslant 1$ мы определим эквивалентную норму на Z^{**} следующим образом: $|||z''||| = |||z''|||_\alpha = \max\{\|z''\|;\ \alpha d(z'', \pi_Z Z)\}$, где

$d(z'', \pi_Z Z) = \inf_{z\in Z} \|z'' - \pi_Z z\|$. Положим $W_\alpha = (Z^{**}, |||\cdot|||)$ (ниже мы часто будем отождествлять W_α и Z^{**} как линейные пространства).

Так как $\|z''\| \leqslant |||z''||| \leqslant \alpha||z''||$, то для тождественного отображения $j = j_\alpha : W_\alpha \to Z^{**}$ имеем: $\|j\| \leqslant 1$ и $\|j^{-1}\| \leqslant \alpha$. Пространство Z^{**} обладает свойством метрической аппроксимации MAP, поэтому $W_\alpha \in \alpha$-MAP. Для упрощения дальнейшего чтения, удобно иметь перед глазами следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} W_\alpha & \xrightarrow{j} & Z^{**} & \xrightarrow{t} & \pi_Z Z \subset Z^{**} & \xrightarrow{j^{-1}} & W_\alpha & \xrightarrow{R} & W_\alpha \\ & & \searrow^{\varphi} & & \nearrow^{t_1} & & & & \\ & & & F & & & & & \end{array}$$

Если $z'' \in Z^{**}$, то $\|\varphi(z'')\| = d(z'', Z) \leqslant \alpha^{-1}\, |||\, z''\, |||$, т.е. $\|\varphi\|_{\mathrm{L}(W_\alpha, F)} \leqslant 1/\alpha$, что доказывает $4b$). Следовательно,

$$\|\, t\, \|_{\mathrm{N}(W_\alpha,W_\alpha)} = \|j^{-1} \circ t_1 \circ \varphi\|_{\mathrm{N}(W_\alpha,W_\alpha)} \leqslant \\ \|j^{-1}\|\, \|t_1\|_{\mathrm{N}(F,Z^{**})}\, \|\,\varphi\,\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,F)} \leqslant 1+\varepsilon.$$

С другой стороны, $\|t\|_{\mathrm{N}(W_\alpha,W_\alpha)} \geq \mathrm{trace}\; t = 1$. Это доказывает выполнение условия 5c).

Для доказательства утверждения 5b) рассмотрим J-оператор $R \in \mathrm{J}(W_\alpha, W_\alpha)$, норма которого $|||R||| \leqslant 1$. Так как $t_1(F) \subset \pi_Z Z$ и $|||\cdot||| = ||\cdot||$ на $\pi_Z Z$, то мы получаем

$$|\,\mathrm{trace}\; R\circ t| = |\,\mathrm{trace}\; R\circ t_1 \circ \varphi| \leqslant ||R\pi_Z\|_{\mathrm{L}(Z,W_\alpha)}\, \|t_1\circ\varphi\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,W_\alpha)} \\ \leqslant \alpha^{-1}\,\|t_1\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,F)} \leqslant \alpha^{-1}\,\|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}} \leqslant \alpha^{-1}\,(1+\varepsilon).$$

Следовательно, $\|\, t\,\|_{\mathrm{J}^*(W_\alpha,W_\alpha)} \leqslant \alpha^{-1}(1+\varepsilon)$. Далее,

$$1 \leqslant \|\, t\,\|_{\mathrm{N}(Z^{**},Z^{**})} = \|\, t\,\|_{\mathrm{I}(Z^{**},Z^{**})} \\ \leqslant \|\, j\,\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,Z^{**})}\, \|\, t\,\|_{\mathrm{I}(W_\alpha,W_\alpha)}\, \|j^{-1}\|_{\mathrm{L}(Z^{**},W_\alpha)} \leqslant \alpha\,\|\, t\,\|_{\mathrm{I}(W_\alpha,W_\alpha)}$$

(первое равенство в этих соотношениях вытекает из того факта, что $Z^{**} \in$ MAP). Это доказывает 5b).

Для доказательства 5d) заметим, что если $R \in \mathrm{J}(W_\alpha, Z^{**})$ — произвольный оператор единичной нормы, то так же, как и выше, мы получаем

$$|\,\mathrm{trace}\; R\circ t| \leqslant ||R\pi_Z\|_{\mathrm{J}(Z,Z^{**})}\, \|t_1\circ\varphi\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,Z^{**})} \\ \leqslant \|t_1\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,F)}\, \|\,\varphi\,\|_{\mathrm{L}(Z^{**},F)} \leqslant \|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}} \leqslant (1+\varepsilon).$$

Теперь докажем 5e) и 4c). Поскольку $\|\,\varphi\,\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,F)} \leqslant 1/\alpha$ то

$$\|t_1\|_{\mathrm{N}(F,W_\alpha)} \equiv \|j^{-1}t_1\|_{\mathrm{N}(F,W_\alpha)} \geq \alpha\,|\,\mathrm{trace}\;\varphi\circ j^{-1}\circ t_1| = \alpha\,|\,\mathrm{trace}\;\varphi\circ t_1| = \alpha.$$

Отметим, что так как подпространство $\varphi^*(F^*)$ дополняемо в пространстве Z^{***}, то естественное отображение $F^*\widehat{\otimes}W_\alpha \to Z^{***}\widehat{\otimes}W_\alpha$ индуцированное оператором φ^* есть изоморфное вложение; так что $\|t\|_{\mathrm{N}(Z^{**},W_\alpha)} \geq c\alpha$.

Нам осталось лишь показать, что для полученных объектов верно утверждение 4d) (в силу произвольности числа ε и соответствующего выбора элемента t_1, из 4d), 4c) и следствия 2.1.3 вытекает второе утверждение в 4a)).

Пусть U — J-оператор из W_α в $F = Z^{**}/Z$. Так как тождественное вложение $i: Z \to W_\alpha = (Z^{**}, |||\cdot|||_\alpha)$ изометрично, то $\|Ui\| \leqslant \|U\|$. Положим $S = U - (Ui)^{**}j$, где $j: W_\alpha \to Z^{**}$ — тождественное отображение. Так как оператор U слабо компактен, то $(Ui)^{**}j \subset F$. Поэтому (в силу инъективности идеала J) S — J-оператор из W_α в F и $S|_{i(Z)} \equiv 0$. Следовательно (в силу сюръективности идеала J), S индуцирует J-оператор $S_1: F \to F, S = S_1\varphi j$, причем $\operatorname{trace} S_1\circ(\varphi\circ t_1) = \operatorname{trace} S\circ t_1$. Поскольку $\varphi\circ t_1$ обращается в нуль на J-операторах из F в F, то $\operatorname{trace} S_1\circ(\varphi\circ t_1) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{trace}((Ui)^{**}j)\circ t_1 = \operatorname{trace} U\circ t_1$. Далее,

$$|\operatorname{trace}(Ui)^{**}j\circ t_1| \leqslant \|(Ui)^{**}\|\,\|j\circ t_1\|_{\mathrm{N}(F,Z^{**})} \leqslant (1+\varepsilon)\,\|U\|.$$

Следовательно, $|\operatorname{trace} U\circ t_1| \leqslant (1+\varepsilon)\,\|U\|$. ■

Действуя также как в конце предыдущего раздела, мы из теоремы 2.4.1 получаем следующие дополнения к основным результатам п. 2 (см. теоремы 2.2.3 и 2.2.4).

Следствие 2.4.1. *Существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор U из E в F такие, что*

(i) E^* сепарабельно и $F \subset c_0$ (таким образом, $U^* \in \mathrm{RN}(E,F)$);

(ii) E имеет свойство аппроксимации;

(iii) каково бы не было положительное число C, оператор U не может быть аппроксимирован в топологии τ_c компактной сходимости вполне непрерывными операторами с нормами не больше, чем C.

Доказательство. Применим теорему 2.4.1 к случаю, когда G — подпространство в c_0 без CAP. Пусть $\{U_\beta\}$ — ограниченная сеть компактных операторов из W_α в $F = Z^{**}/Z$, сходящаяся поточечно к $\Psi := \alpha\,\varphi$. Тогда $\operatorname{trace} U_\beta\circ t_1 \to \operatorname{trace}\Psi\circ t_1 = \alpha$ и $\alpha = \lim_\beta|\operatorname{trace} U_\beta\circ t_1| \leqslant \overline{\lim}_\beta\|U_\beta\|$. Поэтому оператор Ψ не принадлежит замыканию в τ_c множества компактных операторов, нормы которых $< \alpha$, тогда как $\|\Psi\| \leqslant 1$. Остается заметить, что если U — вполне непрерывный оператор, то U компактен, так как пространство $F \cong G \subset c_0$ почти рефлексивно (тождественный оператор в нем условно слабо компактен). ■

Следствие 2.4.2. *Существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор U из E в F такие, что*

(i) $F \subset l_1$ (таким образом, $U \in \mathrm{RN}(E,F)$);

(ii) E имеет свойство аппроксимации;

(iii) каково бы не было положительное число C, оператор U не может быть аппроксимирован в топологии τ_c компактной сходимости операторами с нормами не больше, чем C, и такими, что либо

a) они являются строго сингулярными, либо
b) они являются условно слабо компактными, либо
c) сопряженные к ним являются операторами Радона-Никодима.

Доказательство. Применим теорему 2.4.1 к случаю, когда G — подпространство в l_1 без CAP. Пусть $\{U_\beta\}$ — ограниченная сеть компактных операторов из W_α в $F = Z^{**}/Z$, сходящаяся поточечно к $\Psi := \alpha\,\varphi$. Тогда $\operatorname{trace} U_\beta \circ t_1 \to \operatorname{trace}\Psi \circ t_1 = \alpha$ и $\alpha = \lim_\beta |\operatorname{trace} U_\beta \circ t_1| \leqslant \overline{\lim_\beta}\|U_\beta\|$. Поэтому оператор Ψ не принадлежит замыканию в τ_c множества компактных операторов, нормы которых $< \alpha$, тогда как $\|\Psi\| \leqslant 1$. Остается заметить, что если U — строго сингулярный (либо условно слабо компактный, либо лежащий в $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$) оператор, то U компактен по теореме 4.2.1 главы I, так как $F \cong G \subset l_1$ и l_1 обладает свойством Шура. ■

Отметим также следующие утверждения, показывающее, что аппроксимационная оценка в теореме 4 [29] (или в теореме 5.1.1 главы I) точна даже в случае, если в этой теореме заменить аппроксимацию конечномерными операторами на аппроксимации операторами из более широких классов (напомним: эта теорема утверждает, что при некоторых ограничениях на операторы $U : X \to Y, V : Y \to Z$ суперпозиция VU аппроксимируется в топологии τ_c компактной сходимости конечномерными операторами с нормами $\leqslant \|VU\|\,\|P\|$, где P — проектор из X^{**} на X; а именно, от операторов достаточно требовать, например, чтобы выполнялись включения $U \in \mathrm{RN}$ и $V \in \mathrm{AP}$).

Перед тем как формулировать дальнейшие интересующие нас факты, удобно ввести некоторые новые определения и обозначения. Пусть $\mathrm{I}(X,Y)$ — линейное подпространство в $\mathrm{L}(X,Y), 1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Определение 2.4.1. Оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ обладает свойством λ-MAP(I), (λ-*метрической аппроксимации относительно* I), если для всякого компакта $K \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $R \in \mathrm{I}(X,Y)$ такой, что $\|R\| \leqslant \lambda$ и $\sup_K \|Rx - Tx\| < \varepsilon$. Мы условимся писать $T \in \lambda$-MAP(I), если T обладает свойством λ-MAP(I). Если $\lambda < +\infty$ и $T \in \lambda$-MAP(I), то T обладает свойством BAP(I). Если $T \in +\infty$-MAP(I), то T обладает свойством AP(I).

Следствие 2.4.3. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют вполне сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в E^{**}, пространство F рефлексивно, $T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(K) при $\beta < \alpha$.*

Доказательство. Применив теорему 2.4.1 к пространству $G \subset l_3$ без свойства CAP [162], положим $E = W_\alpha, F = Z^{**}/Z, T = \varphi$. Также как и при доказательстве следствия 2.4.1 мы видим, что $T \notin \beta$-MAP(K) при $\beta < \alpha$. С другой стороны, пространство $E = W_\alpha$ α-изометрично сопряженному пространству Z^{**} с базисом; поэтому E, во-первых, обладает свойством α-MAP и, во-вторых, E α-дополняемо в своем втором сопряженном E^{**} (поскольку всякое сопряженное банахово пространство X^* 1-дополняемо в X^{***}). ■

Если применить теорему 2.4.1 аналогичным образом к пространству $G \subset l_1$ без свойства CAP (здесь то же самое, что и без свойств аппроксимации относительно условно слабо компактных или строго сингулярных операторов), то мы получим

Следствие 2.4.4. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в E^{**}, $T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(J) при $\beta < \alpha$, где J — любой из идеалов строго сингулярных, либо условно слабо компактных, либо $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$-операторов.*

Если же применить теорему 2.4.1 аналогичным образом к пространству $G \subset c_0$ без свойства CAP (здесь — то же самое, что и без свойств аппроксимации относительно идеала вполне непрерывных операторов), то мы получим

Следствие 2.4.5. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в E^{**}, $T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(C_c) при $\beta < \alpha$, где C_c — идеал вполне непрерывных операторов.*

Наконец, если мы возьмем в качестве пространства G рефлексивное пространство без свойства аппроксимации, обладающее свойством CAP (см. [166]), то по аналогии с [60] получим следующее усиление нашего следствия 2.4.2 (которое формулируется отдельно в силу того, что при его доказательстве дополнительно используется факт существования банахова пространства без свойства AP, но со свойством CAP; напомним, что в [60, теорема 1] построен пример вполне сепарабельного банахова пространства со свойством аппроксимации, без свойства BAP(K), все сопряженные к которому, однако, обладают метрическим свойством MAP(K)).

Следствие 2.4.6. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют вполне сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в E^{**}, пространство F рефлексивно, $T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-CAP при $\beta < \alpha$; при этом, все сопряженные к E пространства $E^*, E^{**}, \ldots$ обладают свойством* MAP(K).

Следствие 2.4.7. *Пусть J — замкнутый инъективный и сюръективный идеал операторов, содержащийся в идеале слабо компактных операторов. Если Z — такое сепарабельное банахово пространство, что $Z^{**} \in$ AP и $Z^{**}/\,Z \notin$ AP(J), то естественное вложение $\pi_Z : Z \to Z^{**}$ факторизуется через сепарабельное пространство X со свойством аппроксимации, не обладающее свойством ограниченной аппроксимации относительно* J.

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.4.1 тот факт, что подпространство $\varphi^*(F^*)$ дополняемо в пространстве Z^{***}, использовался только в одном месте, а именно, при установлении свойства 5e) (см. конец доказательства). Далее, то, что в условиях теоремы 2.4.1 второе сопряженное к Z пространство имеет свойство метрической аппроксимации, было нужно лишь для замечания того факта, что получаемое после перенормировки пространство W_α обладает соответствующим свойством аппроксимации. Существенно наличие в пространстве Z^{**} свойства аппроксимации Гротендика было использовано лишь в одном месте — в начале доказательства (где отмечалось, что следы операторов типа оператора t из доказательства теоремы корректно определены).

Поэтому вся остальная (и основная) часть доказательства теоремы проходит в рассматриваемой сейчас нами ситуации, и наше утверждение, по существу, получается при доказательстве теоремы 2.4.1: если $W_1, W_2, \dots$ — пространства, построенные в этом доказательстве (для $\alpha = 1, 2, \dots$), то, по определению нормы $|||\cdot|||_\alpha$, для каждого $\alpha = 1, 2, \dots$ тождественное включение $i_\alpha : Z \to W_\alpha$ есть изометрическое вложение, и норма тождественного отображения $j_\alpha : W_\alpha \to Z^{**}$ не превосходит 1. Положим $X = (\sum_{n=1}^\infty W_n)_{l_1}$ и определим операторы $A : Z \to X$ и $B : X \to Z^{**}$ соотношениями

$$Az = \left\{\frac{1}{2^n}\, i_n z\right\}_{n=1}^\infty \qquad \text{и} \qquad B\,\{w_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty j_n w_n.$$

Тогда $\|Az\| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\|z\| = \|z\|$, $\|B\| \leqslant 1$, $BAz = B\,\{2^{-n}\, i_n z\} = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} j_n i_n z = \pi_Z z$. ■

§3. Пространства без свойства аппроксимации порядка p : случай $p \leqslant 1$

1. Пример пространства без свойства аппроксимации с достаточно хорошими конечномерными подпространствами. Если X — банахово пространство типа p и котипа q, то всякое его n-мерное подпространство $Cn^{1/p-1/q}$-дополняемо в X (см. [126]). Шанковский [162] показал, что если $T(X) = \sup\{p :$ X типа $p\} \neq 2$ или $C(X) = \inf\{q :$ X котипа $q\} \neq 2$, то в X есть подпространство без свойства аппроксимации. Таким образом, если всякое подпространство в X обладает свойством аппроксимации, то необходимо $T(X) = C(X) = 2$ и, следовательно, все конечномерные подпространства в X "хорошо" дополняемы (см. лемму 0.4.4.1). При этом пространство X не обязано быть гильбертовым (или изоморфным ему). Примеры таких пространств построены Джонсоном [91], [92].

В связи с примерами Шанковского и Джонсона возникают естественные вопросы: 1)*если $T(X) = C(X) = 2$, то верно ли, что всякое подпространство в X обладает свойством аппроксимации*? 2) насколько хорошо могут быть дополняемы конечномерные подпространства пространства без свойства аппроксимации: в частности, *существует ли пространство X без свойства аппроксимации, постоянные C и A такие, что всякое n-мерное подпространство в X $C\log^A n$-дополняемо*? Этот параграф посвящен ответам на сформулированные вопросы (отрицательному — на первый, положительному — на второй).

Наш пример целиком основан на конструкции Шанковского [162] Пусть $I_n = \{2^n+1, \dots, 2^{n+1}\}$; $\{e_k\}_1^\infty$ — стандартный базис в c_0; $\{e'_k\}_1^\infty$ — набор соответствующих координатных функционалов. Пусть, далее, $z_i = e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}$ и $z'_i = 2^{-1}(e'_{2i} - e'_{2i+1})$. Обозначим через W линейную оболочку множества $\{z_i\}$ и положим для линейных отображений $U : W \to W$ и для $n = 1, 2, \dots$ $\beta_n(U) = 2^{-n}\sum_{I_n}\langle z'_i, Uz_i\rangle$.

В [162] для $n = 1, 2, \dots$ построены разбиения Δ_n и ∇_n множества I_n и финитные числовые последовательности $y_j \in c_0\,(j = 1, 2, \dots)$, обладающие свойствами:

а) $\beta_n(U) - \beta_{n-1}(U) = 2^{-n-1}\sum_{I_n}\langle e_i', y_i\rangle$;

б) если $B_1, B_2 \in \nabla_n$, то $\overline{\overline{B}}_1 = \overline{\overline{B}}_2 = m_n \geqslant C2^{n/8}$; следовательно, $\overline{\overline{\nabla}} = 2^n/m_n$;

в) если $A \in \Delta_n, B \in \nabla_n$, то $\overline{\overline{B \cap A}} \leqslant 1, \overline{\overline{A}} \geqslant C2^{7n/8}$;

г) если $B \in \nabla_n$, то $\sum_{i\in B}\varepsilon_i y_i = \sum_{j=1}^{10}\left(\pm\sum_{i\in A_j}\varepsilon_i e_i\right)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$; $A_j(j = 1, \dots, 10)$ —подмножества некоторых элементов из Δ_{n-1}, Δ_n и Δ_{n+1}, причем $\overline{\overline{A_j}} = \overline{\overline{B}}$.

Из а) и б) вытекает

д) $\beta_n(U)-\beta_{n-1}(U) = 2^{-n-1}\sum_{B\in\nabla_n}2^{-m_n}\sum_\varepsilon\langle\sum_{i\in B}\varepsilon_i e_i', \sum_{i\in B}\varepsilon_i U y_i\rangle$, где $\sum_\varepsilon$ означает суммирование по всем наборам знаков $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i \in B)$.

Пример пространства без свойства аппроксимации, обладающего достаточно хорошими конечномерными подпространствами, мы найдем среди подпространств пространства $Y = \left(\sum_n\left(\sum_{A\in\Delta_n} l_2^{\overline{\overline{A}}}\right)_{l_{p_n}}\right)_{l_2}$, где числа p_n определяются из соотношений $1/p_n - 1/2 = n^{-1}\log_a n^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0, a = \sqrt[8]{2})$. Ясно, что $T(Y) = C(Y) = 2$. Пусть X_ε —замыкание в Y линейного подпространства W.

Теорема 3.1.1. *Пространство X_ε не обладает свойством аппроксимации. Существует такая постоянная $C_\varepsilon > 0$, что если E — n-мерное подпространство в X_ε, то 1) $d(E, l_2^n) \leqslant C_\varepsilon\log^{1+\varepsilon} n$ и 2) E $C_\varepsilon\log^{1+\varepsilon} n$-дополняемо в Y (и, значит, в X_ε).*

Доказательство. Если $B \in \nabla_n$, то для $\varepsilon_i = \pm 1$ из б), в) и г) получаем:

$$\text{е)}\quad \left\|\sum_{i\in B}\varepsilon_i e_i'\right\|_{Y^*} \leqslant \left(\sum_{A\in\Delta_n}\overline{\overline{(A\cap B)}}^{\,p_n'/2}\right)^{1/p_n'} \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\overline{\{A\in\Delta_n:\ A\cap B\neq\emptyset\}}}^{\,1/p_n'} \leqslant \overline{\overline{B}}^{\,1/p_n'} = m_n^{1/p_n'};$$

$$\text{ж)}\quad \left\|\sum_{i\in B}\varepsilon_i y_i\right\|_Y \leqslant 10\max_{1\leqslant j\leqslant 10}\left\|\sum_{i\in A_j}\varepsilon_i e_i\right\| \leqslant 10\max_{1\leqslant j\leqslant 10}\left(\overline{\overline{A_j}}\right)^{1/2} \leqslant 10 m_n^{1/2}.$$

Таким образом, из д) вытекает

$$\text{з)}\quad |\beta_n(U)-\beta_{n-1}(U)| \leqslant 2^{-n-1}\overline{\overline{\nabla}}_n m_n^{1/p_n'}\max\left\{\left\|U\left(\sum_{i\in B}\varepsilon_i y_i\right)\right\|:\ \varepsilon_i = \pm 1,\ B\in\nabla_n\right\}.$$

Положим $F_n = \{m_n^{-1/p_n}\sum_{i\in B}\varepsilon_i y_i:\ \varepsilon_i = \pm 1,\ B \in \nabla_n\}$. Тогда $|\beta_n(U)-\beta_{n-1}(U)| \leqslant 2^{-1}\max\{\|Uf\|:\ f \in F_n\}$, причем

$$\alpha_n = \max\{\|f\|:\ f\in F_n\} \leqslant$$
$$\leqslant m_n^{-1/p_n}\cdot 10 m_n^{1/2} \leqslant 10(C2^{n/8})^{-n^{-1}\log_a n^{1+\varepsilon}} \leqslant \mathrm{const}\cdot n^{-1-\varepsilon}.$$

Таким образом мы находимся в условиях леммы 1 из [2] и, следовательно, пространство X_ε не обладает свойством аппроксимации.

Для $T \in \mathrm{L}(X, Z)$ положим $\gamma_2(T) = \inf\{\|A\|\,\|B\| : \ T = BA : X \to l_2 \to Z\}$. Пусть

$$Y_N = \left(\sum_{n \leqslant N} \left(\sum_{A \in \Delta_n} l_2^{\overline{\overline{A}}} \right)_{l_{p_n}} \right)_{l_2} \quad \text{и} \quad Y^N = \left(\sum_{n > N} \left(\sum_{A \in \Delta_n} l_2^{\overline{\overline{A}}} \right)_{l_{p_n}} \right)_{l_2}.$$

Пусть P_N и P^N — естественные проекторы из Y на Y_N и Y^N соответственно. Так как $\overline{\overline{\Delta_n}} \leqslant C2^{n/8}$, то

$$d\left(\left(\sum_{A \in \Delta_n} l_2^{\overline{\overline{A}}} \right)_{l_{p_n}}, l_2^{2^n} \right) \leqslant (\overline{\overline{\Delta_n}})^{1/p_n - 1/2} \leqslant C_1 n^{1+\varepsilon};$$

следовательно, расстояние Банаха–Мазура от Y_N до евклидова пространства не превосходит $C_2 N^{1+\varepsilon}$.

Пусть теперь E — произвольное 2^N-мерное подпространство в Y; $E_N = P_{8N}(E)$ и $E^N = P^{8N}(E)$. В силу сказанного выше существует проектор P_1 из Y_{8N} на E_N, причем $\gamma_2(P_1) \leqslant C_3 N^{1+\varepsilon}$. С другой стороны, Y^{8N} — пространство котипа 2 и типа p_{8N}; поэтому существует такой проектор P_2 из Y^{8N} на E^N, что $\gamma_2(P_2) \leqslant C_4(\dim E^N)^{1/p_{8N} - 1/2} \leqslant C_5 N^{1+\varepsilon}$. Положим $P_0 = P_1 P_{8N} + P_2 P^{8N}$ и $E_0 = P_0(Y)$. Тогда P_0 — проектор из Y на E_0, причем $\gamma_2(P_0) \leqslant C_6 N^{1+\varepsilon}$. Следовательно, во–первых, из Y на E существует проектор с нормой $\leqslant C_6 N^{1+\varepsilon}$ и, во–вторых, $d(E, l_2^{2^N}) \leqslant C_6 N^{1+\varepsilon}$. $\blacksquare$

Если определить $\{p_n\}$ из соотношений $p_n^{-1} - 2^{-1} = n^{-1} \log_a n^{1+\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_n \to 0$ и ряд $\sum n^{-1-\varepsilon_n}$ сходится, то те же рассуждения показывают, что *существует такое банахово пространство X без свойства аппроксимации, что если $\varepsilon > 0$ и E — n-мерное подпространство в X, то существует такой проектор P из X на E, что $\gamma_2(P) \leqslant C_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$.* В частности, можно взять для любого $\delta > 0$ $n^{\varepsilon_n} = (\log n)(\log\log n)\ldots(\log^{1+\delta}\log\ldots\log n)$. Естественно, возникает вопрос: существует ли банахово пространство без свойства аппроксимации, в котором все n-мерные подпространства $C\log n$-дополняемы? $C\log n$-евклидовы? До сих пор на это ответа не имеется.

Изложенный выше результат был опубликован автором в 1982 г. в работе [42]. К этой важной проблеме существования достаточно хороших пространств без свойства аппроксимации обратились через 18 лет и такие известные специалисты, как П. Касаза, У. Б. Джонсон и С. Л. Гарсиа. В их работе [61] в 2000 г. (в которой получено, качественно и количественно, то же самое, что и у нас) был использован промер П. Энфло в изложении А. Дэйви [65].[19]. Так же как и у них, наше

[19] Вот отрывок из заключительного этапа в их доказательстве: "When $n(1/p_{n+1} - 1/2) = -3\log_2(n+1)$, the sequence (p_n) is the one with the slowest (up to a constant) possible rate of decrease for this construction." В их работе соответствующее подпространство ищется в пространстве, аналогичном нашему Y, только показатели $p_n \searrow 2$ (поскольку используется конструкция П. Энфло, модифицированная А. М. Дэйви [65])

банахово пространство является асимптотически гильбертовым, но не обладает свойством аппроксимации А. Гротендика (это вытекает из определения асимптотически гильбертова пространства).

2. Свойства аппроксимации AP_s **при** $0 < p < 1$ **и дальнейшие примеры.** Пример Джонсона [91] показывает, что существует банахово пространство, не изоморфное гильбертову, такое, что все его подпространства обладают свойством аппроксимации Гротендика. Эквивалентная переформулировка: существует такое банахово пространство X, что все его подпространства имеют свойство AP, но для некоторого набора $\{E_n\}$ n-мерных подпространств E_n в X относительные проекционные константы $\lambda_X(E_n)$ (см. [27][20]) стремятся к $+\infty$. Отметим, что из конструкции [91] вытекает, что можно найти X и $\{E_n\}$ с указанными свойствами так, чтобы последовательность $\lambda_X(E_n)$ стремилась к $+\infty$ быстрее любой степени $\log n$; в то же время, обязательно $\lambda_X(E_n) \to +\infty$ медленнее любой степени n, так как в противном случае метод Шанковского [162] позволил бы обнаружить среди подпространств X пространство без свойства AP . Любопытно было бы найти какую–либо характеризацию банаховых пространств, все подпространства которых обладают свойством AP . Напомним, что с помощью конструкции Шанковского из [162] *автору удалось найти пример пространства без свойства аппроксимации, в котором всякое n-мерное подпространство $C_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$-дополняемо для любого $\varepsilon > 0$* (константа C_ε зависит лишь от ε; см. предыдущий раздел). То же самое, по-существу, получили П. Касаза, У. Б. Джонсон и С. Л. Гарсиа [61].

Этот раздел имеет своей целью рассмотреть в свете примера Джонсона несколько более общую ситуацию, а именно случай свойств аппроксимации AP_s порядка s для $s < 1$ (определение см. ниже). Здесь также возникают вопросы, аналогичные упомянутым выше. На некоторые из них мы ответим. Следующее определение (для $s < 1$) впервые появилось в [43].

Определение 3.2.1. Пространство X обладает свойством AP_s ($X \in \mathrm{AP}_s$), если для любого Y естественное отображение из $Y^*\widehat{\otimes}_s X$ в $\mathrm{L}(Y, X)$ взаимно однозначно.

Ясно, что $\mathrm{AP}_r \implies \mathrm{AP}_s$, если $s \leqslant r \leqslant 1$; AP_1 — это свойство аппроксимации Гротендика. Теорема Гротендика о 2.3 утверждает, что всякое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3}$. Ниже мы увидим, что для любого $s > 2/3$ существует банахово пространство, не обладающее свойством AP_s (здесь $s \neq 2$).

Одним из основных результатов параграфа является следующий факт (с весьма простым доказательством). О степени его нетривиальности можно судить по тому, что при $s = 3/2$ мы снова получаем теорему Гротендика о наличии у любого банахова пространства свойства $\mathrm{AP}_{2/3}$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $0 \leqslant r \leqslant 1/2; c > 0$ и банахово пространство X таково, что*

[20] Если E —подпространство в Z, то $\lambda_Z(E) := \inf \|P\|$, где инфимум берется по всевозможным проекторам P из Z на E.

(A_r) на любое его конечномерное подпространство E существует проектор из X с нормой $< c(\dim E)^r$.

Тогда $X \in \mathrm{AP}_s$, где $s = (r+1)^{-1}$.

Как и в случае $r = 0$ естественно поставить вопрос об обратимости теоремы: пусть всякое подпространство пространства X имеет свойство $\mathrm{AP}_s, s < 1$. Верно ли, что X удовлетворяет условию (A_r)? Мы приведем ниже пример, показывающий, что и в случае $r > 0$ ответ отрицательный, а также, что в теореме 3.2.1 показатель s увеличить нельзя. А именно, мы покажем, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.2.2. *Для любого $s \in [2/3, 1)$ существует банахово пространств Z со следующими свойствами:*

1) *Z удовлетворяет условию (A_r), где $r = 1/s - 1$ (следовательно, $Z \in \mathrm{AP}_s$);*

2) *в Z есть подпространство, не обладающее свойством AP_t ни при каком $t > s, t \leqslant 1$.*

Теорема 3.2.3. *Пусть $p \in (2/3, 1]$ и $r = 1/p - 1$. Существует банахово пространство Z, обладающее свойствами:*

1) *$Z \notin \mathrm{AP}_p$;*

2) *для всякого $\delta > 0$ существует такая константа $c > 0$, что если E — конечномерное подпространство в Z, то*

$$\lambda_Z(E) \leqslant c(\dim E)^r \log^{2+\delta}(\dim E).$$

В частности, для любого $s < p$ Z удовлетворяет условию $(A_{r(s)})$ и, следовательно, $Z \in \mathrm{AP}_s$ $\forall\, s < p$.

Теорема 3.2.4. *Пусть $s \in (2/3, 1]$ и $r = 1/s - 1$. Существует банахово пространство Z, обладающее свойствами:*

1) *всякое подпространство в Z обладает AP_s;*

2) *в Z есть подпространство, не обладающее свойством AP_q ни при каком $q \in (s, 1]$;*

3) *существует такаЯ последовательность $\{E_n\}$ конечномерных подпространств в Z, что для любого $\alpha > 0$*

$$\lambda_Z(E_n)\, \dim(E_n)^{-r} (\log \dim E_n)^{-\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Сначала мы установим следующую лемму, из которой немедленно вытекает теорема 3.2.1. Эта лемма понадобится нам также и при доказательстве теоремы 3.2.4.

Лемма 3.2.1. *Пусть $c > 0, r \in [0, 1/2]$ и $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая числовая последовательность, что $m_n \to +\infty$ и если $E \subset X$ и $\dim E \leqslant m_n$, то существует конечномерное подпространство $F \supset E$ и оператор $p \in X^* \otimes F$ такие, что $P|_E = \mathrm{id}_E$*

и $\|P\| \leqslant cm_n^r$. *Тогда* $X \in \mathrm{AP}_s$, *где* $s = (r+1)^{-1}$. *В частности, если всякое подпространство в* X *размерности* $\leqslant m_n$ *является* cm_n^r*-дополняемым, то всякое подпространство в* X *обладает свойством* AP_s.

Доказательство. Предположим, что $X \notin \mathrm{AP}_s$, т.е. существует такой элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_s X$, что trace $z \neq 0$, но $\widetilde{z} = 0$. Возьмем какое-либо представление для z вида $\sum \lambda_j\, x'_j \otimes x_j$; $\lambda_j \searrow 0$; $\sum \lambda_j^s < \infty$; $||x_j|| \leqslant 1$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $E_n = [x_j]_1^{m_n}$. Пусть $P_n : W \to F_n \subset E_n$ — операторы из условия леммы. Оценка, аналогичная оценке из доказательства теоремы 1.1 показывает, что

$$0 \neq |\operatorname{trace} z| \leqslant \left(\sum_{m_n+1}^{\infty} \lambda_j\right) ||P_n|| + \sum_{m_n+1}^{\infty} \lambda_j \leqslant c_n m_n^{1-1/s}(1+mn^r) \leqslant c_n(m_n^{1-1/s}+1) \to 0.$$

Теоремы 3.2.2 и 3.2.3 доказываются аналогично. Мы докажем поэтому лишь более сложную теорему 3.2.3.

Доказательство теоремы 3.2.3. Пусть X — такое банахово пространство, что существует элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_1 X$ с ненулевым следом, порождающий нулевой оператор и представимый в виде

$$z = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{1/2} 2^{-3N/2} x'_{nN} \otimes x_{nN}, \tag{1}$$

где последовательности (x'_{nN}) и (x_{nN}) ограничены по норме единицей (см. [65], либо [27, п. 10.4.5]). Пусть $1/q = 3/2 - 1/p = 1/2 - r$; $\{\varepsilon_N\}_1^\infty$ — такая числовая последовательность, что $\sum N^{-1-\varepsilon_N} < +\infty$; $\gamma_N = 2 + 3\varepsilon_N/2$; q_N — такое число, что $1/q - 1/q_N = N^{-1}\log_2 N^{\gamma_N}$ (следовательно, $q_N > q$). Положим $Y = \left(\sum_N l_{q_N}^{3\cdot 2^N}\right)_{l_q}$. Мы утверждаем, что пространство Z со свойствами 1) и 2) можно найти среди подпространств в Y. Обозначим через e_{nN} (и e'_{Nn}) единичные орты в Y ($N = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots, 3\cdot 2^N$) и положим

$$z_1 = \sum_N \sum_n 2^{-N/p}\, N^{-(1+\varepsilon_N)/p}\, e'_{nN} \otimes x_{nN};$$

$$T = \sum_N \sum_n 2^{-(3/2-1/p)N}\, N^{(1/2+1/p+/e_N/p)}\, x'_{nN} \otimes e_{nN}.$$

Покажем, что $z_1 \in Y^*\widehat{\otimes}_p X$, $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ (очевидно, что тогда $z = z_1 \circ T$). Первое включение очевидно (в силу выбора ε_N). Если $||x|| \leqslant 1$, то

$$||Tx|| \leqslant 3\left(\sum_N \left(N^{1/2+1/p+\varepsilon_N/p} / 2^{(3/2-1/p-1/q_N)N}\right)^q\right)^{1/q}.$$

Так как $3/2 - 1/p - 1/q_N = 1/q - 1/q_N = N^{-1}\log_2 N^{\gamma_N}$, то отсюда мы получаем

$$||T|| \leqslant 3\left(\sum N^{(1/2+1/p+\varepsilon_N/p-\gamma_N)q}\right)^{1/q} = 3\left(\sum N^{-1-\varepsilon_N}\right)^{1/q} < \infty.$$

Пусть $Z = \overline{T(X)} \subset Y$ и $j : Z \to Y$ — тождественное вложение. Положим $w = T \circ z_1 \circ j \in Z^*\widehat{\otimes}_p Z$. Тогда trace w = trace $T \circ z_1$ = trace $z_1 \circ T$ = trace $z \neq 0$. Таким образом, $w \neq 0$. В то же время очевидно, что $\widetilde{w} = 0$. Поэтому $Z \notin \mathrm{AP}_p$.

Покажем теперь, что свойство 2) имеется у пространства Y. Пусть $\delta > 0$, M — достаточно большое натуральное число ($3\varepsilon_M/2 \ll \delta$), $Y_M = \left(\sum_1^M l_{q_N}^{3\cdot 2^N}\right)_{l_q}$; $Y^M = \left(\sum_{M+1}^\infty l_{q_N}^{3\cdot 2^N}\right)_{l_q}$; P_M и P^M — естественные проекторы из Y на Y_M и Y^M соответственно. Так как при $N \leqslant M$ $d(l_{q_N}^{3\cdot 2^N}, l_q^{3\cdot 2^N}) \leqslant c_1\left(2^M\right)^{1/q-1/q_M} = c_1 M^{\gamma_M}$, то

$$d(Y_M, l_2^{\dim\, Y_N}) \leqslant c_2 M^{\gamma_M}(2^M)^{1/2-1/q} = c_2 M^{\gamma_M(2^M)^r}. \tag{2}$$

Пусть теперь $E \subset Y, 2^M \leqslant \dim\, E \leqslant 2^{M+1}$. Положим $E_M = P_M(E)$, $E^M = P^M(E)$. В силу (2) из Y_M на E_M существует проектор Q_1 с γ_2-нормой, не превосходящей $c_2 M^{\gamma_N}(2^M)^r$. Тем не менее Y^M — пространство типа 2 и котипа q_M; поэтому из Y^M на E^M существует проектор Q_2, γ_2-норма которого не превосходит $c_3(\dim\, E^M)^{1/2-1/q_M}$ (см. [126]), откуда $\gamma_2(Q_2) \leqslant c_4(2^M)^{1/q-1/q_M} \leqslant c_4(2^M)^{1/2-1/q}M^{\gamma_M}$. Таким образом, оператор $Q = Q_1 P_M + Q_2 P^M$ проектирует Y на конечномерное подпространство, содержащее E, причем

$$\gamma_2(Q) \leqslant c_5 M^{\gamma_M}(2^M)^r \leqslant c_6(\log\dim\, E)^{2+\delta}(\dim\, E)^r.$$

Это завершает доказательство. ■

Замечание 3.2.1. В экстремальном случае $p = 1$ ($r = 0$) теорема 3.2.3 дает пример пространства Z без свойства аппроксимации Гротендика, все n-мерные подпространства которого $c_\delta \log^{2+\delta} n$-дополняемы. Как уже отмечалось выше, при $p = 1$ можно найти Z с $c_\varepsilon \log^{1+\varepsilon} n$-дополняемыми n-мерными подпространствами. Так что наша конструкция не является наилучшей.

Доказательство теоремы 3.2.4. Пусть p — такое число, что $r = 1/2 - 1/p$. Построим последовательности $\{k_n\}$, $k_n \in \mathbb{N}$, и $\{p_n\}$, $p_n \searrow p$, вещественных чисел со следующими свойствами:

1) $\sum_1^{n-1} k_j < k_n$; 2) $k_n > 3\cdot 2^n$; 3) $k_n^{1/2} \leqslant 2^{k_n r}$ (здесь существенно, что $s \neq 1$); 4) $\left(2^{\sum_1^n k_j}\right)^{1/p-1/p_{n+1}} \leqslant 2$; 5) в $F_{n+1} = l_{p_{n+1}}^{k_{n+1}}$ есть подпространство E_{n+1} такое, что $\lambda_{F_{n+1}}(E_{n+1}) > (\dim\, E_{n+1})^r(\log\dim\, E_{n+1})^n$ (если числа k_j, p_j построены для $j \leqslant n$, то затем берем $p_{n+1} \in (p, p_n)$ такое, что выполняется условие 4); после этого выбираем число k_{n+1} настолько большим, чтобы выполнялось условие 5), так же как и соответствующие условия 1)–3).

Положим $Z = \left(\sum_1^\infty l_{p_n}^{k_n}\right)_{l_p}$. Мы сначала покажем, что пространство Z удовлетворяет всем условиям леммы 3.2.1 при $m_n = 2^{\sum_1^n k_j}$, а затем найдем в Z подпространство, не обладающее ни при каком $q > s$ свойством AP_q. Ясно, что этого достаточно для доказательства теоремы.

Итак, пусть $E \subset X$, $\dim E \leqslant m_n$. Обозначим через P_n и P^n естественные проекторы из Z на $Z_n = \left(\sum_1^n l_{p_j}^{k_j}\right)_{l_p}$ и $Z^n = \left(\sum_{n+1}^\infty l_{p_j}^{k_j}\right)_{l_p}$ соответственно. Так как $d\left(Z_n, l_2^{\sum_1^n k_j}\right) \leqslant \left(\sum_1^n k_j\right)^{1/2} \leqslant 2k_n^{1/2} \leqslant 2^{k_n r+1}$, то существует проектор $Q_1 : Z_n \to P_n(E)$ с γ_2-нормой $\leqslant c_1 m_n^r$. Далее, Z^n — пространство типа 2 и котипа p_{n+1} (с константой 1). Поэтому из Z^n на $P^n(E)$ существует проектор Q_2 такой, что $\gamma_2(Q_2) \leqslant (\dim E)^{1/2-1/p_{n+1}} \leqslant c_2 m_n^r m_n^{1/p-1/p_{n+1}} \leqslant 2c_2 m_n^r$ (в силу 4)). Положим $Q = Q_1 P_n + Q_2 P^n : Z \to Q(Z)$. Так как $Q|_E = \mathrm{id}$ и $\gamma_2(Q) \leqslant c_3 m_n^r$, то из Z на E существует проектор P такой, что $\gamma_2(P) \leqslant c_3 m_n^r$.

Для доказательства второй части будем действовать как и при доказательстве теоремы 3.2.3. Рассмотрим тензорный элемент $z \in W^*\widehat{\otimes}W$, имеющий вид (1) (пространство W — это сейчас пространство "X" из доказательства теоремы 3.2.3, так что, в частности $w_{nN}:=x_{nN}$ и т. д.). Отождествим естественным образом пространство $Y = \left(\sum_1^\infty l_{p_n}^{3\cdot 2^n}\right)$ с подпространством в Z (это возможно в силу условия 2)) и положим

$$z_1 = \sum_N \sum_n N\, 2^{-N(3/2-1/p_n)}\, e'_{nN} \otimes w_{nN}.$$

Если $q = s+\varepsilon$, то $q(3/2-1/p_n) = q(r+1+1/p-1/p_n) = q/s+q/p = q/p_n = 1+\varepsilon/s$. Следовательно, $z_1 \in Y^*\widehat{\otimes}_q W \subset Z^*\widehat{\otimes}_q W$.

Далее, для $w \in W$

$$||Tw||_Y = \left(\sum_N \left(\sum_n (2^{-N/p_n} N^{-1/2}\, |\langle w'_{nN}, w\rangle|)^{p_n}\right)^{p/p_n}\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant ||x|| \cdot 3 \left(\sum_N N^{-p/2}\right)^{1/p} < +\infty.$$

так как $p > 2$ (в силу того, что $s \neq 1$!). Следовательно, $T \in L(W,Y) \subset \mathrm{L}(W,Z)$. Так же как и в доказательстве теоремы 3.2.3, мы заключаем, что существует такой ненулевой элемент $z_2 \in \overline{T(W)}^*\widehat{\otimes}_q\overline{T(W)}$, что $\widetilde{z} = 0$. ■

§4. Дальнейшие вариации на конечномерную тему: случай $p = 1$.

Продолжим рассмотрение проблем, относящиеся к гротендиковским условиям аппроксимации в банаховых пространствах. Нас интересуют как качественные, так и количественные аспекты проблем, возникающих в этих направлениях.

В этом параграфе для простоты обозначений через (I, i) мы будем обозначать идеал (1-)интегральных по Гротендику операторов (интегральные операторы, т. е. строго интегральные, нам здесь не встретятся). Напомним, что $\nu(=\nu_1)$ — ядерная норма, а (N, ν) — идеал ядерных операторов. В этих обозначениях $(X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Y)^* = \mathrm{I}(Y, X^{**})$ и для $U \in \mathrm{I}(Y, X^{**})$ $i(U) = \sup\{\mathrm{trace}\, UR : \ R \in X^* \otimes Y, \|R\| \leq 1\}$; если $U \in \mathrm{I}(X, Y)(= \mathrm{I}^{\mathrm{Gr}})$, то $i(U) = i(U^*)$.

Легко видеть [131], что для n-мерного оператора $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ имеет место следующее соотношение между его ядерной и интегральной (по Гротендику) нормами: если $\nu(T) = 1$, то $\nu(T^*) \geq i(T) \geq 1/\sqrt{n}$ (вот простое доказательство: возьмем какой-либо проектор Q из Y на $T(X)$ с нормой, не большей, чем $n^{1/2}$; тогда

$$1 = \nu(T) \leq \sup\{\mathrm{trace}\, RT : \ R \in \mathrm{L}(Y, X^{**}), \ \|R\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{\mathrm{trace}\, RQT : \ R \in \mathrm{L}(Y, X^{**}), \ \|R\| \leq 1\} \leq \|Q\|\, i(T^{**}) \leq n^{1/2}\, i(T^*) \leq n^{1/2}\, \nu(T^*)\ ).$$

Оказывается [135], что это соотношение асимптотически точно даже в пространствах со свойством BAP . (В [131] автором был построен пример сепарабельного банахова пространства $X \in$ AP и последовательность операторов $z_n : X \to X$, таких, что $\dim z_n = n, \mathrm{trace}\ z_n = 1$ и $\nu(z_n^*) \leq C\, n^{-1/2}$ для некоторой абсолютной постоянной $C > 0$. Этот пример мы здесь не рассматриваем)

Мы начнем со следующей теоремы. Основные ее следствия — это следствия 4.2 и 4.2 ниже.

Теорема 4.1. *Существует вполне сепарабельное сопряженное банахово пространство W с базисом такое, что для каждого $\alpha \geq 1$ на W можно ввести эквивалентную норму $\|\cdot\|_\alpha$, с которой пространство $W_\alpha = (W, \|\cdot\|_\alpha)$ обладает следующими свойствами:*

- (i) $W_\alpha \in \alpha$ - MAP *;*
- (ii) $W_\alpha \notin \beta$ - MAP, $\forall \beta < \alpha$ *;*
- (iii) *для любого $\varepsilon > 0$ существует ядерный оператор $t \in W^*\widehat{\otimes}W$ такой, что* a) trace $t = 1$, b) $1/\alpha \leq \|\, t\,\|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)} \leq (1+\varepsilon)\, 1/\alpha$, c) $1 \leq \|\, t\,\|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} \leq (1+\varepsilon)$, d) $\|\, t\,\|_{\mathrm{I}(W, W_\alpha)} \leq 1+\varepsilon$, e) $\|\, t\,\|_{\mathrm{N}(W, W_\alpha)} \geq c\,\alpha$ *для некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.*

Доказательство. Так как существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства аппроксимации (AP) (см., например, [27]), то из результатов работы [101] (следствие 1 и его доказательство; см. лемму 4.9.2 в главе 0) следует, что существует такое вполне сепарабельное банахово пространство Z, что Z^{**} имеет базис Шаудера и $F = Z^{**}/\pi Z$ — сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства AP . Более того, для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$, используя лифтинг из F в Z^{**}, мы можем найти тензорный элемент $t_1 \in F^*\widehat{\otimes}Z^{**}$ с тем свойством, что $\varphi \circ t_1$ (где $\varphi : Z^{**} \to F$ — фактор отображение) порождает нулевой оператор, $t_1(F) \subset \pi Z, \mathrm{trace}\ \varphi \circ t_1 = 1 = \|\varphi \circ t_1\|_{F^*\widehat{\otimes}F} \geqslant (1+\varepsilon)^{-1}\, \|t_1\|_\wedge$. Мы покажем, что пространство $W = Z^{**}$ и тензорный элемент $t \in W^*\widehat{\otimes}W$, $t = t_1 \circ \varphi$, удовлетворяет всем условиям теоремы.

Так как $1 = \operatorname{trace} \varphi \circ t_1 = \operatorname{trace} t_1 \circ \varphi \leqslant \|t\|_\wedge \leqslant 1+\varepsilon$, то мы получаем, что $1 = \operatorname{trace} t \leqslant \|t\|_\wedge \leqslant 1+\varepsilon$.

Для произвольного фиксированного числа $\alpha \geqslant 1$ мы определим эквивалентную норму на Z^{**} следующим образом: $|||z''||| = \|z\|_\alpha = \max\{\|z''\| : \alpha d(z'', \pi Z)\}$, где $d(z'', \pi Z) = \inf_{z \in Z} \|z'' - \pi z\|$. Положим $W_\alpha = (Z^{**}, |||\cdot|||)$.

Так как $\|z''\| \leqslant |||z'''||| \leqslant \alpha||z''||$, то для тождественного отображения $j = j_\alpha : W_\alpha \to Z^{**}$ имеем: $\|j\| \leqslant 1$ и $\|j^{-1}\| \leqslant \alpha$. Пространство Z^{**} обладает свойством метрической аппроксимации MAP, поэтому $W_\alpha \in \alpha$-MAP. Для упрощения дальнейшего чтения, удобно иметь перед глазами следующую диаграмму:

$$
\begin{array}{ccccccc}
W_\alpha \xrightarrow{j} & Z^{**} \xrightarrow{t} & \pi Z \subset Z^{**} \xrightarrow{j^{-1}} W_\alpha \xrightarrow{R} W_\alpha \\
& \searrow^{\phi} \quad \nearrow^{t_1} & \\
& F &
\end{array}
$$

Если $z'' \in Z^{**}$, то $\|\phi(z'')\| = d(z'', Z) \leq \alpha_{-1} \, ||| \, z'' \, |||$, т.е. $\|\phi\|_{\mathrm{L}(W_\alpha, F)} \leq 1/\alpha$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\| \, t \, \|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} = \|j^{-1} \circ t_1 \circ \phi\|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} \leq \\
\|j^{-1}\| \, \|t_1\|_{\mathrm{N}(Z^{**}, Z^{**})} \, \| \, \phi \, \|_{\mathrm{L}(W_\alpha, F)} \leq 1+\varepsilon
\end{aligned}
$$

С другой стороны, $\|t\|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} \geq \operatorname{trace} t = 1$. Это доказывает выполнение условия (iii),c).

Для доказательства утверждения (iii),b) рассмотрим конечномерный оператор $R \in W_\alpha^* \otimes W_\alpha$, $|||R||| \leq 1$. Так как $t_1(F) \subset \pi Z$ и $||| \cdot ||| = || \cdot ||$ на πZ, то мы получаем

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{trace} R \circ t| = |\operatorname{trace} R \circ t_1 \circ \phi| \leq ||R\pi||_{\mathrm{L}(Z, W_\alpha)} \, \|t_1 \circ \phi\|_{\mathrm{I}(W_\alpha, \pi Z)} \\
\leq \alpha_{-1} \, \|t_1\|_{\mathrm{I}(F, \pi Z)} = \alpha_{-1} \, \|t_1\|_{F^* \widehat{\otimes} Z^{**}} \leq \alpha_{-1} \, (1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\| \, t \, \|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)} \leq \alpha_{-1}(1+\varepsilon)$. Далее,

$$
\begin{aligned}
1 \leq \| \, t \, \|_{\mathrm{N}(Z^{**}, Z^{**})} = \| \, t \, \|_{\mathrm{I}(Z^{**}, Z^{**})} \\
\leq \| \, j \, \|_{\mathrm{L}(W_\alpha, Z^{**})} \, \| \, t \, \|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)} \, \|j^{-1}\|_{\mathrm{L}(Z^{**}, W_\alpha)} \leq \alpha \, \| \, t \, \|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)}
\end{aligned}
$$

Это доказывает (iii),b).

Теперь утверждение (ii) вытекает из (iii),a) – c).

Для доказательства (iii),d) заметим, что если $R \in W^* \otimes Z^{**}$ — произвольный конечномерный оператор, то так же, как и выше, мы получаем

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{trace} R \circ t| \leq ||R\pi||_{\mathrm{L}(Z, Z^{**})} \, \|t_1 \circ \phi\|_{\mathrm{I}(Z^{**}, \pi Z)} \\
\leq \|t_1\|_{\mathrm{I}(F, \pi Z)} \, \| \, \phi \, \|_{\mathrm{L}(Z^{**}, F)} \leq \|t_1\|_{F^* \widehat{\otimes} Z^{**}} \leq (1+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Наконец, докажем (iii),e). Поскольку $\|\phi\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,F)} \le 1/\alpha$ то

$$\|j^{-1}t_1\|_{\mathrm{N}(F,W_\alpha)} \ge \alpha\,|\,\mathrm{trace}\;\phi\circ j_{-1}\circ t_1| = \alpha\,|\,\mathrm{trace}\;\phi\circ t_1| = \alpha$$

Отметим, что подпространство $\phi^*(F^*)$ дополняемо в пространстве Z^{***} (см. [101], теорема и доказательство следствия 1, или лемму 4.9.2 в главе 0). Поэтому естественное отображение $F^*\widehat{\otimes}W_\alpha \to Z^{***}\widehat{\otimes}W_\alpha$ индуцированное оператором ϕ^* есть изоморфное вложение; так что $\|t\|_{\mathrm{N}(Z^{**},W_\alpha)} \ge c\alpha$. ■

Теорема 4.2. *Существует сепарабельное сопряженное банахово пространство W с базисом и постоянная $C > 0$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется эквивалентная норма $\|\cdot\|_n$ на W и n-мерный оператор $t_n : W_n \to W_n$, где $W_n = (W, \|\cdot\|_n)$, обладающие следующими свойствами:*
(i) $W_n \in \sqrt{n}$-MAP;
(ii) $W_n \notin C^{-1}\sqrt{n}$-MAP;
(iii) $\|t\|_{\mathrm{I}(W_n,W_n)} \le C/\sqrt{n}$;
(iv) $\|t\|_{\mathrm{N}(W_n,W_n)} \ge \mathrm{trace}\,t_n = 1$;
(v) $\|t\|_{\mathrm{I}(W,W_n)} \le C$;
(vi) $\|t\|_{\mathrm{N}(W,W_n)} \ge c\sqrt{n}$ *для некоторой абсолютной постоянной* $c > 0$.

Доказательство. Мы будем использовать тот факт, что существует сепарабельное банахово пространство G, обладающее следующим свойством: $\mathrm{N}_1(G,G) = G^*\widehat{\widehat{\otimes}}\,G$ (см. [127]). Как мы знаем (0.4.9.2) можно найти такое сепарабельное банахово пространство Z, что Z^{**} имеет базис и $F = Z^{**}/\pi Z$ изоморфно пространству G. Таким образом, существует такая постоянная $C_0 > 0$, что для каждого конечномерного оператора $U \in \mathrm{L}(F,F)$ имеет место неравенство $\|U\|_\wedge \le C_0\,\|U\|$, где $\|\cdot\|_\wedge$ — проективная норма на $F^*\otimes F$. Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы, положим $W = Z^{**}$, $|||z''||| \equiv \|z''\|_n = \max\{\|z''\|; n\,\mathrm{d}(z'',\pi Z)\}$, $W_n = (W, |||\cdot|||)$.

Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.1. *Пусть Y — подпространство некоторого банахова пространства X бесконечной коразмерности. Для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют n-мерный оператор Q в X такой, что $\pi_2(Q^*) \le (1+\varepsilon)\sqrt{n}$;* $\mathrm{trace}\,Q = n$ *и Q представим в виде $Q = \sum_1^N f'_k \otimes x_k$, где $f'_k \in Y^\perp$ и $\sum \|f'_k\|\,\|x_k\| \le (1+\varepsilon)n$.*

Доказательство леммы. Пусть E — n-мерное подпространство в $Y^\perp$, $j : E \to X^*$ — тождественное вложение и R — непрерывный проектор из X^* на E, для которого $\pi_2(R) \le \sqrt{n}$ (см. [27, 28.2]). Так как $\|R\|_\wedge = \mathrm{trace}\,R = n$, для тензорного элемента $R \in X^{**}\widehat{\otimes}\,E$, то мы можем найти такое конечное ядерное представление $R = \sum_1^N x''_k \otimes f'_k$, что $f'_k \in E$, $x''_k \in X^{**}$, и $\sum \|f'_k\|\,\|x''_k\| \le \sqrt{1+\varepsilon}\,n$. По принципу локальной рефлексивности (см., например, [27, 28.1] либо главу 0, п. 4.2) существует взаимно однозначный оператор $S : E_0 = \mathrm{span}\left[(jR)^*(X^{**}) \cup \{x''_k\}_1^N\right] \longrightarrow X$ такой, что $Sx''|_E = x''|_E$ для любого $x'' \in E_0$ и $\|S\| \le \sqrt{1+\varepsilon}$.

Положим $Q = S(jR)^*\pi = SR^*j^*\pi$:

$$X \xrightarrow{\pi} X^{**} \xrightarrow{j^*} E^* \xrightarrow{R^*} R^*j^*(X^{**}) \xrightarrow{S} X$$

Ясно, что $\pi_2(Q^*) \le (1+\varepsilon)\sqrt{n}$ и $\dim Q = n$. Если $x \in X$, то $Qx = SR^*j^*(\pi(x)) = S\left(\sum_1^N \langle f'_k, j^*\pi(x)\rangle x''_k\right) = \sum_1^N \langle f'_k, x\rangle Sx''_k$, т.е. $Q = \sum f'_k \otimes x_k$, где $x_k = Sx''_k \in X$, $f'_k \in Y^\perp$ и $\sum \|f'_k\| \|x_k\| \le (1+\varepsilon)n$. Наконец, $\operatorname{trace} Q = \sum \langle f'_k, Sx''_k\rangle = \operatorname{trace} R = n$ (так как $f'_k \in E$ и $Sx''_k|_E = x''_k$ для всех k.) ■

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ и возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть Q — оператор из предыдущей леммы, примененной к пространствам $Y = \pi Z$ и $X = Z^{**}$, и $t \equiv t_n = 1/n\, Q$. Оператор t можно профакторизовать через пространство $F = Z^{**}/\,\pi Z$ следующим образом:

$$Z^{**} \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{t_1} Z^{**},$$

где ϕ есть факторотображение, $t_1 \in F^* \otimes Z^{**}$, $\dim t_1 = n$, $\|t_1\| < 2/\sqrt{n}$, $\|t_1\|_\wedge < 2$ и $\operatorname{trace} t = \operatorname{trace}\, t_1 \circ \phi = 1$.

Рассмотрим тензорный элемент $\phi \circ t_1 \in F^* \widehat{\otimes} F$ ($\phi \circ t_1$ имеет вид $1/n \sum_1^N f'_k \otimes \phi(x_k)$). Поскольку $\|\phi \circ t_1\| < 2/\sqrt{n}$, то мы имеем также $\|\phi \circ t_1\|_{\mathrm{N}} < 2C_0/\sqrt{n}$. Следовательно, конечномерный оператор $\phi \circ t_1$ допускает ядерное представление $\sum_1^\infty g'_k \otimes f_k$, где with $g'_k \in F^*$, $f_k \in F$ и $\sum \|g'_k\| \|f_k\| < 2C_0/\sqrt{n}$. Поднимая последовательность $\{f_k\}$ до последовательности $\{z''_k\}$ элементов пространства Z^{**} с небольшим увеличением норм, мы можем получить тензор $t_2 = \sum g'_k \otimes z''_k \in F^* \widehat{\otimes} Z^{**}$ для которого $\|t_2|_\wedge \le 2C_0/\sqrt{n}$ и $\phi \circ t_2 = \phi \circ t_1$. Из последнего равенства следует, что $(t_2 - t_1)(F) \subset \pi Z$. Теперь мы готовы проверить выполнение условий (i) – (vi) для оператора t.

Условие (i) выполнено по определению пространства W_n; (iv) очевидно. Для доказательства (iii) возьмем конечномерный оператор $R \in W_n^* \otimes W_n$, для которого $|||\, R\, ||| \le 1$. Если обозначить через $j : W_n \to Z^{**}$ оператор тождественного вложения, то

$$\begin{aligned}
|\operatorname{trace}\ R \circ t| &= |\operatorname{trace}\ R \circ t_1 \circ \phi| \\
&\le |\operatorname{trace}\ R \circ (t_1 - t_2) \circ \phi| + |\operatorname{trace}\ R \circ t_2 \circ \phi| \\
&\le \|R\pi\|_{\mathrm{L}(Z,W_n)}\ \|t_1 - t_2\|_{\mathrm{I(F,\pi(Z))}}\ \|\phi|_{\mathrm{L}(W_n,F)} + \\
&\quad \|Rj^{-1}\|_{\mathrm{L}(Z^{**},W_n)}\ \|j \circ t_2\|_{\mathrm{I}(F,Z^{**})}\ \|\phi\|_{\mathrm{L}\, W_n,F)}
\end{aligned}$$

Так как $\|j^{-1}\| \le \sqrt{n}$, $\|\, j\,\| \le 1$ и $\|\,\phi\,\|_{\mathrm{L}(W_n,F)} \le 1/\sqrt{n}$, то

$$\begin{aligned}
|\operatorname{trace} R \circ t| &\le \|t_1 - t_2\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}}\ \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\|t_2\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}}\ \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&< \left(2 + \frac{2C_0}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2C_0}{\sqrt{n}} \le \frac{2C_0}{\sqrt{n}}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \le \frac{5C_0}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Поэтому $\| t \|_{\mathrm{I}(W_n,W_n)} < C/\sqrt{n}$, где $C = 5C_0$. Свойство (ii) вытекает из (iv) и последнего неравенства.

Чтобы доказать (vi), заметим, что $\|j^{-1} t_1\|_{\mathrm{N}(F,W_n)} \geq \sqrt{n}\ \mathrm{trace}\ \phi t_1 = \sqrt{n}$. Следовательно, $\| t \|_{\mathrm{N}(Z^{**},W_n)} = \|t_1 \phi\|_{\mathrm{N}(Z^{**},W_n)} \geq c\sqrt{n}$.

Наконец, если $R \in W_n^* \otimes Z^{**}$, $\| R \| \leq 1$ то так же, как и выше, мы получаем

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{trace}\ R \circ t| &\leq \|R\pi\|_{\mathrm{L}(Z,W_n)}\ \|t_1 - t_2\|_{\mathrm{I}(\mathrm{F},\pi(\mathrm{Z}))}\ \| \phi \|_{\mathrm{L}(Z^{**},F)} \\
&\quad + \|Rj^{-1}\|_{\mathrm{L}(Z^{**},W_n)}\ \|j \circ t_2\|_{\mathrm{I}(F,Z^{**})}\ \| \phi \|_{\mathrm{L}\ Z^{**},F)} \\
&< \left(2 + \frac{2C_0}{\sqrt{n}}\right) + \frac{2C_0}{\sqrt{n}} \leq C = 5C_0
\end{aligned}$$

Это показывает, что справедливо и утверждение (v). ∎

Следствие 4.1. *Если Z — такое сепарабельное банахово пространство, что $Z^{**} \in \mathrm{AP}$ и $Z^{**}/Z \notin \mathrm{AP}$, то естественное вложение $\pi : Z \to Z^{**}$ факторизуется через сепарабельное пространство X со свойством аппроксимации, не обладающее свойством ограниченной аппроксимации.*

Доказательство. Это, по существу, получается при доказательстве теоремы 4.1: если $W_1, W_2, \ldots$ — пространства, построенные в этом доказательстве (для $\alpha = 1, 2, \ldots$), то, по определению нормы $|||\cdot|||_\alpha$, для каждого $\alpha = 1, 2, \ldots$ тождественное включение $i_\alpha : Z \to W_\alpha$ есть изометрическое вложение, и норма тождественного отображения $j_\alpha : W_\alpha \to Z^{**}$ не превосходит 1. Положим $X = \left(\sum_{n=1}^\infty W_n\right)_{l_1}$ и определим операторы $A : Z \to X$ и $B : X \to Z^{**}$ соотношениями

$$Az = \left\{\frac{1}{2^n}\, i_n z\right\}_{n=1}^\infty \qquad \text{and} \qquad B\,\{w_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty j_n w_n.$$

Тогда $\|Az\| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\|z\| = \|z\|$, $\|B\| \leq 1$, $BAz = B\,\{2^{-n}\, i_n z\} = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} j_n i_n z = \pi z$. ∎

Следствие 4.2. *Существуют вполне сепарабельное банахово пространство X, Y и операторы $A \in \mathrm{L}(Y,X)$, $B \in \mathrm{L}(X,Y^{**})$ и $T \in \mathrm{L}(Y^{**},Y)$, со следующими свойствами:*

1) $X \in \mathrm{AP}$, Y^{**} *имеет базис;*
2) $\pi_Y = BA$, $\pi_Y T = BAT \in \mathrm{N}\,(Y^{**}, Y^{**})$
3) $T \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}\,(Y^{**}, Y)$, *но T не лежит в замыкании множества $Y^{***} \otimes Y$ в* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}\,(Y^{**}, Y)$;
4) $AT \notin \mathrm{N}\,(Y^{**}, X))$, *но AT лежит в замыкании множества $Y^{***} \otimes X$ в* $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}\,(Y^{**}, X)$.

Доказательство. В обозначениях теоремы 4.1 и ее доказательства, для $\varepsilon = 1$, пусть $Y = \left(\sum_{n=1}^\infty Z\right)_{l_2}$, $X = \left(\sum_{n=1}^\infty W_{2^n}\right)_{l_2}$, $T = \bigoplus_{n=1}^\infty \left(n^{-2} t_{2^n}\right)$, $A = \bigoplus_{n=1}^\infty i_{2^n}$ (здесь $i_{2^n} : Z \to W_{2^n}$ — тождественное вложение), $B = \bigoplus_{n=1}^\infty j_{2^n}$. Так как $T(Y^{**}) \subset Y$, то наши условия 1) – 2) выполнены.

Далее,

$$\|n^{-2}\, t_{2^n}\|_{\mathrm{N}(Z^{**},W_n)} \geq c\, n^{-2}\, 2^n \quad \text{and} \quad \|n^{-2}\, t_{2^n}\|_{\mathrm{N^{reg}}(Z^{**},W_n)} \leq 2n^{-2}$$

(последнее неравенство вытекает из того факта, что для операторов t_{2^n} нормы их в $\mathrm{N^{reg}}\,(Z^{**}, W_n)$ и в $\mathrm{I}\,(Z^{**}, W_n)$ — одни и те же, так как пространство Z^{***} сепарабельно и, следовательно, обладает свойством Радона–Никодима.

Поэтому $AT \notin \mathrm{N}\,(Y^{**}, X)$ но $AT \in \mathrm{N^{reg}}\,(Y^{**}, X)$. Более того, для каждого n $t_{2^n} \in Z^{***}\widehat{\otimes} W_{2^n} = \mathrm{I}\,(Z^{**}, W_{2^n})$; следовательно, t_{2^n} лежит в замыкании множества $Z^{***} \otimes W_{2^n}$ в пространстве $\mathrm{I}\,(Z^{**}, W_n)$ и, значит, в замыкании шара радиуса $\|t_{2^n}\|_{\mathrm{I}(Z^{**},W_{2^n})} \leq 2$ пространства $\left(Z^{***} \otimes W_{2^n}, \|\cdot\|_{\mathrm{I}(Z^{**},W_{2^n})}\right)$ в пространстве $\mathrm{I}\,(Z^{**}, W_{2^n})$. Таким образом, $AT = A\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} n^{-2} t_{2^n}\right)$ принадлежит замыканию множества $Y^{***} \otimes X$ в пространстве $\mathrm{N^{reg}}\,(Y^{**}, X) = \mathrm{I}\,(Y^{**}, X)$.

Наконец, свойство 3) очевидно, поскольку каждый оператор t_α обладает соответствующим свойством. ■

Следствие 4.3. *Существуют сепарабельное банахово пространство X со свойством аппроксимации, постоянная $C > 0$, счетное семейство $\{E_n\}$ подпространств пространства X, $\dim E_n = n$ для $n \in \mathbb{N}$, такие, что если $R \in X^* \otimes X$ и $R|_{E_n} = \mathrm{id}_{E_n}$ для некоторого фиксированного n, то $\|\, R\, \| \geq C\sqrt{n}$.*

Доказательство. Пусть W_n и t_n — пространства и операторы из теоремы 4.2, $E_n = t_n(W_n)$. Если $R \in W_n' \otimes W_n$ and $R \equiv \mathrm{id}_{E_n}$ на подпространстве E_n то $|\,\mathrm{trace}\; R\, t_n| = |\,\mathrm{trace}\; t_n| = 1$ и $|\,\mathrm{trace}\; R\, t_n| \leq \|R\|\, \|t_n\|_{\mathrm{I}} \leq \|R\|\, C/\sqrt{n}$. Следовательно, $\|R\| \geq C^{-1}\sqrt{n}$. Теперь достаточно положить $X = (\sum W_n)_{L_2}$. ■

Замечание 4.1. Последнее следствие было анонсировано в [46, теорема 1.6] и получено другим методом в [131, следствие 3].

Следствие 4.4. *Существует постоянная $c > 0$ со следующим свойством. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ можно найти сепарабельное банахово пространство W с базисом, сепарабельное банахово пространство W_n со свойством ограниченной аппроксимации, n-мерный оператор $t : W \to W_n$ такие, что*

(i) $\forall U \in \mathrm{L}\,(W_n, W) \quad |\,\mathrm{trace}\; U \circ t| \leq \|U\|$ *and* $\|t\|_\wedge \geq c\sqrt{n}$;

(ii) *существуют $\varepsilon > 0$ и оператор $V \in \mathrm{L}\,(W_n, W^{**})$, для которого $\|V\| \leq 1$, такие , что если $E_n = t(W)$, $F_n = t^*(W_n^*)$, $R \in \mathrm{L}(W_n, W)$ и*

$$(*) \qquad \forall\, e \in E_n,\ \forall\, f \in F_n \qquad |\,\langle Re - Ve, f\rangle\,| \leq \varepsilon\, \|e\|\, \|f\|$$

то $\|R\| \geq c\sqrt{n}$.

Доказательство. Пусть W, W_n, и t — как в теореме 4.2. Пространство W обладает свойством метрической аппроксимации; поэтому, если $U \in \mathrm{L}(W_n, W)$, то существует сеть $\{R_\alpha\}$, $R_\alpha \in W_n \otimes W$, сходящаяся к U в топологии компактной сходимости и такая, что $\|R_\alpha\| \leq \|U\|$ для любого α. Следовательно, $|\,\mathrm{trace}\; U \circ t| = \lim_\alpha |\,\mathrm{trace}\; R_\alpha \circ t| \leq \|R_\alpha\|\, \|\, t\, \|_{\mathrm{I}(W,W_n)} \leq C\, \|U\|$.

Для доказательства (i) достаточно заметить, что $\| t \|_\wedge \geq \sqrt{n}$.

Для доказательства (ii) рассмотрим такой оператор $V \in \mathrm{L}(W_n, W^{**})$, что $\|V\| \leq 1$ и $\|t\|_\wedge = \mathrm{trace}\, V \circ t$. Для $R \in \mathrm{L}(W_n, W)$ имеем: $|\,\mathrm{trace}\, R \circ t| \leq C\,\|R\|$. Если R удовлетворяет условию (*), то $|\,\mathrm{trace}\, R \circ t| \geq |\,\mathrm{trace}\, V \circ t| - |\,\mathrm{trace}\,(R - V) \circ t| \geq \| t \|_\wedge - \varepsilon\, n \, \| t \|_\wedge$. Таким образом, для достаточно малых ε получаем: $\|R\| \geq (1/2\,C)\, \| t \|_\wedge \geq (1/2\,C)\, \sqrt{n}$. ■

Используя метод доказательства следствия 4.4.4 (применяя теорему 4.1 вместо теоремы 4.2) и метод "суммирования" из доказательства следствия 4.1 мы получаем

Следствие 4.5. *Существуют сепарабельные банаховы пространства W и X со следующими свойствами:*

(i) *W имеет базис,* $W \in \mathrm{MAP}$, $X \in \mathrm{AP}$;

(ii) *существует такой оператор $T \in \mathrm{L}(W, X)$, что для каждого оператора $U : X \to W$ суперпозиция UT лежит в проективном тензорном произведении $W^* \widehat{\otimes} W$ и $|\,\mathrm{trace}\, UT| \leq \|U\|$ (т.е. $T \in \mathrm{L}\,(X, W)^*$), но $T \notin W^* \widehat{\otimes} X$;*

(iii) *существует оператор $V : X \to W^{**}$, обладающий тем свойством, что V не лежит в замыкании пространства $\mathrm{L}(X, W^{**})$ в топологии поточечной $X \times W^*$-сходимости какого-либо шара конечного радиуса пространства $\mathrm{L}(X, W)$;*

(iv) *существуют $c > 0$ и счетные семейства $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ конечномерных подпространств в X и W^* соответственно, $\dim E_n = \dim F_n = n$, такие, что для каждого n если $R \in \mathrm{L}(X, W)$ — оператор, для которого $\langle Re, f \rangle = \langle Ve, f \rangle$ для каждого $e \in E_n$ и $f \in F_n$ то $\|R\| \geq c\,\sqrt{n}$.* ■

Замечание 4.2. Ниже (см. замечание 6.4.1) будет установлено, что существует банахово пространство Z, элемент $z \in Z^* \widehat{\otimes} Z$ и оператор $\Psi \in \mathrm{L}(Z, Z^{**})$ такие, что $\mathrm{trace}\, \Psi \circ z = 1$ но $\mathrm{trace}\, \Phi \circ z = 0$ для любого $\Phi \in \mathrm{L}(Z, Z)$ (ясно, что $Z \notin \mathrm{AP}$). Аналогом этого утверждения для случая, когда Z имеет свойство аппроксимации является утверждение (ii) предыдущего следствия. Это следствие также улучшает в некотором смысле теорему 2.2.3, в которой показано, что существует непрерывный линейный функционал на пространстве всех слабо компактных операторов некоторого банахова пространства со свойством аппроксимации, порожденный неядерным оператором.

Следствие 4.6. *Существуют (вполне) сепарабельное банахово пространство Z, $Z \in \mathrm{AP}$, и оператор $S \in \mathrm{L}(Z, Z^{**})$ такие, что если $\{R_\alpha\} \subset \mathrm{L}(Z, Z)$ и $R_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} S$ $Z \times Z^*$-поточечно, то $\|R_\alpha\| \underset{\alpha}{\longrightarrow} +\infty$. С другой стороны, ясно, что множество $Z^* \otimes Z$ конечномерных операторов плотно в $\mathrm{L}(Z, Z^{**})$ в топологии компактной сходимости.*

Доказательство. Достаточно взять $Z = W \oplus X$, где W и X — пространства из следствия 4.5 и определить оператор $S : Z \to Z^{**}$ соотношением $S(w, x) = (Vx, 0)$, где V — из утверждений (iii) – (iv) следствия 4.5. ■

§5. Вокруг одного вопроса Ю. А. Брудного

Следующие результаты появились благодаря такому вопросу Ю. А. Брудного (поставленного автору в письме несколько лет назад; см. также [1]; любопытно, что аналогичный вопрос в терминах тензорных произведений в связи с теорией интерполяции был задан автору и шведским математиком С. Кайзером): верно ли, что единичный шар из $\mathrm{L}(X, Y)$ плотен в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(Y^*, X^*)$ в топологии поточечной $Y^* \times X$-сходимости (здесь, как обычно, $\mathrm{L}(X, Y)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y)? Простейшие достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос: а) пространство Y рефлексивно, б) X обладает свойством метрической аппроксимации. От условия б), как мы увидим, освободиться, вообще говоря, нельзя. Условие а), конечно, можно ослабить (см. предложение 5.1).

Через $X^* \otimes Y$ мы по–прежнему обозначаем множество всех конечномерных операторов из X в Y с обычной нормой.

Для пары банаховых пространств X, Y мы будем рассматривать пространство $\mathrm{L}(X, Y)$ как подпространство пространства $\mathrm{L}(Y^*, X^*)$, имея в виду, что существует естественное каноническое изометрическое вложение первого во второе, причем второе пространство естественным образом отождествляется с банаховым пространством $\mathrm{L}(X, Y^{**})$. Именно: при помощи канонического отображения $\pi_Y : Y \to Y^{**}$ вложим пространство $\mathrm{L}(X, Y)$ изометрично в $\mathrm{L}(X, Y^{**}) : T \mapsto \pi_Y T$. Рассмотрим, для $U \in \mathrm{L}(X, Y^{**})$, оператор $U^* : Y^{***} \to X^*$ и его сужение $V := U^*|_{Y^*} : Y^* \to X^*$. Оператор U^* *-слабо непрерывен как всякий сопряженный оператор, и единичный шар пространства Y^* *-слабо плотен в единичном шаре пространства Y^{***}; поэтому $\|V\| = \|U^*\|$, и мы получаем изометрическое вложение, обозначим его на время через j, банахова пространства $\mathrm{L}(X, Y^{**})$ в банахово пространство $\mathrm{L}(Y^*, X^*)$. Обратно, пусть $V \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$. Рассмотрим сопряженный оператор $V^* : X^{**} \to Y^{**}$ и его сужение $U := V^*|_X : X \to Y^{**}$. Снова, единичный шар пространства X *-слабо плотен в соответствующем шаре пространства X^{**}, и оператор V^* *-слабо непрерывен; поэтому $\|V^*\| = \|U\|$. Наконец, для $y' \in Y^*$ и $x \in X$ имеем

$$\langle U^* y', x\rangle \equiv \langle U^* \pi_{Y^*} y', x\rangle = \\ \langle \pi_{Y^*}, Ux\rangle = \langle \pi_{Y^*} y', V^* \pi_X x\rangle = \langle y', V^* \pi_X x\rangle = \langle V y', \pi_X x\rangle = \langle V y', x\rangle,$$

и, таким образом, $U^*|_{Y^*} = V$. Это показывает, что рассмотренное выше естественное отображение $j : \mathrm{L}(X, Y^{**}) \to \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ есть изометрия первого пространства на второе. Итак, мы можем писать $\mathrm{L}(X, Y^{**}) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и рассматривать пространство $\mathrm{L}(X, Y)$ как подпространство любого из этих двух. Ниже мы обычно не будем явно указывать возникающие при описанных изометрических отображениях ни отображения отождествления j, j^{-1}, ни связанные с ними канонические операторы π, и будем свободно, рассматривая некоторый оператор, принадлежащий одному из этих операторных пространств, переходить из одного пространство в другое.

Предложение 5.1. *Для плотности шара радиуса $r, r \in [1, +\infty]$, пространства $\mathrm{L}(X, Y)$ в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(Y^*, X^*)$ в топологии τ_c компактной сходимости пространства $\mathrm{L}(Y^*, X^*)$ достаточно следующего условия:*

существует сеть слабо компактных операторов в Y, сопряженные к которым в топологии τ_c сходятся к тождественному оператору и нормы которых $\leqslant r$.

Доказательство. Пусть $V \in \mathrm{L}(Y^*, X^*), \|V\| \leqslant 1$ и $K \subset Y^*$ — некоторый компакт. Для данного числа ε, $\varepsilon > 0$, рассмотрим какой-нибудь слабо компактный оператор $R : Y \to Y$, $\|R\| \leqslant r$, сопряженный к которому удовлетворяет соотношению $\sup_K \|Ry' - y'\| < \varepsilon$. Поскольку $R^{**}(Y^{**}) \subset Y$, то оператор

$$U := R^{**}V^*|_X : X \to X^{**} \to Y^{**} \to Y^{**}$$

действует в пространство Y, причем оператор U^*, рассматриваемый как оператор из Y^* в X^*, т.е. оператор $(U^\pi)*$, имеет норму не большую r, и $\sup_K \|Vy' - U^*y'\| = \sup_K \|Vy' - VR^*y'\| < \|V\|\varepsilon \leqslant \varepsilon$. ■

Другие условия можно найти в теореме I.5.1.1 и следствиях.

То, что эти условия в существенны, вытекает из нижеследующих результатов, так же как и из следствия 4.6. Заметим, что ответ (отрицательный) на вопрос, с которого мы начали параграф конечно же вытекает, в частности, из следствия 4.6

Для удобного использования ниже (в конце параграфа) следствие 4.4, нам удобно переформулировать его часть в виде теоремы:

Теорема 5.1. *Существуют постоянная $c > 0$ и сепарабельное банахово пространство E с базисом такие, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно найти сепарабельное пространство E_n с базисом и n-мерный оператор $t : E \to E_n$, для которых*

1) $\forall\, U \in \mathrm{L}(E_n, E) \quad |\operatorname{trace} U \circ t| \leqslant \|U\|$;

2) $\|t|\, E^*\widehat{\otimes}E_n\| \geqslant c\sqrt{n}$;

3) *существует $\varepsilon > 0$ и $V_n \in \mathrm{L}(E_n, E^{**}), \|V_n\| \leqslant 1$, такие, что если $G_n = t(E), F_n = t^*(E_n^*), R \in \mathrm{L}(E_n, E)$ и $|\langle (R - V_n)g, f\rangle| \leqslant \varepsilon\|g\|\,\|f\|$ для всех $g \in G_n, f \in F_n$, то $\|R\| \geqslant c\sqrt{n}$.*

Упомянутый выше вопрос Ю.А.Брудного был связан со следующим вопросом, принадлежащим ему же (см. также [1]). Следуя [1], обозначим через $\mathrm{W}(Y^*, X^*)$ множество тех операторов T из Y^* в X^*, для которых существует число $\gamma = \gamma(T) > 0$ такое, что

$$|\langle Ty', x\rangle| \leqslant \gamma \sup\{|\langle y', Sx\rangle| :\ S \in \mathrm{L}(X, Y),\ \|S\| \leqslant 1\}$$
$$\forall\, x, y';\ \|x\|,\ \|y'\| \leqslant 1,$$

и положим $\|T\|_{\mathrm{W}} = \inf \gamma$. Верно ли, что $\mathrm{W}(Y^*, X^*) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$? Оказывается, имеет место не только это равенство, но и более общий факт. Для его формулировки нам понадобится следующее определение. Если $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, то обозначим через $\mathrm{W}_n(Y^*, X^*)$ множество всех операторов $T : Y^* \to X^*$, для которых существует число $\gamma_n(T)$ такое, что

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} \langle T y_j', x_j \rangle \, \lambda_j \Big| \leqslant \gamma_n(T) \sup \left\{ \Big| \sum_{j=1}^{n} \langle y_j', S x_j \rangle \, \lambda_j \Big| : \ S \in \mathrm{L}(X,Y), \ \|S\| \leqslant 1 \right\}$$

для всех $x_j \in X, y_j' \in Y^*; \|x_j\| \leqslant 1, \|y_j\| \leqslant 1$, и всех $\lambda_j \geqslant 0, \ \sum_1^n \lambda_j = 1$.

Положим $\|T\|_n \equiv \|T\|_{\mathrm{W}_n} = \inf \gamma_n(T)$. Ясно, что в определении W_n можно ограничиться элементами x_j и y_j' единичной нормы; при этом $\|\cdot\|_{\mathrm{W}} = \|\cdot\|_{\mathrm{W}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant \|\cdot\|_{\mathrm{W}_{n+1}}$.

Теорема 5.2. *Если $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$, то $\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant \sqrt{n}\, \|T\|$ (при $n \in \mathbb{N}$). В частности, $\mathrm{W}_n(Y^*, X^*) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ (при $n \in \mathbb{N}$) как множества, и $\|T\|_{W_1} = \|T\|$.*

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $(x_j)_1^n \subset X$ и $(y_j')_1^n \subset Y^*$, причем $\|x_j\| \leqslant 1, \|y_j\| \leqslant 1; \lambda_j \geqslant 0, \ \sum_1^n \lambda_j = 1$, и $E = [x_j]_1^n$. По принципу локальной рефлексивности, для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $S_0 : E \to Y$ такой, что $\|S_0\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T\|$ и $\langle S_0 x_j, y_j' \rangle = \langle T^* x_j, y_j' \rangle$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$. Положим $S_1 := S_0 P : X \to Y$, где P — такой проектор из X на E, что $\|P\| \leqslant \sqrt{n}$. Имеем:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \langle T y_j', x_j \rangle \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \langle y_j', S_1 x_j \rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{n}\,(1+\varepsilon)\|T\| \ \sup \left\{ \Big| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \langle y_j', S x_j \rangle \Big| : \ S \in \mathrm{L}(X,Y), \ \|S\| \leqslant 1 \right\}.$$

Следовательно, $\|T\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant \sqrt{n}\, \|T\|$. Из определения W_1 непосредственно вытекает, что $\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathrm{W}_1}$ $\blacksquare$

Из доказательства теоремы 5.2 моментально получается такое следствие.

Предложение 5.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если всякое n-мерное подпространство в X является Cn^α-дополняемым, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, то $\|T\|_{\mathrm{W}_n(Y^*, X^*)} \leqslant Cn^\alpha \, \|T\|$ для любых банахова пространства Y и оператора $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$. Более общо, если $C_0 > 0$ и всякое n-мерное подпространство пространства X C_0-дополняемо, то $\|T\|_{\mathrm{W}_n(Y^*, X^*)} \leqslant C_0 \, \|T\|$ для любых $Y, T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$.*

Предложение 5.3. *Для всякого $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и любого $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathrm{W}_n} &= \sup_{\substack{t \in Y^* \otimes X \\ \dim\, t \leqslant n}} \{ |\operatorname{trace}\, T^* \circ t| : \ |\operatorname{trace}\, S \circ t| \leqslant 1, \ \forall\, S \in \mathrm{L}(X,Y), \|S\| \leqslant 1 \} = \\
&= \sup \big\{ |\operatorname{trace}\, T^* \circ t| : \ t \in Y^* \otimes X, \dim t \leqslant n, \ \|t\|_{\mathrm{L}(X,Y)^*} \leqslant 1 \big\} = \\
&= \sup_{\substack{t \in Y^* \otimes X \\ \dim\, t \leqslant n}} \ \inf_{S \in \mathrm{L}(X,Y)} \{ \|S\| : \ \operatorname{trace}\, St = \operatorname{trace}\, T^* \circ t \}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство есть не что иное как переформулировка определения нормы в $\mathrm{W}_n(Y^*, X^*)$; второе — определение нормы в сопряженном пространстве. Обозначим правую часть последнего равенства через A. Если $t \in Y^* \otimes X$, $\dim t \leqslant n$ и $S \in \mathrm{L}(X, Y)$, то из соотношения $\mathrm{trace}\ T^* \circ = \|S\|\ \mathrm{trace}\ \frac{S}{\|S\|} \circ t$ вытекает, что $\|T\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant \|S\|$; значит, $\|T\|_{\mathrm{W}_n} \leqslant A$. Обратное неравенство получается из теореме о биполяре: единичный шар пространства $\mathrm{L}(X, Y)$ *-слабо плотен в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(X, Y)^{**}$; если $N := \{t \in Y^* \otimes X :\ \dim t \leqslant n\}$, то $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_n}$ есть норма в факторпространстве $\mathrm{L}(X, Y)^{**}/N^{\perp}$ (где N рассматривается как подпространство в $\mathrm{L}(X, Y)^*$). Всякий элемент этого факторпространства может быть поднят без существенного увеличения нормы до элемента $T_0 \in \mathrm{L}(X, Y)^{**}$, который, в свою очередь, приближается *-слабо (а значит, и поточечно на N) сетью операторов $S_\alpha \in \mathrm{L}(X, Y)$, нормы которых не превосходят $\|T_0\|$. В частности, для любых $\varepsilon > 0$ и $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и для всякого $t \in Y^* \otimes X, \dim t \leqslant n$, существует $S \in \mathrm{L}(X, Y)$ такой, что $\|S\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathrm{W}_n}$ и $\mathrm{trace}\ S \circ t = \mathrm{trace}\ T^* \circ t$. Поэтому $A \leqslant (1+\varepsilon)\|T\|_{\mathrm{W}_n}$ и, следовательно, $A \leqslant \|T\|_{\mathrm{W}_n}$. ■

Таким образом, $r = \|T\|_{\mathrm{W}_n}$ есть наименьшее число r, для которого, грубо говоря, на всяком n-мерном тензоре элемент T может быть сколь угодно хорошо приближен операторами из шара радиуса r пространства $\mathrm{L}(X, Y)$. Точнее, для $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathrm{W}_n} = \inf\{r > 0 :\\ \forall\, t \in Y^* \otimes X, \dim t \leqslant n,\ \exists\, S \in \mathrm{L}(X, Y), \|S\| \leqslant r, \mathrm{trace}\ S \circ t = \mathrm{trace}\ T^* \circ t\}.\end{aligned}$$

Теперь, используя указанную характеризацию $\|T\|_{\mathrm{W}_n}$, мы из теоремы 5.1 получаем утверждение, показывающее, что теорема 5.2 точна:

Следствие 5.1. *Существует сепарабельное банахово пространство X, $X \in \mathrm{AP}$, сепарабельное пространство Y с базисом, оператор $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и постоянная $c > 0$ такие, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ $\|T\|_{\mathrm{W}_n} \geqslant c\sqrt{n}$. В частности, $\|T\|_{\mathrm{W}_\infty} = +\infty$ и, следовательно, $\mathrm{W}_\infty(Y^*, X^*) \subsetneqq \mathrm{L}(Y^*, X^*)$.*

Доказательство. Достаточно, в обозначениях теоремы 5.1 положить $X = (\sum E_n)_{l_2}$ и $Y = (\sum E)_{l_2}$, и взять в качестве оператора T прямую сумму операторов $V_n^* : E \to E_n^*$. ■

§6. Аппроксимационные свойства AP_p, $0 < p \leqslant +\infty$, и C-MAP_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

1. Некоторые общие утверждения о свойствах AP_p. Аппроксимационные свойства порядка q для $q > 1$ впервые были введены и подвергнуты исследованию французским математиком П. Сафаром [145, 7Saph2]. Он получил простейшие характеристики этих и близких к ним свойств, рассматривая (опять таки, посуществу, впервые) различные нормированные тензорные произведения банаховых пространств, связанные с пространствами q-ядерных, абсолютно q-суммирующих и квази-q-ядерных операторов А. Пича и А. Перссона [123, 121]. П. Сафар в [146] сначала формулировал некоторые теоремы об эквивалентности ряда условий, накладываемых на операторы, либо на тензорные элементы, а затем вводил свои определения. Что касается свойств аппроксимации порядка q, то он, в частности, показал, что если $1 \leqslant 1 \leqslant +\infty$, то для банахова пространства F равносильны утверждения:

1) каково бы ни было банахово пространство E, естественное отображение из $E\widehat{\otimes}_{g_{q'}} F$ в $\mathrm{I}_{q'}(E^*, F)$ инъективно;

2) каково бы ни было банахово пространство E, множество всех конечномерных операторов из F в E плотно в $\Pi_q(F, E)$ в слабой топологии $\sigma\left(\Pi_q(F, E), E^*\widehat{\otimes}_{g_{q'}}\right)$ на $\Pi_q(F, E)$.

По Сафару, пространство F обладает свойством аппроксимации порядка q, если выполнено одно из эквивалентных условий 1) или 2).

Так вышло исторически, что эти аппроксимационным свойства П. Сафара после 1972 года вплоть до конца 70-х находились, по-существу, в тени. (Одна из причин этого, по-видимому, состоит в том, что все поддающееся исследованию в теории свойств аппроксимации порядка q, было изучено самим П. Сафаром, а задачи, возникающие в связи с нахлынувшими примерами типа примера П. Энфло, оставались достаточно трудными. Ряд таких проблем и по сей день открыты, и непонятно, кто и когда возьмется за них снова и сможет ответить на соответствующие открытые проблемы, — см. короткое обсуждение этого в начале этой главы и во Введении.) И только в конце 1979 г. вновь проявился серьезный интерес к этой тематике. Этому очень способствовала беседа польского математика А. Пелчинского с автором настоящей работы в Ленинграде. Результатом беседы стало решение ряда открытых проблем, связанных с аппроксимационными свойствами П. Сафара и операторными идеалами А. Пича и А. Перссона, в первой половине 1980-го года. Так получилось, что Рейнов О. И. несколько перепутал параметры p при рассмотрении свойств аппроксимации П. Сафара и определил в самой первой работе [41] 1981-го года свойство AP_p аппроксимации порядка p для банахова пространства F как свойство этого пространства F, указанное в утверждении 1) выше при $q = p'$. Эта — одна из причин, надо надеяться, несущественного расхождения в терминологиях П. Сафара и нашей. Однако, отметим, что в последние несколько лет, после некоторого затишья в изучении пространств, обладающих свойствами аппроксимации П. Сафара или, более общо, со свойствами аппроксимации более общими, чем свойства П. Сафара, снова проявился интерес к этой тематике. Об этом в надлежащих местах работы мы будем делать соответствующие отступления.

Таким образом, мы определяем свойство AP_p как свойство "аппроксимации порядка p' П. Сафара. Свойство же аппроксимации порядка p при значении показателя p, меньшем единицы (у П. Сафара при его определении просто не было возможности ввести в рассмотрение это свойство) впервые появилось у автора настоящей работы в статье [43].

Напомним, наши определения. Банахово пространство Y *обладает свойством*

AP_p *аппроксимации порядка* p (коротко — $Y \in \mathrm{AP}_p$), где $0 < p \leqslant \infty$, если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^*\widehat{\otimes}_p Y = \mathrm{N}_p(X,Y)$). Это определение равносильно определению П. Сафара, если рассматривать случаи $p = q'$. При $p = 1$ общепринята аббревиатура AP .

В дальнейшем без дополнительных ссылок будем использовать следующие хорошо известные (и сравнительно простые) факты: (1) каждое банахово пространство обладает свойством AP_2; (2) для всякого $p \in [1,+\infty]$ $\mathrm{AP} \Rightarrow \mathrm{AP}_p$; (3) если $X^* \in \mathrm{AP}$, то $X \in \mathrm{AP}$.

Первые два принадлежат П. Сафару [146], однако стоит заметить, что утверждение (2), по-существу, установлено еще А. Гротендиком [80]. А. Гротендик показал, что его свойство аппроксимации сильнее любого другого разумного аппроксимационного свойства (ср. с тем фактом, что проективное тензорное произведение А. Гротендика порождается сильнейшей тензорной кросс-нормой, слабейшая среди которых — тензорная норма, ассоциированная с обычной операторной нормой). А. Гротендик же доказал и импликацию, о которой говорится в утверждении (3) (это уже не совсем тривиально; отметим, что обращение (3) неверно — надо соединить результаты П. Энфло [75] и Й. Линденштраусса [101]). Приведем эскиз доказательства утверждения (2), — того, что если Y обладает свойством аппроксимации Гротендика (т.е. $Y^*\widehat{\otimes}_1 Y = \mathrm{N}_1(Y,Y)$), то для любого p и для всякого банахова пространства X каноническое отображение $j_p : X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ инъективно. Можно считать, что $p > 1$ (относительно $p < 1$ — см. ниже). Если $z \in X^*\widehat{\otimes}_p Y, z \neq 0$, то найдется $U \in \Pi_{p'}(Y, X^{**})$ такой, что trace $U \circ z = 1$; из элемента $U \circ z$ можно естественным образом сконструировать элемент $w \in Y^*\widehat{\otimes}_1 Y$, для которого trace $w =$ trace $U \circ z = 1$; следовательно, $w \neq 0$, откуда $\widetilde{z} \neq 0$.

Каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to X^*\widehat{\otimes}_1 Y$ при $p < 1$ всегда взаимно однозначно (по определению $\widehat{\otimes}_p$), поэтому

(2a) для всякого $p \in (0,1]$ $\mathrm{AP} \Rightarrow \mathrm{AP}_p$.

В то же время каноническое отображение $X^*\widehat{Y}\otimes_1 \to \mathrm{L}(X,Y)$ не обязано быть инъективным (П. Энфло). Тем не менее всегда взаимно-однозначно каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_2 Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ (утверждение (1) П Сафара). Докажем это (не только для полноты изложения, но и для того, чтобы, в частности, показать, какая идея будет лежать в основе некоторых наших рассуждений в дальнейшем).

Итак, надо показать, что всегда взаимно-однозначно каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_2 Y \to \mathrm{L}(X,Y)$. Пусть $z \in X^*\widehat{\otimes}_2 Y$, $z \neq 0$. Тогда для некоторого $U \in \Pi_2(Y, X^{**})$ trace $U \circ z \neq 0$. Пусть $z = \sum x'_j \otimes y_j$ — какое-либо (2-ядерное) представление тензорного элемента z, так что trace $U \circ z = \sum \langle x'_j, Uy_j\rangle$. Оператор U факторизуется через гильбертово пространство $H: Y \xrightarrow{V} H \xrightarrow{T} X^{**}$. Пусть P_N — ортопроектор из H на $[Vy_j]_1^N$. Тогда trace $U \circ z = \lim \sum_1^N \langle x'_j, TP_N Vy_j\rangle$. Следовательно, для некоторого N trace$(TP_N V) \circ z \neq 0$ и, таким образом, z не может порождать нулевой оператор (иначе trace $\Phi \circ z = 0 \; \forall\, \Phi \in Y^* \otimes X^{**}$).

Эту же идею, но в немного более сложной ситуации, мы применяли для доказательства теоремы 3.2.1.

Из теоремы 3.2.1 и результатов [126] о количественном аспекте дополняемости конечномерных подпространств в пространствах типа p и котипа q вытекает

Следствие 6.1.1. *Пусть $1/s - |1/p - 1/q| \geqslant 1$ и X — банахово пространство типа p и котипа q. Тогда $X \in \mathrm{AP}_s$. В частности, если $X \subset L_p$, то $X \in \mathrm{AP}_s$, где $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$.*

Действительно, в банаховых пространствах типа p и котипа q для любого $n \in \mathbb{N}$ всякое n-мерное подпространство $C\,n^{|1/p-1/q|}$-дополняемо. Пространства L_p, в зависимости от положения параметра p относительно двойки, имеет либо тип 2 и котип p, либо котип 2 и тип p (при конечных значениях p; при $p = \infty$ применима теорема Гротендика о 2/3). $\blacksquare$

Теперь мы хотим охарактеризовать свойства AP_p в терминах сходимости конечномерных операторов к абсолютно p'-суммирующим в некотором пространстве (или, если угодно, в некоторой топологии на пространстве $\Pi_{p'}$). Кроме того, мы увидим, что при проверке того факта, что некоторое банахово пространство обладает свойством AP_p, вполне можно при проверке условия, указанного в определении, ограничиться рассмотрением рефлексивных "пробных" пространств. Мы сформулируем и докажем следующее предложение в самом общем виде, включив в него и (забегая вперед) и соответствующие утверждения о свойствах C-метрической аппроксимации порядка p (см. ниже определение 6.2.1). Это делается для того, чтобы не возвращаться к этому предложению ниже в п. 2. С другой стороны, не хотелось бы сейчас вводить определения свойств метрической аппроксимации, поскольку в этом разделе мы имеем дело только со свойствами аппроксимации. Итак, докажем следующее утверждение.

Предложение 6.1.1. *Для $p > 1$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *X имеет свойство AP_p (соответственно, свойство K-MAP_p);*

2) *для любого рефлексивного пространства Y каноническое отображение*

$$Y^* \widehat{\otimes}_p X \to I_p(Y, X^{**})$$

взаимно однозначно (соответственно, есть K-изометрическое вложение);

3) *для любых $\varepsilon > 0$, рефлексивного пространства Y, оператора $T \in \Pi_{p'}(X, Y)$ и слабо p'-суммируемой последовательности $(x_k) \subset X$, существует такой конечномерный оператор R из X в Y, что*

$$\sum \|Tx_k - Rx_k\|^{p'} < \varepsilon$$

(соответственно, и $\pi_{p'}(R) \leqslant K\pi_{p'}(T)$).

Замечание 6.1.1. Предложение 6.1.1 отвечает на один вопрос П. Сафара ([146], стр. 385).

Доказательство Предложения -6.1.1. Нам надо доказать лишь импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 2),

2) $\implies$ 3). Предположим, что существуют $\varepsilon > 0$, рефлексивное пространство Y, слабо p'-суммируемая последовательность $(x_k) \subset X$ и оператор $T \in \Pi_{p'}(X,Y)$, $\pi_{p'}(T) \leqslant 1$, такие, что

a) если $R \in X^* \otimes Y$, то $\sum \|Tx_k - Rx_k\| > \varepsilon$ или, соответственно,

b) если $R \in X^* \otimes Y$ и $\pi_{p'}(R) \leqslant K$, то $\sum \|Tx_k - Rx_k\| > \varepsilon$.

Мы можем рассматривать T и R как элементы пространства $l_{p'}(Y)$, полагая $\widetilde{T}(n) = Tx_n$ и $\widetilde{R}(n) = Rx_n$. Тогда имеем:

a) $\|\widetilde{T} - \widetilde{R}\|_{l_{p'}(Y)} > \varepsilon^{1/p'}$ или, соответственно

b) если $\pi_{p'}(R) \leqslant K$, то $\|\widetilde{T} - \widetilde{R}\|_{l_{p'}(Y)} > \varepsilon^{1/p'}$.

Отсюда следует, что существует функционал $\varphi \in (l_{p'}(Y))^* = l_p(Y^*)$ такой, что

a) $\langle \varphi, \widetilde{R}\rangle = 0$ для любого $R \in X^* \otimes Y$ и $\langle \varphi, \widetilde{T}\rangle \neq 0$ или, соответственно,

b) $\langle \varphi, \widetilde{T}\rangle > \sup\{\langle \varphi, \widetilde{R}\rangle : \ R \in X^* \otimes Y, \pi_{p'}(R) \leqslant K\}$.

Положим $\Phi = \sum \varphi(n) \otimes x_n \in Y^* \otimes X$. Тогда

a) trace $R\Phi = \langle \varphi, R\rangle = 0$ для каждого $R \in X^* \otimes Y$ и trace $T\Phi = \langle \varphi, T\rangle \neq 0$ или, соответственно,

b) $\|\Phi\|_{Y^*\widehat{\otimes}_p X} \geqslant \mathrm{trace}\, T\Phi = \langle \varphi, T\rangle > \sup\{\langle \varphi, \widetilde{R}\rangle : \ R \in X^* \otimes Y, \pi_{p'}(R) \leqslant K\} = \sup\{\mathrm{trace}\, R\Phi : \ R \in X^* \otimes Y, \pi_{p'}(R) \leqslant K\} = K\,\|\Phi\|_{\mathrm{I}_p(Y,X^{**})}$.

3) $\implies$ 1). Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть Z — банахово пространство и $t \in X^*\widehat{\otimes}_p X$, $\|t\| = 1$. Тогда существует оператор $U \in \Pi_{p'}(X, Z^{**})$, такой,что $\pi_{p'}(U) = 1$ и trace $Ut = 1$.

Нам надо показать, что существует $R \in X^* \otimes Z^{**}$, такой. что

a) trace $RT \neq 0$

или, соответственно,

b) trace $RT \geqslant 1 - \varepsilon$ и $\pi_{p'}(R) \leqslant K$.

Мы можем считать, что пространство Z рефлексивно, так как t можно рассматривать как элемент пространства $Z^{***}\widehat{\otimes}_p X$ с нормой $\|t\| = 1$ в этом пространстве и оператор U допускает следующую факторизацию:

$$U : X \underset{T}{\longrightarrow} Y \underset{S}{\longrightarrow} Z^{**},$$

где Y — рефлексивное пространство, $\|S\| \leqslant 1$ и $\pi_{p'}(T) \leqslant 1$.

Пусть $t = \sum z_n' \otimes x_n$, где $\sum \|z_n'\|^p \leqslant 1$ и $\sup\{\sum |\langle x', x_n\rangle|^{p'} : \ \|x'\| \leqslant 1\} < +\infty$. По условию мы можем найти оператор $R \in X^* \otimes Z$, такой, что

$$\sum \|Rx_n - Ux_n\|^{p'} < \varepsilon^{p'}$$

(соответственно, и $\pi_{p'}(R) \leqslant K$).

Отсюда следует, что

$$\mathrm{trace}\, Rt = \mathrm{trace}\, Ut - \mathrm{trace}\,(Ut - Rt) = 1 - \sum \langle z_n', Ux_n - Rx_n\rangle \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \Big(\sum \|z_n'\|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum \|Ux_n - Rx_n\|^{p'}\Big)^{1/p'} \geqslant 1 - \varepsilon. \quad \blacksquare$$

В дополнение к предложению 6.1.1 также имеем:

Предложение 6.1.2. *Для $p \geqslant 1$ и для банахова пространства X рассмотрим следующие условия:*

$1)_p$ *X имеет свойство AP_p;*

$2)_p$ *для каждого пространства $L_p = L_p(\mu)$, любых операторов $U \in \mathrm{L}(L_p, X)$ и $T \in \mathrm{N}_1(X, L_p)$ из неравенства $\operatorname{trace} TU \neq 0$ вытекает, что $UT \neq 0$;*

$3)_p$ *если (x_k) — такая последовательность в X, что $\|x_k\| \to 0$ и $\sup_{\|x'\|} \sum |\langle x, x'_k\rangle|^{p'} < \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечномерный оператор $R : X \to X$, такой, что $\sup_k \|Rx_k - x_k\| < \varepsilon$.*

Имеем: $1)_p \implies 2)_p \implies 3)_p$ *и* $1)_1 \iff 2)_1 \iff 3)_1$.

Доказательство. Ясно, что $3)_1 \implies 1)_1$.

$1)_p \implies 2)_p$. Пусть $U \in \mathrm{L}(L_p, X), T \in \mathrm{N}_1(X, L_p)$ и $\operatorname{trace} TU \neq 0$. Оператор UT допускает следующую факторизацию:

$$X \underset{A}{\longrightarrow} l_{p'} \underset{B}{\longrightarrow} l_1 \underset{C}{\longrightarrow} L_p \underset{U}{\longrightarrow} X,$$

где $A \in \Pi_{p'}(X, l_{p'})$ и B — диагональный оператор. Положим $Z = \overline{A(X)}$ и $V = CBj$, где j — вложение $Z \hookrightarrow l_{p'}$. Так как $B^* \in \Pi_p$, то $V \in \mathrm{N}(Z, L_p)$; поэтому $UV \in \mathrm{N}_p(Z, X) = Z^* \widehat{\otimes}_p X$. Теперь, если $UT = 0$, то $UV = 0$ и $\operatorname{trace}(UV) \circ A = 0$ ($\operatorname{trace} UVA$ вполне определен, так как X имеет свойство AP_p). Но нетрудно видеть, что $\operatorname{trace}(UV) \circ A = \operatorname{trace} TU$. Противоречие.

Импликация $2)_p \implies 3)_p$ может быть доказана тем же методом, что и в доказательстве импликации $2) \implies 3)$ предложения 6.1.1. ■

Соберем воедино некоторые факты о свойствах AP_p, в частности, о соотношениях между этими свойствами (не побоимся небольшого повторения в теореме 6.1.1). Мы изложим, по-существу, все, что известно на настоящий момент в этом направлении.

Теорема 6.1.1. 1) $\mathrm{AP}_1 \implies \mathrm{AP}_s\ \forall s > 0$;

2) $\mathrm{AP}_r \implies \mathrm{AP}_s$, *если* $0 < s \leqslant r \leqslant 1$;

3) *если $s, r \in [2/3, 1)$ и $s \neq r$, то свойства AP_s и AP_r не равносильны;*

4) *если $p > 2$, то свойства AP_1 и AP_p не равносильны.*

Доказательство. 1) — это объяснялось для $s < 1$, а при $s > 1$ есть теорема П. Сафара.

2) — очевидно (определение соответствующих тензорных произведений).

3) Это не совсем очевидно, и вытекает, например, из теоремы 3.2.3.

4) Пусть X — пространство котипа 2. Тогда для каждого $p > 2$ имеем: $Y^* \widehat{\otimes}_p X = Y^* \widehat{\otimes}_2 X$ (см. [27]); поэтому X имеет свойство AP_p для каждого $p \geqslant 2$ (просто для таких X и p $\mathrm{AP}_p = \mathrm{AP}_2$). Так как существуют банаховы пространства котипа 2, не обладающие свойством аппроксимации [162], мы видим, что в общем случае свойства AP и AP_p не эквивалентны. ■

Теорема 6.1.2. *Если* $p > 2$ *и* $E \in \mathrm{AP}_p$, *то* $E \in \mathrm{AP}_q$ *для любого* $q \in [2, p]$. *Более того, если для некоторого* $q > 2$ $E \notin \mathrm{AP}_q$, *то существует такое пространство* F *и оператор* $U \in \mathrm{QN}_1(E, F)$, *что для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется элемент* $z \in F^* \widehat{\otimes}_{q+\varepsilon} E$ *такой, что* $\operatorname{trace} z \circ U = 1$, $\widetilde{z} = 0$.

Доказательство. Предположим, что $E \notin \mathrm{AP}_q$, где $q > 2$. В этом случае мы можем найти $V \in \Pi_{q'}(E, G)$[21] и $w \in G^* \widehat{\otimes}_q E$ такие, что $\operatorname{trace} w \circ V = 1$ и $\widetilde{w} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $V \in \mathrm{QN}_{q'}$. Пусть $w = \sum_1^\infty g'_j \otimes e_j$ — какое-либо представление w в $G^* \widehat{\otimes}_q E$. Рассмотрим факторизацию квази-q'-ядерного оператора V :

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{C} & E_\infty & \xrightarrow{B} & E_{q'} & \xrightarrow{A} & G \\ & & \cap & & \cap & & \\ & & c_0 & \xrightarrow{\Delta} & l_{q'} & & \end{array}$$

(Δ — диагональный оператор). Формула $Rg = \{\langle g'_j, g\rangle\}_1^\infty$ определяет оператор $R \in \mathrm{N}_q(G, l_q)$; следовательно, оператор $RA : E_{q'} \to l_q$ продолжается до некоторого оператора $Q \in \mathrm{N}_q(l_{q'}, l_q)$, который, в свою очередь, допускает следующую факторизацию:

$$\begin{array}{ccc} l_{q'} & \xrightarrow{Q} & l_q \\ \downarrow \Delta_0 & & \uparrow D_0 \\ c_0 & \xrightarrow{\Delta} & l_{q'} \end{array}$$

где Δ_0 — диагональный оператор, D — компактный оператор. Положим $F = \overline{\Delta_0 BC(E)} \subset l_1$; $U = \Delta_0 \Delta C \in \mathrm{QN}_1(E, F)$; $z_1(f) = \sum_1^\infty \langle D^* D_0^* \varphi_j, f\rangle e_j$, где φ_j — орты в $l_{q'}$; оператор z_1 имеет вид

$$l_1 \xrightarrow{D} l_1 \xrightarrow{D_0} l_q \xrightarrow{R_0} E,$$

где $R_0\{\xi\} = \sum \xi_j e_j$. Так как $q > 2$, то существуют гомоморфизм Ψ из $C(K)$ на l_q и оператор $\Phi : l_1 \to C(K)$ такие, что $\Phi\Psi = D_0$. Далее, из равенства $\mathrm{L}(C(K), l_q) = \mathrm{I}_{q+\varepsilon}(C(K), l_q)$ (см. [4]) $\forall\, \varepsilon > 0$, вытекает, что $z_1 = R_0 \Psi \Phi D \in \mathrm{N}_{q+\varepsilon}(l_1, E)$ $\forall\, \varepsilon > 0$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ оператор z_1 порождается тензорным элементом, лежащим в $l_\infty \widehat{\otimes}_{q+\varepsilon} E$. В то же время очевидно, что если $j : F \to l_1$ — тождественное вложение, то $\operatorname{trace} z_1 \circ j \circ U = \operatorname{trace} w \circ V = 1$ и $\widetilde{z_1 \circ j} = 0$. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ в $F^* \widehat{\otimes}_{q+\varepsilon} E$ найдется такой элемент z, что $\widetilde{z} = \widetilde{z_1 \circ j} = 0$ и $\operatorname{trace} z \circ U = 1$. ■

[21] Пространство G можно считать рефлексивным.

Теорема 6.1.3. *Если $s \leqslant 1$, $1/p + 1/s = 2$ и $s \leqslant q \leqslant p$, то* $\mathrm{AP}_q \implies \mathrm{AP}_s$. *Следовательно, если $p \in [1, 2]$ и банахово пространство X имеет свойство AP_p, то X имеет и свойство AP_s, где $1/p + 1/s = 2$. Таким образом, если X имеет свойство AP_p для каждого $p > 1$, то X имеет свойство AP_p для всех $p > 0, p \neq 1$.*

Доказательство. Пусть $X \notin \mathrm{AP}_s$. Тогда найдется такой элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_s X$, что $z \neq 0, \widetilde{z} = 0$. Пусть $z = \sum \lambda_j x'_j \otimes x_j$, где $||x'_j||$, $||x_j|| \leqslant 1$; $\lambda_j > 0$, $\sum \lambda_j^s < \infty$. Положим $U = \sum \lambda_j^{s/q'}\, x'_j \otimes e_j \in X^*\widehat{\otimes}_{q'} l_{q'}$; $z_1 = \sum \lambda_j^{1-s/q'}\, e_j \otimes x_j \in \mathrm{L}(l_{q'}, X)$. Так как $1 - s/q' = s(1 - 1/p + 1/q) \geqslant s$, то $z_1 \in l_q\widehat{\otimes}_1 X$. Отсюда легко вытекает, что $X \notin \mathrm{AP}_q$. ■

Замечание 6.1.2. Неизвестно, верно ли, что $\mathrm{AP}_q \implies \mathrm{AP}_p$ (если верно, то формулировка теоремы упрощается). Отметим, что из теоремы 6.1.3 вновь вытекает теорема Гротендика о 2/3.

Теорема 6.1.4. *Если $p \in [1, +\infty]$ и X — фактор-пространство пространства l_p, то $X \in \mathrm{AP}_1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{AP}_p$.*

Доказательство. Пусть $X \notin \mathrm{AP}_1$ и $x \in X^*\widehat{\otimes}_1 X, z \neq 0, \widetilde{z} = 0$, $z = \sum \lambda_j\, x'_j \otimes x_j$, где $||x'_j||\,||x_j|| \leqslant 1$; $\lambda_j > 0$, $\sum \lambda_j < \infty$. Положим $U = \sum \lambda_j^{1/p'}\, x'_j \otimes e_j \in X^*\widehat{\otimes}_{p'}$; $w_1 = \sum \lambda_j^{1/p}\, e_j \otimes x_j \in \mathrm{L}(l_{p'}, X)$. Здесь e_j — единичные орты. Очевидно, $w_1 \circ U = z$. Пусть $Y = \overline{U(X)} \subset l_{p'}$ и $j : Y \to l_{p'}$ — тождественное вложение. Так как $U \in \mathrm{QN}_{p'}(X, Y)$, то нам достаточно показать, что $w = w_1 \circ j \in Y^*\widehat{\otimes}_p X$ (тогда $w \neq 0, \widetilde{w} = 0$ и, следовательно, $X \notin \mathrm{AP}_p$).

Пусть $\varphi_j \in l_p, ||\varphi_j|| \leqslant 2, Q\varphi_j = x_j$, где $Q : l_p \to X$ — факторотображение; $A : l_1 \to l_p$ — такой оператор, что $Ae_j = \varphi_j$; $\Delta : l_{p'} \to l_1$ — диагональный оператор $\Delta\{\xi_j\} = \{\lambda_j^{1/p}\xi_j\}$ Ясно, что $A\Delta \in l_p\widehat{\otimes}_p l_p$; следовательно, $QA\Delta j \in Y^*\widehat{\otimes}_p X$. Тем не менее очевидно, что $w = QA\Delta j$. ■

Следствие 6.1.2. *Если $q \geqslant p > 2$ и X — фактор-пространство пространства l_p, то $X \in \mathrm{AP}_1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{AP}_q$ (эквивалентно, $X \in \mathrm{AP}_r\ \forall\, r \geqslant p$; $X \in \mathrm{AP}_r\ \forall\, r \geqslant 2$; $X \in \mathrm{AP}_r\ \forall\, r > 0$.*

Действительно, $X \in \mathrm{AP}_q \implies X \in \mathrm{AP}_p$ (теорема 6.1.2) $\implies X \in \mathrm{AP}_s\ \forall s \in [2, p]$ (теорема 6.1.2) $\implies X \in \mathrm{AP}_1$ (теорема 6.1.4) $\implies X \in \mathrm{AP}_q$. ■

2. Немного о свойствах C-MAP_p (C-метрической аппроксимации порядка p): когда AP_p влечет C-MAP_p? Напомним одно из большого числа эквивалентных определений свойства C-метрической аппроксимации C-MAP Гротендика (см. 0.3.6). Пространство Y *обладает свойством* C-MAP, если для любого X естественное отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ есть C-изометрическое вложение. Следующее определение конечно же навеяно определением А. Гротендика.

Определение 6.2.1. Пусть $C \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$. Пространство Y *обладает свойством* C-MAP_p, $Y \in C$-MAP_p, если для любого X естественное отображение

$X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C). Наконец, Y *имеет свойство* BAP_p (соответственно *свойство* MAP_p), если оно обладает свойством C-MAP_p для некоторого числа $C \geq 1$ (соответственно свойством 1-MAP_p).

Отметим, что при $p=1$ общеприняты аббревиатуры C-MAP, BAP, MAP.

П. Сафар [146] ввел в рассмотрение и подробно изучил свойство MAP_p. Он показал, в частности, что всякое банахово пространство обладает свойством MAP_2 и что $\mathrm{MAP} \implies \mathrm{MAP}_p$ для $p>1$. Конечно же для любого $p \in [1,\infty]$ имеет место импликация $\mathrm{BAP}_p \implies \mathrm{AP}_p$. С другой стороны, Т. Фигель и У. Б. Джонсон [76] показали, что включение $Y \in \mathrm{AP}_1$ не влечет за собой включение $Y \in \mathrm{BAP}_1$. Однако, если, например, существует проектор из Y^{**} на Y с нормой, равной единице, и Y пространство со свойством RN, то $Y \in \mathrm{AP}_1 \iff Y \in \mathrm{MAP}_1$ (см. §5). Что можно сказать о случаях других значений параметра p?

Вопрос о справедливости импликации "$\mathrm{AP}_p \implies \mathrm{BAP}_p$" мы отложим до следующего параграфа (там будет получен результат типа Фигеля–Джонсона). Здесь мы сформулируем и докажем некоторые аналоги следствия 5.1.1. Утверждения, приводимые далее, используются при доказательствах многих утверждений. В частности, они используются при рассмотрении вопросов о непрерывности p-ядерных и других норм по параметру p (см. ниже).

Следующее утверждение было анонсировано в [130, теорема 4.2]. Равносильное предложение установлено в [57, леммы 7, 8]. Можно дать и другое доказательство (отличное от доказательств в указанных работах). Мы приведем два различных доказательства.

Предложение 6.2.1. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P: Y^{**} \to Y$. Тогда для всякого $p \in (1,+\infty)$ из того,что Y обладает свойством AP_p вытекает условие $Y \in \|P\|$-MAP_p. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_p$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p$ эквивалентны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Предположим, что $Y \in \mathrm{AP}_p$, и рассмотрим элемент $z = \tilde{z} \in X^*\widehat{\otimes}_p Y = \mathrm{N}_p(X,Y)$. Мы зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$ и покажем, что

$$\nu_p(z) \leq \|P\|\, i_p^{\mathrm{Gr}}(z) + \varepsilon \tag{1}$$

(ясно, что из соотношения (1) вытекает утверждение нашей леммы).

Пусть U — такой абсолютно p'-суммирующий оператор из Y в X^{**}, что $\pi(U) < 1$ и $\operatorname{trace} Uz \geq \nu_p(z) - \varepsilon$. Если $z = \sum x'_n \otimes y_n$ — какое-либо p-ядерное представление оператора z, то последнее неравенство означает, что $\operatorname{trace} Uz = \sum \langle x'_n, Uy_n\rangle \geq \nu_p(z) - \varepsilon$.

Суперпозиция операторов U и z допускает следующую факторизацию:

$$X \xrightarrow{\ z\ } Y \xrightarrow{\ A\ } Y_0 \xrightarrow{\ j\ } Y_{p'} \xrightarrow{\ B\ } X^{**} \tag{2}$$

где все операторы непрерывны, причем $\|A\| \le 1$, $\|B\| \le 1$, $\pi_{p'}(j) \le 1$ и $Y_{p'}$ — подпространство в некотором *рефлексивном* пространстве $\mathrm{L}_{p'}(\mu)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} Uz &= \sum \langle x'_n\,, BjAy_n\rangle = \\ &= \sum \langle B^* x'_n\,, jAy_n\rangle \qquad \text{(мы отождествляем } x'_n \text{ с элементами из } X^{***}\text{)} \\ &= \operatorname{trace} jA\circ w, \end{aligned}$$

где $w = z\circ B$, а точнее, $w = \sum B^*x'_n \otimes y_n \in Y^*_{p'}\widehat{\otimes}_p Y$.

Так как пространство $Y_{p'}$ рефлексивно, то $\mathrm{I}_p(Y_{p'}, Y) = \mathrm{N}_p(Y_{p'}, Y)$ (вместе с равенством норм; см., например, [29] или теорему I.4.1.1). Поэтому

$$\begin{aligned} (3)\quad \nu_p(z) - \varepsilon \;\le\; \operatorname{trace}\, Uz \;=\; \operatorname{trace}\, iA\circ w \;\le\; \nu_p(w)\,\pi_{p'}(jA) \;\le \\ \le\; i_p(w) \;=\; i_p(P\pi w) \;\le\; \|B\|\,\|P\|\, i_p^{\mathrm{Gr}}(z) \;\le\; \|P\|\, i_p^{\mathrm{Gr}}(z), \end{aligned}$$

что и дает нам неравенство (1).

II. По предложению 6.1.1 нам достаточно показать, что если пространство X имеет свойство AP_p, то каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{I}_p(Y, X^{**})$ есть $\|P\|$-изометрическое вложение для любого рефлексивного банахова пространства Y. Но это есть простое следствие хорошо известного факта о том, что $\mathrm{N}_p(Y,Z) = \mathrm{I}_p(Y,Z)$ для всякого рефлексивного Y. $\blacksquare$

Замечание 6.2.1. Вопрос о том, справедливо ли утверждение предложения в случае $p = 1$, по-прежнему открыт (см. также замечание в самом конце работы [130]). Основная теорема в этом случае, по-существу, принадлежит А.Гротендику (см. [29], [71, стр. 246-247]): если сопряженное пространство обладает свойством Радона-Никодима и удовлетворяет условию аппроксимации, то оно удовлетворяет и условию метрической аппроксимации (некоторое ее обобщение можно найти, например, в работе [29] или в теореме I.5.1.1). Неясно также, что будет в случае $p = +\infty$. Мы можем здесь получить лишь такой аналог упомянутой теоремы А.Гротендика:

Предложение 6.2.2. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P : Y^{**} \to Y$. Тогда если Y^* обладает свойством Радона-Никодима и Y удовлетворяет условию AP_∞, то $Y \in \|P\|$-MAP_∞. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_\infty$ и $Y \in \mathrm{MAP}_\infty$ эквивалентны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В проведенном выше доказательстве предложения 6.2.1 теперь $p' = 1$, $Y_{p'} = Y_1$ — подпространство некоторого пространства $L_1(\mu)$, что и мешает дальнейшему проведению аналогичных рассуждений. Но однако, выручает предположение о наличии в Y^* свойства Радона-Никодима.

Действительно, из теоремы I.4.1.1 вытекает, в частности, что оператор U, обязательно будет квази-1-ядерным, и, следовательно, можно считать, что оператор

B в факторизации (2) компактен (см., например, [27, 19.2.6, стр.311, Предложение]; к сожалению там несколько громоздкие обозначения).

Поэтому для любого положительного ε суперпозиция операторов U и z допускает факторизацию следующего вида:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "z_1"'] & Y \arrow[r, "A"] & Y_0 \arrow[r, "j"] & Y_1 \arrow[r, "B"] & X^{**} \\
 & l_\infty \arrow[u, "z_2"'] & & &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

где B — компактный оператор, а z_1, z_2 — такие непрерывные операторы, что $||z_1|| \le 1,\ i_\infty(z_2) \le i_\infty(z) + \varepsilon$ (по поводу левой факторизации в диаграмме см. [27, 19.3.9, стр.314]). Но тогда оператор $z_1 \circ B$ (напомним, что образ $z_1^{**}\,(X^{**})$ содержится в l_∞ в силу компактности оператора z_1) аппроксимируется конечномерными по обычной операторной норме и, следовательно, для суперпозиции $w = z \circ B = z_2(z_1 \circ B)$ имеют место неравенства $\nu_\infty(w) \le\ i_\infty(z_2)\,||z_1 \circ B|| \le i_\infty(z) + \varepsilon$. Поэтому в неравенстве (3) при $p = +\infty$ получаем окончательно: $\nu_\infty(z) - \varepsilon \le\ ||P||\,\left(i_\infty^{\mathrm{Gr}}(z) + \varepsilon\right)$ (можно было также при оценке нормы $\nu_\infty(w)$ использовать [27, 19.1.9, лемма 1, стр. 304]). $\blacksquare$

Замечание 6.2.2. Для любого $p \in [1, +\infty], p \ne 2$, существуют банаховы пространства со свойством AP_p, не обладающие свойством $C - \mathrm{MAP}_p$ ни при каком $C \ge 1$ (см. [76], [41] и §7 ниже).

Т. Фигель и У. Б. Джонсон использовали свою конструкцию в [76] для построения неядерного оператора с ядерным сопряженным. Это указывает на возможную тесную связь между вопросом об эквивалентности свойств AP_p и BAP_p и вопросом о существовании не p-ядерного оператора с сопряженным из идеала N^p, или, что то же, с вопросом о существовании не p-ядерного оператора с p-ядерным вторым сопряженным. Мы снова отложим обсуждение проблемы до следующего параграфа, а сейчас дадим некоторые достаточные условия для ответа на последний вопрос в положительном направлении.

Предложение 6.2.3. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что либо X^*, либо Y^{***} обладает свойством аппроксимации Гротендика, и пусть $p \in [1, +\infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если $T \in \mathrm{N}_p(X, Y^{**})$, то $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.*

Доказательство. Предположим, что существует такой оператор $T \in L(X, Y)$, что $T \notin N_p(X, Y)$, но $\pi_Y\, T \in N_p(X, Y^{**})$. Так как либо X^*, либо Y^{**} обладает свойством AP, то $N_p(X, Y^{**}) = X^* \widehat{\otimes}_p Y^{**}$. Следовательно, оператор $\pi_Y\, T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^* \widehat{\otimes}_p Y^{**}$; при этом $t \notin X^* \widehat{\otimes}_p Y$ (пространство $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^* \widehat{\otimes}_p Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in \Pi_{p'}(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^* \widehat{\otimes}_p Y^{**}\right)^*$, что $\mathrm{trace}\ U \circ t = \mathrm{trace}\ (t^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и $\mathrm{trace}\ U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^* \widehat{\otimes}_p Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U \pi_Y = 0$ и $\pi_Y^*\, U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$\langle U \pi_Y\, y, x' \rangle = \langle y, \pi_Y^*\, U^*|_{X^*} x' \rangle = \ \mathrm{trace}\ \ U \circ (x' \otimes \pi_Y(y)) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U\circ t$ порождает оператор $U\pi_Y T$, который тождественно равен нулю.

Если $X^*\in AP$, то $X^*\widehat{\otimes}_p Y^{**}=N_p(X,Y^{**})$ и, значит, этот тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству trace $U\circ t=1$.

Пусть теперь $Y^{***}\in AP$. В этом случае оператор

$$V:=(U^*|_{X^*})\circ T^*\circ\pi_Y^*:\ Y^{***}\to Y^*\to X^*\to Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент t_0 из проективного тензорного произведения $Y^{****}\widehat{\otimes}Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t=\sum x_n'\otimes y_n''$ для t как элемента пространства $X^*\widehat{\otimes}_p Y^{**}$. Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$\begin{aligned}Vy'''&=U_*\left(T^*\pi_Y^*\,y'''\right)=U_*\left(\left(T^*\pi_Y^*\pi_{Y^*}\right)\pi_Y^*\,y'''\right)=U_*\left(\left(\pi_Y T\right)^*\pi_{Y^*}\right)\pi_Y^*\,y''')=\\&=U_*\left(\left(\sum y_n''\otimes x_n'\right)\,\pi_{Y^*}\,\pi_Y^*\,y'''\right)=U_*\left(\sum\langle y_n'',\pi_Y^*\,y'''\rangle\,x_n'\right)=\\&=\sum\langle\pi_Y^{**}y_n'',y'''\rangle\,U_*x_n'.\end{aligned}$$

Итак, оператор V имеет в пространстве $Y^{****}\widehat{\otimes}\,Y^{***}$ представление

$$V=\sum\pi_Y^{**}(y_n'')\otimes U_*(x_n').$$

Следовательно,

$$\operatorname{trace}\,t_0=\operatorname{trace}\,V=\sum\langle\pi_Y^{**}(y_n''),U_*(x_n')\rangle=\sum\langle y_n'',\pi_Y^*\,U_*x_n'\rangle=\sum 0=0.$$

С другой стороны,

$$Vy'''=U_*\left(\pi_Y T\right)^*y'''=U_*\circ t^*(y''')=U_*\left(\sum\langle y_n'',y'''\rangle\,x_n'\right)=\sum\langle y_n'',y'''\rangle\,U_*x_n',$$

откуда $V=\sum y_n''\otimes U_*(x_n')$. Поэтому

$$\operatorname{trace}\,t_0=\operatorname{trace}\,V=\sum\langle y_n'',U_*x_n'\rangle=\sum\langle Uy_n'',x_n'\rangle=\operatorname{trace}\,U\circ t=1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Замечание 6.2.3. На самом деле, аппроксимационные условия, накладываемые в предложении 6.2.3 на пространства X^* или Y^{***}, можно ослабить. Чтобы сформулировать это более сильное утверждение, нам пришлось бы ввести еще несколько определений аппроксимационных свойств банаховых пространств, что мы в данной параграфе делать не будем. См. ниже теорему 11.1, в которой более сложный аналог предложения 6.2.3 получен для идеалов N^p . Доказательство предложения 6.2.3 взято из статьи автора [50] (в этой статье аналог нашего предложения доказывается для идеала N^p, и мы здесь только переставили индексы — сверху вниз).

Следствие 6.2.1. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$, *и пусть* X, Y *— такие банаховы пространства, что* X^* *обладает свойством Радона –Никодима и одно из пространств* X^* *или* Y^{***} *удовлетворяет условию аппроксимации Гротендика. Тогда* $\mathrm{I}_p(X,Y) = \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y) = \mathrm{N}_p(X,Y)$. *Более общо, если* $U: Z \to X$ *такой оператор из некоторого банахова пространства* Z *в* X, *что* U^* *является оператором Радона–Никодима, и либо* $X^* \in \mathrm{AP}$, *либо* $Y^{***} \in \mathrm{AP}$, *то для любых* $p \in [1, +\infty)$ *и* $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ *имеет место включение* $TU \in \mathrm{N}_p(X,Y)$. ■

Замечание 6.2.4. Аппроксимационные условия, накладываемые на рассматриваемые в последних двух утверждениях пространства существенны и не могут быть заменены на аналогичные условия для пространств X, либо Y^{**} (см. ниже следствие 10.3).

3. Пример: пространство Харди H^∞. Неизвестно, обладает ли пространство Харди H^∞ ограниченных аналитических функций в круге свойством аппроксимации [118]. Однако можно показать [57], что для каждого $p \neq 1$ пространство H^∞ обладает свойством аппроксимации AP_p и, более того, что H^∞ удовлетворяет условию аппроксимации "с точностью до логарифма" (см. формулировку теоремы 6.3.3).

Теорема 6.3.1. *Пространство* H^∞ *обладает свойством* AP_p *для всякого* $p > 0, p \neq 1$. *Более того, если* $p > 1$, *то* H^∞ *и все его четные сопряженные имеют свойство* 1-MAP_p; *если* $p < 1$, *то все сопряженные к* H^∞ *пространства имеют свойство* AP_p.

Теорема 6.3.1 является непосредственным следствием теоремы 6.1.3 (п. 1 выше) и следующих утверждений (теорема 6.3.2, леммы 6.3.1 и 6.3.2).

Теорема 6.3.2. *Пусть* $p > 1$ *и* X *— такое банахово пространство, что* $\Pi_{p'}(X,Z) = \mathrm{I}_{p'}(X,Z)$ *как множества для каждого (рефлексивного) банахова пространства* Z. *Тогда* X *и все его четные сопряженные обладают свойством* 1-MAP_p.

Из теорем 6.3.2 и 6.1.3 вытекает

Следствие 6.3.1. *Пусть* $p > 1$ *и* X *— такое банахово пространство, что* $\Pi_{p'}(X,Z) = \mathrm{I}_{p'}(X,Z)$ *для каждого (рефлексивного) пространства* Z. *Если* $1/s + 1/p = 2$, *то пространство* X, *так же как и все его сопряженные, обладает свойством* AP_s.

Ниже равенство $\Pi_{p'}(X,Z) \overset{K}{=} \mathrm{I}_{p'}(X,Z)$ означает, что $i_{p'}(T) \leqslant K\,\pi_{p'}(T)$ для всех $T \in \Pi_{p'}(X,Z)$.

Лемма 6.3.1 [18]. *Если* $q > 1$ *и* $\Pi_q(X,Z) \overset{K}{=} \mathrm{I}_q(X,Z)$, *то* $\Pi_q(X^{**},Z) \overset{K}{=} \mathrm{I}_q(X^{**},Z)$.

Лемма 6.3.2 [79, 18]. $\Pi_q(H^\infty, Z) \overset{C_q}{=} \mathrm{I}_q(H^\infty), Z$ *для каждого* $q > 1$, *где* $C_q = q^2/(q-1)$.

Доказательство теоремы 6.3.2. Мы покажем, что X удовлетворяет третьему условию из предложения 6.1.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $T \in \Pi_{p'}(X,Y)$, где Y — рефлексивное банахово пространство. По условию оператор T факторизуется следующим образом:

$$T : X \xrightarrow{S} C(K) \xrightarrow{j} L_{p'}(K, m) \xrightarrow{U} Y,$$

где U, S — линейные ограниченные операторы, m — вероятность Радона на отделимом компактном пространстве K, j — тождественное отображение. Для произвольной слабо p'-суммируемой последовательности $(x_k) \subset X$ рассмотрим разложение последовательности $(jS(x_k))$ (которая является абсолютно p'-суммируемой) в произведение $\left(a_k(jS(x_k))\, a_k^1\right)$, где (a_k) — последовательность вещественных чисел, такая, что $a_k \to 0$ и $A = \sum \|jS(x_k)\, a_k^{-1}\| < \infty$. Пусть $\delta > 0$ таково, что $A\delta < \varepsilon$.

Мы можем найти конечномерный оператор $Q : L_{p'} \to Y$, аппроксимирующий U на компактном множестве $\{(jS(x_k)\, a_k) / \|jS(x_k)\|\}_k$:

$$\left\| Q\left(\frac{a_k\, jS(x_k)}{\|jS(x_k)\|}\right) - U\left(\frac{a_k\, jS(x_k)}{\|jS(x_k)\|}\right)\right\| < \delta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что

$$\|QjS(x_k) - UjS(x_k)\| < a_k^{-1}\, \|jS(x_k)\|\, \delta.$$

Следовательно, если $R = QjS \in X^* \otimes Y$, то

$$\sum \|Tx_k - Rx_k\|^{p'} \leqslant \sum \left(\frac{\|jS(x_k)\|}{a_k}\right)^{p'} \delta = A\delta < \varepsilon.$$

Теперь из предложения 6.1.1 вытекает, что X обладает свойством AP_p, а из предложения 6.2.1 и леммы 6.3.1, — что X и все его четные сопряженные пространства обладают свойством 1-MAP_p . ■

Можно показать, что банахово пространство X имеет свойство AP_p, $0 < p \leqslant 1$, тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $(x_k) \in l_q(X)$, где $1/q = 1/p - 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечномерный оператор $R : X \to X$, такой, что $\sup_k \|Rx_k - x_k\| < \varepsilon$ (для $q = +\infty$ $l_\infty(X)$ означает $c_0(X)$). Поэтому из предыдущих результатов следует, что для всякого $p > 0$ тождественное отображение $\mathrm{id} : H^\infty \to H^\infty$ может быть аппроксимировано конечномерными операторами равномерно на каждом компактном подмножестве K, таком, что $K = \overline{\Gamma((x_k)_k)}$, замкнутой абсолютно выпуклой оболочке в H^∞ некоторого множества $(x_k)_k$, такого, что $\sum \|x_k\|^p < +\infty$. Можно доказать, однако, более сильный результат. Именно[22]:

Теорема 6.3.3. *Существует такая функция $B(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что если $(x_j)_{j=2}^\infty$ — последовательность в H^∞, удовлетворяющая соотношениям*

$$\|x_j\| \leq \frac{1}{\log j}, \; j = 2, 3, \ldots,$$

[22] Необходимо отметить, что этот результат установлен Жаном Бургейном, хотя и после разговора со мной. Первоначально я установил справедливость аналога этой теоремы без условий 2) и 3). Все остальные результаты этого раздела принадлежат Рейнову О. И.

то существует такой оператор $T : H^\infty \to H^\infty$, *что*

1) $\sup_j \|Tx_j - x_j\| < \varepsilon$,
2) $\operatorname{rank} T < B(\varepsilon)$,
3) $\|T\| < B(\varepsilon)$. ■

Из предложения 6.1.2 и теоремы 6.3.2 вытекает

Предложение 6.3.1. *Пусть* $p > 1$ *и пусть* X *— такое банахово пространство, что* $\Pi_{p'}(X, Z) = \mathrm{I}_{p'}(X, Z)$ *для любого* Z. *Тогда* X *обладает свойствами* $2)_p$ *и* $3)_p$ *из предложения* 6.1.2. ■

В частности, это верно для пространства H^∞.

4. Топологический аспект. В этом разделе мы опишем топологию τ_p в пространстве $\Pi_p(Y, X)$, для которой замыкание выпуклых множеств в τ_p и в *-слабой топологии пространства $\Pi_p(Y, X)$ совпадают (это ответ на соответствующий вопрос Сафара в [145], с. 385). Затем мы исследуем некоторые свойства пространства Π_p, связанные с этой топологией.

Итак, рассмотрим в пространстве $\Pi_p(Y, X)$ *топологию* τ_p π_p*-компактной сходимости*, базу окрестностей нуля в которой определяют множества вида

$$\omega_{K,\varepsilon} = \left\{ U \in \Pi_p(Y, X) : \ \pi_p(U\Phi_K) < \varepsilon \right\},$$

где $\varepsilon > 0, K = \overline{\Gamma(K)}$ — компактное подмножество в Y.

Предложение 6.4.1. *Пусть* R *— линейное подпространство в* $\Pi_p(Y, X)$, *содержащее* $Y^* \otimes X$. *Тогда* $(\mathrm{R}, \tau_p)'$ *изоморфно факторпространству пространства* $X^* \widehat{\otimes} Y$. *Точнее, если* $\varphi \in (\mathrm{R}, \tau_p)'$, *то существует элемент* $z = \sum_1^\infty x'_n \otimes y_n \in X^* \widehat{\otimes} Y$ *такой, что*

$$\varphi(U) = \operatorname{trace}\, U \circ z, \ \ U \in \mathrm{R}\,. \tag{$*$}$$

Обратно, для любого $z \in X^* \widehat{\otimes} Y$ *формула* $(*)$ *определяет линейный непрерывный функционал на* (R, τ_p).

Доказательство этого предложения мы проведем подробно. Однако в дальнейшем, в аналогичных рассуждениях, мы будем опускать детали. Итак, пусть φ — непрерывный линейный функционал на (R, τ_p). Тогда найдется окрестность нуля $\omega_K = \omega_{K,\varepsilon}$, на которой φ ограничен: $\forall U \in \omega_K$, $|\varphi(U)| \leqslant 1$. Будем считать, что $\varepsilon = 1$. Рассмотрим оператор $U\Phi_K : Y_K \xrightarrow{\Phi_K} Y \xrightarrow{U} X$. Так как отображение Φ_K компактно, то $U\Phi_K \in \mathrm{QN}_p(Y_K, X)$. Положим $\varphi_k(U\Phi_K) = \varphi(U)$ для $U \in \mathrm{R}$. На линейном подпространстве $\mathrm{R}_K = \left\{ V \in \mathrm{QN}_p(Y_K, X) : \ V = U\Phi_K \right\}$ в $\mathrm{QN}_p(Y_K, X)$ линейный функционал φ_K ограничен: если $V = U\Phi_K \in \mathrm{R}_K$ и $\pi_p(V) \leqslant 1$, то $|\varphi_K(V)| = \varphi(U)| \leqslant 1$. Поэтому φ_K можно продолжить до линейного непрерывного функционала $\widetilde{\varphi}$ на всем $\mathrm{QN}_p(Y_K, X)$; более того (в силу инъективности идеала QN_p) вложив X в подходящее пространство $C(K)$, можно считать, что $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{QN}_p(Y_K, C(K))^*$. Отметим особо, что

$$\widetilde{\varphi}(jU\Phi_K) = \varphi_K(U\Phi_K) = \varphi(U) \tag{1}$$

(здесь j — изометрическое вложение X в $C(K)$).

Далее, так как $\mathrm{QN}_p(Y_K, C(K))^* = \mathrm{I}_{p'}(C(K), (Y_K)^{**}$, то найдется оператор $\Psi: C(K) \to (Y_K)^{**}$, для которого

$$\widetilde{\varphi}(A) = \mathrm{trace}\ \Psi A,\ \ A \in (Y_K)^* \otimes C(K).$$

Пусть $A_n \in (Y_K)^* \otimes C(K),\ \pi_p(A_n - jU\Phi_K) \to 0$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}(jU\Phi_K) = \lim \mathrm{trace}\ \Psi A_n. \tag{2}$$

Рассмотрим оператор $\Phi_K^{**}\Psi : C(K) \xrightarrow{\Psi} (Y_K)^{**} \xrightarrow{\Phi_K^{**}} Y$. Так как $\Psi \in \mathrm{I}_{p'}$, а Φ_K компактен, то $\Phi_K^{**}\Psi \in \mathrm{N}_{p'}(C(K), Y) = C(K)^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$. Пусть $\sum_1^\infty \mu_n \otimes y_n \in C(K)^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ — представление оператора $\Phi_K\Psi$. Положим $z = \sum j^*(\mu_n) \otimes y_n$. Элемент z порождает оператор $\Phi_K^{**}\Psi j$ из X в Y. Мы покажем сейчас, что trace $U \circ z = \widetilde{\varphi}(jU\Phi_K)$ (отметим, что $U \circ z$ есть элемент пространства $X^*\widehat{\otimes}X$, поэтому след вполне определен). Имеем:

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}\ U \circ z = \mathrm{trace}\ \Big(\sum j^*(\mu_n) \otimes Uy_n\Big) = \sum \langle j^*(\mu_n), Uy_n\rangle = \\ = \sum \langle \mu_n, jUy_n\rangle = \mathrm{trace}\ jU\Phi_K^{**}\Psi = \mathrm{trace}\,(jU\Phi_K)^{**}\Psi, \end{aligned} \tag{3}$$

где $(jU\Phi_K)^{**}\Psi : C(K) \xrightarrow{\Psi} (Y_K)^{**} \xrightarrow{\Phi_K^{**}} Y \xrightarrow{U} X \xrightarrow{j} C(K)$. Так как $\pi_p(A_n - jU\Phi_K) \to 0$, то $\pi_p\left(A_n^{**} - (jU\Phi_K)^{**}\right) \to 0$. Кроме того, если $A := A_n = \sum_1^N w_n \otimes f_m \in (Y_K)^* \otimes C(K)$, то

$$\mathrm{trace}\ A_n^{**}\Psi = \sum_m \langle \Psi^* w_m, f_m\rangle = \sum_m \langle w_m, \Psi f_m\rangle = \mathrm{trace}\ \Psi A.$$

Следовательно, trace$\,(jU\Phi_K)^{**}\Psi = \lim$ trace $A_n^{**}\Psi = \lim$ trace ΨA_n. Теперь из (3) и (2) вытекает, что $\widetilde{\varphi}(jU\Phi_K) = \mathrm{trace}\ U \circ z$. Наконец, из (1) получаем: $\varphi(U) = \mathrm{trace}\ U \circ z$. Таким образом, функционал φ определяется некоторым элементом из $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$.

Обратно, если $z \in X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$, то положим $\varphi(U) = \mathrm{trace}\ U \circ z$ для $U \in \mathrm{R}$ (след определен, так как $U \circ z \in X^*\widehat{\otimes}X$). Нам надо установить, что линейный функционал φ ограничен на некоторой окрестности $\omega_{K,\varepsilon}$ нуля в τ_p. Для этого нам понадобится

Лемма 6.4.1. *Если $z \in X^*\widehat{\otimes}_qY$, то $z \in X^*\widehat{\otimes}_qY_K$, где $K = \overline{\Gamma(K)}$ — некоторый компакт в Y.*

Доказательство леммы. Пусть $z = \sum x'_n \otimes y_n$, $\{c_n\} \in c_0$ и $\sum \|x'_n\|^q c_n^{-1} < +\infty$. Рассмотрим оператор $A_1 : l_q \to Y$, $A_1\{a_n\} = \sum a_n c_n y_n$. Так как этот оператор компактен, то найдутся компакт $K \subset Y$ и оператор $A_2 : l_q \to Y_K$, для которых $A_1 = \Phi_K A_2$. Положим $z_0 = \sum c_n^{-1} x'_n \otimes e_n$ (e_n — орты в l_q). Тогда $\overline{z} := (\mathbf{1} \otimes A_2)(z_0) \in X^*\widehat{\otimes}_qY_K$, причем $\Phi_K(\overline{z}) = z$. ■

Продолжим доказательство предложения. Пусть K — компакт в Y, для которого $z \in X^* \otimes Y_K$. Если $U \in \omega_{K,1}$, то $\pi_p(U\Phi_K) < 1$ и $|\mathrm{trace}\ U\Phi_K \circ z| \leqslant \|z\|_{X^* \otimes Y_K}\ \pi_p(U\Phi_K) \leqslant C$. ■

Следствие 6.4.1. $(\mathrm{R}, \tau_p)' = (\mathrm{R}, \sigma)'$, *где* $\sigma = \sigma(\mathrm{R}, X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y)$. *Таким образом, замыкания в* τ_p *и в* σ *выпуклых подмножеств пространства* $\Pi_p(Y, X)$ *совпадают.* ■

Обозначим через $X^* \widetilde{\otimes}_{p'} Y$ замыкание множества $X^* \otimes Y$ в пространстве $\mathrm{I}_{p'}(X, Y^{**})$ (сопряженном к $Y^* \widehat{\widehat{\otimes}}_p X$).

Предложение 6.4.2. *Пусть* A *— пересечение единичного шара из сопряженного к* $X^* \widetilde{\otimes}_{p'} Y$ *пространства* $G = G(Y, X^{**})$ *с пространством* $Y^* \otimes X$. $*$*-слабое замыкание множества* A *в* $G \cap \Pi_p(Y, X)$ *совпадает с замыканием* A *в* $(\Pi_p(Y, X), \tau_p)$.

Доказательство. Рассмотрим канонические отображения

$$X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y \xrightarrow{\ j\ } X^* \widetilde{\otimes}_{p'} Y,$$

$$\Pi_p(Y, X^{**}) \xleftarrow{\ j^*\ } G(Y, X^{**}).$$

Так как j^* взаимно однозначно, то замыкания ограниченных множеств в $G(Y, X^{**})$ в топологиях $\sigma(G, X^* \widetilde{\otimes}_{p'} Y)$ и $\sigma(G, X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y)$ совпадают.Таким образом, если B — выпуклое ограниченное множество в $G(Y, X) \subset \Pi_p(Y, X)$, то замыкание множества B в $\big(\Pi_p(Y, X) \cap G, \sigma(G, X^* \widetilde{\otimes}_{p'} Y)\big)$ совпадает с замыканием множества B в пространстве $\big(\Pi_p(Y, X), \sigma(\Pi_p(Y, X), X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y)\big)$ и, следовательно, по следствию 6.4.1, — с замыканием B в $(\Pi_p(Y, X), \tau_p)$. ■

Следствие 6.4.2. *В обозначениях предложения* 6.4.2 *замыкание множества* A *в* τ_p *совпадает с замыканием* A *в пространстве* $\mathrm{L}(Y, X)$ *в топологии компактной сходимости.*

Для *доказательства* достаточно воспользоваться предыдущим утверждением, рассмотрев вместо отображения j из доказательства предложения 6.4.2 каноническое отображение из $X^* \widehat{\otimes}_1 Y$ в $X^* \widetilde{\otimes}_{p'} Y$ (и применив либо предложение 6.4.1 для $p = +\infty$, либо результаты о двойственности из [80]). ■

Следствие 6.4.3. *Пусть* $C > 0$ *и* $T \in \Pi_p(Y, X)$. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) *существует сеть* $\{T_\alpha\}, T_\alpha \in Y^* \otimes X$, *сходящаяся к* T *в топологии* τ_p *и такая, что* $\pi_p(T_\alpha) \leqslant C$;

2) *существует сеть* $\{T_\alpha\}, T_\alpha \in Y^* \otimes X$, *сходящаяся к* T *в топологии компактной сходимости и такая, что* $\pi_p(T_\alpha) \leqslant C$. ■

Предложение 6.4.3. *Для оператора* $T \in \Pi_p(Y, X), \overline{T(Y)} = X$, *следующие условия равносильны:*

1) $T \in \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$;

2) *существует сеть операторов* $R_\alpha \in Y^* \otimes Y$ *такая, что* $TR_\alpha \to T$ *в топологии* τ_p.

Доказательство. Предположив, что условие 2) не выполнено, мы, согласно следствию 6.4.1, получаем:

$$(4) \qquad \nexists\, R_\alpha \in Y^* \otimes Y:\ TR_\alpha \to T \ \text{ в } \big(\Pi_p(Y, X), \sigma(\Pi_p(Y, X), X^* \widehat{\otimes}_{p'} Y)\big).$$

Рассмотрим ассоциированные с оператором T отображения:

$$
\begin{array}{ccc}
X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y & \xrightarrow{\widetilde{T}} & Y^*\widehat{\otimes}_1 Y, \\
\Pi_p(Y, X^{**}) & \xleftarrow{\widetilde{T}^*} & \mathrm{L}(Y, X^{**}).
\end{array}
$$

где $\widetilde{T}(z) = z \circ T$ для $z \in X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$. Пусть $Z = \overline{\widetilde{T}^*(Y^* \otimes Y)}^*$ (замыкание берется в пространстве $\Pi_p(Y, X)$ в *-слабой топологии). Из (4) вытекает, что T не аннулируется на подпространстве $Z^\perp \subset X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$, т.е. существует такой элемент $A \in Z^\perp$, что $\langle T, A\rangle = \operatorname{trace} AT = 1$. Но $AT = \widetilde{T}(A)$, и если $R \in Y^* \otimes Y$, то $\langle \widetilde{T}(A), R\rangle = \langle A, \widetilde{(T)}^*(R)\rangle = 0$. Следовательно, элемент $\widetilde{T}(A)$ проективного произведения $Y^*\widehat{\otimes}Y$ не равен нулю (так как $\operatorname{trace} \widetilde{T}(A) = 1$), но порождает нулевой оператор в Y. Для произвольных $y' \in Y^*$ и $Ty \in T(Y)$ мы имеем: $\langle A, ty \otimes y'\rangle = \langle ATy, y'\rangle = 0$. Так как $\overline{T(Y)} = X$, то отсюда вытекает, что ненулевой тензорный элемент $A \in X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ порождает нулевой оператор. Снова используя равенство $\operatorname{trace} AT = 1$, мы заключаем, что T не может быть приближен в *-слабой топологии конечномерными операторами. Из следствия 6.4.1 теперь вытекает, что условие 1) не выполнено. ■

Следующие два предложения дают достаточные (но не необходимые, как мы увидим ниже) условия плотности множества всех конечномерных операторов в пространстве $\Pi_p(Y, X)$ в топологии τ_p π_p-компактной сходимости.

Предложение 6.4.4. *Если* $\mathrm{QN}_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\pi_p}$ *для всякого банахова пространства* Y, *то для любого* Y $\Pi_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.

Доказательство. Пусть $U \in \Pi_p(Y, X)$, $\varepsilon > 0$, $K = \overline{\Gamma(K)}$ — компакт в Y. По условию, существует такой оператор $V \in (Y_K)^* \otimes X$, что $\pi_p(V - U\Phi_K) < \varepsilon$ (это вытекает из теоремы I.4.1.1). Нам надо вместо V суметь поставить $\widetilde{V}\Phi_K$, где $\widetilde{V} \in Y^* \otimes X$. Пусть $V = \sum_{n=1}^N z_n \otimes x_n$. Заметим, что мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда Φ_K^{**} — взаимно однозначный оператор (иначе с помощью конструкции из [66] заменим Y_K на пространство Y_{K_0}, для которого оператор Φ_{K_0} компактен, а оператор $\Phi_{K_0}^{**}$ взаимно однозначен). В этом случае Y^* плотно по норме в $(Y_K)^*$ и, следовательно, для любой числовой положительной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ существуют элементы $y'_n \in Y^*$, для которых $\|y'_n - z_n\|_{Y_K^*} < \varepsilon_n$. Положим $\widetilde{V} = \sum_1^N y'_n \otimes x_n \in Y^* \otimes X$. Пусть $\{a_n\}$ — такая последовательность элементов пространства Y_K, что $\sup\{\sum |\langle a_n, a'\rangle|^p : \ \|a'|\_Y_K^* \leqslant 1\} \leqslant 1$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} \|(\widetilde{V}\Phi_K - V)a_i\|^p = \sum_{i=1}^{m} \| \sum_{n=1}^{N} \langle y_n' - z_n, a_i\rangle\, x_n\|^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N} |\langle y_n' - z_n, a_i\rangle|^p \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^{p'}\right)^{p/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^{p'}\right)^{p/p'} \sum_{n=1}^{N} \|y_n' - z_n\|^p_{Y_K^*} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^{p'}\right)^{p/p'} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^p.$$

Если взять ε_n достаточно малыми, то последнее число будет меньше, чем ε, и из неравенства $\pi_p(v - U\Phi_K)$ мы получим, что $\pi_p(\widetilde{V}\Phi_K - U\Phi_K) \leqslant \varepsilon + \pi_p(V - \widetilde{V}\Phi_K) \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, $\widetilde{V} - U \in \omega_{K,2\varepsilon}$. Таким образом, мы показали, что для любой окрестности $\omega_{K,\varepsilon}$ существует оператор $\widetilde{V} \in Y^* \otimes X$, для которого $\widetilde{V} - U \in \omega_{K,\varepsilon}$. Поэтому $U \in \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$. ■

Предложение 6.4.5. *Если каноническое отображение $j : X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y \to \mathrm{N}_{p'}(X,Y)$ взаимно однозначно, то $\Pi_p(Y,X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.*

Доказательство. Если отображение j взаимно однозначно, то аннулятор $j^{-1}(0)^\perp$ его ядра в сопряженном к $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ пространстве совпадает с $\Pi_p(Y, X^{**})$. С другой стороны, в любом случае $j^{-1}(0)^\perp = \overline{Y^* \otimes X}^*$ (замыкание в *-слабой топологии пространства $\Pi_p(Y, X^{**})$); по следствию 6.4.1,

$$\Pi_p(Y,X) \cap \overline{Y^* \otimes X}^* = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}.$$

Поэтому $\Pi_p(Y,X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$. ■

Для рефлексивного пространства X сопряженное к $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ пространство совпадает с $\Pi_p(Y,X)$. Поэтому из следствия 6.4.1 и предложения 6.4.5 вытекает

Следствие 6.4.4. *Для рефлексивного пространства X каноническое отображение $j : X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y \to \mathrm{N}_{p'}(X,Y)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда множество конечномерных операторов плотно в пространстве $\Pi_p(Y,X)$ в топологии τ_p π_p-компактной сходимости.* ■

В заключение этой части приведем утверждение, показывающее. что из существования не аппроксимируемого в топологии τ_p абсолютно p-суммирующего оператора вытекает существование не аппроксимируемого (в этой же топологии) квази-p-ядерного оператора (со значениями в том же пространстве).

Предложение 6.4.6. *Если существует оператор $T \in \Pi_p(Y,X) \setminus \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$, то существуют рефлексивное пространство Z и оператор $U \in \mathrm{QN}_p(Z,X)$, не принадлежащий замыканию $\overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.*

Для *доказательства* достаточно вспомнить определение топологии τ_p и воспользоваться следующими двумя фактами: а) если V — компактный оператор, то он представим в виде композиции двух компактных отображений; б) произведение AB компактного оператора B и абсолютно p-суммирующего оператора A является квази-p-ядерным отображением (см. [89] относительно а); б) вытекает из теоремы I.4.1.1). $\blacksquare$

Далее в этом разделе мы фиксируем пространство образов (либо пространство задания) операторов и исследуем условия, при которых возможна аппроксимация конечномерными отображениями всех абсолютно p-суммирующих операторов со значениями в данном пространстве (либо действующих из данного пространства).

Следующее утверждение, помимо прочего, является и частичным обращением предложения 6.4.4.

Предложение 6.4.7. *Для банахова пространства X равносильны утверждения:*

1) *для всякого банахова пространства Y имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\pi_p}$;

2) *для всякого банахова пространства Y имеет место равенство* $\Pi_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\tau_p}$;

3) *для всякого банахова пространства Y имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\tau_p}$;

4) *для всякого рефлексивного банахова пространства Y имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X) = \overline{Y^*\otimes X}^{\tau_p}$.

Доказательство. Импликации 2) $\implies$ 3) $\implies$ 4) очевидны; 1) $\implies$ 2) — по предложению 6.4.4. Для доказательства импликации 4) $\implies$ 1) рассмотрим оператор $V\in \mathrm{QN}_p(Y,X)$. Используя результаты [66], мы можем профакторизовать оператор V следующим образом: $V=UA$, где $A\in \mathrm{K}(Y,Z)$ (компактный), $U\in \mathrm{QN}_p(Z,X)$, причем пространство Z рефлексивно. Положим $K=\overline{A(B_Y)}$. Из условия 4) вытекает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\widetilde{V}\in Z^*\otimes X:\quad \widetilde{V}-U\in\omega_{K,\varepsilon},$$

т.е. $\pi_p(\widetilde{V}\Phi_K-U\Phi_K)<\varepsilon$. Поэтому $\pi_p(V-\widetilde{V}A)\leqslant C_A\,\pi_p(U\Phi_K-\widetilde{V}\Phi_K)\leqslant C_A\varepsilon$. $\blacksquare$

Следствие 6.4.5. *Если для любого рефлексивного пространства Y каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y\to \mathrm{N}_{p'}(X,Y)$ взаимно однозначно, то для всякого банахова пространства Y имеет место равенство* $\mathrm{QN}_p(Y,X)=\overline{Y^*\otimes X}^{\pi_p}$. $\blacksquare$

Для *доказательства* надо применить предложение 6.4.5 и воспользоваться импликацией 2) $\implies$ 1) предыдущего факта. $\blacksquare$

Из следствий 6.4.4 и 6.4.5 вытекает

Следствие 6.4.6. *Для рефлексивного банахова пространства X равносильны утверждения:*

1) *для всякого пространства Y каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y\to \mathrm{N}_{p'}(X,Y)$ взаимно однозначно;*

2) *для всякого пространства Y конечномерные операторы плотны в банаховом пространстве* $\mathrm{QN}_p(Y,X)$. $\blacksquare$

Следующее утверждение содержит в себе, помимо прочего, частичное обращение предложения 6.4.5.

Следствие 6.4.7. *Для произвольного банахова пространства X равносильны утверждения:*

1) *для всякого пространства Y каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ взаимно однозначно;*

2) *для всякого рефлексивного банахова пространства Y каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ взаимно однозначно;*

3) *для всякого (рефлексивного) пространства Y $\overline{X^* \otimes_{p'} Y}^{\tau_{p'}} = \Pi_{p'}(X,Y)$.*

Доказательство. Относительно эквивалентности 1) $\iff$ 2) см. [57] или предложение 6.1.1; импликации 1) $\implies$ 3) и 3) $\implies$ 2) вытекают, соответственно из предложения 6.4.5 и следствия 6.4.4. ■

Из предыдущего утверждения получается следующее хорошо известное предложение:

Следствие 6.4.8 (П. Сафар). *Если банахово пространство X обладает свойством аппроксимации (Гротендика), то для любого $p > 1$ и любого пространства Y каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{N}_p(Y,X)$ взаимно однозначно.* ■

Доказанные факты приводят нас к следующему определению, эквивалентному соответствующему определению в [41], [130], [43], так же как и определению, приведенному в начале данного параграфа.

Определение 6.4.1. Пусть $p \geqslant 1$. Банахово пространство X обладает свойством AP_p (свойством аппроксимации порядка p), если всякий абсолютно p'-суммирующий оператор, действующий из пространства X, может быть аппроксимирован в топологии π'_p-компактной сходимости $\tau_{p'}$ операторами конечного ранга.

Из предложения 6.4.4 и следствия 6.4.7 вытекает

Следствие 6.4.9. *Если для любого банахова пространства Y имеет место равенство $\mathrm{QN}_{p'}(X,Y) = \overline{X^* \otimes Y}^{\pi_{p'}}$, то пространство X обладает свойством AP_p в смысле определения* 6.4.1. ■

Напомним и сформулируем для полноты картины следующее утверждение о характеризации пространств со свойством AP_p (доказательство см. в [57] и выше в п. 2 — предложение 6.1.1).

Предложение 6.4.8. *Банахово пространство X обладает свойством AP_p в смысле определения* 6.4.1 *тогда и только тогда, когда для любого банахова пространства Y, любого оператора $T \in \Pi_{p'}(X,Y)$, всякой слабо p'-суммируемой последовательности $\{x_k\}$ элементов пространства X и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \to Y$, что $\sum \|Ux_k - Rx_k\|^{p'} < \varepsilon$.*

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых контрпримеров, связанных с темой этого параграфа (большое число контрпримеров, касающихся свойств AP_p, содержится в [130, 43, 52]; многие из них рассматриваются ниже в данной работе, начиная со следующего параграфа). Забегая вперед, мы используем один результат из следующего параграфа (который будет получен совершенно независимо от утверждений данного параграфа). Именно (см. п. 1 следующего параграфа): для любого $p \geqslant 1$, $p \neq 2$, существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство, не обладающее свойством AP_p. Более того, для любого $p \geqslant 1$, $p \neq 2$, существует сепарабельное рефлексивное E, оператор $R \in \Pi_{p'}(E, E)$ и тензорный элемент $t \in E^* \widehat{\otimes}_p E$, такие, что trace $t \circ R = 1$ и trace $t \circ A = 0$ для любого конечномерного оператора $A \in E^* \otimes E$

При построении контрпримеров часто полезно использовать следующий факт ([101]; см. гл. 0, лемму 4.9.1, которую мы сейчас напомним в удобном для нас виде): *Для всякого сепарабельного банахова пространства E существуют сепарабельное сопряженное банахово пространство $H = Y^*$ с базисом и операторы $Q : H \to E$ и $U : H^* \to E^*$ такие, что $Q(H) = E$, $U(H^*) = E^*$, $\|U\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$, $UQ^* = \mathrm{id}_{E^*}$ и пространство $(\mathrm{id}_{E^*} - Q^*U)(H^*)$ изоморфно пространству Y.*

Теперь мы готовы к построению наших примеров. Сначала покажем, что обращения предложения 6.4.5 и следствия 6.4.5 не верны.

Предложение 6.4.9. *Для любого $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$, существует сепарабельное рефлексивное пространство E, сепарабельное сопряженное пространство H с базисом такие, что каноническое отображение $j : H^* \widehat{\otimes}_{p'} E \to \mathrm{N}_{p'}(H, E)$ не взаимно однозначно. С другой стороны, так как H обладает свойством аппроксимации, то $\mathrm{QN}_p(E, H) = \overline{E^* \otimes H}^{\pi_p}$ и $\Pi_p(E, H) = \overline{E^* \otimes H}^{\tau_p}$.*

Доказательство. Пусть E, $t \in E^* \widehat{\otimes}_{p'} E$ и $R \in \Pi_p(E, E)$ — упомянутые выше пространство, тензорный элемент и оператор, так что trace $t \circ R = 1$ и $t = 0$ как оператор. Положим $g = t \circ Q \in H^* \widehat{\otimes}_{p'} E$ и $V = U^* R \in \mathrm{QN}_p(E, H^{**})$. Тогда trace $V \circ g = 1$ (следовательно, тензорный элемент g не равен нулю) и $g = 0$ как оператор. ■

Следствие 6.4.10. *Для всякого $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$, существуют банахово пространство Z, элемент $z \in Z^* \widehat{\otimes}_{p'} Z$ и оператор $\Psi \in \Pi_p(Z, Z^{**})$ такие, что* trace $\Psi \circ z = 1$, *но* trace $\Phi \circ z = 0$ *для всех $\Phi \in \Pi_p(Z, Z)$.*

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные при доказательстве предложения 6.4.9. Пусть $\sum y'_n \otimes y_n$ — какое–либо представление тензорного элемента $g \in H^* \widehat{\otimes}_{p'} E$. Заметим, что trace $A \circ g = 0$ для всякого оператора $A \in \Pi_p(E, H)$ (так как пространство H обладает свойством аппроксимации). Положим $Z = H \oplus E$, $z = \sum (y'_n, 0) \otimes (0, y_n)$ и определим оператор $\Psi \in \mathrm{QN}_p(Z, Z^{**})$ по формуле $\Psi(h, y) = (Vy, 0)$. Имеем:

$$\operatorname{trace} \Psi \circ z = \sum \langle (y'_n, 0), (Vy_n, 0) \rangle = \sum \langle y'_n, Vy_n \rangle = \operatorname{trace} V \circ g = 1.$$

С другой стороны, обозначая через P_H и P_E естественные проекторы из Z на H и E соответственно, мы для произвольного оператора $\Phi \in \Pi_p(Z, Z)$ имеем:

$$\Phi(h, y) = \Phi|_H(h) + \Phi|_E(y) = (P_H \Phi|_H(h) + P|_E \Phi|_H(h)) + (P_H \Phi|_E(y) + P|_E \Phi|_E(y)),$$

откуда

$$\text{trace } \Phi \circ z = \sum \langle (y'_n, 0), [P_H \Phi(0, y_n)] \rangle = \sum \langle (y'_n, 0), P_H \Phi|_E(y_n) \rangle.$$

Обозначая через A оператор $P_H \Phi|_E$, получаем:

$$A \in \Pi_p(E, H); \quad \text{trace } \Phi \circ z = \text{trace } A \circ g = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание 6.4.1. При $p = +\infty$ получаем ненулевой тензорный элемент $z \in Z^* \widehat{\otimes}_1 Z$, обращающийся в нуль на подпространстве $\mathrm{L}(Z, Z)$ пространства $\mathrm{L}(Z, Z^{**})$. Это — ответ на вопрос (устный) шведского математика С.Кайзера, который и обратил мое внимание на возможность существования такого элемента z.

Теперь мы покажем, что обращения предложения 6.4.4 и следствия 6.4.9 также не верны.

Предложение 6.4.10. *Для всякого $p \in [1, +\infty]$, $p \neq 2$, существуют сепарабельное рефлексивное пространство E, сепарабельное сопряженное пространство H с базисом (и, значит, со свойством $\mathrm{AP}_{p'}$) такие, что $\mathrm{QN}_p(H, E) \neq \overline{H^* \otimes E}^{\pi_p}$; с другой стороны, $\Pi_p(H, E) = \overline{H^* \otimes E}^{\tau_p}$* (см. следствие 6.4.7).

Доказательство. В обозначениях из доказательства предложения 6.4.9, положим $L = RQ$. Так как $\text{trace}\,(t \circ RQ^{**} Y^*) = 1$ и $t = 0$ как оператор, то отображение RQ^{**} не может быть приближено конечномерными операторами в пространстве $\mathrm{QN}_p(H^{**}, E)$. Тем более $L \not\subset \overline{H^* \otimes E}^{\pi_p}$. $\blacksquare$

§7. Пространства без свойств AP_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

Контрпримеры к проблеме аппроксимации (см. [75], [162]), дальнейшие результаты о AP и BAP, существование не ядерного оператора с ядерным сопряженным [76] и т.д. приводят к многочисленным вопросам в теории банаховых пространств, касающимся свойств квази-p-ядерных, p-ядерных, p-интегральных операторов и т.д.

В этом параграфе мы будем иметь дело со следующими вопросами:[23]

1) ([27], с. 270) Каждый ли квази-p-ядерный оператор U допускает факторизацию $U = A_1 V A_2$ с операторами $v \in \Pi_p$ и аппроксимируемыми A_1, A_2 (т.е. которые в замыкании конечномерных операторов по обычной операторной норме)?

1a) Каждый ли квази-p-ядерный оператор лежит в замыкании конечномерных операторов по π_p-норме?

2) Каждое ли банахово пространство обладает свойством AP_p?

3) Каждое ли банахово пространство обладает свойством BAP_p?

[23] Большинство этих вопросов было поставлено А. Пелчинским во время его пребывания в 1979 г. в Ленинграде. Я хотел бы выразить свою глубокую признательность профессору А. Пелчинскому за стимулирующую беседу, которую и имел с ним на тему статьи.

4) Если банахово пространство имеет свойство AP_p, то имеет ли оно и свойство BAP_p?

5) Если банахово пространств имеет свойство $\mathrm{AP}(=\mathrm{AP}_1)$, то имеет ли оно свойство BAP_p для некоторого $p \neq 2$?

6) (А. Пелчинский, А. Пич; [27]. с. 270) Совпадают ли между собой классы операторов, интегральных по А. Пичу и по А. Гротендику?

7) (А. Пелчинский) Следует ли из включений $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $T^{**} \in \mathrm{N}_p(X, Y)$, что $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$?

Для широкого класса банаховых пространств ответы на эти вопросы положительны. Например, пусть X — пространство котипа 2. Тогда для каждого $p > 2$ имеем: $Y^*\widehat{\otimes}_p X = Y^*\widehat{\otimes}_2 X$ (см. [27]); поэтому X имеет свойство AP_p для каждого $p \geqslant 2$. Аналогично, если $1 < p < 2$, то $X^*\widehat{\otimes}_p Y = X^*\widehat{\otimes}_2 Y$ для каждого Y, так что для каждого Y и для любого $p, 1 < p \leqslant 2$, каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{N}_p(X, Y)$ взаимно однозначно. Так как существуют банаховы пространства котипа 2, не обладающие свойством аппроксимации, мы видим, что в общем случае свойства AP и AP_p не эквивалентны.

В этом параграфе мы отвечаем на все вопросы *отрицательно.* Метод, который я использую в доказательстве существования не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными существенно отличается от метода Фигеля-Джонсона; так что как следствия мы снова получаем результаты Фигеля-Джонсона о свойствах AP и BAP и о существовании не ядерного оператора с ядерным сопряженным.

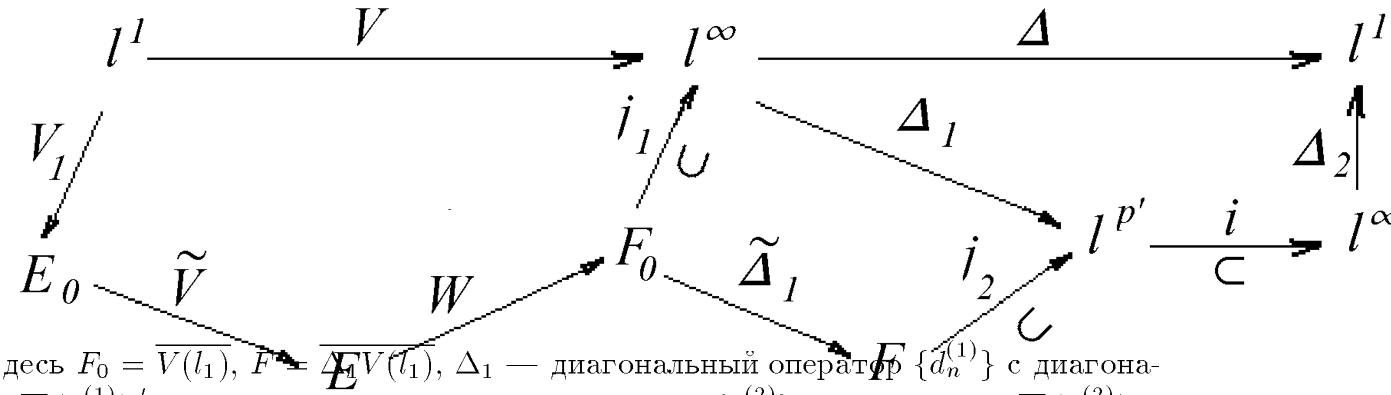
1. Существование пространств без свойств AP_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. В этом разделе мы приведем вспомогательные утверждения (леммы), имеющие довольно впечатляющие следствия, представляющие самостоятельный интерес (см. [130]; кроме того они, в частности, используются при установлении всех фактов следующего параграфа).

Лемма 7.1.1. 1) *Для каждого* $p < 2$ *существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства* E, F, *оператор* $\overline{U} \in \mathrm{QN}_{p'}(E, F)$ *и элемент* $z \in F^*\widehat{\otimes}_1 E$ *такие, что* $\operatorname{trace} z \circ \overline{U} = 1$ *и* $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ *для каждого* $\varphi \in E^* \otimes F$.

2) (С.В.Кисляков, О.И.Рейнов) *Для каждого* $v > 2$ *существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства* E, F, *оператор* $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E, F)$ *и элемент* $z \in F^*\widehat{\otimes}_v E$ *такие, что* $\operatorname{trace} z \circ \overline{U} = 1$ *и* $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ *для каждого* $\varphi \in E^* \otimes F$.

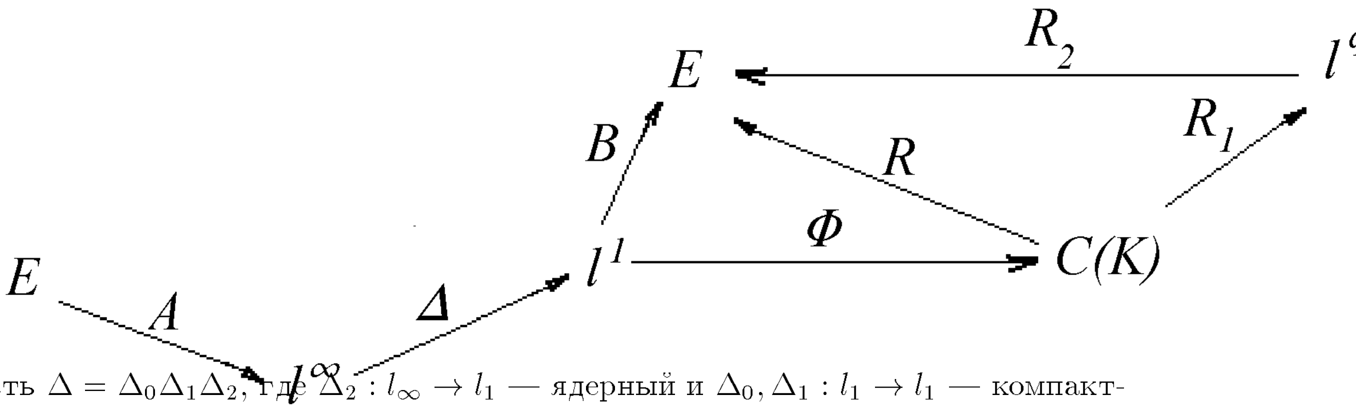
Замечание 7.1.1. В 1) мы можем найти $E, F, \overline{U}$ и z с дополнительным свойством: $\overline{U} \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q(E, F)$. С. В. Кислякову принадлежит идея использовать в доказательстве утверждения 2) равенство $\mathrm{L}(C(K), l_q) = \mathrm{I}_v(C(K), l_q)$.

Доказательство. 1) Пусть $V \in l_\infty \widehat{\widehat{\otimes}} l_\infty$ и $\Delta \in (l_\infty)\widehat{\otimes}_1 l_1$ — такие операторы, что $\operatorname{trace} \Delta V = 1$, $\Delta V \Delta V = 0$ и Δ — диагональный оператор $\{d_n\}$ с $\sum |d_n|^\alpha < \infty$ для каждого $\alpha > 2/3$ (существование таких операторов есть следствие конструкции Энфло (см. [75])). Рассмотрим следующую диаграмму:



Здесь $F_0 = \overline{V(l_1)}$, $F = \overline{\Delta_1 V(l_1)}$, Δ_1 — диагональный оператор $\{d_n^{(1)}\}$ с диагональю $\sum |d_n^{(1)}|^{p'} < \infty$, Δ_2 — диагональный оператор $\{d_n^{(2)}\}$ с диагональю $\sum |d_n^{(2)}| < \infty$, i — оператор тождественного включения, $\widetilde{\Delta}_1$ индуцирован оператором Δ_1, $E_0 = l_1/\operatorname{Ker} V$, V_1 индуцирован оператором V, $T = W\widetilde{V} : E_0 \to F_0$ также индуцирован оператором V, E — рефлексивное пространство, построенное для компактного оператора T с использованием конструкции Фигеля-Дэйвиса-Джонсона-Пелчинского (см. [66]). Положим $\overline{U} = \widetilde{\Delta}_1 W$, $z = (j_2^* i^*) \otimes (\widetilde{V} V_1)(\Delta_2) \in F^* \widehat{\otimes}_1 E$. Непосредственные вычисления показывают, что $E, F, \overline{U}$ и z удовлетворяют всем желаемым условиям.

2) Пусть $2 < q < v$ и пусть E^* — подпространство в $l_{q'}$, не обладающее свойством AP (см.[162]). Пусть $R = R_2 R_1$, где R_1 — гомоморфизм из $C(K)$ на l_q и R_2 — сопряженное к вложению $E^* \to l_{q'}$. Так как E не имеет свойства AP, то мы можем найти элемент $w \in E^* \widehat{\otimes}_1 E$ такой, что $\operatorname{trace} w = 1$ и $\operatorname{trace} w \circ \Psi = 0$ для любого $\Psi \in E^* \otimes E$ (т.е. w индуцирует нулевой оператор). Предположим, что $w = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e'_n \otimes e_n$, где $\sum |\lambda_n| < \infty$, $||e'_n|| = ||e_n|| = 1$, и положим $Ae = \{\langle e, e'_n\rangle\} \in l_\infty$ для $e \in E$, $\Delta\{\xi_n\} = \{\lambda_n \xi_n\} \in l_1$ для $\{\xi_n\} \in l_\infty$, $B\{\eta_n\} = \sum \eta_n e_n \in E$ для $\{\eta_n\} \in l_1$. Пусть φ есть лифтинг для B из l_1 в $C(K)$, т.е. такой оператор из l_1 в $C(K)$, что $B = R\varphi$. Мы имеем следующую диаграмму:



Пусть $\Delta = \Delta_0 \Delta_1 \Delta_2$, где $\Delta_2 : l_\infty \to l_1$ — ядерный и $\Delta_0, \Delta_1 : l_1 \to l_1$ — компактные операторы. Наконец, пусть F — рефлексивное пространство, построенное для компактного оператора $\Delta_1|_{\overline{\Delta_2(A(E))}} : \overline{\Delta_2 A(E)} \to \overline{\Delta A(E)}$ с помощью конструкции из [66]. Пусть $\overline{U} : E \to F$ — оператор, индуцированный отображением ΔA. Конечно, $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E, F)$. Так как $\mathrm{L}(C(K), l_q) = \mathrm{I}_v(C(K), l_q)$ (см. [27]) и $\varphi\Delta_0$ компактен, то $R\varphi\Delta_0 \in \mathrm{N}_v(l_1, E) = l_\infty \widehat{\otimes}_v E$. Теперь достаточно положить $z =$ образу $R\varphi\Delta_0$ в пространстве $F^*\widehat{\otimes}_v E$. $\blacksquare$

Следствие 7.1.1. *Для каждого $r \neq 2$ существует квази-r-ядерный оператор, не принадлежащий замыканию конечномерных отображений по π_r-норме. Более того,*

1) *если $r > 2$, то существует квази-r-ядерный оператор, не принадлежащий замыканию конечномерных относительно обычной операторной нормы (и даже в топологии компактной сходимости!);*

2) *существует оператор из QN_1 (и, таким образом, из $\mathrm{QN}_r, r < 2$), который не лежит в замыкании множества конечномерных операторов по норме π_a, каково бы ни было $a \in [1, 2)$.*

Доказательство. 1) немедленно вытекает из леммы 7.1.1,1).

2) По лемме 7.1.1,2), для каждого $a < 2$ существуют сепарабельные рефлексивные пространства E, F и оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E, F)$ такие, что $\overline{U} \notin \overline{E^* \otimes F}^{\pi_a}$. Пусть $a_n \uparrow 2$ и пусть $E_n, F_n, \overline{U}_n$ таковы, что $\overline{U}_n \in \mathrm{QN}_1(E_n, F_n)$, $\overline{U}_n \notin \overline{E_n^* \otimes F_n}^{\pi_{a_n}}$, $\pi_1(\overline{U}_n) \leqslant 1/2^n$. Положим $X = (\sum E_n)_{l_2}$, $Y = (\sum F_n)_{l_2}$, $T = \oplus \overline{U}_n$. Тогда $T \in \mathrm{QN}_1$, но для каждого $a < 2$ $T \notin \overline{X^* \otimes Y}^{\pi_a}$. $\blacksquare$

Замечание 7.1.2. 1) Из замечания 7.1.1 следует, что существует даже оператор $U \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q(E, F)$, не лежащий в замыкании множества конечномерных операторов в топологии компактной сходимости.

2) Лемма 7.1.1 предоставляет нам еще ряд примеров (для каждого $r \neq 2$) r-абсолютно суммирующих отображений (и даже квази-r-ядерных), которые не являются r-интегральными (см. [117]), так же как и примеры квази-r-ядерных операторов (для $r > 2$), не являющихся p-факторизуемыми ни для какого p.

Следствие 7.1.2. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство Z такое, что для каждого $r \in [1, \infty], r \neq 2$, естественное отображение $Z^*\widehat{\otimes}_r Z \to \mathrm{N}_r(Z, Z)$ не взаимно однозначно. В частности, для каждого $r \neq 2$ пространство Z не обладает свойством AP_r.*

Доказательство. Возьмем для $p_n \nearrow 2$ пространства E_n^1 и F_n^1 из леммы 7.1.1,1) и для $v_n \searrow 2$ пространства E_n^2 и F_n^2 из леммы 7.1.1,2), и положим

$$Z = \Big((\sum E_n^1)_{l_2} \oplus (\sum E_n^2)_{l_2} \oplus (\sum F_n^1)_{l_2} \oplus (\sum F_n^2)_{l_2} \Big)_{l_2}. \quad \blacksquare$$

Следствия 7.1.1 и 7.1.2 показывают, что ответы на вопросы 1–3 отрицательны.

Лемма 7.1.2. 1) *Для каждого $p < 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство Y, сепарабельно пространство X с базисом (и с сепарабельными сопряженными), оператор $U \in \mathrm{QN}_{p'}(X, Y)$ и $\widehat{T} \in Y^*\widehat{\otimes}_1 X^{**}$ такие, что* $\operatorname{trace} \widehat{T} \circ \varphi = 0$ *для любого $\varphi \in X^* \otimes Y$ и* $\operatorname{trace} \widehat{T} \circ U = 1$.

2) *Для каждого $v > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство Y, сепарабельно пространство X с базисом, оператор $U \in \mathrm{QN}_1(X,Y)$ и элемент $\widehat{T} \in Y^*\widehat{\otimes}_v X^{**}$ такие, что* $\operatorname{trace} \widehat{T} \circ U = 1$ *и* $\operatorname{trace} \widehat{T} \circ \varphi = 0$ *для любого $\varphi \in X^* \otimes Y$.*

Доказательство. Нам нужна теорема Линденштраусса (см. гл. 0, п. 4.9): если E — сепарабельное банахово пространство, то существуют сепарабельное пространство Z и оператор $Q : Z \xrightarrow{\text{onto}} E$ такие, что Z^* имеет базис, $Z^{**} = Q^*(E^*) \oplus \pi(Z)$, где π — каноническое вложение $Z \to Z^{**}$. Применим эту теорему к лемме 7.1.1. Положим $X = Z^*$, $Y = F, U = \overline{U}Q$. Пусть P — проектор из $Z^{**} = Q^*(E^*) \oplus \pi(Z)$ на $Q^(E^*)*$ и пусть $j = [(Q^*)^{-1}P]^*$, $j : E \to Z^{**}$. Положим $\widetilde{T} = j \circ z \in Y^*\widehat{\otimes}_a X^{**}$ (где $a = 1$ в случае 1) и $a = v$ в случае 2)). Нам надо только проверить, что $\operatorname{trace} \widetilde{T} \circ U = 1$. Пусть $z = \sum f'_n \otimes e_n$ — какое-либо представление тензорного элемента $z\,(f'_n \in F^*, e_n \in E)$. Имеем: $\operatorname{trace} \widetilde{T} \circ U = \operatorname{trace}(j \circ z) \circ (\overline{U}Q) = \sum \langle Q^*\overline{U}^* f'_n, e_n\rangle = \sum \langle [(Q^*)^{-1}P]^{**}Q^*\overline{U}^* f'_n, e_n\rangle = \sum \langle (Q^*)^{-1}PQ^*\overline{U}^* f'_n, e_n\rangle = \sum \langle (Q^*)^{-1}Q^*\overline{U}^* f'_n, e_n\rangle = \sum \langle \overline{U}^* f'_n, e_n\rangle = \operatorname{trace} z \circ \overline{U} = 1$. ■

Замечание 7.1.3. В лемме 7.1.2 X обладает свойством MAP, а X^{**} не обладает свойством AP_p в случае 1) и свойством AP_v в случае 2).

Мы готовы к доказательству основной теоремы параграфа.

2. Основная теорема. Неравносильность свойств C-MAP при разных $C \geqslant 1$.

Основная теорема этого параграфа — теорема из [130] о перенормировке типа Фигеля–Джонсона [76] пространства X из леммы 7.1.2 предыдущего параграфа (со свойством метрической аппроксимации), для которого второе сопряженное пространство не обладает свойством AP_p (или AP_v). Отметим, что для $R \in \mathrm{L}(Z_1, Z_2)$ $\|R\|_\infty := \inf\{\|R_1\|\,\|R_2\| :\ R_1 \in \mathrm{L}(Z_1, C(K)),\ R_2 \in \mathrm{L}(C(K), Z_2)\}$.

Нам нужны некоторые обозначения. Так как удобно рассматривать оба случая, указанных в лемме 7.1.2, одновременно, то мы введем два символа a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} &a = p', \qquad b = \infty, \qquad \text{в случае 1);}\\ &a = 1, \qquad b = v', \qquad \text{в случае 2).} \end{aligned}$$

Отметим, что в любом случае $a \leqslant b$ и $b' \leqslant a'$.

С этими обозначениями мы получаем из леммы 7.1.2 следующее: существуют сепарабельное рефлексивное пространство Y, сепарабельное пространство X с базисом, оператор $U \in \mathrm{QN}_a(X,Y)$ и элемент $\overline{T} \in Y^*\widehat{\otimes}_{b'} X^{**}$ такие, что $\operatorname{trace} \overline{T} \circ U = 1$ и $\operatorname{trace} \overline{T} \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in X^* \otimes Y$. В этом разделе мы будем работать с этими пространствами и операторами. Мы можем (и будем) предполагать, что $\pi_a(U) < 1$. Пусть $\overline{T} = \sum y'_n \otimes x''_n$, где $y'_n \in Y^*$, $x''_n \in X^{**}$, $\varepsilon_b((x''_n)_1^\infty) \leqslant 1$, $\alpha = \alpha_{b'}((y'_n)_1^\infty) < \infty$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и введем следующие обозначения.

1) Пусть элементы $x'_k \in X^*$, $k = 1, 2, \dots$, таковы, что $\|Ux\|^a \leqslant \sum |\langle x'_k, x\rangle|^a$ для всех $x \in X$ и $\sum \|x'_k\|^a \leqslant 1$.

2) Пусть $A > 1$ — такое число, что

$$\frac{3\alpha}{A} < \frac{1}{2}\delta.$$

3) Пусть ν — такое число, что

$$\nu(1 + A) < \frac{1}{2}\delta.$$

4) Выберем такое натуральное N, что для

$$T = \sum_{n=1}^{N} y'_n \otimes x''_n$$

выполняются неравенства

$$\operatorname{trace} T \circ U > 99/100; \qquad |\operatorname{trace} T \circ \varphi| < \nu \pi_b(\varphi),\ \forall \varphi \in X^* \otimes Y.$$

5) Пусть M таково, что

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \|x'_k\|^a \leqslant \frac{1}{2(1 + A)^a}.$$

6) Пусть $L = [U^* y'_n; x'_k]_{n \leqslant N; k \leqslant M}$ (линейная оболочка).

7) По принципу локальной рефлексивности, пусть $V : [x''_n]_1^N \to X$ — такое изоморфное отображение, что если $x_n = V x''_n$, то

7a) $\varepsilon_b(x_n)_1^N < 2$ и

7b) $x''_n|_L = x_n|_L$.

8) Положим $T_0 = \sum_{n=1}^N y'_n \otimes x_n \in Y^* \otimes X$.

7) Пусть $E = [x_n]_1^N$.

Наконец, мы будем обозначать $\mathrm{L}(Z_1, Z_2)$ также через $\Pi_\infty(Z_1, Z_2)$, при этом $\pi_\infty(R) = \|R\|$; $\|R\|_\infty$ для $R \in \mathrm{L}(Z_1, Z_2)$ обозначает число

$$\inf \left\{ \|R_1\| \, \|R_2\| :\ R = R_2 R_1,\ R_1 \in \mathrm{L}(Z_1, C(K)),\ R_2 \in \mathrm{L}(C(K), Z_2) \right\}.$$

Теперь мы сформулируем основную теорему в самой общей ее форме; введенные выше обозначения будут использоваться в ее доказательства.

Теорема 7.2.1. *Пусть X, Y, U — из леммы 7.1.2. Существует конечномерный оператор $T_0 \in Y^* \otimes X$, для которого справедливы следующие утверждения*

1) *Для любого $\delta > 0$ и для каждого $p < 2$ существует эквивалентная норма на X, скажем $|||\cdot|||$, такая, что если $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$, то*

(i_1) $X_\delta \in \mathrm{AP}$;

(ii_1) $\|U\|_{\Pi_{p'}(X_\delta, Y)} \leqslant 3/2$;

(iii_1) *U не принадлежит замыканию шара радиуса $4/5\,\delta$ пространства $X^*_{\pi_\infty} Y$ в пространстве $\mathrm{L}(X_\delta, Y)$ в топологии компактной (или поточечной) сходимости;*

(iv_1) $\|T_0\|_{Y^* \widehat{\otimes}_p, X_\delta} \geqslant 1/2$;

(v_1) $\|T_0\|_{\mathrm{I}_1(Y, X^{**}} < \delta$.

2) *Для любого $\delta > 0$ и для каждого $v > 2$ существует эквивалентная норма на X, скажем $|||\cdot|||$, такая, что если $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$, то*

(i_2) $X_\delta \in \mathrm{AP}$;

(ii_2) $\|U\|_{\Pi_1(X_\delta, Y)} \leqslant 3/2$;

(iii_2) *U не принадлежит замыканию шара радиуса $4/5\,\delta$ пространства $X^*_{\pi_{v'}} Y$ в пространстве $\Pi_{v'}(X_\delta, Y)$ в топологии компактной (или поточечной) сходимости;*

(iv_2) $\|T_0\|_\infty \geqslant 1/2$;

(v_2) $\|T_0\|_{\mathrm{I}_v(Y, X^{**}} < \delta$.

Более того, как в случае 1), так и в случае 2) норма $|||\cdot|||$, дуальная к которой определяется соотношением $|||x'||| = \|x'\| + A\,\mathrm{dist}\,(x', L)$, удовлетворяет всем указанным выше условиям при подходящем выборе числа A.

Доказательство. В предыдущих обозначениях определим новую (эквивалентную) норму $|||\cdot|||$ на X^* следующим образом: для $x' \in X^*$

$$|||x'||| = \|x'\| + A\,d(x', \Psi^* E^*),$$

где $d(x', L) = \inf\{\|x' - l\| :\ l \in L\}$. Это дуальная норма. Мы утверждаем, что пространство $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$ удовлетворяет всем условиям нашей теоремы.

(i) В X есть базис, поэтому X обладает свойством ограниченной аппроксимации.

(ii) $|||Ux|||^a =\leqslant \sum_{k=1}^\infty |\langle x'_k, x\rangle|^a$ и

$$\sum_k \|x'_k\|^a \leqslant \sum_{k=1}^M \|x'_k\|^a + \sum_{k=M+1}^\infty |||x'_k|||^a \leqslant 1 + (1+A)^a \sum_{k=M+1}^\infty ||x'_k||^a \leqslant$$
$$\leqslant 1 + (1+A)^a \frac{1}{1(1+A)^a} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $\|U\|_{\Pi_a(X_\delta, Y)} \leqslant (3/2)^{1/a} \leqslant 3/2$.

(iv) Имеем:

$$|\,\mathrm{trace}\ T_0 \circ U| = \sum_{n=1}^N \langle x_n, U^* y'_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle x''_n, U^* y'_n\rangle = \mathrm{trace}\ T \circ U > 99/100.$$

Так как $\|U\|_{\Pi_a(X_\delta,Y)} \leqslant 3/2$, то $\|T_0\|_{Y*\widehat{\otimes}_{a'}X} \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{99}{100} = \frac{33}{50} > \frac{1}{2}$.

(v) Так как $(X_\delta^* \otimes_{\pi_b} Y)^* = \mathrm{I}_{b'}(Y, X_\delta^{**})$ (с естественной двойственностью, определяемой при помощи следа), то

$$\|T_0\|_{\mathrm{I}_{b'}(Y,X_\delta^{**})} = \sup\{|\operatorname{trace} T_0\circ\varphi| :\ \varphi \in X_\delta^* \otimes Y, \pi_b(\varphi) \leqslant 1\}.$$

Пусть $\varphi \in X_\delta^* \otimes Y$ и $\|\varphi\|_{\Pi_b(X_\delta,Y)} \leqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned}|\operatorname{trace} T_0\circ\varphi\| &= \left|\sum_{n=1}^N \langle x_n, \varphi^* y_n'\rangle\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^N \langle x_n - x_n'', \varphi^* y_n'\rangle\right| + \left|\sum_{n=1}^N \langle x_n'', \varphi^* y_n'\rangle\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^N \langle \varphi^{**}(x_n - x_n''), y_n'\rangle\right| + |\operatorname{trace} T\circ\varphi| \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi\|_{\Pi_b(X_\delta,Y)}\alpha_{b'}((y_n')_1^\infty)\widetilde{\varepsilon}_b + \nu\|\varphi\|_{\Pi_b(X,Y)},\end{aligned}$$

где $\widetilde{\varepsilon}_b$ — ε_b-норма последовательности $(x_n - x_n'')_1^N$ относительно нормы $|||\cdot|||$.

Если $|||x'||| \leqslant 1$, $x' \in X^*$, то для $l \in L$, $\|l - x'\| = d(x', L)$, имеем:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^N |\langle x_n'' - x_n, x'\rangle|^b\right)^{1/b} &= \left(\sum_{n=1}^N |\langle x_n'' - x_n, x' - l\rangle|^b\right)^{1/b} \leqslant \\ &\leqslant \|x' - l\|\varepsilon_b\left((x_n'' - x_n)_1^N\right)_{\|\cdot\|} \leqslant 3d(x', L) \leqslant \\ &\leqslant \frac{3}{A}|||x_n'||| \leqslant \frac{3}{A}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\operatorname{trace} T_0\circ\varphi\| \leqslant \frac{3\alpha}{A} + \nu(1+A) \leqslant \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Следовательно, $\|T_0\|_{\mathrm{I}\,b'(Y,X_\delta^{**})} \leqslant \delta$.

(iii) Если это утверждение неверно, то найдется такой оператор $\varphi \in X_\delta^* \otimes Y$, что $\|\varphi\|_{\Pi_b(X_\delta,Y)} \leqslant 4/(5\delta)$ и $\varphi|_E = U|_E$. Имеем:

$$|\operatorname{trace} T_0\circ\varphi| = \left|\sum_{n=1}^N \langle \varphi x_n, y_n'\rangle\right| = \left|\sum_{n=1}^N \langle U x_n, y_n'\rangle\right| = |\operatorname{trace} T_0\circ U| > 99/100.$$

С другой стороны,

$$|\operatorname{trace} T_0\circ\varphi| \leqslant \|T_0\|_{\mathrm{I}_{b'}(Y,X_\delta^{**})}\|\varphi\|_{\Pi_b(X_\delta,Y)} \leqslant \delta[4/(5\delta)] = 4/5.$$

■

Приведем три следствия, которые сразу вытекают из теоремы.

Следствие 7.2.1. 1) *Для каждого $C > 0$ и любого $q > 2$ существует сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_q(X, Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\pi_q(U) = 1$ *и U не является пределом конечномерных операторов φ, с нормами $\|\varphi\| \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

2) *Для каждого $C > 0$ и любого $q < 2$ существует сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_1(X, Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\pi_1(U) = 1$ *и U не является пределом конечномерных операторов φ, с нормами $\pi_q(\varphi) \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

Следствие 7.2.2. 1) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p < 2$ существует сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\|T\|_{\mathrm{N}_p(Y,X)} = 1$ *и* $\|T\|_{\mathrm{I}_1(Y,X^{**})} < \delta$.

2) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p > 2$ существует сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\|T\|_\infty = 1$ *и* $\|T\|_{\mathrm{I}_p(Y,X^{**})} < \delta$.

Следствие 7.2.3. *Для каждого $C > 1$ и для любого $p \geqslant 1, p \neq 2$, существует банахово пространство X со свойством C-MAP_p такое, что X не обладает свойством C_1-MAP, если $C_1 < C$.*

3. Применения основной теоремы. Нерегулярность идеалов N_p : случай незамкнутости N_p в $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$.

Теорема 7.3.1. 1) *Для каждого $q > 2$ существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP*), сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_q(X, Y)$ такие, что*

(*i*) *U лежит в замыкании множества конечномерных операторов $X^* \otimes Y$ в $\mathrm{QN}_q(X, Y)$ в топологии $\sigma\left(\mathrm{QN}_q(X, Y), Y^* \widehat{\otimes}_{q'} X\right)$ (следовательно, и в топологии компактной сходимости), но*

(*ii*) *для всякого $C < +\infty$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, нормы которых $\|\Phi\| \leqslant C$.*

2) *Существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP*), сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_1(X, Y)$ такие, что*

(*i*) *$U \in X^* \otimes_2 Y$ (очевидно), но*

(*ii*) *если $q < 2$, то для всякого $C > 0$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, для которых $\pi_q(\Phi) \leqslant C$.*

Доказательство. 1) Применяя следствие 7.2.1,1), построим, для каждого $n \in \mathbb{N}$, банаховы пространства X_n, Y_n и оператор $U_n \in \mathrm{QN}_q(X_n, Y_n)$ такие, что X_n имеет свойство BAP, $\pi_q(U_n) < 2^{-n}$ и U_n не является пределом операторов Φ конечного ранга с нормами $\|\Phi\| \leq n$ в топологии компактной сходимости. Положим $X = \left(\sum X_n\right)_{l_2}$, $Y = \left(\sum Y_n\right)_{l_2}$, $U = \oplus U_n$. Тогда (*ii*) очевидно; и X имеет свойство

AP . Следовательно, естественное отображение $Y^*\widehat{\otimes}_{q'}X \to \mathrm{N}_{q'}(Y,X)$ взаимно однозначно. Отсюда вытекает, что $X^* \otimes Y$ плотно в пространстве, сопряженном к $Y^*\widehat{\otimes}_{q'}X$, в w^*-топологии.

2) Применяя следствие 7.2.1,2), найдем, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для $q_n < 2$ (таких, что $q_n \nearrow 2$) банаховы пространства X_n, Y_n и оператор $U_n \in \mathrm{QN}_q(X_n, Y_n)$ такие, что X_n имеет свойство BAP, $\pi_1(U_n) < 2^{-n}$ и U_n не есть предел конечномерных операторов Φ, для которых $\pi_{q_n}(\Phi) \le n$. Полагая теперь $X = (\sum X_n)_{l_2}$, $Y = (\sum Y_n)_{l_2}$, $U = \oplus U_n$, мы получаем нужные нам пространства и оператор. ■

Теорема 7.3.2. 1) *Существуют сепарабельное пространство X(со свойством* AP), *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ такие, что $T^{**} \in \mathrm{N}_1(Y, X^{**})$, но $T \notin \mathrm{N}_p(Y,X)$ для каждого $p < 2$; более того, существует последовательность $\{T_n\}$ в $Y^* \otimes X$ такая, что $T_n \to T$ по норме, индуцированной из $\mathrm{N}_1(X, Y^{**})$.*

2) *Существуют сепарабельное пространство X (со свойством* AP), *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ такие, что $T^{**} \in \mathrm{N}_p(Y, X^{**})$ для каждого $p > 2$, но T не факторизуется ни через какое пространство $C(K)$ (следовательно, не лежит в N_r, если $r \in [1, +\infty)$); более того, существует последовательность $\{T_n\}$ в $Y^* \otimes X$ такая, что $T_n \to T$ по любой из норм $\widetilde{\nu}_p$, $p > 2$, индуцированной из $\mathrm{N}_p(X, Y^{**})$.*

Доказательство. 1) Используя следствие 7.2.2,1), мы можем найти, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_n < 2$ ($p_n \nearrow 2$), банаховы пространства X_n, Y_n и оператор $T_n \in Y_n^* \otimes X_n$ такие, что X_n имеет свойство BAP_n, $\|T_n\|_{\mathrm{I}_{p_n}(Y_n, X_n)} \ge n$ и $\|T_n\|_{\mathrm{I}_1(Y_n, X_n^{**})} < 2^{-n}$. Теперь достаточно положить $X = (\sum X_n)_{l_2}$, $Y = (\sum Y_n)_{l_2}$ и $T = \oplus T_n$.

2) Используя следствие 7.2.2,2), мы можем найти, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_n < 2$ ($p_n \searrow 2$), банаховы пространства X_n, Y_n и оператор $T_n \in Y_n^* \otimes X_n$ такие, что X_n имеет свойство BAP_n, $\|T_n\|_{\infty)} \ge n$ и $\|T_n\|_{\mathrm{I}_{p_n}(Y_n, X_n^{**})} < 2^{-n}$. Если мы положим $X = (\sum X_n)_{l_2}$, $Y = (\sum Y_n)_{l_2}$ и $T = \oplus T_n$, то получим оператор T, не факторизуемый через пространство $C(K)$ и такой, что $T^{**} \in \mathrm{N}_p(Y, X^{**})$ для каждого $p > 2$, так как $p_n \to 2$. ■

Вот что вытекает непосредственно из предыдущей теоремы.

Следствие 7.3.1. *Существует банахово пространство со свойством* AP *(следовательно, со свойством* AP_p *для каждого p), не обладающее свойством* BAP_p *ни для какого $p, p \ne 2$.*

Следствие 7.3.2. *Для каждого $p \ne 2$ существует p-интегральный по Гротендику, но не (строго) p-интегральный по Пичу оператор.*

Следствие 7.3.3. *Для каждого $p \ne 2$ существует не p-ядерный оператор с p-ядерным вторым сопряженным.*

Следствие 7.3.4. *Существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство $C(K)$, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство c_0.*

Как следствие мы получаем также следующий результат Фигеля–Джонсона: существует банахово пространство со свойством AP, не обладающее свойством BAP; существует не ядерный оператор с ядерным сопряженным.

Замечание 7.3.1. Так как в лемме 7.1.1,1), в лемме 7.2.1,1), в теореме 7.2.1,1), в следствии 7.2.1,1) $\overline{U}$ и $U \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q$ (см. замечание 7.1.1), то мы в теореме 7.3.1,1) имеем: $\exists X, Y$; $U \in \cap_{q>2} \mathrm{QN}_q$ такие, что U принадлежит замыканию множества конечномерных отображений в топологии компактной сходимости τ_c, но для каждого $C > 0$ U не есть предел в τ_c конечномерных операторов φ, нормы которых не превосходят C.

§8. Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов

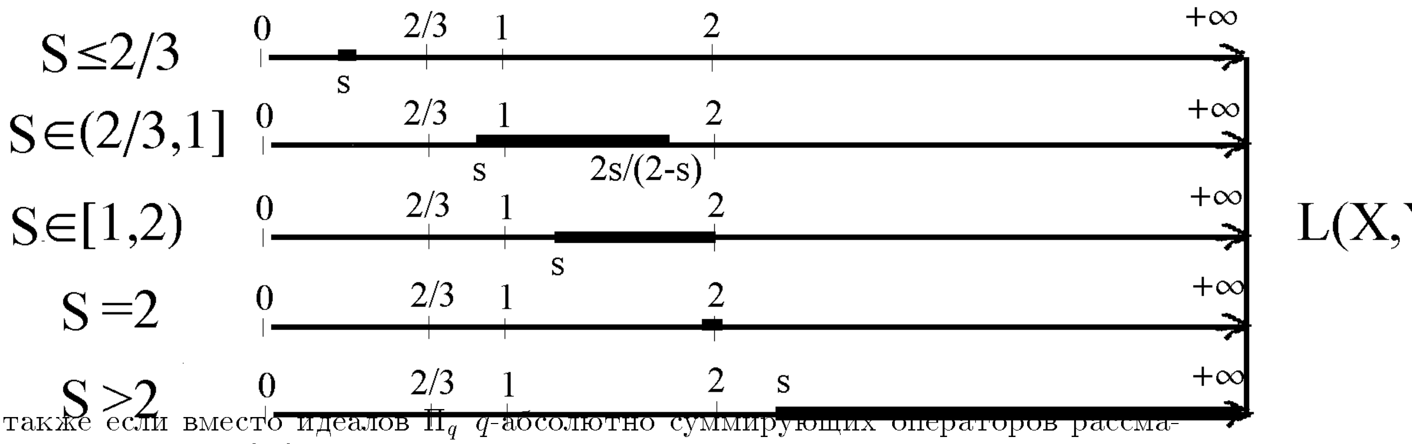
Одна из задач, о которых пойдет речь ниже, носит следующий характер. Пусть есть два банаховых пространства E и F и шкала банаховых тензорных произведений $\{E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F\}_{\alpha\in[1,+\infty)}$ (n_α — кросснорма на $E^* \otimes F, E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F$ — пополнение по этой норме), причем на $E^* \otimes F$ $n_\beta \leqslant n_\alpha$ для $\alpha \leqslant \beta$. Рассмотрим канонические отображения $j_{\alpha\beta} : E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F \to E^*\widetilde{\otimes}_{n_\beta}F$ и $j_\alpha : E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F \to \mathrm{L}(E,F), 1 \leqslant \alpha < +\infty$. Предположим, что для некоторого α отображение j_α не является взаимно однозначным. В этом случае мы можем рассматривать пары отображений j_β и $j_{\alpha\beta}$:

$$E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F \xrightarrow{j_{\alpha\beta}} E^*\widetilde{\otimes}_{n_\beta}F \xrightarrow{j_\beta} \mathrm{L}(E,F)$$

и интересоваться, меняя переменную β от α до $+\infty$, в каком месте шкалы произошло исчезновение ненулевого тензорного элемента $z \in E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F$, для которого $j_\alpha(z) = 0$ (т.е. при каких β $j_{\alpha\beta} = 0$?). Эти соображения приводят нас к такой задаче: для данного α найти такое β, что $j_{\alpha\beta}$ — не взаимно однозначно, а отображения $j_\beta|j_{\alpha\beta}(E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F)$ и $j_{\alpha\gamma}$ при $\gamma < \beta$ взаимно однозначны (это означает, что тензорные элементы из $(E^*\widetilde{\otimes}_{n_\alpha}F$ исчезают в точности в тензорном произведении $(E^*\widetilde{\otimes}_{n_\beta}F)$.

Конкретный пример: пусть E — банахово пространство без свойства аппроксимации. Тогда каноническое отображение $E^*\widehat{\otimes}E \to \mathrm{L}(E,E)$ не взаимно однозначно ($E^*\widehat{\otimes}E$ — проективное тензорное произведение), и мы находимся в описанной выше ситуации: в качестве n_α можно взять кросснормы, порождающие α-ядерные операторы, что мы и сделаем ниже. В этом случае задача решается полностью (рисунок). Тензорный элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_sY$ рассматривается в различных пространствах $X^*\widehat{\otimes}_pY$, $p \geqslant s$. Если в тензорных произведениях, соответствующих участку на рисунке, обозначенному жирной линией, он не обратился в нуль, то и нигде "правее" этого участка он также не "исчезнет". Указанные участки — точные.

Мы будем иметь дело с пространствами N_p p-ядерных операторов. Отметим, что *все установленные результаты* остаются в силе, если вместо N_p рассматривать идеалы N^p (двойственные с N_p) и соответствующие тензорные произведения,



а также если вместо идеалов Π_q q-абсолютно суммирующих операторов рассматривать идеалы Π_q^{dual} (доказательства, однако, надо модифицировать; мы этого делать не станем).

1. Где исчезают тензорные элементы?

В этом пункте мы приведем решение задачи, сформулированной выше, для шкалы тензорных произведений $X^*\widehat{\otimes}_s Y$. Отметим, что до работ автора относительно этой задачи было известно лишь следующее: а) каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{2/3} Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ всегда взаимно однозначно (теорема А.Гротендика; см. [80] и §1); б) существует тензорный элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_1 Y, z \neq 0$, порождающий нулевой оператор и лежащий в $X^*\widehat{\otimes}_s Y$ для любого $s > 2/3$ (см. [65]). До 1980-82 гг. открытым был даже вопрос о том, есть ли такая пара банаховых пространств X и Y, что каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ не взаимно однозначно для некоторого $p > 1$. В этом направлении исчерпывающий ответ был дан в 1980-82 гг. автором [41, 130] (см. предыдущий параграф). Для полноты картины мы включим часть этих результатов в следующую теорему. Заметим, что теорема Гротендика о 2/3 содержится в утверждении A) при $s = 2/3$ (и $p = 1$), однако метод доказательства у нас совершенно другой.

Для сокращения формулировки теоремы нам удобно ввести такое обозначение: если $s \leqslant p$, то j_{sp} — каноническое отображение из $X^*\widehat{\otimes}_s Y$ в $X^*\widehat{\otimes}_p Y$.

Теорема 8.1.1. *A) Если $s \leqslant 1$ и $p \geqslant 2s/(2-s)$, то для любых X и Y каноническое отображение $\varphi_{sp} : j_{sp}(X^*\widehat{\otimes}_s Y) \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно.*

B) Если $s \in [1,2]$, то для любых X и Y отображение φ_{s2} взаимно однозначно.

C) Если $s > 2$, то не существует числа p, такого, что для всех X и Y отображение φ_{sp} взаимно однозначно.

A′) 1) Для любых чисел $s \in (2/3, 1]$ и $p < 2s/(2-s)$ существуют пространства X и Y, такие, что φ_{sp} не является взаимно однозначным.

2) Если $r \in [2/3, 1)$, то существует пара пространств X, Y, таких, что для любого $s > r$ отображение φ_{sp} взаимно однозначно при $p > 2r/(2-r)$, но не является взаимно однозначным при $p = 2r/(2-r)$.

B′) Если $1 \leqslant s \leqslant p < 2$, то существует пара пространств X, Y, таких, что отображение φ_{sp} не взаимно однозначно.

Доказательство. Утверждение B) очевидно; утверждения B') и C) вытекают из результатов предыдущего параграфа. Поэтому достаточно ограничиться лишь рассмотрением утверждений A) и A').

A) Не умаляя общности, можно считать, что $s \geqslant 2/3$, $p = \dfrac{2s}{2-s} \geqslant 1$. Пусть $z \in X^* \widehat{\otimes}_s Y$ и $j_{sp}(z) \neq 0$, т.е. существует такой оператор $U \in \Pi_{p'}(Y, X^{**})$, что $\operatorname{trace} U \circ z \neq 0$. Предположим, что элемент z порождает нулевой оператор $\widetilde{z}$ ($\iff$ $\operatorname{trace} \Phi \circ z = 0\ \forall\, \Phi \in Y^* \otimes X$). Оператор U факторизуется следующим образом: $Y \xrightarrow{V} Y_{p'} \xrightarrow{T} X^{**}$, где $Y_{p'}$ — подпространство некоторого $L^{p'}(\mu)$, T и V — линейные операторы. Так как $z \in X^* \widehat{\otimes}_s Y$, то для z можно найти такое представление $z = \sum \lambda_j\, x'_j \otimes y_j$, что $||x'_j||, ||y_j|| \leqslant 1$; $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0; \sum \lambda_j^s < +\infty$. Положим $E_N = [Vy_j]_1^N \subset Y_{p'}$. Так как $\dim E_N \leqslant N$ и $E_N \subset L^{p'}$, то из $Y_{p'}$ на E_N существует проектор P_N, причем $||P_N|| \leqslant N^{1/2-1/p'}$ Имеем:

$$|\operatorname{trace} U \circ z| = \Big|\sum_1^\infty \lambda_j\, \langle x'_j, Uy_j\rangle\Big| \leqslant \Big|\sum_1^N \lambda_j\, \langle x'_j, TP_N V y_j\rangle\Big| + \Big|\sum_{N+1}^\infty \lambda_j\, ||U||\,\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{N+1}^\infty \lambda_j\, \langle x'_j, TP_N V y_j\rangle\Big| + ||U||\,\Big|\sum_{N+1}^\infty \lambda_j\,\Big| \leqslant$$

$$\leqslant ||V||\,||T||\,\sum_{N+1}^\infty \lambda_j\,(1 + ||P_N||).$$

Так как $\lambda^s = O(j^{-1})$, то $\sum_{N+1}^\infty \lambda_j \leqslant c_N\, N^{1-1/s}$, где $c_N \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно,

$$0 \neq |\operatorname{trace} U \circ z| \leqslant ||V||\,||T||\, c_N\, N^{1-1/s}(1 + N^{1/2-1/p'}) \leqslant$$

$$\leqslant ||V||\,||T||\, c_N\, (1 + N^{3/2-1/s-1/p'}) \to 0.$$

A') Пусть $z \in E^* \widehat{\otimes} E$ — ненулевой тензорный элемент, допускающий представление $z = \sum \lambda_j\, x'_j \otimes y_j$, где $\lambda_j \geqslant 0$; $\sum \lambda_j^\alpha < +\infty\ \forall\, \alpha > 2/3; ||x_j|| \leqslant 1,\ ||y_j|| \leqslant 1$, и такой, что $\widetilde{z} = 0$ (см. [65]). Для $s \in (2/3, 1]$ и $p < 2s/(2-s)$ пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $1/p > (2-s)/(2s) + 3\varepsilon/(2s)$. Положим $q = (2/3+\varepsilon)/s$; $V = \sum \lambda_j^q\, e_j \otimes y_j \in l_p \widehat{\otimes}_s Y$, где e_j — орты в l_p. Так как

$$(1-q)p' = (2/3)p'\,(1 - (2-s)/(2s) - 3\varepsilon/(2s)) > 2/3,$$

то формула $U = \sum \lambda_j^{1-q}\, x'_j \otimes e_j$ определяет оператор $U \in \mathrm{N}_{p'}(E, l_{p'})$. Пусть $Y = \overline{U(E)}$; $j : Y \to l_{p'}$ — тождественное вложение, $w = V \circ j \in Y^* \widehat{\otimes}_s F$. Тогда $\operatorname{trace} w \circ U = \operatorname{trace} z \neq 0$. Так как $U \in \mathrm{QN}_{p'}(E, Y)$, то отсюда вытекает, что w как элемент тензорного произведения $Y^* \widehat{\otimes}_p E$ не равен нулю. С другой стороны, очевидно, оператор $\widetilde{W}$ нулевой.

Второе утверждение доказывается аналогично (надо лишь для $r \in [2/3, 1)$ взять $q = 2/3r$ и рассмотреть элемент $V = \sum \lambda_j^q \, e_j \otimes y_j \in l_p \widehat{\otimes}_s E \ \forall\, s > r$). ■

Замечание 8.1.1. Из доказательства видно, что в утверждении A') пространство X может быть выбрано подпространством в $l_{p'}$ (при $p \geqslant 1$), а пространство Y (так же как и X) можно считать сепарабельным и рефлексивным (надо лишь воспользоваться факторизационной теоремой из [66]).

Замечание 8.1.2. При $s = 2/3$ утверждение A) было установлено А. Гротендиком еще в 1955 г. [80], причем существенно использовался аппарат теории аналитических функций. Было бы любопытно выяснить, могут ли те же идеи А. Гротендика привести к доказательству утверждения A) в полном объеме.

2. Где исчезают p-ядерные операторы? Результаты этого раздела инспирированы теоремой Фигеля–Джонсона из [76] (а также работой автора [41] и теоремой 8.1.1): существует не ядерный оператор, сопряженный к которому является ядерным. В связи с этой теоремой также возникает ряд вопросов. Однако, кроме указанного факта, до 1980 г. в этом направлении ничего более известно не было. Мы имеем в виду, например, такие естественные вопросы: переносится ли теорема Фигеля-Джонсона на случай $p > 1$? Может ли не ядерный оператор T быть таким, что $T^* \in \mathrm{N}_s$ для некоторого $s < 1$? (т.е. лучше, чем в теореме Фигеля-Джонсона). Вполне конкретный и интересный вопрос возникает и в связи со следующей теоремой А. Гротендика [80]: если $T^* \in \mathrm{N}_{2/3}$, то T — ядерный оператор. Точна ли эта теорема? (Как уже отмечалось, аналогичная теорема А. Гротендика о 2/3, о которой шла речь в п..8.1, оказалась точной). Для решения перечисленных, а также ряда других задач понадобились новые идеи и методы, которые впервые привели к положительным результатам в 1981 г. [41, 130]. Развивая эти идеи, мы дадим ниже полное решение следующей задачи, включающей в себя, в частности,сформулированные выше вопросы: найти точное соотношение между показателями s и $p, p \geqslant 1$ (аналогично тому, как это было сделано в п. 8.1), такое, что из $T^{**} \in \mathrm{N}_p$ следует $T \in \mathrm{N}_p$. Любопытно отметить, что здесь получается в точности такой же ответ, как и в п. 8.1; поэтому иллюстрацией к следующей ниже теореме также может служить рисунок (с другим комментарием).

Теорема 8.2.1. A) *Пусть* $s \leqslant 1, p = 2s/(2-s); T \in \mathrm{L}(X,Y)$. *Если* $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$, *то* $T \in \mathrm{N}_p(X,Y)$.

B) *Пусть* $s \in [1,2]$. *Если* $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *и* $T \in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$, *то* $\mathrm{N}_2(X,Y)$.

A') 1) *Если* $s \in (2/3, 1]$ *и* $p < 2s/(2-s)$, *то существуют пространства* X, Y *и оператор* $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *такие, что* $T \in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$, *но* $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$.

2) *Для всякого* $r \in [2/3, 1)$ *существуют пространства* X, Y *и оператор* $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ *такие, что* $T \in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$ *для любого* $s > r$ *но* $T \notin \mathrm{N}\, 2r/(2-r)$; *в то же время* $T \in \cap\{\mathrm{N}_q(X,Y) : \ q > 2r/(2-r)\}$.

B') *Существуют пространства* X, Y *и оператор* $T \in L(X,Y)$ *такие, что* $T \in \mathrm{N}_1(X,Y^{**})$, *но* $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$ *при* $p < 2$.

C') *Существуют пространства* X, Y *и оператор* $T \in L(X,Y)$ *такие что* $T \in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$ *для любого* $s > 2$, *но* $T \notin \mathrm{N}_\infty(X,Y)$.

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 8.1.1, мы рассмотрим лишь утверждения A) и A') (относительно B') и C') см. [41] и предыдущий параграф). Заметим, что утверждение B) очевидно.

A) Пусть $T = \sum \lambda_j\, x'_j \otimes y''_j$, где $||x'_j||, ||y_j|| \leqslant 1$; $\lambda_j \rangle 0$ и $\sum \lambda_j^s < +\infty$. Положим $T_1 = \sum \lambda_j^{s/p}\, x'_j \otimes e_j$, где e_j — орты в l_2, и $T_2 = \sum \lambda_j^{1-s/p}\, e_j \otimes y''_j$. Так как $2(1-s/p) = s$ и $\{\lambda_j\} \in l_s$, то $T_1 \in \mathrm{N}_p(X, l_2)$, $T_2 \in \mathrm{L}(l_2, Y^{**})$. Если $Q : l_2 \to \overline{T_1(X)}$ — проектор, то $T = T_2 Q T_1$ и $QT_1 \in \mathrm{N}_p(X, l_2)$; при этом $T_2(\overline{T_1(X)}) \subset Y$. Следовательно, $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.

A') Пусть $s \in (2/3, 1], p < \dfrac{2s}{2-s}$. Используя теорему 8.1.1, мы можем найти (рефлексивные) банаховы пространства X, Y, элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_s Y$ и оператор $U \in \mathrm{QN}_{p'}(X, Y)$, $\pi_{p'}(U) \leqslant 1$, такие, что $\mathrm{trace}\; U \circ z = 1$; $\mathrm{trace}\; \Phi \circ z = 0\; \forall\, \Phi \in Y^* \otimes X$. Пусть $z = \sum x'_j \otimes y_j$, где $||y_j|| \leqslant 1$, $\sum ||x'_j|| < \infty$. Так как $\pi_{p'}(U) \leqslant 1$, то $||Uy||^{p'} \leqslant \sum |\langle y, y'_j \rangle|^{p'}$, где $\sum ||y'_j||^{p'} \leqslant 1$. Без ограничения общности мы можем считать, что $[y_j] = Y$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $E_n = [y_j]_1^n$, и пусть $E = \left(\sum E_n\right)_{l_1}$. Определим оператор $T : E \to Y$ следующим образом: если $e = \{e_n\} \in E$, то $Te = \sum e_n$. На каждом подпространстве E_n в E оператор T действует как тождественный и имеет обратный, который мы обозначим через T_n^{-1}. Для $n \in \mathbb{N}$ определим отображения $S_n : E^* \to \widehat{\mathbb{R}}^{Y_0}$, где $Y_0 = \cup_1^\infty E_n \subset Y$: если $y \in Y_0$, то

$$(S_n(e'))\,(y) = \begin{cases} \langle e', T_n^{-1} y \rangle, & y \in E_n, \\ 0. & y \notin E_n. \end{cases}$$

Так как $S_n \in \left(\overline{\mathbb{R}}^{Y_0}\right)^{E^*}$, то из $\{S_n\}$ можно извлечь сходящуюся подсеть $\{S_{n_\alpha}\}$. Пусть $S = \lim_\alpha S_{n_\alpha}$. Тогда для $y \in Y_0$ $\langle Se', y \rangle = \lim_\alpha \langle e', T_n^{-1} y \rangle$, откуда $|\langle Se', y \rangle| \leqslant ||e'||\,||y||$. Так как $\overline{Y_0} = Y$, то линейное отображение S действует из E^* в Y^*, причем $||S|| \leqslant 1$. Легко видеть, что $ST^* = \mathrm{id}_{Y^*}$.

Определим теперь операторы $C \in \mathrm{QN}_{p'}(E, X)$ и $B \in \mathrm{N}_s(X, E)$ следующим образом: $C = UT$, $B = \sum x'_j \otimes e_j$, где $e_j := \left(0, \ldots, 0, T_j^{-1}(y_j), 0, \ldots\right)$. Очевидно, что $\mathrm{trace}\; B \circ C = \mathrm{trace}\; U \circ z = 1$.

Пусть $A \geqslant 1$ и M — такое натуральное число, что $10^{-6} \geqslant A \sum_{M+1}^\infty ||T^* y'_j||^{p'}$. Пусть, далее, $L = [T^* y'_j]_1^M$. Введем на L новую норму $|||e'||| = \max\{||e'||; A\, \mathrm{dist}\,(e', L)\}$. В силу конечномерности L эта норма дуальна к некоторой норме на E (эквивалентной исходной), которую мы обозначим тем же символом $|||\cdot|||$.

Заметим, что $||Ce||^{p'} \leqslant ||UTe||^{p'} \leqslant \sum_1^\infty |\langle e, T^* y'_j \rangle|^{p'}$, причем $\sum_1^\infty |||T^* y'_j|||^{p'} \leqslant \sum_1^M ||T^* y'_j||^{p'} + A \sum_{M+1}^\infty ||T^* y'_j||^{p'} \leqslant 1 + 10^{-6}$. Так как $\mathrm{trace}\; B \circ C = 1$ и пространство E, очевидно, обладает свойством аппроксимации, то $\nu_p(B) \geqslant (1 + 10^{-6}) \approx 1$.

Далее, значение $B^{**}(x)$ вычисляется по такой формуле:

$$B^{**}(x)=\sum_1^\infty\langle x_j',x\rangle e_j=\sum_1^\infty\langle x_j',x\rangle(e_j-S^*y_j)+S^*\left(\sum_1^\infty\langle x_j',x\rangle y_j\right)=$$
$$=\sum_1^\infty\langle x_j',x\rangle(e_j-S^*y_j).$$

Оценим $\nu_s(B^{**})$. Заметим сначала, что $\langle e_j,T^*y_j\rangle=\langle Te_j,y'\rangle=\langle y_j,y\rangle=\langle y_j,ST^*y'\rangle=\langle S^*y_j,T^*y'\rangle$; поэтому $e|_{T^*(Y^*)}=S^*y_j|_{T^*(Y^*)}$. В частности, e_j и S^*y_j совпадают на L. Теперь, если $|||e'|||\leqslant 1$, $l\in L$ и $||e'-l||=\operatorname{dist}(e',L)$ то $|\langle e_j-S^*y_j,e'\rangle|=|\langle e_j-S^*y_j,e'-l\rangle|\leqslant 3\operatorname{dist}(e',L)\leqslant 3/A$. Следовательно, $|||e_j-S^*y_j|||\leqslant 3/A$.

Теперь мы имеем:

$$\sum_1^\infty||x_j'||^s|||e_j-S^*y_j|||^s\leqslant(3/A)^s\sum_1^\infty||x_j'||^s.$$

Таким образом, для больших значений A в новой норме $\nu_p(B)\approx 1$, а $\nu_s(B^*)=\nu_s(B^{**})$ — величина очень маленькая. Заметим,что оператор B можно считать конечномерным (отбросив в его представлении достаточно далекий "хвост"). Ясно, что из построенных пространств и операторов (варьируя A) теперь можно сконструировать тот оператор, о котором идет речь в первом утверждении.

Наконец, пусть $r\in[2/3,1)$. Оператор, фигурирующий во втором утверждении, строится так. Берем последовательности s_n и p_n; $s_n\searrow r$; $2s_n/(2-s_n)>p_n>2r/(2-r)$. Для каждого n строим свой конечномерный оператор T_n (используя утверждение 1)), для которого $\nu_{s_n}(T_n^{**})\leqslant 2^{-n}$; $\nu_{p_n}(T_n)>n$; затем "складываем" все эти операторы (по типу l_2). В итоге получаем оператор T, который лежит в $\cap\{\mathrm{N}_p\,:\,p>2r/(2-r)\}$ (в силу утверждения A) нашей теоремы), не лежит в $\mathrm{N}_{2r/(2-r)}$ и сопряженный к которому входит в N_s, $\forall\, s>r$. ∎

Замечание 8.2.1. Из доказательства видно, что в утверждении A') пространство X может быть выбрано сепарабельным и рефлексивным, а пространство Y обладает свойством аппроксимации.

Напомним, что идеал операторов J в банаховых пространствах называется регулярным, если из $T\in\mathrm{L}(X,Y)$ и $T\in\mathrm{J}\,(X,Y^{**})$ вытекает, что $T\in\mathrm{J}\,(X,Y)$. Теорема 8.2.1 позволяет, в дополнение к результатам предыдущего параграфа (работ [76] и [41]), дать следующий отрицательный ответ на известный вопрос о регулярности идеалов N_p (см. [27, с. 247]).

Следствие 8.2.1. *При $p>2/3, p\neq 2$, идеал N_p не является регулярным.*

Напомним, что следствие 8.2.1 для $p=1$ впервые доказано в 1973 г. в [76], а для $p>1$ — автором в 1980-82 гг. [41].

3. Плохие квази-q-ядерные операторы. Доказательство теоремы 8.1.1, A), показывает, что если $U\in\Pi_{p'}$, то на всяком n-мерном подпространстве области определения оператора U его можно отождествить с таким конечномерным оператором Φ, что $\pi_{p'} \leqslant n^{1/2-1/p'}\pi_{p'}(U)$. Что можно сказать о точности этого результата? Теорема 8.1.1 позволяет дать такой ответ.

Теорема 8.3.1. *Для любых $q > 2$ и $\varepsilon > 0$ существуют пространства E, F и оператор $U \in \mathrm{QN}_q(E, F)$, такие, что*

1) $E = \cap_1^\infty E_n$, где $E1 \subset E_2 \subset \ldots; \dim E_n \leqslant n$;

2) существует $C > 0$ такое, что если $\Phi \in E^* \otimes F$ и $\Phi|_{E_n} = U|_{E_n}$, то $\pi_q(\Phi) \geqslant Cn^{1/2-1/q-\varepsilon}\pi_q(U)$.

Таким образом, в степенной шкале сформулированный выше результат является точным. В теореме 8.3.1, однако, оба пространства E и F не обладают свойством аппроксимации, а оператор U не принадлежит замыканию конечномерных операторов в топологии τ_c компактной сходимости. Можно ли найти оператор U из QN_q (для $Q > 2$), также обладающий "экстремальным" свойством 2), но аппроксимируемый в τ_c операторами конечного ранга? Оказывается, можно, но подпространства E_n из 1) в этом случае (у нас) уже не расположены в E так же хорошо, как в теореме 8.3.1 (см. ниже теорему 8.3.2).

Наиболее прозрачна ситуация при $q = +\infty$, т.е. $\pi_q = \|\cdot\|$. В этом случае наш второй вопрос выглядит так. Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Поскольку на всякое n-мерное подпространств H в X есть проектор с нормой не выше $N^{1/2}$, то на H оператор T можно отождествить с некоторым оператором $\Phi \in X^* \otimes Y, \|\Phi\| \leqslant n^{1/2}\|T\|$. Предположим, что оператор T "обладает свойством аппроксимации", т.е. $T \in \overline{X^* \otimes Y}^{\tau_c}$, но "не обладает свойством ограниченной аппроксимации", т.е. нет такой постоянной $c > 0$, что на всяком конечномерном подпространстве в X оператор T совпадает с некоторым $\Phi \in X^* \otimes Y$, $\|\Phi\| \leqslant c$. Насколько плохим может быть этот оператор с количественной точки зрения? Верно ли, что, вообще говоря, на n-мерных подпространствах н не может быть приближен конечномерными операторами, нормы которых существенно меньше $n^{1/2}\|T\|$? Следующая теорема показывает, что такие операторы есть.

Теорема 8.3.2. *Для всяких $q > 2$ и $\varepsilon > 0$ существуют пространства E, F и оператор $U \in \mathrm{QN}_q(E, F)$ такие, что 1) E обладает свойством аппроксимации;*

2) в E содержится набор $\{E_n\}$ подпространств таких. что

а) $\dim E_n \leqslant n$;

б) если $\Phi \in E^* \otimes F$ и $\Phi|_{E_n} = U|_{E_n}$, то $\pi_q(\Phi) \geqslant cn^{1/2-1/q-\varepsilon}$, где константа $C > 0$ зависит лишь от q, ε.

Обе сформулированные выше теоремы доказываются аналогичными методами. Мы приведем лишь доказательство более сложной теоремы 8.3.2.

Пусть $C \in \mathrm{QN}_{p'}(E, X)$ и $B \in \mathrm{N}_s(X, E)$ — из доказательства теоремы 8.2.1 (здесь $p = q'; s \leqslant 1; p < 2s/(2-s)$). Мы знаем, что trace $B \circ C = 1$. Так как C — компактный оператор, то в $C^*(\mathrm{Ball}\ _{X^*})$ можно найти δ-сеть $\{C^*\overline{x}'_k\}_1^N$ для любого $\delta > 0$. Пусть $\delta = A^{-1}$. Возьмем теперь $L = [T^*y'_k; C^*x'_j]_{k\leqslant M; j\leqslant N}$ и положим

$|||e'||| = \max\{||e'||; A \operatorname{dist}(e', L)\}$ (мы в доказательстве теоремы 3.1 немного изменили норму). Оценим $|||C^*|||$. Пусть $||x'|| \leqslant 1$. Тогда $|||C^*x'||| \leqslant A \operatorname{dist}(C^*x', L) \leqslant A\delta = 1$. Таким образом, $|||C||| \leqslant 1$.

Положим $E_n = [e_j]_1^n$ и пусть $\Phi \in E^* \otimes X, \Phi|_{E_n} = C|_{E_n}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
1 = \operatorname{trace} B \circ C = \sum_1^n \langle x'_j, \Phi e_j\rangle + \sum_{n+1}^\infty \langle x'_j, Ce_j\rangle \leqslant \\
\leqslant \Big|\sum_1^n \langle x'_j, \Phi S^* y_j\rangle\Big| + \Big|\sum_1^n \langle x'_j, \Phi e_j - \Phi S^* y_j\rangle\Big| + \sum_{n+1}^\infty ||x'_j||\,||Ce_j|| \leqslant \\
\leqslant \Big|\sum_{n+1}^\infty \langle x'_j, \Phi S^* y_j\rangle\Big| + \sum_1^n ||x'_j||\,|||\Phi|||\,|||e_j - S^* y_j||| + \sum_{n+1}^\infty ||x'_j|| \leqslant \\
\leqslant \sum_{n+1}^\infty ||x'_j||\,(|||\Phi||| + 1) + |||\Phi||| \sum_1^\infty ||x'_j|| \cdot 3A^{-1}.
\end{aligned}
$$

Отсюда $1 \leqslant \text{const}_{\,1}\, |||\Phi||| \sum_{n+1}^\infty ||x'_j|| + \text{const}_{\,2}\, A^{-1}\, |||\Phi|||$.

Так как $\{||x'_j||\} \in l_s$, то $\sum_{n+1}^\infty \leqslant c\,n^{1-1/s}$. (ясно, что мы можем считать, что последовательность $\{||x'_j||\}$ убывает). Следовательно, $1 \leqslant |||\Phi|||\,(n^{1-1/s} + A^{-1})c_3$. Если мы возьмем $A = n^{1/s-1}$, то получим $\pi_{p'}(\Phi) \geqslant |||\Phi||| \geqslant \text{const}_{\,4}\, n^{1/s-1}$.

Числа p и s связаны у нас соотношением $1/2 - 1/p' > 1/s - 1$. В силу произвольности выбора $s \leqslant 1$ мы можем добиться того, что $1/2 - 1/p' - \varepsilon < 1/s - 1$. Это, по существу, завершает доказательство теоремы 8.3.2 (надо еще только сложить подходящим образом построенные пространства и операторы). ■

Замечание 8.3.1. На самом деле в доказательстве получается: в 2б) — $\|\Phi\| \geqslant cn^{1/2-1/q-\varepsilon}$ для всякого конечномерного Φ такого, что $\Phi|_{E_n} = U|_{E_n}$. Кроме того, при $q = +\infty$ можно взять $E = F$ и $U = \mathrm{id}_E$.

На случае $q = +\infty$ следует остановиться еще раз. Выше мы обсудили теорему 8.3.2 для $q = +\infty$. Однако, при $q = +\infty$ можно поставить более сложный вопрос: возможна ли ситуация, описанная в теореме 8.3.2, когда $E = F$ и $U = \mathrm{id}_E$? Такая ситуация действительно возможна, и она нам встретилась в следствии 4.3.

Мы изучили выше только случай $q > 2$. На случае $q \in [0, 2)$ мы останавливаться не будем, так как все получаемые результаты здесь получаются очень грубыми.

§9. Непрерывность шкал некоторых операторных идеалов.

1. Общая постановка задач, рассматриваемых в параграфе выглядит примерно так [47]. Пусть у нас имеется семейство непрерывно вложенных друг в друга нормированных операторных идеалов (или некоторых пространств операторов, действующих в фиксированных банаховых пространствах):

$$J_\alpha \subset J_\beta,\ \alpha \leq \beta\ \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Обозначим нормы в этих идеалах через $\|\cdot\|_\alpha$ и зафиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ и некоторый непрерывный оператор $T : X \to Y$, действующий в банаховых пространствах (он может принадлежать или не принадлежать компоненте $J_\gamma(X,Y)$ идеала J_γ). Мы говорим, что функция u, определяемая равенством $u(\alpha) := \|T\|_\alpha$, *непрерывна в точке* γ, если из неравенства $u(\gamma) < +\infty$ вытекает соотношение $u(\alpha) \to u(\gamma)$ при $\alpha \to \gamma$, и *строго непрерывна*, если то же самое справедливо и при $u(\gamma) = +\infty$. Верно ли, что функция u непрерывна в точке γ (справа, слева), либо — какие условия, близкие к необходимым и достаточным, надо наложить на идеалы, на γ, на банаховы пространства, в которых задан оператор, чтобы эта функция была непрерывной? строго непрерывной?

В этом параграфе мы всесторонне исследуем этот вопрос для таких операторных идеалов, как идеалы p-абсолютно суммирующих и p-ядерных операторов.

Все результаты этого раздела взяты из статьи автора [47]. В данном параграфе формулируются леммы, которые последовательно дают информацию о непрерывности по параметру суммирующих, ядерных и интегральных операторов (в смысле А. Пича и А. Гротендика). В конце мы приведем один пример, показывающий, что для класса ядерных операторов условия, налагаемые на соответствующие пространства в лемме 9.2.5, существенны.

Ниже нам будет полезно следующее

Замечание 9.1.1. Если $T \in \Pi_p(X,Y)$, то при различных оценках величины $\pi_p(T)$ всегда можно считать, что пространства X и Y сепарабельны. Действительно, из определения $\pi_p(T)$ (см. гл. 0, §1 и п. 3.2) ясно, что для вычисления $\pi_p(T)$ достаточно рассмотреть лишь подходящие не более чем счетные наборы $\{x_n\} \subset X$ и $\{x'_n\} \subset X^*$; поэтому, если заменить пространства X, Y соответственно на пространства X_0, Y_0, где $X_0 = \overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$, $Y_0 = \overline{\operatorname{span}}\{Tx_n\}$, то величины $\pi_p(T)$ и $\pi_p(T|_{X_0})$ будут равны между собой.

Аналогично обстоит дело с p-ядерными нормами. Для пояснения этого, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и некоторый p-ядерный оператор T (для определенности будем считать, что p — конечное число).

Из соотношения (2.1) гл. 0, п. 3.2 и определения нормы $\nu_p(T)$ вытекает, что найдутся такие счетные множества $\{x'_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$, что оператор T может быть представлен в виде (2.1) с элементами $\{x'_n\}$ и $\{y_n\}$ и $\inf \nu_p$ (см. п. 0.3.2) может быть вычислен с точностью до ε на этих семействах.

Пусть $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ — такая положительная числовая последовательность, что $c_n \to 0$ и $\sum c_n^{-p}\,||x'_n||^p \le (1+\varepsilon)^p \sum ||x'_n||^p$. Обозначим через B сильно замкнутую абсолютно выпуклую оболочку в пространстве X^* множества $\{\tilde{x}'_n\}$ где $\tilde{x}'_n := c_n||x'_n||^{-1}\,x'_n$ для $n = 1, 2, \dots$ (по выбору числовой последовательности $\{c_n\}$, это сильно компактное подмножество в X^*; см., например, [54], стр.88), и пусть X^*_B — банахово пространство с единичным шаром B, естественным образом ассоциированное с парой (X^*, B). Как хорошо известно (см.,например, [54], стр.150, упр.3), это пространство сопряжено к некоторому сепарабельному (в силу компактности B) банахову пространству X_0, причем оператор тождественного вложения $X^*_B \to X^*$ является сопряженным к каноническому отображению Φ из X в X_0. Если обозначить еще через Y_0 подпространство в Y, порожденное семейством $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, то, очевидно, наш оператор T допускает факторизацию $T = jT_0\Phi$, где $j : Y_0 \to Y$ — тождественное вложение, а $T_0 : X_0 \to Y_0$ — оператор, индуцированный отображением T, т.е. $T_0(x_0) = \sum c_k^{-1} ||x'_k|| \langle x_0, \tilde{x}'_k, \rangle\, y_k \quad$ для $x_0 \in X_0$.

Нетрудно видеть, что, по выбору последовательности $\{c_n\}$, оператор T_0 является p-ядерным и, более того, $\nu_p(T) \le \nu_p(T_0) \le (1+\varepsilon)\,(\nu_p(T)+\varepsilon)$.

В силу произвольности числа ε, для оценок ν_p-нормы T достаточно оценить (сверху или снизу) ν_p-норму оператора T_0, то есть и в случае p-ядерного оператора можно рассматривать T как оператор, действующий в сепарабельных банаховых пространствах.

Конечно, аналогичные замечания можно сделать и для случаев, когда мы интересуемся равномерными оценками π_p- или ν_p-норм не более чем счетного числа операторов в банаховых пространствах.

2. Непрерывность π_p- и ν_p-норм.

Лемма 9.2.1. *Если X, Y — банаховы пространства, T — конечномерный оператор из X в Y, и $1 \le r \le +\infty$, то $\lim_{s\to r} \pi_s(T) = \pi_r(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $1 \le r < +\infty$.

Так как T — конечномерный квази-r-ядерный оператор, то найдется такой конечный набор $\{x'_n\}_{n=1}^{M}$, элементов пространства X^*, что

$$\left(\sum_{n=1}^{M} \|x'_n\|^r\right)^{1/r} \le 1, \tag{2.1}$$

и для любого $x \in X$

$$\|Tx\| \le (1+\varepsilon)\,\pi_r(T)\,\left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^r\right)^{1/r}. \tag{2.2}$$

Если $1 \le s < r$, то

$$\|Tx\| \le (1+\varepsilon)\,M^{1/s-1/r}\,\pi_r(T)\,\left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^s\right)^{1/s}, \quad \forall x \in X; \tag{2.3}$$

так что, вместе с (2.3), (2.1) влечет соотношение $\pi_s(T) \le M^{1/s-1/r}\,\pi_r(T)$, если $1 \le s \le r$.

Если же $1 \le r \le s$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^r\right)^{1/r} \;\le\; M^{1/r-1/s}\,\left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x'_n >|^s\right)^{1/s}$$

откуда, используя (2.1) и (2.2), получаем

$$\|Tx\| \le (1+\varepsilon)\, M^{1/r-1/s}\, \pi_r\,(T)\, \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x_n' >|^s \right)^{1/s}$$

и $\pi_r\,(T) \le M^{1/r-1/s}\, \pi_s\,(T)$.

Таким образом, для всякого $s \in [1,\, +\infty)$

$$M^{-|1/r-1/s|}\, \pi_s\,(T)\, \le \pi_r\,(T) \le M^{|1/r-1/s|}\, \pi_s\,(T)\,.$$

В случае, когда $r = +\infty,\ \pi_r\,(T) = \|T\| \le\ \pi_s\,(T)$ для любого $s > 0$. Если $\{x_n'\}_{n=1}^{M}$ — такой конечный набор элементов единичного шара пространства X^*, что для каждого $x \in X \quad \|Tx\| \le (1+\varepsilon)\, \|T\|\ \sup_n |< x,\, x_n' >|$, то

$$\|Tx\| \le (1+\varepsilon)\, \|T\|\, \left(\sum_{n=1}^{M} |< x,\, x_n' >|^s \right)^{1/s}$$

для $x \in X$, причем $\left(\sum_{n=1}^{M} \|x_n'\|^s\right)^{1/s} \le M^{1/s}$. Поэтому $\pi_\infty\,(T) \ge M^{-1/s}\, \pi_s(T)$. ■

Лемма 9.2.2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $r \in [1, +\infty)$ и $T \in \Pi_s(X,Y)$ для всех $s, s > r$. Тогда $\lim_{s\to r+0}\, \pi_s\,(T) = \pi_r(T)$. В частности, если все нормы $\pi_s\,(T)$ при $s > r$ ограничены одной константой $C > 0$, то $T \in \Pi_r(X,Y)$ и $\pi_r(T) \le C$.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, при доказательстве нашей леммы мы можем считать, что пространства X и Y сепарабельны (надо применить замечание 9.1.1 к не более чем счетному семейству $\{\pi_{s_n}\,(T)\} \bigcup \{\pi_r(T)\}$, где $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фиксированная последовательность, сходящаяся к r справа). Как хорошо известно, всякое сепарабельное банахово пространство (в частности, Y) изометрически вкладывается в некоторое сепарабельное пространство $\mathrm{C}\,(K)$, даже в пространство $\mathrm{C}\,[0,1]$ (теорема Банаха-Мазура; см., например, [22, стр.172]). Поэтому, в силу инъективности идеалов Π_p, можно предполагать, что в качестве пространства Y рассматривается пространство $\mathrm{C}\,[0,1]$. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность проекторов единичной нормы в $\mathrm{C}\,[0,1]$, сходящаяся поточечно к тождественному оператору (можно взять семейство проекторов в $\mathrm{C}\,[0,1]$, порожденное каким-нибудь стандартным базисом Шаудера, например, системой Фабера-Шаудера [16, стр.217]). Положим $R_k = P_k\, T$, и пусть $\pi = \lim_{s\to r+}\, \pi_s\,(T)$ (напомним, что $\pi_s\,(T)$ как функция аргумента s убывает на $(r, r+\varepsilon)$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$). Мы можем, очевидно, считать, что $\pi < +\infty$ (см. ниже замечание 9.2.2). Так как для любых $k = 1, 2, \dots$ и $s > r\ \ \pi_s\,(R_k) \le \pi_s\,(T) \le \pi$, то, с одной стороны, по лемме 9.2.1, $\pi_p\,(R_k) = \lim_{s\to r+}\, \pi_s\,(R_k)$ и, следовательно, $\pi_p\,(R_k) \le \pi$, а с другой стороны, поскольку последовательность $\{R_k\}$ сходится поточечно к оператору T, $\ \pi_p\,(T) \le \sup_k \pi_p\,(R_k)$ (см., например, [23, лемма 3.1]). Таким образом, окончательно получаем, что $\pi = \lim_{s\to r+}\, \pi_s\,(T) \le\ \pi_r\,(T) \le \sup_k \pi_p\,(R_k) \le \pi$. ■

Замечание 9.2.1. Если при каком-то $s > r$ $\pi_s(T) = +\infty$, то тем более $\pi_r(T) = +\infty$, и заключение леммы становится тривиальным. Заключение леммы также тривиально в случае, когда все $\pi_s(T), s > r$, конечны, но $\lim_{s\to r+} \pi_s(T) = +\infty$, так как тогда $\pi_s(T) \le \pi_r(T)$.

Лемма 9.2.3. *Если X, Y — банаховы пространства, $p \in (1, +\infty]$ и T — q-ядерный оператор из X в Y для некоторого $q \in [1, +\infty)$, $q < p$, то $\lim_{q\to p-0} \nu_q(T) = \nu_p(T)$.*

Доказательство. Ниже мы будем рассматривать только те показатели q, которые меньше, чем p, и для которых оператор T является q-ядерным. В этих случаях всегда будет выполняться неравенство $\nu_p(T) \le \nu_q(T)$.

Так как функция $\nu_q(T)$ убывает на любом достаточно малом интервале $(p-\varepsilon, p,)\, \varepsilon > 0$, то существует конечный предел $\lim_{q\to p-} \nu_q(T)$, который не меньше, чем $\nu_p(T)$. Ясно, что случай нулевого оператора T можно отбросить и считать для простоты, что указанный предел равен 1.

Пусть q_1 таково, что при всех $q \in (q_1, p)$ $\nu_q(T) > 1 - \varepsilon$. Сопряженное пространство G_q к пространству $\mathrm{N}_q(X, Y)$ есть некоторое подпространство в пространстве $\Pi_{q'}(Y, X^{**})$; поэтому для всякого $q \in (q_1, p)$ найдется такой абсолютно q'-суммирующий оператор U_q, что $\pi_{q'}(U_q) \le 1$ и $\operatorname{trace} U_q T > 1 - \varepsilon$.

Для каждого $q \in (q_1, p)$ семейство $\{U_s\}_{s\ge q}$ лежит в единичном шаре пространства G_q (и с ростом показателя q уменьшается). Рассмотрим *-слабое замыкание $A_q = \overline{\{U_s\}_{s\ge q}}^{*}$ этого семейства в G_q (или, что то же самое, в пространстве $\Pi_{q'}(Y, X^{**})$). Если фиксировать показатель $q \in (q_1, p)$, то для любых $s', s'' \in (q, p)$, $s' < s''$ $A_{s''} \subset A_{s'} \subset A_q$, причем эти семейства являются *-слабо компактными подмножествами *-слабо компактного единичного шара пространства G_q, лежащего в $\Pi_{q'}(Y, X^{**})$. Поэтому множество $\widetilde{A}_q := \bigcap_{p\le s\le q} A_s$ не пусто, а так как множества A_s убывают с приближением s к p, то $\widetilde{A}_q$ не зависит от q, что позволяет нам обозначить $\widetilde{A}_q$ просто через $\widetilde{A}$. Непустое множество $\widetilde{A}$ лежит в единичных шарах всех пространств G_q при $q \in (q_1, p)$. Поэтому, если рассмотреть какую-либо его предельную точку U, то U будет также и предельной точкой любого семейства $\{U_s\}_{s\ge q}$ $q \in (q_1, p)$ с $\pi_{q'}$-нормой $\pi_{q'}(U) \le 1$. Следовательно, с одной стороны, $\operatorname{trace} UT \ge 1 - \varepsilon$, а с другой стороны, по лемме 9.2.2, $\pi_{p'}(U) \le 1$.

Резюмируя все сказанное, мы получаем:

$$1 - \varepsilon \le \operatorname{trace} UT \le \nu_p(T)\pi_{p'}(U) \le \nu_p(T) \le 1.$$

В силу произвольности положительного числа ε, $\nu_p(T) = 1$ и, таким образом $\nu_p(T) = \lim_{q\to p-} \nu_q(T)$ ■

Замечание 9.2.2. Предположение о q-ядерности оператора T при некотором показателе, меньшем p, существенно. Диагональный оператор $\Delta : l_\infty \to l_p$, $p > 1$, с диагональю из $l_p \setminus \cup_{q<p} l_q$ является p-ядерным, но не будет q-ядерным ни при каком $q < p$ (это совсем просто; см. [27], стр. 290, 18.2.4).

Лемма 9.2.4. *Если $p \in (0, +\infty]$ и $T \in \Pi_{p-\delta}(X, Y)$ для некоторого $\delta > 0$, то*

$$\lim_{q \to p-0} \pi_q(T) = \pi_p(T).$$

Доказательство. Пусть $q_0 < p$ таково, что $T \in \Pi_{q_0}(X, Y)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим конечномерное подпространство E в X, для которого

$$\pi_{q_0}(T) \le \pi_{q_0}(T|_E) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \pi_p(T) \le \pi_p(T|_E) + \varepsilon$$

(это возможно по определению абсолютно r-суммирующих операторов и норм π_r). По лемме 9.2.1 найдется такой показатель $q_1 \in (q_0, p)$, что при всех $q \in (q_1, p)$ $|\pi_p(T|_E) - \pi_q(T|_E)| < \varepsilon$, откуда получаем (при $q \in (q_1, p)$):

$$|\pi_p(T) - \pi_q(T)| \le |\pi_p(T) - \pi_p(T|_E)| +$$
$$+ |\pi_p(T|_E) - \pi_q(T|_E)| + |\pi_q(T|_E) - \pi_q(T)| \le 3\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Замечание 9.2.3. Предположение о принадлежности оператора T классу Π_q при некотором показателе q, меньшем p, существенно. Оператор тождественного вложения $\mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{L}^p[0,1]$ является абсолютно p-суммирующим, но не будет абсолютно q-суммирующим ни при каком $q < p$ (см. [27], стр. 270, 17.3.9).

Лемма 9.2.5. *Пусть $C \ge 1$, $1 \le p < +\infty$, X, Y — банаховы пространства и T — оператор из X в Y, для которого выполняется следующее условие:*

$$\nu_p(T) \le C \sup \{\operatorname{trace} UT : U \in Y^* \otimes X^{**},\ \pi_{p'}(U) \le 1\} \tag{2.4}$$

(оба выражения в (2.4), могут принимать и бесконечные значения). Тогда

$$\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) \ge C^{-1} \nu_p(T).$$

В частности, если $C = 1$, (т.е. если норма $\nu_p(T)$ равна supremum'у из соотношения (2.4)), то $\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) = \nu_p(T)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_p(T) = +\infty$. Если мы зафиксируем произвольную положительную постоянную a, то, в силу соотношения (2.4), найдется такой конечномерный оператор $U : Y \to X^{**}$, что $\operatorname{trace} UT > a$ и $\pi_{p'}(U) \le 1$. Если M — натуральное число из доказательства леммы 2.1 (в котором вместо T рассматривается оператор U), то при $q > p$ имеет место неравенство $\pi_{q'}(U) \le M^{1/p - 1/q} \pi_{p'}(U) \le M^{1/p-1/q}$ (см. доказательство леммы 9.2.1). Поэтому для q, достаточно близких к p (например, таких, что $M^{1/p-1/q} < 2$), $a < \operatorname{trace} UT \le \pi_{q'}(U) \nu_q(T) \le M^{1/p-1/q} < 2\nu_q(T)$, т.е. $\nu_q(T) > a/2$. Поскольку число a бралось произвольным, $\lim_{q \to p+0} \nu_q(T) = +\infty$.

Предположим теперь, что $\nu_p(T) < +\infty$, и пусть $\nu := \lim_{q \to p+0} \nu_q(T)$. Если имеет место место строгое неравенство $\nu < C^{-1} \nu_p(T)$, то, выбирая достаточно малое положительное число ε, мы можем найти такой конечномерный оператор $U : Y \to X^{**}$, что $\pi_{p'}(U) \le 1$ и $\operatorname{trace} UT > C^{-1} \nu_p(T) > \nu + \varepsilon$. В этом случае, $\nu + \varepsilon < \operatorname{trace} UT \le \lim_{q \to p+0} (\nu_q(T) \pi_{q'}(U)) \le \nu \lim_{q \to p+0} \pi_{q'}(U)$. Используя лемму 9.2.1, получаем: $\nu + \varepsilon < \nu$. Это противоречие показывает, что $\nu \ge C^{-1} \nu_p(T)$. $\blacksquare$

Лемма 9.2.6. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $p \in [1, +\infty)$ и $T \in \mathrm{I}_q^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ для всех $q, q > p$. Тогда $\lim_{q\to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$. В частности, если все нормы $i_q^{\mathrm{Gr}}(T)$ при $q > p$ ограничены одной константой $C > 0$, то $T \in \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ и $i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \le C$.*

Доказательство. Заметим, что так как величина $i_q^{\mathrm{Gr}}(T)$ возрастает при $q \searrow p$, то существует предел $\lim_{q\to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$, который не больше, чем $i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$ (последняя величина может быть и бесконечной). Без ограничения общности, мы можем считать, что этот предел равен единице (относительно случая, когда он бесконечен, см. ниже замечание 9.2.4). Мы предположим, что $1 < i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \le +\infty$, и придем к противоречию. Таким образом, сейчас при любом $q > p$

$$\|T\| \le i_q^{\mathrm{Gr}}(T) \le 1 = \lim_{q\to p+0} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) < i_p^{\mathrm{Gr}}(T) \le +\infty.$$

Удобно иметь перед глазами следующие диаграммы (как обычно, мы отождествляем Y с подпространством его второго сопряженного):

$$T \in \mathrm{I}_p(X, Y^{**}) \hookrightarrow \mathrm{I}_q(X, Y^{**}) \hookrightarrow \mathrm{L}(X, Y^{**})$$
$$Y^* \widehat{\widehat{\otimes}}_{p'} X \;\hookleftarrow\; Y^* \widehat{\widehat{\otimes}}_{q'} X \;\hookleftarrow\; Y^* \widehat{\otimes}_1 X \ni z$$

Здесь верхняя строчка описывает ситуацию, в которой мы находимся, причем пространства операторов, появляющиеся в ней, являются сопряженными пространствами к тензорным произведениям, которые составляют нижнюю диаграмму; ядерный тензор z будет выбран ниже.

Так как замкнутый единичный шар B_p пространства $\mathrm{I_p}(X, Y^{**})$ *-слабо замкнут в пространстве $\mathrm{L}(X, Y^{**})$, то, по теореме Хана–Банаха, существует (ядерный) тензорный элемент $z \in Y^* \widehat{\otimes}_1 X$, для которого

$$|\operatorname{trace} Tz| > \sup_{\substack{U \in \mathrm{L}(X, Y^{**}) \\ U \in B_p}} \quad = \pi_{p'}(z).$$

По лемме 9.2.4, $\pi_{q'} \to \pi_{p'}$ при $q' \to p' - 0$ (а это как раз наша ситуация). Пусть $\varepsilon > 0$. Для всех q', не превосходящих p' и достаточно близких к p', мы будем иметь:

$$|\operatorname{trace} Tz| > \pi_{p'}(z) \ge \pi_{q'}(z) - \varepsilon.$$

Так как $i_q^{\mathrm{Gr}}(T) \le 1$, то

$$\pi_{q'}(z) = \sup_{\substack{V \in \mathrm{I}_q(X, Y^{**}) \\ i_q(V) = 1}} |\operatorname{trace} Vz| \ge \Big|\operatorname{trace} \frac{Tz}{i_q^{\mathrm{Gr}}(T)}\Big| > |\operatorname{trace} Tz| > \pi_{p'}(z) \ge \pi_{q'}(z) - \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, мы приходим к противоречию. ■

Замечание 9.2.4. Если $i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = +\infty$ при каком-то $q > p$, то тем более $i_p^{\mathrm{Gr}}(T) = +\infty$, и заключение леммы становится тривиальным. Заключение леммы также тривиально в случае, когда все $i_q^{\mathrm{Gr}}(T), q > p$, конечны, но $\lim_{q\to p+} i_q^{\mathrm{Gr}}(T) = +\infty$, так как тогда $i_q^{\mathrm{Gr}}(T) \le i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$.

Замечание 9.2.5. Несмотря на простоту доказательств приведенных лемм, с объектами, появляющимися в этих доказательствах, надо обращаться чрезвычайно осторожно. Особенно наглядно это проявляется в доказательстве леммы 9.2.5. Откуда (и зачем) появляется константа $C > 0$ в условии (2.4) будет ясно из дальнейшего. А вот почему мы в (2.4) мы ограничились рассмотрением лишь конечномерных операторов U?

Во-первых, для того, чтобы был вполне определен след суперпозиции UT и чтобы (после этого) можно было использовать оценки вида "$\operatorname{trace} UT \le \nu_q(T)\,\pi_{q'}(U)$". Упростить формулировку леммы 9.2.5 можно, наложив некоторые аппроксимационные условия на пространства X, Y, что позволило бы рассматривать и случай неконечномерных U из класса $\Pi_{p'}$. Однако вторая (появляющаяся теперь) проблема — предельный переход в конце доказательства леммы 9.2.5: лемма 9.2.1 уже не работает, а применение леммы 9.2.4 не проходит в силу замечания 9.2.3 к ней.

От всех этих проблем можно избавиться очень просто: надо потребовать, чтобы X или Y удовлетворяли достаточно сильным условиям *ограниченной* (с этим термином, кстати, и связано появление константы $C > 0$) аппроксимации (см. ниже, например, пример 9.3.1 и следствия 9.3.1, 9.3.2).

3. Некоторые следствия. Приведем некоторые условия, накладываемые на банаховы пространства X, Y, при которых имеет место соотношение (2.4).

Пример 9.3.1. Если $C > 0$ и $Y \in C\text{-}\mathrm{BAP}_p$, то (2.4) выполнено с константой C для любого банахова пространства X и любого оператора $T \in \mathrm{N}_p(X, Y)$.

В частности, с помощью леммы 9.2.5 получаются такие следствия:

Следствие 9.3.1. *Если $p \ge 1$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p$, то для всякого банахова пространства X семейство норм ν_p на $\mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно в точке p. Таким образом,*

(i) *семейство норм ν_p непрерывно в точке 2;*

(ii) *если $Y \in \mathrm{MAP}$, то для всякого банахова пространства X семейство норм ν_p на $\mathrm{L}(X, Y)$ непрерывно в любой точке p, $p \ge 1$.*

Замечание 9.3.1. Еще раз напомним, что в определении непрерывности семейства норм, в частности, семейства q-ядерных норм в точке p, требуется, чтобы рассматриваемые операторы T имели в данной точке конечные нормы, т.е. в нашем случае: $\nu_p(T) < +\infty$. Мы увидим ниже (теорема 9.4.1), что в противном случае следствие 9.3.1, например, неверно (это в нашей терминологии означает *не строгую* непрерывность справа семейства $\{\nu_q\}$). Некоторые достаточные условия для строгой непрерывности этого семейства норм дает, вместе со следствием 9.3.1, следствие 9.3.5 (см. ниже).

Следствие 9.3.2. *Пусть $C \geq 1, p \geq 1,$ и Y — банахово пространство. Если существуют такие банахово пространство X и оператор $T \in \mathrm{N}_p(X,Y)$, что*

$$\lim_{p+0} \nu_q(T) < C^{-1}\,\nu_p(T),$$

то пространство Y не обладает свойством C- BAP_p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в противном случае выполняется соотношение (2.4) (с постоянной C), в котором обе части неравенства конечны; следовательно, применение леммы 9.2.5 приводит к противоречию. ■

Следствие 9.3.3. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, но $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$, то $\nu_q(T) \to \nu_p(T) = +\infty$ при $q \to p+0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, так как пространство $\mathrm{I}_p(X, Y^{**})$ есть сопряженное к пространству $Y^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{p'}X$ при естественной двойственности, то норма в его подпространстве $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ не больше, чем соответствующий supremum в соотношении (2.4). Поэтому, если $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$, то и последний supremum бесконечен (что, кстати автоматически влечет соотношение $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$, т.е. $\nu_p(T) = +\infty$.) Следовательно, применима лемма 9.2.5. ■

Нам представляется интересным переформулировать последнее утверждение в связи со следующим известным (решенным отрицательно в [76], [41]) вопросом: верно ли, что из p-ядерности второго сопряженного к некоторому оператору вытекает p-ядерность самого этого оператора? Приводимая переформулировка следствия 9.3.3 дает некоторые достаточные (и, тривиально, необходимые) условия для положительного ответа на последний вопрос:

Следствие 9.3.4. *Если $T \in \mathrm{L}(X,Y)$, $T \notin \mathrm{N}_p(X,Y)$ и семейство $\{\nu_q(T)\}_{q>p}$ ограничено, то $T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$; в частности, если $\{\nu_q(T)\}_{q>p}$ ограничено, то из p-ядерности оператора T^{**} вытекает p-ядерность оператора T.* ■

Замечание 9.3.2. Еще раз подчеркнем тонкость рассматриваемых аппроксимационных условий и связанных с ними рассуждений и утверждений на примере "предельного перехода в следствии 9.3.2. В этом следствии чем хуже "p-ядерность" оператора T (точнее, чем больше норма $\nu_p(T)$ при равномерной ограниченности норм $\nu_q(T)$, $q > p$), тем более плохим с точки зрения условий ограниченной аппроксимации оказывается пространство Y: в такой ситуации константе C позволительно расти с ростом $\nu_p(T)$, и "в пределе" естественно ожидать появления такого "следствия" (заранее, чтобы не допустить недоразумений, отметим, что *формулируемое "следствие" неверно!*).

Если существует не p-ядерный оператор $T : X \to Y$, для которого $\sup_{q>p}\, \nu_q(T) < +\infty$, то пространство Y не обладает свойством BAP_p.

Тонкость здесь как раз и состоит в том, что подобный "предельный переход" не допустим, и имеется пример пространства Y с базисом (даже еще более хорошего, — см. ниже теорему 9.4.1), для которого первая часть утверждения этого "следствия" в действительности имеет место (это так по-крайней мере для всех $p \in [1, 2)$); в п. 4 мы рассмотрим только простейший случай $p = 1$). Любопытно также отметить в связи со сказанным, что следствие 9.3.3 показывает, что если оператор T "совсем плохой" ($T \notin \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$), то его q-ядерные нормы ведут себя как надо, а именно, не ограничены при $q \to p$.

Следствие 9.3.5. *Пусть X и Y — такие банаховы пространства, что X^* обладает свойством Радона–Никодима и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}$. Пусть, далее, $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $1 \le p < +\infty$. Если $C := \sup_{p<q} \nu_q(T) < +\infty$, то $\nu_p \le C$.*

Доказательство. Достаточно применить следствие 6.2.1 и лемму 9.2.6. ■

4. (Контр)пример. Напомним еще раз, что каждое банахово пространство мы рассматриваем также как подпространство его второго сопряженного (не вводя никаких обозначений для оператора канонического вложения). Нам представляется удобным привести здесь формулировку нашей части A) теоремы 8.2.1 в виде леммы:

Лемма 9.4.1. *Если $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$, для некоторого $s \in [2/3, 1]$, то $T \in \mathrm{N}_q(X, Y)$, где показатель $q, 1 \le q \le 2$, определяется из соотношений $s = \dfrac{2q}{q+2}$, или $q = \dfrac{2s}{2-s}$.* ■

Теорема 9.4.1. *Существуют такие банахово пространство Z и оператор $S : Z^{**} \to Z$, что*

(1) *пространство Z^{**} имеет ограниченно полный базис;*
(2) *все сопряженные к Z пространства $Z^*, Z^{**}, Z^{***}, \ldots$ сепарабельны* (и, следовательно, обладают свойством RN)*;*
(3) *Z^{***} не обладает свойством аппроксимации;*
(4) *$S \in N_s(Z^{**}, Z^{**})$ для любого $s > 2/3$;*
(5) *$C := \sup_{q>1} \nu_q(S) \le 1$, но*
(6) *$S \notin N(Z^{**}, Z)$.*

Доказательство. Пусть X — сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства аппроксимации, для которого существует ненулевой тензорный элемент $t \in X^* \widehat{\otimes}_1 X$, допускающий представление вида

$$t = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x'_j \otimes x_j, \tag{4.1}$$

где $\|x_j\|, \|x'_j\| \le 1$ и $x_j, x'_j \to 0$ при $j \to \infty$, а положительная числовая последовательность $\{\lambda_j\}$ такова, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s$ сходится при любом $s > 2/3$; причем оператор $\widetilde{t}$, порождаемый тензором t по соответствующей формуле, аналогичной (4.1), равен нулю (см. [65]). Ввиду сепарабельности и рефлексивности X, согласно [101] (см. п. 0.4.9), существует банахово пространство Z и гомоморфизм Φ пространства Z^{**} на X такие, что Z удовлетворяет условиям 1)–3) и $\operatorname{Ker} \Phi = Z$.

Так как Φ — гомоморфизм, то последовательность $\{x_j\} \subset X$ можно поднять до элементов пространства Z^{**} без существенного увеличения норм, точнее, для некоторой абсолютной постоянной $C > 1$ найдутся элементы $z_j'' \in Z^{**}, j = 1, 2, \ldots,$ для которых $\Phi\, z_j'' = x_j$ и $\|z_j''\| \le C$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Так как $Z^{**} \in$ MAP (это пространство обладает свойством Радона–Никодима и удовлетворяет условию аппроксимации, — см. теорему I.5.1.1), то, по предложению 6.2.1, $X^* \widehat{\otimes}_q Z^{**} = \mathrm{N}_q(X, X^{**})$ для любого $q \ge 1$. Поэтому формула

$$\alpha := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j' \otimes z_j''$$

однозначно определяет как оператор α, который является s-ядерным при любом $s > 2/3$, так и соответствующий тензорный элемент из $X^* \widehat{\otimes}_q Z^{**}$, который мы обозначаем тем же символом. Отметим, что $\mathrm{Im}\ \alpha \subset \mathrm{Ker}\ \Phi$, так как при всех $x \in X$

$$\Phi(\alpha x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x_j', x > \Phi z_j'' = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x_j', x > x_j = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Im}\ \alpha \subset Z$, и мы можем вполне корректно определить оператор $\beta : X \to Z$, являющийся приведением оператора α. Так как, по построению, оператор α является s-ядерным для любого $s > 2/3$, то, по лемме 9.4.1, $\beta \in \mathrm{N}_q(X, Z)$ для каждого $q > 1$.

Положим $S = \beta\Phi$. Тогда $S \in \mathrm{N}_q(Z^{**}, Z)$ для каждого $q > 1$ и $S \in \mathrm{N}_s(Z^{**}, Z^{**})$ для любого $s > 2/3$. Осталось установить справедливость утверждений (5) и (6).

Без ограничения общности, мы можем считать, что $\nu_1(S : Z^{**} \to Z^{**}) = 1$, откуда $\nu_q(S : Z^{**} \to Z^{**}) \le 1$ при всех $q \ge 1$. Зафиксируем $q > 1$ и рассмотрим включения

$$S \in \mathrm{N}_q(Z^{**}, Z) \subset \mathrm{N}_q(Z^{**}, Z^{**}) \subset \mathrm{I}_q(Z^{**}, Z^{**}). \tag{4.2}$$

Поскольку $Z^{**} \in$ MAP и Z^{***} обладает свойством Радона–Никодима, то оба вложения из (4.2) изометрические и, более того, последнее включение на самом деле превращается в равенство. Принимая это во внимание, получаем свойство (5).

Наконец, почему оператор S не является ядерным, как оператор из Z^{**} в Z? В этом заключительном в данной заметке доказательстве нам придется использовать обозначение для канонического вложения банахова пространства W в его второе сопряженное, — $\pi_W : W \hookrightarrow W^{**}$.

Если $S \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, то (здесь и ниже снова используем свойство метрической аппроксимации в Z^{**})

$$\mathrm{trace}\ \pi_Z S = \mathrm{trace}\ \alpha\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \Phi^* x_j', z_j'' >= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x_j', \Phi z_j'' >= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x_j', x_j >= 1.$$

Мы воспользовались тем фактом, что $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Phi^* x'_j \otimes z''_j$ — ядерное представление оператора $\alpha\Phi : Z^{**} \to X \to Z^{**}$. С другой стороны, trace $\pi_Z S =$ trace $\pi_Z^* S^*$:

$$\begin{array}{l} Z \xrightarrow{\pi_Z} Z^{**} \xrightarrow{S} Z \xrightarrow{\pi_Z} Z^{**} \\ Z^* \xleftarrow[\pi_Z^*]{} Z^{***} \xleftarrow[S^*]{} Z^* \xleftarrow[\pi_Z^*]{} Z^{***}. \end{array}$$

При этом, trace $\pi_Z^* S^* = 0$, так как

$$\pi_Z^* S^* = \pi_Z^* S^* \pi_Z^* \pi_{Z^*} = (\pi_Z S \pi_Z)^* \pi_{Z^*} = (\alpha\Phi\pi_Z)^* \pi_{Z^*} = (\alpha \cdot 0)^* \pi_{Z^*}$$

(напомним, что $\mathrm{Im}\ \pi_Z = \mathrm{Ker}\ \Phi$). ■

§10. Свойства $\mathrm{AP}_{s,\infty}, s < 1,$ и нерегулярность идеалов N_p : случай замкнутости N_p в $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$

В этом параграфе мы сформулируем и докажем довольно удивительные факты, удивительные даже для специалистов в области геометрической теории операторов в банаховых пространствах (могу утверждать это с полной определенностью, поскольку таковыми они оказались, например, для одного моего знакомого — прекрасного математика и специалиста во многих областях анализа). Перед тем как приступить к рассмотрению вопросов, которыми мы займемся здесь отметим, что при доказательстве теоремы 10.5 ниже получается, что соответствующие операторные пространства N_p являются собственными *замкнутыми* подпространствами в $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ (откуда автоматически вытекает, в частности, снова нерегулярность рассматриваемых операторных идеалов). Более подробно [11-Re15]: оказывается, что в рассматриваемой ситуации естественное отображение $\mathrm{N}_p \to \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ представляет собой изометрическое вложение, но *не на все пространство* $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$; в частности, множество конечномерных отображений, входящих в N_p, *не плотно* в соответствующем пространстве $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$.

В этом параграфе нас, в основном, снова будут интересовать следующие два вопроса (с несколько другой точки зрения, чем было выше):

1) При каких условиях на банаховы пространства X, Y каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{N_p}(X, Y)$ взаимно однозначно?
2) При каких условиях на банаховы пространства X, Y и на положительные числа s, r $\mathrm{N_s^{reg}}(X, Y) \subset \mathrm{N_r}(X, Y)$?

Оба эти вопроса весьма подробно изучались выше и, например, в работах [43], [134]. Вопрос (2) рассматривался также в [76] при $r = s = 1$ и в [130] при $r = s > 1$. При некоторых других значениях параметров p, r, s оба эти вопроса исследовались в работе [80]. Так, одна из известных теорем А.Гротендика о 2/3 утверждает, что всегда $\mathrm{N}_{2/3}^{\mathrm{reg}} \subset \mathrm{N}_1$ (несколько ниже, доказательство этого утверждения можно будет увидеть в замечании 10.2)

В качестве примеров напомним еще раз следующие факты:

a) если X, Y – произвольные банаховы пространства, то каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{2/3} Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ всегда взаимно однозначно (см. [80], [44], а также параграф 1 и следствие $10.1'$ ниже);
b) если каждое конечномерное подпространство E пространства Y $C(\dim E)^\alpha$-дополняемо в Y (где $0 < \alpha \le 1/2$), то для s, $1/s = 1+\alpha$, и для каждого банахова пространства X каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_s Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (см. [43] и лемму 3.2.1);
c) если $0 < s \le 1$ и $1/s = 1/2 + 1/r$, то $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{r}}(X,Y)$ для любых банаховых пространств X, Y (см. [80]);
d) если $p \ge 1$ и $X^* \in \mathrm{AP}$, то $\mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{p}}(X,Y)$ для любого банахова пространства Y (см. [80] относительно случая $p = 1$; что касается случая $p > 1$, то это — часть предложения 6.2.3.

Замечание 10.1. Аналог утверждения d) в предположении, что $Y^{**} \in \mathrm{AP}$ (вместо X^*), был сформулирован в [80] для $p = 1$ и в [23] для $p > 1$. Ниже мы увидим, что эти последние факты неверны (впрочем, относительно случая $p = 1$ см. работу [115]; контрпример в этой статье принадлежит автору).

В [43], как и выше в параграфах 7-8, среди прочего, было показано, что утверждения (a)–(c) не могут быть улучшены "в шкале пространств l_p." Ниже мы уточним утверждения (a)–(c) для "шкалы пространств Лоренца"[24], и покажем, что полученные новые утверждения неулучшаемы и здесь.

Мы увидим также (и это, пожалуй, основное в параграфе), что все "отрицательные" результаты работ [130], [43], соответствующие утверждениям (a)–(d), имеют место в намного более сильных вариантах. Первый пример подобного рода "усиленного" контрпримера можно найти в статье [115], где установлено, что существует банахово пространство Z со специальными свойствами: (i) Z^{**} сепарабельно и имеет базис (а Z^{***} без свойства аппроксимации); (ii) $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$. Это — пример, показывающий: что вторая часть утверждения А.Гротендика [80] (гл.1, с. 86, предложение 15) неверна. Ниже мы распространим указанный контрпример на случай показателей ядерности p, больших единицы и меньших двойки; см. теорему 10.5 и ее следствие.

Ниже мы часто будем использовать два факта утверждения Линденштраусса, установленные в работе [101], — первый из них есть в точности теорема 1 в [101], а второй — следствие 1 там же (существование базиса в пространстве Z^{**} в лемме 10.2 вытекает из определения пространства Z в доказательстве этого следствия в [101]). Это — леммы 4.9.1 и 4.9.2 из гл. 0. Переформулируем их так, чтобы их было удобнее использовать нам в обозначениях этого параграфа.

Лемма 10.1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства X существуют*

[24] Но не в самой полной общности; по существу, нас дополнительно будет интересовать лишь пространство $l_{s,\infty}$ при $s < 1$; но и при рассмотрении этого случая возникают не совсем очевидные обобщения; см. например, теорему 10.4 ниже.

сепарабельное банахово пространство E и линейный гомоморфизм $\psi : E^* \to X$ такие, что E^* имеет базис и $E^{**} = \psi^*(X^*) \oplus \pi_E(E)$.

Лемма 10.2. *Для всякого сепарабельного банахова пространства Y существуют сепарабельное банахово пространство Z и линейный гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to Y$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно), φ^*Y^* дополняемо в Z^{***} и ядро гомоморфизма φ есть $\pi_Z(Z)$.*

Следствие 10.1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства Y существуют сепарабельное банахово пространство Z такое, что Z^{**} имеет базис, $Z^{**}/\pi_Z(Z)$ изоморфно пространству Y, $\pi_Z(Z)^\perp$ дополняемо в Z^{***} и выполняются следующие условия:*

(a) для любого $p \in (0,1]$ и всякого банахова пространства E тензорное произведение $E^*\widehat{\otimes}_pY$ изоморфно пространству $E^*\widehat{\otimes}_p(Z^{**}/\pi_Z(Z))$, которое, в свою очередь, изоморфно фактор-пространству

$$N_p(E, Z^{**}) \,/\, \left[\mathrm{N_p^{reg}}\ (E, \pi_Z(Z)) \bigcap (N_1(E, \pi_Z(Z)))\right];$$

(b) для любого $p \in (0,1]$ и всякого банахова пространства E пространство $N_p(E,Y)$ изоморфно пространству $N_p(E, Z^{**}/\pi_Z(Z))$, которое, в свою очередь, изоморфно фактор-пространству $N_p(E, Z^{**}) \,/\, \mathrm{N_p^{reg}}\ (E, \pi_Z(Z))$.

При этом все изоморфизмы в утверждениях (a) и (b) "канонические", то есть порождаются заданным гомоморфизмом $Z^{**} \to Z^{**}/\pi_z(Z) \to Y$ (подробности — в доказательстве).

Доказательство. Пусть Z — из леммы 10.2. Обозначим для простоты $Z^{**}/\pi_Z(Z)$ через F.

Факторотображение $\psi : Z^{**} \to Z^{**}/\pi_Z(Z) = F$ индуцирует естественным образом отображение $\Psi : N_p(E, Z^{**}) \to E^*\widehat{\otimes}_pF$, $\Psi(T) := \psi \circ T$. Так как $p \le 1$, то понятно, что это отображение Ψ есть отображение "на". Посмотрим, что из себя представляет ядро этого отображения.

Пусть $U \in \mathrm{Ker}\ \Psi$. Это означает, что для любого $A \in \mathrm{L}(F, E^{**})$ след trace $A \circ \psi \circ U$ равен нулю; или, что для любого $B \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$ такого, что $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, след trace $B \circ U$ равен нулю. Отсюда вытекает, что $U(E) \subset \pi_Z(Z)$ (в противном случае, найдется такой одномерный оператор $R \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, что $R|\pi_Z(Z) = 0$ и trace $R \circ U \ne 0$).

Итак, $U \in \mathrm{N_p^{reg}}(E, \pi_Z(Z))$. Нам надо уточнить это включение: докажем, что, на самом деле, $U \in N_1(E, \pi_Z(Z))$ Предположим, что $U \notin N_1(E, \pi_Z(Z))$. Тогда найдется такой оператор $B \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, что trace $B \circ U = 1$, но trace $B \circ T = 0$ для любого $T \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. Так как $\pi_Z(Z)$ обладает свойством аппроксимации Гротендика, то из последнего вытекает, что $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, что противоречит выбору и свойствам U. Итак, $U \in N_1(E, \pi_Z(Z))$. С другой стороны, очевидно, что для любых $V \in N_1(E, \pi_Z(Z))$ и $B \in \mathrm{L}(Z^{**}, E^{**})$, где $B|_{\pi_Z(Z)} = 0$, имеем: trace $B \circ V = 0$. Поэтому $\mathrm{Ker}\ \Psi = \mathrm{N_p^{reg}}\ (E, \pi_Z(Z)) \cap (N_1(E, \pi_Z(Z)))$. Отсюда вытекает утверждение (a).

Рассмотрим теперь факторотображение

$$\Psi_0 : \qquad N_p(E, Z^{**}) \xrightarrow{\Psi} E^*\widehat{\otimes}_p F \xrightarrow{j} N_p(E, F),$$

где j — каноническое факторотображение, Его ядро Ker Ψ_0 состоит из всех тез операторов $U \in N_p(E, Z **)$, которые превращаются в тождественный нуль после действия факторизации $\psi : Z^{**} \to F$, то есть из тех U, для которых $U(E) \subset$ Ker $\psi = \pi_Z(Z)$. Это и означает, что Ker $\Psi_0 = \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}(E, \pi_Z(Z))$. ■

Отметим любопытный "побочный" эффект наших рассуждений (это, конечно, "выстрел из пушки по воробьям"):

Следствие 10.1′ (А.Гротендик [80]). *Если $p \in (0, 2/3]$, то $G^*\widehat{\otimes}_p Y = N_p(G, Y)$ для любых банаховых пространств G и Y (то есть факторизации при каноническом фактор-отображении $G^*\widehat{\otimes}_p Y \to N_p(G, Y)$ не происходит).*

Доказательство. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением лишь сепарабельных пространств[25]. Если $p \leq 2/3$, то всякий оператор $U \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}(G, \pi_z(Z))$, где Z — из леммы 10.2 (или, что то же самое, из следствия 10.1), факторизуется через ядерный диагональный оператор (см. ниже замечание 10.2) и, следовательно, сам является ядерным. Поэтому $\mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (G, \pi_Z(Z)) \cap (N_1(G, \pi_Z(Z))) = \mathrm{N}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{reg}}\ (G, \pi_Z(Z))$ и применимо следствие 10.1. ■

Напомним, что банахово пространство X обладает свойством аппроксимации порядка p, $p \in (0, +\infty]$ (коротко, $X \in \mathrm{AP_p}$), если для каждого банахова пространства Z каноническое отображение $Z^*\widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{L}\,(Z, X)$ является взаимно однозначным. Удобно ввести еще дополнительные обозначение и определение, связанные с аппроксимационными условиями. Именно, для пары пространств X, Y и числа $s \in (0, 1)$ обозначим через $Y^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X$ линейное пространство, состоящее из тензоров $z \in Y^*\widehat{\otimes}_1 X$ (проективное тензорное произведение), допускающих представление вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, y'_k \otimes x_k \quad \text{где} \quad \lambda_k \searrow,\ \lambda_k^s = o(1/k),\ \|y'_k\|\, \|x_k\| = 1.$$

Определение 10.1. Банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP_{s,\infty}}$, где $s \in (0, 1]$, если для любого пространства Z каноническое отображение $Z^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}\,(Z, X)$ взаимно однозначно (иными словами, $Z^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X = \mathrm{N_{s,\infty}}\,(Z, X)$; должно быть вполне понятно, что из себя представляет операторное пространство справа).

Отметим, что пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ тогда и только тогда, когда взаимно однозначным является каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}\,(X, X)$; в этом случае, $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X = \mathrm{N_{s,\infty}}\,(X, X)$.

[25] Для всякого сепарабельного $H \subset G^*$ существует такое сепарабельное $G_0 \subset G$, что для тождественного вложения $j : G_0 \to G$ оператор $j^*\big|_H \to G_0^*$ есть изометрическое вложение.

Теорема 10.1. 1) *Пусть $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, и X — банахово пространство. Если каждое конечномерное подпространство E пространства X $C\,(\dim E^\alpha)$-дополняемо в X, то $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $1/s = 1 + \alpha$. В частности,* (надо взять $\alpha = 1/2$), *всякое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$, а если X является подпространством или факторпространством некоторого пространства $\mathrm{L^p}(\mu)$, где $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$, то $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$ $(1/s = 1 + |1/p - 1/2|)$.*

2) *Для каждого $s \in [2/3, 1)$ существует такое сепарабельное рефлексивное пространство Y, что $Y \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, но $Y \notin \mathrm{AP}_{\mathrm{r}}$ каково бы ни было $r \in (s, 1]$.*

Доказательство части 2) теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующего факта из [43] (а именно, утверждений 1) и 2) нашей теоремы 3.2.4); доказательство этой теоремы 3.2.4 дословно переносится на наш случай, только вместо леммы 3.2.1 надо использовать такое усиление части 1 нашей теоремы 10.1:

Предложение 10.1. *Пусть $\alpha \in (0, 1/2]$, $C > 0$, и X — банахово пространство. Предположим: что для каждого конечномерного подпространства E пространства X найдется такое конечномерное подпространство E, $E \subset F \subset X$, что F — $C\,(\dim E)^\alpha$-дополняемо в X. Тогда $X \in \mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $1/s = 1 + \alpha$.*

Здесь снова достаточно сослаться лемму 3.2.1. Предложение 10.1, по существу, установлено при доказательстве леммы 3.2.1: если внимательно просмотреть доказательство этой леммы, то нетрудно увидеть, что основное, что использовалось в этом доказательстве, — это принадлежность соответствующего тензора z проективному тензорному произведению (у нас в этой работе все тензоры таковы) и оценка $\lambda_j^s = o(j^{-1})$ для коэффициентов z из доказательства упомянутой леммы. Поэтому мы не станем повторять все аргументы, использованные при доказательстве этой леммы.

Теорема 10.2. 1) *Пусть $s \in (0, 1)$. Если $X^* \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$ или $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{s,\infty}$, то $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}(X, Y) \subset \mathrm{N}_1(X, Y)$. В частности, для любых банаховых пространств X и Y имеем: $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{2/3,\infty}(X, Y) \subset \mathrm{N}_1(X, Y)$.*

2) *Существует банахово пространство Z, обладающее следующими свойствами:*
(i) Z^{**} имеет базис (следовательно, $Z^{**} \in \mathrm{AP}$);
(ii) для каждого $s \in (2/3, 1]$ $\quad \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$.
Таким образом, аппроксимационные условия, наложенные на X и Y в 1) существенны.

Доказательство. 1) Предположим, что существует такой оператор $T \in L(X, Y)$, что $T \notin N_1(X, Y)$, но $\pi_Y T \in N_{s,\infty}(X, Y^{**})$. Так как либо X^*, либо Y^{**} обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, то $N_{s,\infty}(X, Y^{**}) = X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$. Следовательно, оператор $\pi_Y T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**} \subset X^* \widehat{\otimes}_1 Y^{**}$; при этом по выбору T, $t \notin X^* \widehat{\otimes}_1 Y$ (как обычно, $X^* \widehat{\otimes}_1 Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^* \widehat{\otimes}_1 Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in L(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^* \widehat{\otimes}_1 Y^{**}\right)^*$, что $\mathrm{trace}\, U \circ t = \mathrm{trace}\, (t^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и trace $U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^* \widehat{\otimes}_1 Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U\pi_Y = 0$ и $\pi_Y^* U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$< U\pi_Y\, y, x' >=< y, \pi_Y^*\, U^*|_{X^*} x' >= \text{trace } U \circ (x' \otimes \pi_Y(y)) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор $U\pi_Y T$, который тождественно равен нулю.

Если $X^* \in \mathrm{AP}_{s,,\infty}$, то $X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**} = N_{s,\infty}(X, Y^{**})$ и, значит, этот тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству trace $U \circ t = 1$.

Пусть теперь $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{s,,\infty}$. В этом случае оператор

$$V := (U^*|_{X^*}) \circ T^* \circ \pi_Y^* :\ Y^{***} \to Y^* \to X^* \to Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент $t_0 \in Y^{****} \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum x'_n \otimes y''_n$ для t как элемента пространства $X^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$. Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$\begin{aligned} Vy''' = U_*\ (T^* \pi_Y^*\, y''') = U_*\ ((T^* \pi_Y^* \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''') = U_*\ ((\pi_Y T)^*\, \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''') = \\ = U_*\ \Big((\sum y''_n \otimes x'_n)\, \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''' \Big) = U_*\ \Big(\sum < y''_n, \pi_Y^*\, y''' >\ x'_n \Big) = \\ = \sum < \pi_Y^{**} y''_n, y''' >\ U_* x'_n. \end{aligned}$$

Итак, оператор V (или элемент t_0) имеет в пространстве $Y^{****} \widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{***}$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y''_n) \otimes U_*(x'_n).$$

Следовательно,

$$\text{trace } t_0 = \text{trace } V = \sum < \pi_Y^{**}(y''_n), U_*(x'_n) >= \sum < y''_n, \pi_Y^*\, U_* x'_n >= \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$Vy''' = U_*\, (\pi_Y T)^*\, y''' = U_* \circ t^*(y''') = U_*\ \Big(\sum < y''_n, y''' >\ x'_n \Big) = \sum < y''_n, y''' >\ U_* x'_n,$$

откуда $V = \sum y''_n \otimes U_*(x'_n)$. Поэтому

$$\text{trace } t_0 = \text{trace } V = \sum < y''_n, U_* x'_n >= \sum < U y''_n, x'_n >= \text{trace } U \circ t = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство первой части пункта 1). Случай $s = 3/2$ сводится к применению только что доказанного утверждения и первой части теоремы 10.1.

2) Хорошо известно, что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство X и ненулевой тензорный элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_1 X$ такие, что $z \in X^* \widehat{\otimes}_s X$

для всех $s > 2/3$, но ассоциированный оператор $\widetilde{z}$ есть тождественный нуль (см., например, [65], [27]). Таким образом, для любого $s \in (0,1]$ $X^*\widehat{\otimes}_s X \neq N_s(X,X)$. По следствию 10.1 существуют сепарабельное Z и гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to X$ такие, что Z^{**} имеет базис, $\operatorname{Ker}\varphi = \pi_Z(Z)$, $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***} и $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}(X,Z) \not\subset N_1(X,Z)$ при всех $s > 2/3$. Так как $\varphi^*(X^*)$ дополняемо в Z^{***}, то, очевидно, $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}(Z^{**},Z) \not\subset Z^{***}\widehat{\otimes}_1 Z = N_1(Z^{**},Z)$ при любом $s > 2/3$. ■

Замечание 10.2. Совсем нетрудно показать, что $\mathrm{N}_{2/3}^{\mathrm{reg}} \subset \mathrm{N}_1$. Действительно, если оператор T действует из пространства E в пространство Z и является 2/3-ядерным как оператор из E в Z^{**}, то по самому определению 2/3-ядерного оператора, "расщепляя" коэффициенты его разложения в тензорный ряд на пары соответствующим образом подобранных множителей, мы можем разложить сам оператор T в произведение:

$$T: \; E \xrightarrow{A} c_0 \xrightarrow{\Delta_1} l_1 \xrightarrow{j} l_2 \xrightarrow{\Delta_2} l_1 \xrightarrow{B} Z^{**}$$

где Δ_j — диагональные операторы (таким образом, Δ_1 — ядерный), а остальные операторы непрерывны. Спроектировав ортогонально в l_2 на замыкание образа оператора $j\,\Delta_1\,A$, и рассмотрев $B\Delta_2$ только на этой проекции, мы получим в совокупности все тот же оператор $T : E \to Z$; этот простой трюк показывает, что T — ядерный из E в Z. В данный момент у меня нет никакой идеи, как примерно подобным способом непосредственно можно получить соответствующий результат из последней теоремы (то есть, для $\mathrm{N}_{2/3,\infty}^{\mathrm{reg}}$).

Следствие 10.2. *Пусть X — такое рефлексивное банахово пространство, что каждое n-мерное подпространство в X Cn^{α}-дополняемо в X (здесь $C > 0, \alpha \in (0, 1/2)$ — некоторые постоянные, $n = 1, 2, \dots$). Тогда для любого банахова пространства Y*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y).$$

где $1/s = 1 + \alpha$.

В частности, если $X \subset L^p(\mu), 1 < p < +\infty, p \neq 2$, и $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, то

$$\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y) \qquad \text{\textit{для каждого} } Y.$$

Для доказательства достаточно применить теорему 10.1,1) и теорему 10.2,1) и использовать тот факт: что любое n-мерное подпространство пространства $L^p(\mu)$ $Cn^{|1/2-1/p|}$-дополняемо в $L^p(\mu)$.

Замечание 10.3. В теореме 10.2,1) и следствии 10.2 мы получили, на самом деле, следующее формально более сильное включение $\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}\,(X,Y) \subset X^*\widehat{\otimes}_1 Y$. Последнее включение надо понимать таким образом: каждый оператор $T \in \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}\,(X,Y)$ (однозначно) порождается тензорным элементом из пространства $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**} \subset$

$X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$, который (тензорный элемент), в свою очередь, принадлежит пространству $X^*\widehat{\otimes}_1 Y$, подпространству пространства $X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$; так что, если

$$\begin{aligned}
&\sum x'_n \otimes y''_n && \text{– представление оператора } T \text{ в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**},\\
&\sum \tilde{x}'_n \otimes \tilde{y}''_n && \text{– в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**} \ \text{ и}\\
&\sum \tilde{\tilde{x}}'_n \otimes \tilde{\tilde{y}} && \text{– в пространстве } X^*\widehat{\otimes}_1 Y,
\end{aligned}$$

то для всякого $U \in \mathrm{L}\,(Y^{**}, X^{**})$

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle x'_n, U y''_n \rangle = \sum \langle \tilde{x}'_n, U \tilde{y}''_n \rangle = \sum \langle \tilde{\tilde{x}}'_n, U \tilde{\tilde{y}}_n \rangle$$

(заметим, что след вполне определен, поскольку в теореме 10.2,1) и в следствии 10.2 естественное отображение $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X^*, Y^{**}) \to \mathrm{L}\,(X, Y^{**})$ взаимно однозначно).

Тем же методом, что и при доказательстве теоремы 10.2,1), устанавливается

Теорема 10.2$'$. *Пусть $s \in (0,1]$. Если $X^* \in \mathrm{AP_s}$, или $Y^{***} \in \mathrm{AP_s}$, то $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s}}\,(X,Y) \subset \mathrm{N}_1\,(X,Y)$.*

Внимательно просмотрев доказательство пункта 2) теоремы 10.2 и следствия 10.1, нетрудно увидеть, что имеет место следующий более сильный факт:

Предложение 10.2. *Существуют сепарабельное банахово пространство Z и оператор $A \in \mathrm{L}\,(Z^{**}, Z)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $\pi_Z A \in \mathrm{N_s}\,(Z^{**}, Z^{**})$ для каждого $s > 2/3$, но $A \notin \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$.*

Теорема 10.3. *Для всякого $s \in [2/3, 1)$ существует такое сепарабельное банахово пространство Z, что*

(i) *Z^{**} имеет базис;*
(ii) *все пространства $Z, Z^*, Z^{**}, \ldots$ обладают свойством $\mathrm{AP_s}$;*
(iii) *Z^{***} не обладает свойством $\mathrm{AP_r}$, каково бы ни было $r \in (s, 1]$;*
(iv) *для всякого банахова пространства X*

$$\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(X, Z) \subset \mathrm{N}_1\,(X, Z) \quad \text{и} \quad \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{s},\infty}\,(Z^{**}, X) \subset \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, X);$$

(v) *для каждого $r \in (s, 1]$ $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r}}\,(Z^{**}, Z) \not\subset \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$. Более того, существует такой оператор $U : Z^{**} \to Z$, что $U \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\mathrm{r}}\,(Z^{**}, Z)$ для всех $r \in (s, 1]$, но $U \notin \mathrm{N}_1\,(Z^{**}, Z)$.*

Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству пункта 2) теоремы 10.2 с использованием последовательно теоремы 10.2,2), следствия 10.2 и теоремы 10.2.1).

Рассмотрим теперь вопрос о том, что можно получить в утверждениях наших теорем, если полностью отказаться от каких-либо аппроксимационных предположений относительно рассматриваемых пространств (как, например, в случае $s = 2/3$ из теоремы 10.2,1) — хотя там неявно подобные условия присутствуют, ведь каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$). Сначала посмотрим, как будет выглядеть в этой ситуации часть 1) теоремы 10.2.

Предварительно сформулируем одно вспомогательное предложение, которое, по существу, установлено в теореме 8.1.1,A). Нам удобно будет обозначать каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y \to X^*\widehat{\otimes}_p Y$ через φ_{sp}^{∞}, а каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ — через j_p.

Предложение 10.3. *Если $s \le 1$ и $p \ge 2s/(2-s)$, то отображение*

$$j_p : \varphi_{sp}^{\infty}\left(X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y\right) \to \mathrm{L}(X,Y)$$

является взаимно однозначным.

Доказательство пункта A) теоремы 8.1.1 почти дословно переносится на наш случай, рассматриваемый в предложении 10.3).

Приведем теперь усиление теоремы 8.2.1,A), где было показано, что в условиях предложения 10.3 имеет место включение $\mathrm{N}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{p}}(X,Y)$. Доказательство, однако, не будет столь элементарным, как выше (этим объясняется включение элементарного доказательства в соответствующем параграфе части A) теоремы 8.2.1).

Теорема 10.4. *Если $2/3 \le s < 1$ и $p = 2s/(2-s)$, то $\mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}(X,Y) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{p}}(X,Y)$, каковы бы ни были банаховы пространства X и Y.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathrm{N}_{\mathrm{s},\infty}^{\mathrm{reg}}$ и $T \ne 0$. Зафиксируем тензорный элемент $t = \sum \bar{x}_n' \otimes y_n'' \in X^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} Y^{**}$, порождающий оператор T (то есть, $\pi_Y T = \widetilde{t}$). Достаточно показать, что $t \in X^*\widehat{\otimes}_p Y$ (то есть, что образ $\varphi_{sp}^{\infty}(t) \in X^*\widehat{\otimes}_p Y^{**}$ лежит, на самом деле, в подпространстве $X^*\widehat{\otimes}_p Y$).

Предположим, что $t \notin X^*\widehat{\otimes}_p Y$. В этом случае найдется оператор $U \in \Pi_{p'}(Y^{**}, X^{**})$, для которого $\operatorname{trace} U \circ t = 0$ и, с другой стороны, $\operatorname{trace} U \circ z = 1$ для всех $z \in X^*\widetilde{\otimes}_p Y$. В дальнейшем удобно иметь перед глазами несколько диаграмм (с комментариями):

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\pi_Y} Y^{**} \xrightarrow{B} Z_{p'} \xrightarrow{S} X^{**} \xrightarrow{T^{**}} \pi_Y(Y)$$

($U = SB$; $\widetilde{t} = \pi_Y T$; $B\pi_Y = jB_0$; $A := \pi^{-1} T^{**} S$ (он появится позже); $U\pi_Y = 0$ и $Sj = 0$)

$$Y \xrightarrow{B_0} Y_{p'} \xrightarrow{j} Z_{p'} \xrightarrow{S} X^{**} \xrightarrow{T^{**}} \pi_Y(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{-1}} Y \xrightarrow{B_0} Y_{p'}$$

Здесь $Z_{p'} \subset L_{p'}(\mu)$ (для некоторой конечной меры μ); $B \in \Pi_{p'}(Y^{**}, Z_{p'})$ и $S \in L(Z_{p'}, X^{**})$, — таковы, что $U = SB$; $Y_{p'} = B\pi_Y(Y)$; B_0 — оператор, индуцированный оператором B; j — тождественное вложение. Заметим, что, в силу компактности T, $T^{**}(X^{**}) \subset \pi_Y(Y)$. Кроме того, $U\pi = 0$ по предположению; следовательно, $Sj = 0$. Обозначим также оператор $\pi_Y^{-1}T^{**}S$ через A.

Так как $Z_{p'} \subset L_{p'}(\mu)$ и $\pi_Y A \in N_{s,\infty}$, то, по теореме 10.1,1), оператор $\pi_Y A$ однозначно определяется тензорным элементом из $Z_{p'}^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**}$, который мы снова будем обозначать через $\pi_Y A$. Ясно, что

$$\pi_Y A = T^{**}S = \sum S^*\left(\pi_{X^*}(\bar{x}'_n)\right) \otimes \bar{y}''_n.$$

По следствию 10.2 и замечанию после него, $A \in Z_{p'}^*\widehat{\otimes}_1 Y$, причем

$$\operatorname{trace} B(\pi_Y A) = \operatorname{trace}(B\pi_Y) \circ A = \sum < S^*\pi_{X^*}\bar{x}'_n,\, B\bar{y}''_n >=$$
$$= \sum < \bar{x}'_n,\, U\bar{y}''_n >= \operatorname{trace} U \circ t = 1.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\pi_Y a \neq 0$ (и $A \neq 0$).

Возьмем некоторое представление A вида $\sum z'_n \otimes y_n$ как элемента пространства $Z_{p'}^* \otimes_1 Y$; это также и представление тензорного элемента $\pi_Y A \in Z_{p'}^*\widehat{\otimes}_{s,\infty}Y^{**}$ (но в пространстве $\pi_Y A \in Z_{p'}^*\widehat{\otimes}_1 Y^{**}$). Имеем:

$$1 = \operatorname{trace}(B\pi_Y) \circ A = \operatorname{trace}(jB_0) \circ A = \operatorname{trace}(jB_0) \circ \Big(\sum z'_n \otimes y_n\Big) =$$
$$= \sum < z'_n,\, jB_0 y_n >= \sum < z'_n,\, jB_0^{**}\pi_y y_n >= \operatorname{trace}\,(jB_0^{**}) \circ \Big(\sum z'_n \otimes \pi_Y y_n\Big) =$$
$$= \operatorname{trace}\,(jB_0^{**}) \circ (\pi_Y A) = \operatorname{trace}\,(jB_0^{**}) \circ \Big(\sum S^*\left(\pi_{X^*}(\bar{x}'_n)\right) \otimes \bar{y}''_n\Big) =$$
$$= \sum < S^*\pi_{X^*}\bar{x}'_n,\, jB_0^{**}\bar{y}''_n >= \operatorname{trace}\, B_0^{**} \circ \Big(\sum \left((Sj)^*\,\pi_{X^*}\right) \otimes \bar{y}''_n\Big).$$

Отсюда следует, что тензорный элемент $\alpha := \sum \left((Sj)^*\,\pi_{X^*}\right) \otimes \bar{y}''_n$, лежащий в пространстве $Y_{p'}^*\widehat{\otimes}Y^{**}$, не равен нулю. По теореме 10.1,1), не равен нулю и порождаемый им оператор $\widetilde{\alpha}$. Остается заметить, что $\widetilde{\alpha} = T^{**}Sj = 0$. ■

Замечание 10.4. Утверждение A$'$ теоремы 8.2.1 показывает, что наша теорема 10.4 точна. Аналогичное замечание можно отнести и к предложению 10.3. Следующий факт, однако, намного сильнее, чем часть A$'$ теоремы 8.2.1, в которой установлено существование двух банаховых пространств X и Y, для которых, в частности, $\mathrm{N_s^{reg}}\,(X,Y) \not\subset \mathrm{N_p}\,(X,Y), p < 2s/(2-s)$, и $Y \in AP$. Под впечатлением неверного результата А.Гротендика, о котором шла речь выше (см. начало параграфа — до определения 1), я написал в замечании к теореме 3.1 в [43], что Y "конечно, не обладает свойством ограниченной аппроксимации" BAP. Сейчас мы увидим, что последняя фраза была лишена оснований.

Теорема 10.5. *Пусть $r \in [2/3, 1)$ и $1/r = 1/2 + 1/p$. Существуют два сепарабельных банаховых пространства Z и W такие, что*

(i) *W и Z^{**} имеют базисы;*

(ii) *как W, так и все сопряженные к нему пространства $W', W'', \ldots$ обладают свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$;*

(iii) *W^* не обладает свойством $\mathrm{AP_s}$ ни при каком $s \in (r, 1]$;*

(iv) *для любого банахова пространства E $\mathrm{N^{reg}_{r,\infty}}\ (W, E) \subset \mathrm{N_1}\ (W, E)$;*

(v) *$\mathrm{N^{reg}_s}\ (W, Z) \not\subset \mathrm{N_p}\ (W, Z)$, каково бы ни было $s \in (r, 1]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $s, r < s < 1$, найдутся пространства $Z = Z_s$ и $W = W_s$ с указанными в формулировке теоремы свойствами, причем при данном фиксированном s в (iii) достаточно получить более слабое условие $W^* \notin \mathrm{AP}_{s,,\infty}$ (поскольку s бегает по всему промежутку $(r, 1)$, а свойство AP_1 — самое сильное из всех аппроксимационных свойств). Если это будет сделано, то для $s_n \searrow r$ пространства $(\sum Z_{s_n})_{l_2}$ и $(\sum W_{s_n})_{l_2}$ уже полностью будут удовлетворять всем условиям теоремы.

Итак, пусть $s \in (r, 1)$, так что $p < 2s/(2-s)$. По теореме 8.1.1,A$'$), 1) существуют сепарабельные рефлексивные пространства X и Y, тензорный элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_s Y$ и оператор $U \in QN_{p'}(Y, X)$ (квази-p'-ядерный) такие, что trace $U \circ z = 1$ и ассоциированный оператор $\widetilde{z} = 0$, причем пространство X может быть выбрано как подпространство в $L_{p'}$ (последнее содержится в доказательстве указанной теоремы).

Пусть Z —такое сепарабельное пространство, что Z^{**} имеет базис и существует гомоморфизм φ из Z^{**} на Y с ядром $\pi_Z(Z)$ (см. лемму 10.1). Поднимем (ядерный) тензорный элемент z, лежащий в $X^* \widehat{\otimes}_s Y$ до элемента $\alpha \in X^* \widehat{\otimes}_s Z^{**}$, так что $\varphi \circ \alpha = z$, и положим $V := U \circ \varphi$. Так как trace $V \circ \alpha =$ trace $U \circ z = 1$ и Z^{**} обладает свойством аппроксимации (свойством AP_1), то $\widetilde{\alpha} = \alpha \neq 0$. Кроме того, оператор $\widetilde{\varphi \circ \alpha}$, ассоциированный с тензором $\varphi \circ \alpha$, равен нулю. Поэтому $\alpha(X) \subset \operatorname{Ker} \varphi = \pi_Z(Z)$, то есть оператор α действует из X в Z.

Если $\alpha \in X^* \widehat{\otimes}_p Z$, то для произвольного его p-ядерного представления вида $\alpha = \sum x'_n \otimes z_n$ имеем: trace $V \circ \alpha = \sum < x'_n, V z_n >= \sum 0 = 0$; следовательно, $\alpha \notin X^* \widehat{\otimes}_p Z$ (мы воспользовались тем, что $V \in \Pi_{p'}(Z, X)$). Таким образом, $\mathrm{N^{reg}_s}\ (X, Z) \not\subset \mathrm{N_p}\ (X, Z)$.

Заметим, что X (и X^*) обладает свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$ (теорема 10.1,1) — вспомним, где лежит пространство X), но не обладает свойством $\mathrm{AP}_{s,\infty}$ (теорема 10.2,1)).

Рассмотрим теперь такое сепарабельное банахово пространство E, что E^* имеет базис и существует гомоморфизм ψ из E^* на X с тем свойством, что $E^{**} = \psi^*(X^*) \oplus \pi_E(E)$ (лемма 10.1). Положим $W = E^*$. Так как $E \in \mathrm{AP}_1$ и $X^* \in \mathrm{AP}_{r,,\infty}$, то все сопряженные пространства $W^*, W^{**}, \ldots$ обладают свойством $\mathrm{AP}_{r,\infty}$; по теореме 10.2,1), имеет место утверждение (iv), а по построению, — утверждение (v). Кроме того, $W^* \notin \mathrm{AP}_{s,\infty}$. ∎

Из (i) и (v) предыдущей теоремы моментально вытекает

Следствие 10.3. *Существует пара сепарабельных банаховых пространств Z, W со следующими свойствами. Пространства Z^{**} и W имеют базисы (и, следовательно, обладают свойством аппроксимации), и для каждого $p, 1 \leq p < 2$, найдется не p-ядерный оператор из W в Z с p-ядерным вторым сопряженным.*

Замечание 10.5. Подобного феномена не может быть, если либо W^*, либо Z^{***} обладает свойством аппроксимации. Вскользь об этом уже упоминалось выше (частный случай сформулирован в теореме 10.2′).

§11. Операторы Радона–Никодима и аппроксимационные свойства $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$

Пусть X банахово пространство, E — некоторая банахова решетка. Мы обозначаем, как и в главе I, через $S(E, X)$ линейное пространство всех таких операторов $U : E \to X$, что существует положительный функционал $e' = e'(U) \in E^*$, для которого $\|Ue\| \leqslant \langle e', |e|\rangle$ при всех $e \in E$; с нормой $s(U) := \inf\{\|e'\| : \|Ue\| \leqslant \langle e', |e|\rangle\}$ пространство $S(E, X)$ превращается в банахово пространство. Простейшими *примерами S-операторов являются тождественные вложения $J_{p1} : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$, где мера μ конечна и $p \in [1, \infty]$.*

Напомним, что оператор, действующий между двумя банаховыми решетками, называется *регулярным,* если он представим в виде разности двух положительных операторов. Всякий оператор, действующий в пространствах типа $L_1(\mu)$, является регулярным [80, с. 66, предложение 10].

Напомним также, что банахова решетка F называется *решеткой минимального типа,* если всякий порядковый интервал $[-f, f] \subset F$ слабо компактен. Примерами таких решеток могут служить пространства $L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Лемма 11.1. *Пусть E — банахова решетка, для которой E^* — решетка минимального типа, X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$. Для всякого отображения $U \in S(E, X)$ оператор TU допускает представление вида*

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e'_k \otimes y_k, \quad \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, |e'_k| \right\| < \infty,$$

где $(e'_k)_k \subset E^*$, $(y_k)_k \subset Y$. При этом, если

$$s_0(TU) := \inf \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, |e'_k| \right\|,$$

инфимум берется по всем представлениям (1), то $s_0(TU) \leqslant s(U)\|T\|$.

Доказательство. По теореме 2.2.1 главы I оператор TU факторизуется через некоторое отображение $V \in S(E, l_1(\Gamma))$. Пусть $e'_0 > 0$ — такой линейный функционал на E, что $\|Ve\| \leqslant \langle e'_0, |e|\rangle$ для всех $e \in E$ Если $e' \in E^*$, $e \in E_+$, то $\langle |e'|, e\rangle = \sup\{|\langle e', \widetilde{e}\rangle| : |\widetilde{e}| \leqslant e\}$. Поэтому для $\alpha \in l_\infty(\Gamma)$ и $e \in E_+$

$$\langle |V^*\alpha|, e\rangle = \sup\{|\langle \alpha, V\widetilde{e}\rangle| : |\widetilde{e}| \leqslant e\} \leqslant \|\alpha\| \, \|Ve\| \leqslant \|\alpha\| \, \langle e'_0, e\rangle,$$

т.е. $|V^*\alpha| \leqslant \|\alpha\|\, e_0'$ для всех α и, следовательно, оператор V^*, а, значит, и V, слабо компактен. Далее, если определить полунорму p на E следующим соотношением: $p(e) := \langle e_0', |e|\rangle$, то ассоциированное с парой (E, p) банахово пространство $\widehat{E}_p$ будет AL-пространством (т.е. банаховой решеткой с нормой, аддитивной на конусе положительных элементов). Это пространство изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$, и оператор V факторизуется через него каноническим образом: $V : E \to \widehat{E}_p \to l_1(\Gamma)$ Поскольку всякий оператор в L_1-пространствах регулярен, то V — регулярный слабо компактный оператор, а так как $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Шура, то, с одной стороны, этот оператор компактен, и, с другой стороны, можно считать, что $\Gamma = \mathbb{N}$. Ниже для $\alpha \in l_1$ через $\alpha(k)$ мы обозначаем k-ю координату элемента α, через h_k — k-й "орт" как в l_1, так и в l_∞. Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} V^* h_k \otimes h_k. \tag{2}$$

Для $e \in E_+$ имеем:

$$\sum_{k=m}^{n} \langle |V^* h_k|, e\rangle \leqslant \sum_{k=m}^{n} \langle |V|^* h_k, e\rangle = \sum_{k=m}^{n} \langle h_k, |V|e\rangle = \langle \sum_{k=m}^{n} h_k, |V|e\rangle = \sum_{k=m}^{n} (|V|e)(k).$$

Если $\varepsilon > 0$, то, в силу компактности оператора V, правая часть последних соотношений будет меньше, чем ε при всех $m, n > N(\varepsilon)$ для всех нормированных векторов $e \in E$. Таким образом, наш формальный ряд (2) сходится в $\mathrm{L}(E, l_1)$ и, более того, в E^* сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |V^* h_k| \|h_k\|$. Так как $(Ve)(k) = \langle Ve, h_k\rangle = \langle V^* h_k, e\rangle$, то ряд (2) сходится также и по норме s_0, причем к оператору V. Ясно, что отсюда вытекает утверждение нашей леммы. ■

Лемма 11.2. *Всякий оператор $S : L_p(\mu) \to Y$ вида (1), где $1 < p < \infty$, а Y — банахово пространство, является $\mathrm{N}^{p'}$-оператором.*

Доказательство. Пусть (1) — некоторое представление оператора S, в котором $(e_k')_k \subset L_{p'}(\mu)$, $(y_k)_k \subset Y$. Функция $\overline{f}(\cdot) := \sum_{k=1}^{\infty} e_k'(\cdot) y_k$, принадлежит пространству $L_{p'}(\mu; Y)$, причем $Sf = \int f\overline{f}\, d\mu$ для $f \in L_p(\mu)$ и $\|\overline{f}\|_{L_{p'}} \leqslant s_0(S)$. Нетрудно понять, что оператор S, каково бы ни было его представление в виде (1), определяет функцию $\overline{f}$ (п.в.) однозначно (другое подобное представление S порождает ту же функцию). Таким образом, нормированное пространство всех операторов вида (1) непрерывно отображается на некоторое подмножество $\widetilde{S}$ пространства $L_{p'}(\mu; Y)$, и норма этого отображения не превосходит 1. Очевидно, что $\widetilde{S}$ содержит все простые функции, при этом, если $\overline{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\, y_k^0$ — простая функция (множества A_k попарно не пересекаются), то

$$\|\overline{\varphi}\|_{L_{p'}(\mu;Y)} = \left(\int \left\| \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\, y_k^0 \right\|^{p'} \right)^{1/p'} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\, \|y_k^0\| \right\|_{L_{p'}}.$$

Поэтому на множестве простых функций операторная норма s_0 индуцирует в точности оригинальную норму $\|\cdot\|_{L_{p'}(\mu;Y)}$, и, следовательно, описанное выше отображение $S \mapsto \overline{f}$ является изометрическим изоморфизмом "на". Вернемся к нашему оператору S из (1). Если этому оператору при указанном изоморфизме соответствует функция $\overline{f} \in L_{p'}(\mu;Y)$, то сопряженный оператор действует по формуле $S^*y' = \langle y', \overline{f}(\cdot)\rangle$, что гарантирует его принадлежность пространству p'-ядерных отображений $\mathrm{N}_{p'}(Y^*, L_{p'}(\mu))$ [120, теорема 1]. Так как все пространства вида $L_r(\mu)$ обладают свойством метрической аппроксимации, то из p'-ядерности оператора S^* вытекает принадлежность оператора S пространству $N^{p'}(L_p(\mu), Y)$ [50, теорема 1] (см. также ниже теорему 11.1). ■

Следствие 11.1. *Для любого* $q \in [1,\infty)$ *суперпозиция* $TS : Z \xrightarrow{S} X \xrightarrow{T} Y$ I^q*-оператора* S *и оператора* T *типа* RN *принадлежит идеалу* N^q; *при этом,* $\nu^q(TS) \leqslant \|T\| i^q(S)$.

Доказательство. Если $1 < q < \infty$, то применимы леммы 11.2 и 11.1, так как тождественное вложение $J_{p1} : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$, где мера μ конечна, является S-оператором для любого $p \in (1,\infty)$. Справедливость утверждения при $q = 1$ вытекает из теоремы 4.1.2 главы I. ■

Замечание 11.1. Случай $q = \infty$ рассмотрен в следствии 11.5. Здесь мы отметим лишь, что тождественное отображение $l_1 \to l_1$ является I^∞-оператором, но не принадлежит идеалу N^∞, хотя l_1 — сопряженное пространство со свойством Радона-Никодима. Это же замечание можно отнести и следствию 11.2 ниже.

Следствие 11.2. *Для любого* $q \in [1,\infty)$ *суперпозиция* $TS : Z \xrightarrow{S} X \xrightarrow{T} Y$ Π_q^{dual}*-оператора* S *и оператора* T *типа* RN *принадлежит идеалу* $\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}$.

Доказательство. Пусть $\Phi : l_1(\Gamma) \to Z$ — какое-нибудь факторотображение. Сопряженный оператор Φ^* является изометрическим вложением пространства Z^* в $l_\infty(\Gamma)$ и поэтому $\Phi^* S^* \in \mathrm{I}_q(X^*, l_\infty(\Gamma))$. По следствию 11.1, $\Phi^* S^* T^* \in \mathrm{N}_q(Y^*, l_\infty(\Gamma))$ и, значит, оператор S^*T^* — q-квазиядерный, т.е. $TS \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}$. ■

Перед тем, как пойти дальше, введем ряд определений и обозначений. Пусть $C \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$.

Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ (коротко — $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}^p Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^* \widehat{\otimes}^p Y = \mathrm{N}^p(X, Y)$). Пространство Y *обладает свойством* C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$, $Y \in C$-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$, если для любого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}^p Y \to \mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C). Наконец, Y *имеет свойство* $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$ (соответственно, *свойство* $\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$), если оно обладает свойством C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ для некоторого числа $C \geq 1$ (соответственно, свойством 1-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$).

Если $p = 1$, то $\mathrm{AP}_1 = \mathrm{AP}_1^{\mathrm{dual}}$, и мы используем общепринятые в этом случае аббревиатуры AP, C-MAP, BAP, MAP; — это обычные аппроксимационные условия Гротендика.

Следующая теорема имеет довольно сложную формулировку, в которой появляется четвертое сопряженное пространство. Но упростить предположения, появляющиеся в этой теореме, используя только рассмотренные выше аппроксимационные свойства, нельзя.

Теорема 11.1. *Пусть $p \in [1, \infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если $T \in \mathrm{N}^p(X, Y^{**})$ и либо $X^* \in \mathrm{AP}_p$, либо $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}$, то $T \in \mathrm{N}^p(X, Y)$. Иначе говоря, в этих условиях из p-ядерности сопряженного оператора T^* вытекает принадлежность оператора T пространству $\mathrm{N}^p(X, Y)$. При этом $\|T\|_{\mathrm{N}^p(X,Y)} = \|T\|_{\mathrm{N}^p(X,Y^{**})}$*

Доказательство. Предположим, что существует такой оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, что $T \notin \mathrm{N}^p(X, Y)$, но $\pi_Y T \in \mathrm{N}^p(X, Y^{**})$. Так как либо $X^* \in \mathrm{AP}_p$, либо $Y^{**} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ (последнее верно, если $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ или $Y^{***} \in \mathrm{AP}$) то $\mathrm{N}^p(X, Y^{**}) = X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$ (стоит отметить, что из последнего равенства вытекает, в частности, изометричность естественного вложения пространства $\mathrm{N}^p(X, Y)$ в $\mathrm{N}^p(X, Y^{**})$). Следовательно, оператор $\pi_Y T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$; при этом $t \notin X^* \widehat{\otimes}^p Y$ (пространство $X^* \widehat{\otimes}^p Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in \Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}\right)^*$, что trace $U \circ t = \text{trace } (T^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и trace $U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^* \widehat{\otimes}^p Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U \pi_Y = 0$ и $\pi_Y^* U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$\langle U \pi_Y\, y, x' \rangle = \langle y, \pi_Y^*\, U^*|_{X^*} x' \rangle = \text{ trace } U \circ (x' \otimes \pi_Y(y)) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор $U \pi_Y T$, который тождественно равен нулю.

Если $X^* \in \mathrm{AP}_p$, то $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**} = N^p(X, Y^{**})$ и, значит, этот тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству trace $U \circ t = 1$.

Пусть теперь $Y^{***} \in AP$. В этом случае оператор

$$V := (U^*|_{X^*}) \circ T^* \circ \pi_Y^* : \; Y^{***} \to Y^* \to X^* \to Y^{***}$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент t_0 из проективного тензорного произведения $Y^{****} \widehat{\otimes} Y^{***}$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum x_n' \otimes y_n''$ для t как элемента пространства $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$. Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$\begin{aligned} V y''' &= U_* \left(T^* \pi_Y^*\, y'''\right) = U_* \left(\left(T^* \pi_Y^* \pi_{Y^*}\right) \pi_Y^*\, y'''\right) = U_* \left(\left(\pi_Y T\right)^* \pi_{Y^*}\right) \pi_Y^*\, y''') = \\ &= U_* \left(\left(\sum y_n'' \otimes x_n'\right)\; \pi_{Y^*}\; \pi_Y^*\, y'''\right) = U_* \left(\sum \langle y_n'', \pi_Y^*\, y''' \rangle\, x_n'\right) = \\ &= \sum \langle \pi_Y^{**} y_n'', y''' \rangle\, U_* x_n'. \end{aligned}$$

Итак, оператор V имеет в пространстве $Y^{****}\widehat{\otimes}\, Y^{***}$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y_n'') \otimes U_*(x_n').$$

Следовательно,

$$\text{trace } t_0 = \text{trace } V = \sum \langle \pi_Y^{**}(y_n''), U_*(x_n')\rangle = \sum \langle y_n'', \pi_Y^* \, U_* x_n'\rangle = \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$V y''' = U_* \, (\pi_Y T)^* \, y''' = U_* \circ t^*(y''') = U_* \left(\sum \langle y_n'', y'''\rangle \, x_n' \right) = \sum \langle y_n'', y'''\rangle \, U_* x_n',$$

откуда $V = \sum y_n'' \otimes U_*(x_n')$. Поэтому

$$\text{trace } t_0 = \text{trace } V = \sum \langle y_n'', U_* x_n'\rangle = \sum \langle U y_n'', x_n'\rangle = \text{trace } U \circ t = 1.$$

Пусть, наконец, $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$. В этом случае оператор

$$V := T^* \circ \pi_Y^* : \; Y^{***} \to Y^* \to X^*$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент t_0 из тензорного произведения $Y^{****}\widehat{\otimes}_p X^*$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum x_n' \otimes y_n''$ для t как элемента пространства $X^*\widehat{\otimes}^p Y^{**}$.

$$\begin{aligned} V y''' = T^* \pi_Y^* \, y''' = (T^* \pi_Y^* \pi_{Y^*}) \, \pi_Y^* \, y''' = (\pi_Y T)^* \, \pi_{Y^*} \, \pi_Y^* \, y''' = \\ = \left(\sum y_n'' \otimes x_n' \right) \, \pi_{Y^*} \, \pi_Y^* \, y''' = \sum \langle y_n'', \pi_Y^* \, y'''\rangle \, x_n' = \\ = \sum \langle \pi_Y^{**} y_n'', y'''\rangle \, x_n'. \end{aligned}$$

Итак, оператор V имеет в пространстве $Y^{****}\widehat{\otimes}_p \, X^*$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y_n'') \otimes x_n',$$

т.е. $t_0 = \pi_Y^{**} \circ t$.

Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$U_* V y''' \sum \langle \pi_Y^{**} y_n'', y'''\rangle \, U_* x_n'.$$

Следовательно (определение тензорного элемента $t_0 \in Y^{****}\widehat{\otimes}_p X^*$ см. выше),

$$\text{trace } U_* \circ t_0 = \text{trace } U_* \circ V = \sum \langle \pi_Y^{**}(y_n''), U_* x_n'\rangle = \sum \langle y_n'', \pi_Y^* \, U_* x_n'\rangle = \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$V y''' = (\pi_Y T)^* \, y''' = t^*(y''') = \sum \langle y_n'', y'''\rangle \, x_n',$$

откуда $V = \sum y_n'' \otimes x_n'$. Поэтому

$$\text{trace } U_* t_0 = \text{trace } U_* V = \sum \langle y_n'', U_* x_n'\rangle = \sum \langle U y_n'', x_n'\rangle = \text{trace } U \circ t = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Замечание 11.2. На самом деле, как видно из доказательства теоремы 11.1, для справедливости заключения в утверждении этой теоремы достаточно предполагать, что каноническое отображение $Y^{****}\widehat{\otimes}_p X^* \to \mathrm{L}(Y^{***}, X^*)$ (или, что то же, каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}^p Y^{****} \to \mathrm{L}(X, Y^{****})$) взаимно однозначно.

Следствие 11.3. *Пусть $p \in [1, \infty)$, и пусть X, Y — такие банаховы пространства, что Y C-дополняемо в своем втором сопряженном, обладает свойством Радона –Никодима и одно из пространств X^* или Y^{***} удовлетворяет условию аппроксимации Гротендика. Тогда $\mathrm{N}^p(X, Y) = \mathrm{I}^p(X, Y) \overset{C}{=} \mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$. Более обще, если $U : Y \to Z$ — оператор Радона–Никодима из Y в некоторое банахово пространство Z, дополняемое в своем втором сопряженном, и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Z^{***} \in \mathrm{AP}$, то для любых $p \in [1, \infty)$ и $T \in \mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ имеет место включение $UT \in \mathrm{N}^p(X, Z)$.* ■

Замечание 11.3. Аппроксимационные условия (так же как и дополняемость пространств в своих вторых сопряженных) , накладываемые на рассматриваемые в последних двух утверждениях пространства существенны и не могут быть заменены на аналогичные условия для пространств X, либо Y^{**} (см. ниже пример 11.1).

Следствие 11.4. *Если пространство X не содержит изоморфно l_1, то всякий оператор из X в $l_1(\Gamma)$ является N^∞-оператором, т.е. компактно факторизуется через пространство l_1. Более обще, любой условно слабо компактный оператор со значениями в пространстве $l_1(\Gamma)$ является N^∞-оператором, причем N^∞-норма такого оператора совпадает с его обычной нормой.*

Доказательство. Так как $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Шура, так же как и свойством аппроксимации, то любой условно слабо компактный оператор со значениями в этом пространстве аппроксимируется по обычной операторной норме конечномерными операторами. Сопряженный к нему оператор задан на пространстве $l_\infty(\Gamma)$ и является аппроксимируемым, а всякий такой оператор из $l_\infty(\Gamma)$ в любое банахово пространство есть ∞-ядерный оператор с равенством соответствующих норм (см., например, [27]). Остается применить теорему 11.1 при $p = \infty$. ■

Следствие 11.5. *Произведение UT условно слабо компактного оператора $T : X \to L_1(\mu)$ и оператора Радона-Никодима $U : L_1(\mu) \to Y$ компактно факторизуется через пространство l_1, т.е. лежит в пространстве $N^\infty(X, Y)$; при этом, $\nu^\infty(UT) \leqslant \|U\| \, \|T\|$. В частности, если банахово пространство Y обладает свойством Радона-Никодима, а пространство X не содержит изоморфную копию пространства l_1, то имеет место равенство (вместе с совпадением соответствующих норм) $\mathrm{I}^\infty(X, Y) = \mathrm{N}^\infty(X, Y)$.*

Доказательство. Если $U \in \mathrm{RN}(L_1(\mu), Y)$, то он факторизуется и через некоторое пространство $l_1(\Gamma)$, причем $\gamma_1(U) = \|U\|$. Остается применить следствие 11.4. ■

Пример 11.1. Следующий результат из работы [50] показывает, что следствие 11.5 перестает быть верным, если в его заключении заменить строго интегральные операторы на интегральные по Гротендику: для каждого $r \in [1, \infty], r \neq 2$, существуют такие вполне сепарабельное пространство W и оператор $T \in L(W^{**}, W)$, что W^{**} имеет базис, $T \in N^r(W^{**}, W^{**})$, но $T \notin N^r(W^{**}, W)$. См. также ниже следствие 13.2.

Следствие 11.6. *Пусть $T \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}(X, C(K))$ и $S \in \mathrm{L}(C(K), Y)$. Если оператор S не является изоморфизмом ни на каком подпространстве в $C(K)$, изометричном пространству c_0, то суперпозиция ST компактно факторизуется через c_0, т.е. $ST \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$; при этом $\nu_\infty(ST) \leqslant \|S\|\,\|T\|$. В частности* (ср. [23, теорема 1.2]), *если X^* обладает свойством Радона–Никодима и $Y \not\supset c_0$, то $\mathrm{I}_\infty(X, Y) = \mathrm{N}_\infty(X, Y)$.*

Доказательство. По лемме 0.4.1.1, оператор S слабо компактен; следовательно, слабо компактен и S^*. Как и при доказательстве предыдущего следствия, получаем, что оператор T^* допускает факторизацию вида $T^* = \alpha\beta$:

$$\begin{array}{ccccccc} X^* & \xleftarrow{\ \alpha\ } & l_1(\Gamma) & \xleftarrow{\ \beta\ } & C^*(K) & \xleftarrow{\ S^{\pi *}\ } & Y^* \\ X^{**} & \xrightarrow[\alpha^*]{} & l_\infty(\Gamma) & \xrightarrow[\beta^*]{} & C^{**}(K) & \xrightarrow[S^\pi]{} & Y \subset Y^{**}, \end{array}$$

Диагр. 1

где S^π — сильно бидуальный к S оператор. Напомним, что в нашей ситуации $\|T^*\| = \gamma_1(T^*) = \inf \|\alpha\|\,\|\beta\|$, где инфимум берется по всем указанным факторизациям оператора T^*. Оператор βS^*, а, значит, и $S^\pi\beta^* : l_\infty \to Y$, компактен. Следовательно, $S^\pi\beta^* \in \mathrm{N}_\infty(l_\infty, Y)$ и $\|S^\pi\beta^*\| = \nu_\infty(S^\pi\beta^*)$ (см. доказательство следствия 11.4). Таким образом, $(ST)^\pi = S^\pi T^{**} \in \mathrm{N}_\infty(X^{**}, Y)$. Далее, для $x \in X$ и $y' \in Y^*$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle y', (ST)^\pi \pi_X x\rangle &= \langle \pi_Y (ST)^\pi \pi_X x, y'\rangle = \\ &= \langle S^{**}T^{**}\pi_X x, y'\rangle = \langle T^*S^*y', \pi_X x\rangle = \langle T^*S^*y', x\rangle = \langle y', STx\rangle, \end{aligned}$$

т.е. $(ST)^\pi\pi_X = ST$ и, следовательно, $ST \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$; при этом,

$$\begin{aligned} \nu_\infty(ST) &= \nu_\infty((ST)^\pi\pi_X) = \nu_\infty(S^\pi T^{**}\pi_X) = \nu_\infty(S^\pi\beta^*\alpha^*\pi_X) \leqslant \\ &\leqslant \nu_\infty(S^\pi\beta^*)\|\alpha^*\| = \|S^*\beta^*\|\,\|\alpha^*\| \leqslant \|S\|\,\|\alpha\|\,\|\beta\|. \end{aligned}$$

Так как у нас $\|T^*\| = \gamma_1(T^*)$, то окончательно получаем: $\nu_\infty(ST) \leqslant \|S\|\,\|T\|$. ■

Для операторов, ∞-интегральных по Гротендику, мы получаем из предыдущего утверждения такой (точный, — см. пример 11.2 ниже) результат. Это небольшое обобщение теоремы 1.2 из [23].

Следствие 11.7. *Пусть $V \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}(X, C(K))$, $S \in \mathrm{L}(C(K), Y^{**})$ и $SV \in \mathrm{L}(X, Y)$. Предположим, что пространство Y c-дополняемо в своем втором сопряженном Y^{**}, где $c \geqslant 1$. Если оператор S не является изоморфизмом ни на каком подпространстве в $C(K)$, изометричном пространству c_0, то суперпозиция SV компактно факторизуется через c_0, т.е. $SV \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$; при этом $\nu_\infty(SV) \leqslant c\,\|S\|\,\|V\|$. В частности* (ср. [23, теорема 1.2]), *если X^* обладает свойством Радона–Никодима, $Y \not\supset c_0$ и Y c-дополняемо в Y^{**}, то $\mathrm{I}^{\mathrm{Gr}}_\infty(X, Y) \stackrel{c}{=} \mathrm{N}_\infty(X, Y)$.* ■

Пример 11.2. Следующий результат (см. [130, следствие 3.4] и следствие 7.3.4) показывает, что следствие 11.6 перестает быть верным, если в его заключении заменить строго интегральные операторы на интегральные по Гротендику: существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство $C(K)$, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство c_0. В следствии 7.3.4 не указаны явно свойства пространства, в котором действует оператор, но из доказательства соответствующих фактов видно, что в качестве указанного оператора можно взять оператор, действующий во вполне сепарабельном пространстве. Этот же пример показывает, что в следствии 11.7 отказаться от дополняемости пространства Y в его втором сопряженном, вообще говоря, нельзя.

Нам пригодится одна факторизационная лемма для операторов из Π_q^{dual}. Напомним, что $\Pi_\infty^{\mathrm{dual}} = \mathrm{L}$.

Лемма 11.3. *Пусть $q \in [1, \infty)$. Оператор $S : E \to F$ является Π_q^{dual}-оператором в том и только в том случае, если для всякого $\varepsilon > 0$ оператор $\pi_F S$ допускает факторизацию следующего вида:*

$$\pi_F S :\ E \xrightarrow{A} E_{q'} \xrightarrow{j} E_1 \xrightarrow{B} F^{**},$$

где $E_{q'}$ и E_1 — факторпространства некоторых пространств $L_{q'}(\mu)$ и $L_1(\nu)$ соответственно, $\|A\| = 1$, $\|B\| = 1$ и $\pi_q^{\mathrm{dual}}(j) \leqslant (1+\varepsilon)\pi_q^{\mathrm{dual}}(S)$.

Доказательство. Если $\pi_F S$ факторизуется указанным образом, то сопряженный к нему оператор $S^*(\pi_F)^* : F^{***} \to F^* \to E^*$ является абсолютно q-суммирующим, причем $\pi_q(S^*\pi_F^*) \leqslant (1+\varepsilon)\pi_q^{\mathrm{dual}}(S)$. Следовательно, таков и оператор $S^* = S^*\pi_F^*\pi_{F^*}$.

Обратно, предположим, что $S \in \Pi_q^{\mathrm{dual}}(E, F)$. В этом случае сопряженный к нему оператор S^* допускает факторизацию Пича через часть оператора тождественного вложения $i : L_\infty(\mu) \to L_q(\mu)$, где μ — конечная мера:

$$S^* :\ F^* \xrightarrow{B_0} F_\infty^* \xrightarrow{i_0} F_q^* \xrightarrow{A_0} E^*.$$

Здесь F_∞^* и F_q^* — подпространства в $L_\infty(\mu)$ и $L_q(\mu)$ соответственно, $\|A_0\| = 1$, $\|B_0\| = 1$ и i_0 — оператор, индуцированный вложением i. Переходя к сопряженной диаграмме и вспоминая теорему Какутани о реализации абстрактных L-пространств в виде пространств типа $L_1(\nu)$, мы получаем желаемый результат. ■

Теорема 11.2. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P : Y^{**} \to Y$. Тогда для всякого $p \in (1, \infty)$ из соотношения $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ вытекает условие $Y \in \|P\|$-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ эквивалентны между собой.*

Доказательство. Предположим, что $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, и рассмотрим элемент $z = \tilde{z} \in X^* \widehat{\otimes}^p Y = \mathrm{N}^p(X, Y)$. Мы зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$ и покажем, что

$$\nu^p(z) \leq \|P\|\, i^p_{\mathrm{Gr}}(z) + \varepsilon \tag{3}$$

(ясно, что из соотношения (3) вытекает утверждение нашей теоремы).

Пусть U — такой $\Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}$-оператор из Y в X^{**}, что $\pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(U) < 1$ и $\operatorname{trace} Uz \geq \nu^p(z) - \varepsilon$. Если $z = \sum x'_n \otimes y_n$ — какое-либо N^p-представление оператора z, то последнее неравенство означает, что $\operatorname{trace} U \circ z = \sum \langle x'_n, Uy_n \rangle \geq \nu^p(z) - \varepsilon$.

По лемме 11.3, суперпозиция операторов U и z допускает следующую факторизацию:

$$X \xrightarrow{\ z\ } Y \xrightarrow{\ A\ } Y_p \xrightarrow{\ j\ } Y_1 \xrightarrow{\ B\ } X^{**} \tag{4}$$

где все операторы непрерывны, причем $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$, $\pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(j) \leq 1$ и Y_p — фактор-пространство некоторого *рефлексивного* пространства $\mathrm{L}_p(\mu)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} U \circ z &= \sum \langle x'_n, BjAy_n \rangle = \\ &= \sum \langle j^* B^* x'_n, Ay_n \rangle \qquad \text{(мы отождествляем } x'_n \text{ с элементами из } X^{***}\text{)} \\ &= \operatorname{trace}(Bj) \circ w, \end{aligned}$$

где $w = A \circ z$, т.е. $w = \sum x'_n \otimes Ay_n \in X^* \widehat{\otimes}^p Y_p$.

Так как пространство Y_p рефлексивно, то $\mathrm{I}^p(X, Y_p) = \mathrm{N}^p(X, Y_p)$ (вместе с равенством норм; см. следствие 11.1). Поэтому

$$\begin{aligned} \nu^p(z) - \varepsilon \ \leq\ \operatorname{trace} U \circ z \ =\ \operatorname{trace}(Bj) \circ w \ \leqslant\ \nu^p(w)\, \pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(Bj) \ \leqslant \\ \leq\ i^p(w) \ =\ i^p(AP\pi_Y \circ z) \leqslant \|A\|\, \|P\|\, i^p_{\mathrm{Gr}}(z) \ \leq\ \|P\|\, i^p_{\mathrm{Gr}}(z), \end{aligned}$$

что и дает нам неравенство (3). ■

Замечание 11.4. Вопрос о том, справедливо ли утверждение леммы в случае $p = 1$, открыт. Неясно также, что будет в случае $p = \infty$.

§12. Неизоморфные инъективные вложения $\mathrm{N}^p(Y, X)$ в $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(Y, X)$

Перед тем как сформулировать одну из важных теорем настоящего параграфа, введем еще одно обозначение, а именно, для пары банаховых пространств X, Y договоримся обозначать через s-$\bigcap_{r \in \mathcal{R}} X \widehat{\otimes}_r Y$ множество всех тензорных элементов, допускающих представления $\sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes y_k$, для которых ряд сходится в каждом из тензорных произведений $X \widehat{\otimes}_r Y$, $r \in \mathcal{R}$ (т.е. это представление является подходящим разложением рассматриваемого элемента в каждом из указанных тензорных произведений). Аналогичный смысл ниже будет иметь и обозначение s-$\bigcap_{r \in \mathcal{R}} X \widehat{\otimes}^r Y$. Напомним также, что идеал QN_∞ состоит из всех компактно факторизуемых через рефлексивные пространства операторов в банаховых пространствах и совпадает (по теореме У.Б. Джонсона [89]) с идеалом всех компактных отображений.

Замечание 12.1. Можно определить пересечение указанных тензорных произведений, как совокупность тензоров, лежащих в каждом из произведений $X\widehat{\otimes}_r Y$, $r \in \mathcal{R}$. Но в этом, наиболее естественном определении, естественно, будет требоваться лишь, чтобы соответствующий тензор допускал нужное разложение в каждом из тензорных произведений $X\widehat{\otimes}_r Y$, $r \in \mathcal{R}$, но не обязательно одно разложение, сходящееся одновременно во всех этих тензорных произведениях. Это — одна из причин, почему мы используем в обозначениях символ s-$\cap$.

Теперь обратимся к формулировке и доказательству нашей следующей теоремы. Эта теорема дополняет результаты из §7 и является первым шагом к совершенно точному ответу на вопрос: пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и T^* — p-ядерный оператор. Для каких q верно, что $T \in N^q(X, Y)$? На этот вопрос мы отвечаем в этом и следующем параграфах. В то время как в §7 мы привели самое простое решение проблемы существования не p-ядерного оператора с p-ядерным вторым сопряженным, в следующей теореме на эту проблему мы смотрим с несколько другой точки зрения.

Относительно 3) теоремы см. замечание 12.2 ниже. Что касается утверждения 2), мы приводим его не только (и не столько) для полноты изложения; стоит отметить, что пространство G_v^*, сопряженное к G_v из этого утверждения, имеет нетривиальный радемахеровский тип.

Теорема 12.1. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, обладающее следующими свойствами.*

1) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство F, оператор $U \in \mathrm{QN}_\infty(F, E)$ и тензорные элементы $z_0 \in s$-$\bigcap_{v>2} E^*\widehat{\otimes}_v c_0$ и $z_1 \in c_0^*\widehat{\otimes}_1 F$, что если $w := z_1 \circ z_0$, то* $\operatorname{trace} U \circ w = 1$ *и $\widetilde{w} = 0$ (т.е. w порождает нулевой оператор). При этом, если $r > 2$ и $1/r + 1/s \leqslant 1$, то*

$$w = z_1 \circ z_0 \in (c_0^*\widehat{\otimes}_s F) \circ (E^*\widehat{\otimes}_r c_0).$$

2) *Для каждого $v \in (2, \infty)$ существуют такие подпространство G_v пространства l_v, оператор $U_v \in \mathrm{QN}_v(E, G_v)$ и элемент $w_v \in G_v^*\widehat{\otimes}_1 E$, что* $\operatorname{trace} U_v \circ w_v = 1$ *и $\widetilde{w}_v = 0$.*

3) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство G, оператор $U_0 \in \bigcap_{v>2} \mathrm{QN}_v(E, G)$ и элемент $w_0 \in G^*\widehat{\otimes}_1 E$, что* $\operatorname{trace} U_0 \circ w_0 = 1$ *и $\widetilde{w}_0 = 0$.*

4) *Пусть $2 < v < s < \infty$ и $1/\alpha = 3/2 - 1/v = 1/2 + 1/v'$. Существуют такие подпространство F_s пространства l_s, оператор $V_v \in \mathrm{QN}_s(E, F_s)$ и элемент $z_v \in F_s^*\widehat{\otimes}_\alpha E$, что* $\operatorname{trace} V_v \circ z_v = 1$ *и $\widetilde{z}_v = 0$.*

Доказательство. Пусть X — такое сепарабельное банахово пространство, что существует элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_1 X$ с единичным следом, порождающий нулевой оператор $\widetilde{z}$ и представимый в виде

$$(1) \qquad z = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{1/2} 2^{-3N/2} x'_{nN} \otimes x_{nN}, \quad z \in \text{s-}\bigcap_{p>2/3} X^*\widehat{\otimes}_p X \setminus (X^*\widehat{\otimes}_{2/3} X),$$

где последовательности (x'_{nN}) и (x_{nN}) ограничены (см. [27, п. 10.4.5]). Далее в этом доказательстве через (e_{nN}), также как и через (e'_{nN}), обозначается последовательность единичных ортов в любом из пространств $l_{(v)} := \left(\sum_{N=1}^{\infty} l_v^{3\cdot 2^N}\right)_{l_v}$ или $c_{(0)} := \left(\sum_{N=1}^{\infty} l_\infty^{3\cdot 2^N}\right)_{c_0}$ (недоразумения возникнуть не должно, — в каждом случае будет ясно, о каком конкретно пространстве идет речь). Положим

$$A := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-1/2} x'_{nN} \otimes e_{nN} : \; X \to c_{(0)},$$

$$B := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-1/2} e'_{nN} \otimes x_{nN} : \; l_{(1)} \to X,$$

$$\Delta_0 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{7/2} 2^{-N/2} e'_{nN} \otimes e_{nN} : \; c_{(0)} \to c_{(0)},$$

$$\Delta_1 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} e'_{nN} \otimes e_{nN} : \; c_{(0)} \to l_{(1)}.$$

Эти операторы действуют непрерывно согласно следующей диаграмме, показывающей также, какую факторизацию, связанную с указанным выше представлением тензора z, допускает нулевой оператор $\widetilde{z}$.

$$\widetilde{z} : \; X \xrightarrow{\quad A \quad} c_{(0)} \xrightarrow{\quad \Delta_0 \quad} c_{(0)} \xrightarrow{\quad \Delta_1 \quad} l_{(1)} \xrightarrow{\quad B \quad} X;$$

Диагр. 1

операторы A, B компактны (и даже лежат в идеале App), Δ_1 — 1-ядерный оператор, Δ_0 — v-ядерный оператор для любого $v \in (2, \infty]$.

Пусть

$$A = jA_1A_2 : X \xrightarrow{A_2} E \xrightarrow{A_1} \overline{A(X)} \xhookrightarrow{j} c_{(0)},$$

$$B = B_1B_2 : l_{(1)} \xrightarrow{B_2} F \xrightarrow{B_1} X$$

— компактные факторизации отображений A и B через рефлексивные пространства E и F соответственно [89, 66] (важно отметить, что из построений в указанных работах вытекает равенство $\overline{A(X)} = \overline{A_1(E)}$; кроме того, мы будем считать, что отображение $A_2 : X \to E$ действует на плотное множество, а отображение $B_1 : F \to X$ взаимно однозначно, поскольку всегда можно перейти в указанных факторизациях к образу оператора A_2 и к факторпространству $F/\operatorname{Ker} B_1$, сохранив рефлексивность получаемых пространств). Положим

$$(z_0) \qquad z_0 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{7/2} 2^{-N/2} A_1^* j^* e'_{nN} \otimes e_{nN}, \ z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_v c_{(0)} \quad (\forall\, v > 2),$$

$$(z_1) \qquad z_1 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} e'_{nN} \otimes B_2 e_{nN}, \ z_1 \in c^*_{(0)} \widehat{\otimes}_1 F.$$

Тензорный элемент z_0 можно также рассматривать как элемент тензорного произведения $E^* \widehat{\otimes}_v l_{(v)}$, $v \in (2, \infty]$, точнее, как суперпозицию $i_v \circ z'_v$, где $i_v : l_{(v)} \hookrightarrow c_{(0)}$ — тождественное вложение, а $z'_v \in E^* \widehat{\otimes} l_{(v)}$ индуцируется тензором z_0 (соотношение, определяющее z_v, то же, что и в (z_0) для z_0).

1). Если положить $w := z_1 \circ z_0$, $U := A_2 \circ B_1$, то $w \in E^* \widehat{\otimes}_1 F$, $U \in \mathrm{QN}_\infty(F, E)$, причем

$$w = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-3N/2} A_1^* j^* e'_{nN} \otimes B_2 e_{nN}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} U \circ w &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-3N/2} \langle A_1^* j^* e'_{nN}, A_2 B_1 B_2 e_{nN} \rangle = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-3N/2} \langle A^* e'_{nN}, B e_{nN} \rangle = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{1/2} 2^{-3N/2} \langle x'_{nN}, x_{nN} \rangle = \operatorname{trace} z \neq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что $z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_r c_{(0)}$ для всякого $r > 2$, а $z_1 \in c^*_{(0)} \widehat{\otimes}_1 F \subset c^*_{(0)} \widehat{\otimes}_s F$ для любого $s \geqslant 1$. Поэтому, если $r > 2$ и $1/r + 1/s \leqslant 1$, то

$$w = z_1 \circ z_0 \in (c^*_{(0)} \widehat{\otimes}_s F) \circ (E^* \widehat{\otimes}_r c_{(0)}).$$

То, что тензор w порождает нулевой оператор, вытекает из наших предположениях об операторах A_2 и B_1 и того, что $\widetilde{z} = 0$.

2) Пусть для $v > 2, v \neq \infty$, $\Delta_v : c_{(0)} \to l_{(v)}$ — v-ядерный оператор, ассоциированный с диагональным оператором Δ_0, так что $\Delta_0 = i_v \Delta_v$. Положим $G_v := \overline{\Delta_v j A_1(E)}$, $\widetilde{\Delta}_v = \Delta_v|_{jA_1(E)} j|_{\overline{A_1(E)}}$, и пусть $j_v : G_v \hookrightarrow l_{(v)}$ — тождественное вложение.

$$X \xrightarrow{A_2} E \xrightarrow{A_1} \overline{A(X)} = \overline{A_1(E)} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}_v} G_v \xhookrightarrow{j_v} l_{(v)} \xhookrightarrow{i_v} c_{(0)} \xrightarrow{\widetilde{z}_1} F \xrightarrow{B_1} X \xrightarrow{A_2} E.$$

Диагр. 2

Тогда (см. диагр. 2)

$$w_v := (i_v j_v)^* \otimes (A_2 B_1)(z_1) \in G_v^* \widehat{\otimes}_1 E \quad \text{и}$$
$$U_v := \widetilde{\Delta}_v A_1 \in \mathrm{QN}_v(E, G_v)$$

(мы определяем U_v как оператор, чей образ лежит в подпространстве $G_v \subset l_{(v)}$, так что $j_v U_v A_2 = \Delta_v A$).

Имеем:

$$\operatorname{trace} U_v \circ w_v = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} \langle (i_v j_v)^* e'_{nN}, U A_2 B_1 B_2 e_{nN} \rangle =$$
$$= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} \langle i_v^* e'_{nN}, \Delta_v A B e_{nN} \rangle =$$
$$= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-N} \langle e'_{nN}, A B e_{nN} \rangle = \operatorname{trace} z \neq 0.$$

3). Разложим диагональный оператор Δ_0 (см. его определение выше) в произведение

$$\Delta_0 = \Delta_{02}\Delta_{01} : c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_{01}} c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_{02}} c_{(0)}$$

двух диагональных операторов, — операторов умножения

$$\text{на } \ \delta_{01} = \Big((N^4 2^{-N/2})_{n=1}^{3\cdot 2^N} \Big)_{N=1}^{\infty} \quad \text{и на } \ \delta_{02} = \Big((N^{-1/2})_{n=1}^{3\cdot 2^N} \Big)_{N=1}^{\infty}$$

соответственно. Пусть G_0 — рефлексивное сепарабельное пространство, через которое компактно факторизуется компактный оператор Δ_{02},

$$\Delta_{02} : c_{(0)} \xrightarrow{A_3} G_0 \xrightarrow{A_4} c_{(0)}.$$

Если положить $G := \overline{A_3 \Delta_{01} A_1(E)} \subset G_0$ и

$$w_0 := A_4^* \otimes (A_2 B_1)(z_1) \in G^* \widehat{\otimes}_1 E \quad \text{и}$$
$$U_0 := \widetilde{\Delta}_{01} A_1 \in \mathrm{QN}_v(E, G) \ (\forall\, v > 2),$$

где $\widetilde{\Delta}_{01}$ — отображение из $\overline{A_1(E)}$ в G, индуцированное оператором $A_3\Delta_{01}$, то

$$\operatorname{trace} U_0 \circ w_0 = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} \langle e'_{nN}, \Delta_0 A B e_{nN} \rangle =$$
$$= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-N} \langle A^* e'_{nN}, B e_{nN} \rangle = \operatorname{trace} z \neq 0.$$

4). Фиксируем $s, v > 2$, $v < s$. Ясно, что $\alpha := 2v/(3v-2) > 1/2$. Рассмотрим оператор Δ_{0v}, "отщепленный" от диагонального оператора Δ_0 (другой "множитель" из Δ_0 сейчас войдет в Δ_1):

$$\Delta_{0v} := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{7/2} 2^{-N/v} e'_{nN} \otimes e_{nN} : \ c_{(0)} \to l_{(s)}.$$

Этот оператор является s-ядерным. Пусть

$$\Delta_{1v} := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N[3/2-1/v]} e'_{nN} \otimes e_{nN} : \ c_{(0)} \to l_{(1)}.$$

Так как $3/2 - 1/v = 1/\alpha$ и $2\alpha > 1$, то $\Delta_{1v} \in \mathrm{N}_\alpha(c_{(0)}, l_{(1)})$. Обозначим через $\widetilde{\Delta}_{0v}$ оператор из $\overline{A_1(E)}$ в $F_s := \overline{\Delta_{0v} A_1(E)}$, индуцированный оператором $\Delta_0 v$, и через k_s — естественное вложение F_s в пространство $c_{(0)}$ (см. диагр. 3).

$$X \xrightarrow{A_2} E \xrightarrow{A_1} \overline{A(X)} = \overline{A_1(E)} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}_{0v}} F_s \overset{k_s}{\hookrightarrow} c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_{1v}} l_{(1)} \xrightarrow{B} X \xrightarrow{A_2} E.$$

Диагр. 3

Положив $z_v := (k_s^* \otimes A_2 B)(\Delta_{1v})$ и $V_v := \widetilde{\Delta}_{0v} A_1$, мы получим искомые тензор $z_v \in F_s^* \widehat{\otimes}_\alpha E$ и оператор $V_v \in \mathrm{QN}_s(E, F_s)$. $\blacksquare$

Замечание 12.2. 1) Утверждение 3) теоремы 12.1 — это утверждение из замечания 7.1.1, приведенное там без какого-либо эскиза доказательства. Мы выше, в доказательстве теоремы 12.1, использовали один из наиболее сильных контрпримеров к проблеме аппроксимации, и только это позволило нам получить утверждение 3). Непосредственный перенос рассуждений из доказательства леммы 7.1.1,1) затруднителен, так как в этих рассуждениях пример Энфло использовался в его достаточно грубой форме. Заметим также, что одновременно мы привели (учитывая результаты §7) и доказательство утверждений, сформулированных в замечаниях 7.1.2.1) и 7.3.1.

2) Утверждение 4) (так же как и 3)) точно и не может быть улучшено: если $v > 2$ и $\alpha := 2v/(3v-2)$, и $\varphi_{\alpha,v'} : F^* \widehat{\otimes}_\alpha E \to F^* \widehat{\otimes}_{v'} E$ — естественное отображение (оно вполне может не быть инъективным), то *сужение канонического отображения* $F^* \widehat{\otimes}_{v'} E \to \mathrm{L}(F, E)$ *на линейное подпространство* $\varphi_{\alpha,v'}\big(F^* \widehat{\otimes}_\alpha E\big)$ *взаимно однозначно* каковы бы не были банаховы пространства E и F (теорема 8.1.1,A)). Вместе с 3) утверждение 4) дает полную картину совместного поведения тензорных элементов из $\widehat{\otimes}_\alpha$, $\alpha \in (2/3, 1]$), и из $\widehat{\otimes}_{v'}$, $2 < v \leqslant \infty$. Отметим, что такая же картина возникает и при исследовании вопроса о том, при каких значениях параметров α, v из α-ядерности сопряженного (соответственно, второго сопряженного) оператора следует принадлежность классу N^v (соответственно, классу N_v) самого оператора (см. §8 и теорему 13.1 ниже).

Следствие 12.1. *Для каждого $v > 2$ существуют такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства E, F и W, что естественное отображение*

$$(W^*\widehat{\otimes}_1 F) \circ (E^*\widehat{\otimes}_v W) \to \mathrm{L}(E, F)$$

не взаимно однозначно.

Доказательство. Изменим немного диаграмму 1, поместив в центре ее компактный оператор в c_0, не испортив основных свойств операторов слева и справа (так, чтобы доказательство утверждения 1) прошло и с этим новым оператором). После этого профакторизуем его через сепарабельное рефлексивное пространство; последнее обозначим через W. ■

Перед тем как перейти к рассмотрению дуальных утверждений относительно N^p-операторов, приведем еще два следствия из предыдущей теоремы, дополняющие один результат из §10, а также некоторые факты из §8.

Напомним, определение тензорных произведений $\widehat{\otimes}_{s,\infty}$ и свойств $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, впервые введенных и исследованных в [48] (см. §10).

Для банаховых пространств X, Y и числа $s \in (0, 1)$ мы обозначаем через $Y^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X$ линейное подпространство в проективном тензорном произведении $Y^*\widehat{\otimes}_1 X$, состоящее из тензоров, допускающих представления вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, y'_k \otimes x_k, \quad \text{где} \quad \lambda_k \searrow 0,\ \lambda_k^s = o(1/k),\ \|y'_k\|\,\|x_k\| = 1,$$

а через $\mathrm{N}_{s,\infty}$ — соответствующее операторное (фактор)пространство. Банахово пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $s \in (0, 1)$, если для любого банахова пространства Y каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}(Y, X)$ взаимно однозначно.

Следствие 12.2. *Пусть $2 < v < s < \infty$, $1/\alpha = 1/2 + 1/v'$ и $1/\alpha_0 = 1/2 + 1/s'$. Существуют такие вполне сепарабельные банаховы пространства Z, W и операторы $T \in \mathrm{N}_{v'}(W, Z)$ и $U \in \mathrm{QN}_s(Z^{**}, W)$, что*

(1) *W и Z^{**} имеют базисы;*

(2) *как W, так и все сопряженные к нему пространства $W^*, W^{**}, \ldots$ обладают свойством $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$;*

(3) *W^* не обладает свойством AP_β ни при каком $\beta \in [\alpha, 1]$;*

(4) *$T \in \mathrm{N}_\alpha^{\mathrm{reg}}(W, Z)$, но $T \notin \mathrm{N}_q(W, Z)$ ни при каком $q < s'$.*

(5) $U|_Z = 0$ и $\operatorname{trace} U \circ \pi_Z T = 1$.

Доказательство. Пусть $E, F_s \subset l_s$, $V_v \in \mathrm{QN}_s(E, F_s)$ и $z_v \in F_s^*\widehat{\otimes}_\alpha E$ — из теоремы 12.1,4)), так что $\operatorname{trace} V_v \circ z_v = 1$ и $\widetilde{z}_v = 0$. Пусть, далее,

$$z_v = \sum \lambda_j f'_j \otimes e_j, \quad (\lambda_j) \in l_\alpha,\ (f'_j) \in l_\infty(F_s^*),\ (e_j) \in l_\infty(E)$$

— некоторое представление z_v в тензорном произведении $F^*\widehat{\otimes}_\alpha E$. Воспользуемся леммой 4.9.2 из главы 0 и найдем такие вполне сепарабельное банахово пространство Z и ограниченную последовательность $(z_j'') \subset Z^{**}$, что для гомоморфизма $\Phi : Z^{**} \to E$ из леммы 0.4.9.2 (где сейчас $E = G$) $\Phi z_j'' = e_j, j = 1, 2, \ldots$. Положим

$$(2) \qquad T_v := \sum \lambda_j f_j' \otimes z_j'' \in F_s^*\widehat{\otimes}_\alpha Z^{**}, \quad U_v := V_v\Phi \in \mathrm{QN}_s(Z^{**}, F_s).$$

Так как $\operatorname{Ker}\Phi = Z$ и $\Phi T_v = \widetilde{z} = 0$, то $T_v(F_s) \subset Z$, поэтому из (2) вытекает, что $T_v \in \mathrm{N}_v(F_s, Z)$ (теорема 8.2.1,A)).

$$\begin{tikzcd} F_s \arrow[r, "\widetilde{z}_v"] \arrow[dr, "T_v"'] & E \arrow[r, "V_v"] & F_s \\ & Z^{**} \arrow[u, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Диагр. 4

Заметим также, что, так как $F_s \subset l_s$ и $1/\alpha_0 = 3/2 - 1/s$, то $F_s \in \mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$ (всякое конечномерное подпространство G в F_s является $C\dim G^{1/2-1/s}$-дополняемым подпространством, поэтому применимо предложение 10.1, которое говорит о том, что каждое такое пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{(1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}))^{-1},\infty}$).

Далее, если $\beta \in [\alpha, 1]$ то $z_v \in F_s^*\widehat{\otimes}_\beta E$, $V_v \in \mathrm{L}(F_s, E)$, $\operatorname{trace} V_v \circ z_v = 1$ и $\widetilde{z} = 0$; поэтому как E, так и F_v^* не обладают свойством AP_β .

Пусть теперь $W = Y^*$ и $\Psi : W \to F_s$ — вполне сепарабельное пространство и факторотображение из леммы 0.4.9.1, построенные для пространства F_s, так что $W^* = \pi_Y Y \oplus \Psi^* F_s^*$. Пара пространств W, Z^{**} удовлетворяет условиям 1)–3). Нам осталось определить операторы U и T и проверить выполнения условия 4).

Если $w_j' = \Psi^* f_j' \in W^*$, $j = 1, 2, \ldots$, и $T := \sum \lambda_j w_j' \otimes z_j''$, то $T \in \mathrm{N}_\alpha^{\mathrm{reg}}(W, Z)$: для $w \in W$

$$Tw = \sum \lambda_j \langle \Psi^* f_j', w\rangle z_j'' = \sum \lambda_j \langle f_j, \Psi w\rangle z_j'' = T_v\Psi w \in Z,$$

и $(\lambda_j) \in l_\alpha$.

Обозначим через P проектор из пространства W^* на $\Psi^* F_s^*$ и через $\Psi_0^* : F_s^* \to \Psi^* F_s^*$ — приведение оператора Ψ^*. Наконец, положим $U := [(\Psi_0^*)^{-1}P]^* V_v\Phi$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_v\Psi"'] & Z^{**} \arrow[r, "\Phi"] & E \arrow[r, "V_v"] & F_s \arrow[r, "{[(\Psi_0^*)^{-1}P]^*}"] & W^{**} \\ & Z \arrow[u, "\pi_Z"'] & F_s^* & \Psi^* F_s^* \arrow[l, "(\Psi_0^*)^{-1}"'] & W^* = \Psi^* F_s^* \oplus Y \arrow[l, "P"'] \end{tikzcd}$$

Диагр. 5

С одной стороны, мы имеем:

$$\text{trace}\ U\circ T=\sum\langle w_j',Uz_j''\rangle=$$
$$=\sum\langle w_j',[(\Psi_0^*)^{-1}P]^*V_v\Phi z_j''\rangle=\sum\langle(\Psi_0^*)^{-1}Pw_j',V_v\Phi z_j''\rangle=\sum\langle f_j,V_ve_j\rangle=\text{trace}\ V_v\circ z=1.$$

С другой стороны, если разложение T в ряд вида $T=\sum\overline{w}_j'\otimes\overline{z}_j$ было бы представлением этого оператора в $\mathrm{N}_q(W,Z)$, $q<s'$, то, так как $Z=\mathrm{Ker}\Phi$, мы имели бы:

$$\text{trace}\ U\circ T=\sum\langle\overline{w}_j',U\overline{z}_j\rangle.$$

Но $V_v\Phi|_Z=0$, а, значит, и сужение U на Z равно нулю. Отсюда, trace $U\circ T=0$. ■

Следствие 12.3. *Пусть* $2<v<s<\infty$, $1/\alpha=1/2+1/v'$ *и* $1/\alpha_0=1/2+1/s'$. *Существуют такие вполне сепарабельные банаховы пространства* Z *и* W *, что*

(1) W *и* Z^{**} *имеют базисы;*

(2) *как* W, *так и все сопряженные к нему пространства обладают свойством* $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$*;*

(3) W^* *не обладает свойством* AP_β *ни при каком* $\beta\in[\alpha,1]$*;*

(4) *для любого банахова пространства* E $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\alpha_0,\infty}(W,E)\subset\mathrm{N}_1(W,E)$*;*

(5) $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\alpha}(W,Z)\not\subset\mathrm{N}_q(W,Z)$, *каково бы не было* $q<v'$.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) и (5) вытекают непосредственно из предыдущего следствия. Что касается (4), то оно получается так. В доказательстве следствия 12.2 рефлексивное пространство F_s есть подпространство l_s и, следовательно, как оно, так и F^* обладает свойством $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$ (предложение 10.1); пространства Y и $W=Y^*$ удовлетворяют условию метрической аппроксимации. Таким образом, пространство $W^*=F^*\oplus Y$, также как и все остальные сопряженные к W пространства $W^{**},\dots$, имеют свойство $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$. Поэтому утверждение (4) вытекает из теоремы 10.2,1). ■

Двойственная теорема, получающаяся из теореме 12.1 переходом к дуальной ситуации, выглядит так (при ее формулировке мы не следуем обозначениям из теоремы 12.1; напомним, что $\mathrm{N}_1=\mathrm{N}^1$ и $\widehat{\otimes}_1=\widehat{\otimes}^1$ и что тензорное произведение вида $Z\widehat{\otimes}_\alpha W$ можно интерпретировать, в хороших случаях, как пространство соответствующих *-слабо непрерывных операторов из Z^* в W).

Теорема 12.2. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство* F, *обладающее следующими свойствами.*

1) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство* H, *оператор* $U\in\mathrm{QN}^\infty(F,H)$ *и тензорные элементы* $z_0\in s\text{-}\bigcap_{v>2}c_0\widehat{\otimes}^vF$ *и* $z_1\in H^*\widehat{\otimes}_1l_1$, *что если* $w:=z_0\circ z_1$, *то* trace $U\circ w=1$ *и* $\widetilde{w}=0$ *(т.е.* w *порождает нулевой оператор). При этом, если* $q<2,r>2$ *и* $1/r+1/s=1/q\leqslant1$, *то*

$$w=z_0\circ z_1\in(c_0\widehat{\otimes}^rF)\circ(H\widehat{\otimes}^sl_1).$$

2) *Для каждого* $v \in (2, \infty)$ *существуют такие факторпространство* $E_{v'}$ *пространства* $l_{v'}$, *оператор* $U_v \in \mathrm{QN}_v^{\mathrm{dual}}(E_{v'}, F)$ *и элемент* $w_v \in F^* \widehat{\otimes}_1 E_{v'}$, *что* $\mathrm{trace}\, U_v \circ w_v = 1$ *и* $\widetilde{w}_v = 0$.

3) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство* G, *оператор* $U_0 \in \bigcap_{v>2} \mathrm{QN}_v^{\mathrm{dual}}(G, F)$ *и элемент* $w_0 \in F^* \widehat{\otimes}_1 G$, *что* $\mathrm{trace}\, U_0 \circ w_0 = 1$ *и* $\widetilde{w}_0 = 0$.

4) Пусть $1 < p < 2$ и $1/\alpha = 1/2 + 1/p = 3/2 - 1/p'$. Существуют такие факторпространство E пространства l_p, оператор $\overline{V} \in \bigcap_{s>p'} \mathrm{QN}_s^{\mathrm{dual}}(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_\alpha E$, что $\mathrm{trace}\, \overline{V} \circ z = 1$ и $\widetilde{z} = 0$. ■

Из утверждения 1), используя факторизационную теорему для компактных операторов [89, 66], получаем:

Следствие 12.4. *Для каждого* $v > 2$ *существуют такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства* F, H *и* W, *что естественное отображение*

$$(W^* \widehat{\otimes}^v F) \circ (H^* \widehat{\otimes}_1 W) \to \mathrm{L}(E, F)$$

не взаимно однозначно. ■

Ниже нам понадобится также дуальный вариант леммы 7.1.1.2) с некоторыми уточнениями. Сформулируем предварительно такой вспомогательный факт.

Лемма 12.1. *Пусть* $p > 0$. *Если* $S \in \bigcap_{v>p} \mathrm{N}_v(X, Y)$, *то существует разложение оператора* S *в ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} x'_k \otimes y_k,$$

которое является подходящим разложением для любого $v > p$. *Таким образом, если одно из пространств* X^* *или* Y *удовлетворяют условию аппроксимации Гротендика, то*

$$\bigcap_{v>p} X^* \widehat{\otimes}_v Y = s\text{-} \bigcap_{v>p} X^* \widehat{\otimes}_v Y.$$

Аналогичное утверждение справедливо для идеалов N^q*-операторов.*

Доказательство. Лемма сформулирована таким образом, что ее доказательство почти очевидно, надо лишь вспомнить, что для $v > 1$ как нормы ν_v, так и нормы ν^v с ростом показателя v убывают (случай $p < 1$ еще проще), и рассмотреть последовательность $v_n \searrow p$. Далее надо хорошо аппроксимировать S конечномерными операторами по каждой из ν_{v_n}-норм и сложить получившиеся пачки. Переход к тензорным произведениям возможен в силу того, что при выполнении условий, наложенных на пару X^*, Y, соответствующие тензорные произведения и операторные пространства совпадают между собой. ■

Лемма 12.2. *Для любого $q \in (2,\infty)$ существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство F, факторпространство E пространства l_q, оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E,F)$ и элемент $z \in s\text{-}\bigcap_{v>q} F^*\widehat{\otimes}_v E$ такие, что* $\operatorname{trace} z \circ \overline{U} = 1$ *и* $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ *для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$.*

Доказательство. Вот в точности то, что было получено в процессе доказательства леммы 7.1.1,2): если $v > 2$, $2 < q < v$ и E^* — подпространство пространства $l_{p'}$, которое не имеет свойства аппроксимации Гротендика, то найдутся такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство F, оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E,F)$ и тензорный элемент $z \in F^*\widehat{\otimes}_v E$, что что $\operatorname{trace} z \circ \overline{U} = 1$ и $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$. Тензорный элемент z строился *независимо от параметра* v как суперпозиция $R\varphi\Delta_0$ строго l_q-факторизуемого оператора $R : C(K) \to E$, некоторого компактного оператора $\varphi\Delta_0 : l_1 \to C(K)$ и некоторого взаимно однозначного оператора из F в l_1. Так как $\mathrm{L}(C(K), l_q) = \mathrm{I}_r(C(K), l_q)$ *для любого* $r > q$, то оператор $R\varphi\Delta_0 \in \bigcap_{r>q} l_\infty\widehat{\otimes}_r E$. Остается применить лемму 12.1 к $S := R\varphi\Delta_0$, перейдя затем в тензорные произведения $F^*\widehat{\otimes}_r E$. ■

Переходя к двойственной ситуации, из леммы 12.2 получаем

Следствие 12.5. *Для любого $q \in (2,\infty)$ существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, подпространство F пространства $l_{q'}$, оператор $\overline{V} \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E,F)$ и элемент $z \in s\text{-}\bigcap_{v>q} F^*\widehat{\otimes}^v E$ такие, что* $\operatorname{trace} z\circ\overline{V} = 1$ *и* $\operatorname{trace} z \circ \Phi = 0$ *для каждого $\Phi \in E^* \otimes F$.* ■

Следствие 12.6. *Для каждого $r \neq 2$ существует $\mathrm{QN}_r^{\mathrm{dual}}$-оператор, не принадлежащий замыканию конечномерных отображений по π_r^{dual}-норме. Более того,*

1) существует оператор из $\bigcap_{r>2} \mathrm{QN}_r^{\mathrm{dual}}$, не принадлежащий замыканию конечномерных относительно обычной операторной нормы (и даже в топологии компактной сходимости!);

2) существует оператор из $\mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}$ (и, таким образом, из $\mathrm{QN}_r^{\mathrm{dual}}, 1 \leqslant r < 2$), который не лежит в замыкании множества конечномерных операторов по норме π_a^{dual}, каково бы ни было $a \in [1,2)$.

Доказательство. 1) есть непосредственное следствие теоремы 12.2,3).

2). По следствию 12.5, для каждого $a < 2$ существуют такие сепарабельные рефлексивные пространства E, F и оператор $\overline{V} \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E,F)$, что $\overline{V} \notin \overline{E^* \otimes F}^{\pi_a^{\mathrm{dual}}}$. Пусть $a_n \nearrow 2$ и $E_n, F_n, \overline{V}_n$ таковы, что $\overline{V}_n \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E_n,F_n)$, $\overline{V}_n \notin \overline{E_n^* \otimes F_n}^{\pi_{a_n}^{\mathrm{dual}}}$ и $\pi_1^{\mathrm{dual}}(\overline{V}_n) \leqslant 1/2^n$. Положим $X = (\sum E_n)_{l_2}$, $Y = (\sum F_n)_{l_2}$, $T = \oplus\overline{V}_n$. Тогда $T \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}$, но $T \notin \overline{X^* \otimes Y}^{\pi_a^{\mathrm{dual}}}$, каково бы ни было $a < 2$. ■

Следствие 12.7. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство Z такое, что для каждого $r \neq 2$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ естественное отображение $Z^*\widehat{\otimes}^r Z \to \mathrm{N}^r(Z,Z)$ не взаимно однозначно. В частности, для каждого $r \neq 2$ пространство Z не обладает свойством $\mathrm{AP}_r^{\mathrm{dual}}$.*

Доказательство. Для $v'_n \nearrow 2$, E^1_n и F^1_n из теоремы 12.2,2) и для $q_n \searrow 2$, E^2_n и F^2_n из следствия 12.5 положим $Z = \Big(\big(\sum E^1_n\big)_{l_2} + \big(\sum F^1_n\big)_{l_2} + \big(\sum E^2_n\big)_{l_2} + \big(\sum F^2_n\big)_{l_2} \Big)_{l_2}$. ■

Лемма 12.3. *Пусть для $p < 2$ (соответственно, для $v > 2$) пространства E, F и оператор $\overline{V} \in \mathrm{QN}^{\mathrm{dual}}_{p'}(E, F)$ (соответственно, $\overline{V} \in \mathrm{QN}^{\mathrm{dual}}_{1}(E, F)$) — из теоремы 12.2,4) (соответственно, из следствия 12.5).*

1) *Если $p < 2$, то существует вполне сепарабельное банахово пространство W и тензорный элемент $u \in F^* \widehat{\otimes}^1 W^{***}$ такие, что W^* имеет базис, $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$, где $\Psi : W^* \to E$ — некоторое фактороотображение,* trace $u \circ \varphi = 0$ *для любого $\varphi \in W^{**} \otimes F$ и* trace $u \circ (\overline{V}\Psi) = 1$.

2) *Если $v > 2$, то существует вполне сепарабельное банахово пространство W и тензорный элемент $u \in F^* \widehat{\otimes}^v W^{***}$ такие, что W^* имеет базис, $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$, где $\Psi : W^* \to E$ — некоторое фактороотображение,* trace $u \circ \varphi = 0$ *для любого $\varphi \in W^{**} \otimes F$ и* trace $u \circ (\overline{V}\Psi) = 1$.

Доказательство. Пусть $z \in F^* \widehat{\otimes}^a E$ (где $a = 1$ в утверждении 1) и $a = v$ в утверждении 2)) — тензорный элемент, соответствующий в теореме 12.2,4) (соответственно, в следствии 12.5) тройке $E, F, \overline{V}$. Пусть, далее, W — пространство из леммы 0.4.9.1, примененной к нашему пространству E, и P — естественный проектор из $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$ на $\Psi^* E^*$. Положим $j = [(\Psi^*)^{-1} P]^*$, $j : E \to W^{***}$ и $u = j \circ z \in F^* \widehat{\otimes}^a W^{***}$. Мы должны лишь проверить, что trace $u \circ (\overline{V}\Psi) = 1$. Пусть $z = \sum f'_n \otimes e_n$ — некоторое тензорное представление для z в $F^* \widehat{\otimes}^a E$ ($f'_n \in F^*, e_n \in E$). Имеем:

$$\operatorname{trace} u \circ (\overline{V}\Psi) = \operatorname{trace} (j \circ z) \circ (\overline{V}\Psi) = \sum \langle \Psi^* \overline{V}^* f'_n, j e_n \rangle =$$
$$= \sum \langle (\Psi^*)^{-1} P \Psi^* \overline{V}^* f'_n, e_n \rangle = \sum \langle (\Psi^*)^{-1} \Psi^* \overline{V}^* f'_n, e_n \rangle =$$
$$= \sum \langle \overline{V}^* f'_n, e_n \rangle = \operatorname{trace} z \circ \overline{V} = 1. \quad ■$$

Замечание 12.3. В лемме 12.3 W^* обладает свойством MAP, а W^{***} не обладает свойством $\mathrm{AP}^{\mathrm{dual}}_p$ в случае 1) и свойством $\mathrm{AP}^{\mathrm{dual}}_v$ в случае 2).

Теперь мы готовы привести дуальный вариант основной теоремы из §7. Непосредственно (без каких-либо существенных изменений) доказательство теоремы 7.2.1 на случай N^p-операторов не переносится.

Теорема 12.3. *Пусть E, $X := W^*$, $Y := F$, $\overline{V}, \Psi$ — из леммы 4.14, и $V := \overline{V}\Psi$. Пусть, далее, $0 < \gamma < 1/5$,*

1) *Для любого $\delta > 0$ и для каждого $p < 2$ существуют такие конечномерный оператор $T_0 \in Y^* \otimes X$ и эквивалентная норма на X, скажем $|||\cdot|||$, что если $X_\delta := (X, |||\cdot|||)$, то*

(i_1) $X_\delta \in \mathrm{BAP}$;

(ii_1) $\|V\|_{\Pi^{\mathrm{dual}}_{p'}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$;

(iii_1) V не лежит в замыкании шара радиуса $4/(5\delta)$ пространства $X^*\otimes_{\pi_\infty^{\mathrm{dual}}}Y$ в пространстве $\mathrm{L}(X_\delta,Y)$ в топологии компактной (или поточечной) сходимости;

(iv_1) $\|T_0\|_{Y^*\widehat{\otimes}^p X_\delta}\geqslant 1-\gamma$;

(v_1) $\|T_0\|_{\mathrm{I}^1(Y,X^{**})}<\delta$.

2) Для любого $\delta>0$ и для каждого $v>2$ существуют такие конечномерный оператор $T_0\in Y^*\otimes X$ и эквивалентная норма на X, скажем $|||\cdot|||$, что если $X_\delta:=(X,|||\cdot|||)$, то

(i_2) $X_\delta\in\mathrm{BAP}$;

(ii_2) $\|V\|_{\Pi_1^{\mathrm{dual}}(X_\delta,Y)}\leqslant 1$;

(iii_2) V не лежит в замыкании шара радиуса $4/(5\delta)$ пространства $X^*\otimes_{\pi_{v'}^{\mathrm{dual}}}Y$ в пространстве $\Pi_{v'}^{\mathrm{dual}}(X_\delta,Y)$ в топологии компактной (или поточечной) сходимости;

(iv_2) $\|T_0\|_{Y^*\widehat{\otimes}^\infty X_\delta)}\geqslant 1-\gamma$;

(v_2) $\|T_0\|_{\mathrm{I}^v(Y,X^{**})}<\delta$.

Более того, как в случае 1), так и в случае 2) норма $|||\cdot|||$, дуальная к которой определяется соотношением $|||x'|||:=\max\{\|x'\|;A\,\mathrm{dist}\,(x',\Psi^*E^*)\}$, удовлетворяет всем указанным выше условиям при подходящем выборе числа A.

Доказательство. Удобно рассматривать оба случая, указанных в лемме 12.3, одновременно, поэтому мы введем два символа a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} &a=p', &&b=\infty, &&\text{в случае 1)};\\ &a=1, &&b=v', &&\text{в случае 2)}.\end{aligned}$$

Отметим, что в любом случае $a\leqslant b$ и $b'\leqslant a'$.

Итак, пусть E, $X:=W^*$, $Y:=F$, $\overline{V}$, Ψ, а также u — из леммы 12.3, и $V:=\overline{V}\Psi$.

$$\begin{array}{ccccccc} X=W^* & \xrightarrow{\ \Psi\ } & E & \xrightarrow{\ \overline{V}\ } & Y=F & \xrightarrow{\ \widetilde{u}\ } & X^{**}=W^{***}\\ X^*=W^{**}=\Psi^*E^*\oplus\pi_W W & \xleftarrow{\ \Psi^*\ } & E^* & \xleftarrow{\ \overline{V}^*\ } & Y^*=F^* & & \end{array}$$

Диагр. 6

Без ограничения общности, мы можем считать, что $\pi_a^{\mathrm{dual}}(V)<1$. Пусть $u=\sum y_n'\otimes x_n''$, где $y_n'\in Y^*$, $x_n''\in X^{**}=W^{***}$, $\alpha_{b'}(x_n'')\leqslant 1$, $\varepsilon:=\varepsilon_b(y_n')<\infty$.

Зафиксируем $\delta>0$ и введем следующие обозначения.

1) Пусть элементы $y_k''\in Y^{**}$, $k=1,2,\dots$, таковы, что $\|V^*y'\|^a\leqslant\sum|\langle y_k'',y'\rangle|^a$ для всех $y'\in Y^*$ и $\sum\|y_k\|^a\leqslant 1$.

2) Пусть $A>1$ — такое число, что

$$\frac{3\varepsilon}{A}<\frac{1}{2}\delta.$$

3) Пусть ν — такое число, что

$$\nu A < \frac{1}{2}\delta.$$

4) Выберем такое натуральное N, что для

$$T = \sum_{n=1}^{N} y_n' \otimes x_n''$$

выполняются неравенства

$$\operatorname{trace} T \circ V > 1 - \gamma; \qquad |\operatorname{trace} T \circ \varphi| < \nu \pi_b^{\mathrm{dual}}(\varphi),\ \forall \varphi \in X^* \otimes Y.$$

5) Пусть $(x_n)_1^N$ — такой набор векторов в X, что
5a) $\alpha_{b'}(x_n)_1^N \leqslant 2$ и
5b) $x_n''|_{\Psi^* E^*} = x_n|_{\Psi^* E^*}$.

Такой набор существует по следующим причинам. Пусть $\lambda > 0$. Для $x'' \in X^{**} = W^{***}$ рассмотрим функционал $e := x'' \circ \Psi^*$ на E^* :

$$E^* \xrightarrow[\Psi^*]{} X^* = W^{**} = \pi_W W \oplus \Psi^* E^* \xrightarrow[x'']{} \mathbb{R}.$$

Так как $\|e\| \leqslant \|x''\|$ и $\Psi : W^* \to E$ есть факторотображение, то найдется $x \in X$, для которого будут выполняться соотношения $\|x\| \leqslant (1+\lambda)\|e\| \leqslant (1+\lambda)\|x''\|$ и $\Psi x = e = x'' \circ \Psi^*$. Далее, для $e' \in E^*$

$$\langle \Psi^* e', x\rangle = \langle e', \Psi x\rangle = \langle e', e\rangle = (x'' \circ \Psi^*)(e') = \langle x'', \Psi^* e'\rangle.$$

Таким образом, $\|x\| \leqslant (1+\lambda)\|x''\|$ и $x|_{\Psi^* E^*} = x''|_{\Psi^* E^*}$.

6) Положим $T_0 = \sum_{n=1}^N y_n' \otimes x_n \in Y^* \otimes X$.

7) Пусть, наконец, $L_0 = [x_n]_1^N$.

Определим новую (эквивалентную) норму $|||\cdot|||$ на $X^* = W^{**}$ следующим образом: для $x' \in X^*$

$$|||x'||| = \max\{\|x'\|, A\, d(x', \Psi^* E^*)\},$$

где $d(x', \Psi^* E^*) = \inf\{\|x' - \Psi^* e'\| : \ e' \in E^*\}$. Заметим, что для любого $y' \in Y^*$ мы имеем: $|||V^* y'||| = |||\Psi^* \overline{V}^* y'||| = \|V^* y'\|$. В силу *-слабой замкнутости подпространства $\Psi^* E^*$ в W^{**}, это — дуальная норма к некоторой норме на X, которую мы обозначим тем же символом $|||\cdot|||$. Полезно отметить, что $\|\cdot\| \leqslant |||\cdot||| \leqslant A\|\cdot\|$. Мы утверждаем, что пространство $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$ удовлетворяет всем условиям нашей теоремы.

(i) В X есть базис, поэтому X обладает свойством ограниченной аппроксимации.

(ii) Оценка для квази-a-ядерной нормы оператора V^* получается из соотношений $|||V^* y'|||^a = \|V^* y'\|^a \leqslant \sum_{k=1}^\infty |\langle y_k'', y'\rangle|^a$ и $\sum_k \|y_k''\|^a \leqslant 1$; так что $\|V\|_{\Pi_a^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$.

(iv) Имеем:

$$\text{trace } T_0 \circ V = \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, V^* y'_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle x''_n, V^* y'_n \rangle = \text{trace } T \circ V > 1 - \gamma.$$

Так как $\|V\|_{\Pi_a^{\text{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$, то $\|T_0\|_{Y * \widehat{\otimes}^{a'} X} \geqslant 1 - \gamma$.

(v) Так как $(X_\delta^* \otimes_{\pi_b^{\text{dual}}} Y)^* = \mathrm{I}^{b'}(Y, X_\delta^{**})$, то

$$\|T_0\|_{\mathrm{I}^{b'}(Y, X_\delta^{**})} = \sup\{|\text{ trace } T_0 \circ \varphi| : \ \varphi \in X_\delta^* \otimes Y, \pi_b^{\text{dual}}(\varphi) \leqslant 1\}.$$

Пусть $\varphi \in X_\delta^* \otimes Y$ и $\|\varphi\|_{\Pi_b^{\text{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\text{ trace } T_0 \circ \varphi\| &= \left| \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, \varphi^* y'_n \rangle \right| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{N} \langle x_n - x''_n, \varphi^* y'_n \rangle \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} \langle x''_n, \varphi^* y'_n \rangle \right| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |||x_n - x''_n|||^{b'} \right)^{1/b'} \left(\sum_{n=1}^{N} |||\varphi^* y'_n|||^{b} \right)^{1/b} + |\text{ trace } T \circ \varphi| \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi\|_{\Pi_b^{\text{dual}}(X_\delta, Y)} \varepsilon_b (y'_n)_1^\infty \widetilde{\alpha}_{b'} + \nu \|\varphi\|_{\Pi_b^{\text{dual}}(X, Y)}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{\alpha}_{b'}$ — $\alpha_{b'}$-норма последовательности $(x_n - x''_n)_1^N$ относительно нормы $|||\cdot|||$.

Оценим сверху $\widetilde{\alpha}_{b'}$, используя равенство $l_r(Z)^* = l_{r'}(Z^*)$ $(1 < r < \infty)$. Если $(x'_n)_1^N$ — такой набор векторов из X^*, что $\sum_{n=1}^{N} |||x'_n|||^b \leqslant 1$, то для $(l_n)_1^N \subset \Psi^* E^*$, $\|l_n - x'_n\| = d(x'_n, \Psi^* E^*)$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |\langle x''_n - x_n, x'_n \rangle| &= \sum_{n=1}^{N} |\langle x''_n - x_n, x'_n - l_n \rangle| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \|x'_n - l_n\|^b \right)^{1/b} \alpha_{b'} (x''_n - x_n)_1^N \leqslant 3 \left(\sum_{n=1}^{N} d(x'_n, \Psi^* E^*)^b \right)^{1/b} \leqslant \\ &\leqslant \frac{3}{A} \left(\sum_{n=1}^{N} |||x'_n|||^b \right)^{1/b} \leqslant \frac{3}{A}. \end{aligned}$$

В этих соотношениях через $\alpha_{b'}(x''_n - x_n)_1^N$ обозначается $\alpha_{b'}$-норма последовательности $(x''_n - x_n)_1^N$ относительно первоначальной нормы $\|\cdot\|$.

Таким образом,

$$|\text{ trace } T_0 \circ \varphi\| \leqslant \varepsilon \frac{3}{A} + \nu A \|\varphi\|_{\Pi_b^{\text{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Следовательно, $\|T_0\|_{\mathrm{I}^{b'}(Y, X_\delta^{**})} \leqslant \delta$.

(iii) Если это утверждение неверно, то найдется такой оператор $\varphi \in X^*_\delta \otimes Y$, что $\|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 4/(5\delta)$ и $\varphi|_{L_0} = V|_{L_0}$. Имеем:

$$|\operatorname{trace} T_0 \circ \varphi| = \left|\sum_{n=1}^N \langle \varphi x_n, y'_n\rangle\right| = \left|\sum_{n=1}^N \langle V x_n, y'_n\rangle\right| = |\operatorname{trace} T_0 \circ V| > 1 - \gamma > 4/5$$

(см. доказательство утверждений (iv)). С другой стороны,

$$|\operatorname{trace} T_0 \circ \varphi| \leqslant \|T_0\|_{\mathrm{I}_{b'}(Y, X^{**}_\delta)} \|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant \delta[4/(5\delta)] = 4/5. \quad \blacksquare$$

Следствие 12.8. 1) *Для каждого $C > 0$ и любого $q > 2$ существует вполне сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\pi_q^{dual}(U) = 1$ *и U не является пределом конечномерных операторов Φ, с нормами $\|\Phi\| \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

2) *Для каждого $C > 0$ и любого $q < 2$ существует вполне сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\pi_1^{\mathrm{dual}}(U) = 1$ *и U не является пределом конечномерных операторов Φ, с нормами $\pi_q^{\mathrm{dual}}(\Phi) \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

Следствие 12.9. 1) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p < 2$ существует вполне сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\|T\|_{\mathrm{N}^p(Y,X)} = 1$ *и* $\|T\|_{\mathrm{I}^1(Y,X^{**})} < \delta$.

2) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p > 2$ существует вполне сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\|T\|_{\mathrm{N}^\infty(Y,X)} = 1$ *и* $\|T\|_{\mathrm{I}^p(Y,X^{**})} < \delta$.

Следствие 12.10. *Для каждого $C > 0$ и для любого $p \geqslant 1, p \neq 2$ существует вполне сепарабельное банахово пространство X со свойством C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ такое, что X не обладает свойством C_0-$\mathrm{MAP}^{\mathrm{dual}}$, если $C_0 < C$.*

Применим теперь теорему 12.2 для доказательства некоторых фактов из [130, §4; они приводились там без доказательств], а также для получения дополнительной информации о возможности аппроксимации Π_r^{dual}-операторов в некоторых топологиях.

Теорема 12.4. 1) *Для каждого $q > 2$ существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ такие, что*

(i) U лежит в замыкании множества $X^* \otimes Y$ в $\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ в топологии $\sigma\left(\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X, Y), Y^* \widehat{\otimes}^{q'} X\right)$ (следовательно, и в топологии компактной сходимости), но

(ii) для всякого $C < \infty$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, нормы которых $\|\Phi\| \leqslant C$.

2) *Существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ такие, что*

(i) $U \in X^* \widehat{\otimes}^2 Y$ (очевидно), но

(ii) если $q < 2$, то для всякого $C > 0$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, для которых $\pi_q^{\mathrm{dual}}(\Phi) \leqslant C$.

Доказательство. 1) Используя следствие 12.8,1), построим для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие банаховы пространства X_n, Y_n и оператор $U_n \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X_n, Y_n)$, что $X_n \in$ BAP, $\pi_q^{\mathrm{dual}}(U_n) < 2^{-n}$ и U не лежит в замыкании множества конечномерных операторов φ с нормами $\|\varphi\| \leqslant n$ в топологии компактной сходимости. Положим $X := (\sum X_n)_{l_2}$, $Y := (\sum Y_n)_{l_2}$, $U := \oplus U_n$. Ясно, что тройка (X, Y, U) удовлетворяет условию (ii) и X обладает свойством аппроксимации. Из последнего вытекает, что каноническое отображение $Y^* \widehat{\otimes}^{q'} X \to \mathrm{N}^{q'}(Y, X)$ имеет тривиальное ядро. Следовательно, множество $X^* \otimes Y$ плотно в сопряженном к $Y^* \widehat{\otimes}^{q'} X$ пространстве[26] $\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ в *-слабой топологии (в противном случае, по теореме Хана-Банаха, найдется ненулевой тензорный элемент из $Y^* \widehat{\otimes}^{q'} X$, порождающий нулевой оператор).

2) Аналогично, используя часть 2) следствия 12.8, найдем для какой-либо последовательности $q_n < 2$, $q_n \nearrow 2$, банаховы пространства X_n, Y_n и операторы $U_n \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(X_n, Y_n)$, обладающие следующими свойствами: $X_n \in$ BAP, $\pi_1^{\mathrm{dual}}(U_n) < 2^{-n}$ и U_n лежит в замыкании множества конечномерных операторов φ с нормами $\pi_{q_n}^{\mathrm{dual}}(\varphi) \leqslant n$ в топологии компактной сходимости. Полагая $X := (\sum X_n)_{l_2}$, $Y := (\sum Y_n)_{l_2}$ и $U := \oplus U_n$, мы получаем нужную нам тройку (X, Y, U). ■

Теорема 12.5. 1) *Существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in L(Y, X)$ такие, что для каждого $p \in [1, 2)$ $T \notin \mathrm{N}^p(Y, X)$, но $\pi_X T \in \mathrm{N}_1(Y, X^{**})$; более того, существует такая последовательность (T_n) конечномерных операторов в $Y^* \otimes X$, что $T_n \to T$ по норме, индуцированной из $\mathrm{N}_1(Y, X^{**})$.*

2) *Существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in \mathrm{L}(Y, X)$ такие, что T не факторизуется ни через какое пространство $L_1(\mu)$ (следовательно, не лежит в N^r, если $r \in [1, \infty]$), но для каждого $p \in (2, \infty]$ $\pi_X T \in \mathrm{N}^p(Y, X^{**})$; более того, существует такая последовательность $\{T_n\}$ конечномерных операторов в $Y^* \otimes X$, что $T_n \to T$ по любой из норм ν^p, $p > 2$, индуцированных из $\mathrm{N}^p(Y, X^{**})$.*

Доказательство. 1) Пусть $p_n < 2$, $n = 1, 2, \ldots$, и $p_n \nearrow 2$. Используя следствие 12.9,1), найдем такие банаховы пространства X_n, Y_n и конечномерный оператор

[26] Пространство Y рефлексивно, поэтому $\Pi_q(Y^*, X^*) = \mathrm{QN}_q(Y^*, X^*)$.

$T_n \in Y_n^* \otimes X_n$, что $X_n \in \mathrm{BAP}$, $\|T_n\|_{\mathrm{N}^{p_n}(Y_n,X_n)} \geqslant n$ и $\|T_n\|_{\mathrm{I}^1(Y_n,X_n^{**})} \leqslant 2^{-n}$. Полагая $X := (\sum X_n)_{l_2}$, $Y := (\sum Y_n)_{l_2}$ и $T := \oplus T_n$, мы получаем нужную нам тройку (X, Y, T).

2) Пусть $p_n > 2$, $n = 1, 2, \ldots$, и $p_n \searrow 2$. Используя следствие 12.9,2), найдем такие банаховы пространства X_n, Y_n и конечномерный оператор $T_n \in Y_n^* \otimes X_n$, что $X_n \in \mathrm{BAP}$, $\|T_n\|_{\mathrm{N}^\infty(Y_n,X_n)} \geqslant n$ и $\|T_n\|_{\mathrm{I}^{p_n}(Y_n,X_n^{**})} \leqslant 2^{-n}$. Если мы положим $X := (\sum X_n)_{l_2}$, $Y := (\sum Y_n)_{l_2}$ и $T := \oplus T_n$, то получим оператор T, не факторизуемый ни через какое пространство $L_1(\mu)$, но второй сопряженный к которому лежит в N^p для каждого $p > 2$, так как $p_n \to 2$. ■

Следствие 12.11. *Существует банахово пространство со свойством* AP *(следовательно, со свойством* $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ *для каждого* $p \in [1, \infty]$*), не обладающее свойством* $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$ *ни для какого* $p, p \neq 2$. ■

Так как $\mathrm{I}^p(Y, Z) = \mathrm{N}^p(Y, Z)$, если пространство Z вполне сепарабельно (см. следствие 11.1), то из теоремы 12.5 мы, в частности, получаем:

Следствие 12.12. *Для каждого* $p \neq 2$ *существует* $\mathrm{I}_p^{\mathrm{dual}}$*-оператор, не лежащий в идеале* I^p. ■

Следствие 12.13. *Для каждого* $p \neq 2$ *существует не* N^p*-оператор с p-ядерным сопряженным, аппроксимируемый конечномерными по* N_p^{dual}*-норме.* ■

Следствие 12.14. *Существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство* $L_1(\mu)$*, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство* l_1 *и который аппроксимируется конечномерными по* $\mathrm{N}_\infty^{\mathrm{dual}}$*-норме.* ■

§13. Изометрические несюръективные вложения $\mathrm{N}^p(X, Y)$ в $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(X, Y)$

В этом параграфе мы приведем, в некотором смысле, альтернативу части результатов предыдущего раздела. Мы установим, в частности, что существуют достаточно хорошие пространства X, Y (например, Y^{**} с базисом), для которых естественные вложения $\mathrm{N}^p(X, Y)$ в $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(X, Y)$ не являются отображениями "на" (эти вложения изометрические, поскольку $Y^{**} \in \mathrm{MAP}$).

Теорема 13.1. 1) *Существуют такие сепарабельное рефлексивное пространство* F*, вполне сепарабельное пространство* Z *и операторы*

$$T \in \mathrm{L}(F, Z), \quad U \in \bigcap_{q>2} \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(Z^{**}, F)$$

что Z^{**} *имеет базис,* $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ *и* $T \notin \mathrm{N}^p(F, Z)$*, если* $p < 2$.

2) *Для каждого* $s > 2$ *существуют такие сепарабельное рефлексивное пространство* F*, вполне сепарабельное пространство* Z*, операторы* $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ *и*

$U \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(Z^{**}, F)$, *что* Z^{**} *имеет базис,* $U|Z = 0$, $\mathrm{trace}\ UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_s^{\mathrm{dual}}(F, Z)$ *и* $T \notin \mathrm{N}^{\infty}(F, Z)$.

3) *Пусть* $1 < p < 2$ *и* $1/\alpha = 1/2 + 1/p$. *Существуют факторпространство* E *пространства* l_p, *сепарабельное рефлексивное пространство* F, *вполне сепарабельное пространство* Z, *операторы* $T \in \mathrm{L}(F, Z)$, $U \in \bigcap_{s>p'} \mathrm{QN}_s^{\mathrm{dual}}(Z^{**}, F)$ *и фактоpотображение* $\Phi : Z^{**} \to E$, *обладающие следующими свойствами:*

(i) Z^{**} *имеет базис, подпространство* $\Phi^*(E^*)$ *дополняемо в* Z^{***}, $\mathrm{Ker}\,\Phi = Z$;

(ii) $\mathrm{trace}\ UT^{**} = 1$, $U|Z = 0$;

(iii) $T \in \mathrm{N}_\alpha(F, Z^{**})$, *но* $T \notin \mathrm{N}^q(F, Z)$, *каково бы не было* $q < p$; *с другой стороны,* $T \in \mathrm{N}^p(F, Z)$.

Доказательство. 1). По теореме 12.2,3), существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства F, G, оператор $U_0 \in \bigcap_{q>2} \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(G, F)$ и элемент $w_0 \in F^* \widehat{\otimes}_1 G$ такие, что $\mathrm{trace}\, w_0 \circ U_0 = 1$ и $\mathrm{trace}\, w_0 \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in G^* \otimes F$ (т.е. $\widetilde{w}_0 = 0$). Пусть Z и $\Phi : Z^{**} \to G$ — из леммы 0.4.9.2, примененной к пространству G. Положим $U = U_0 \Phi$, и пусть $T \in \mathrm{N}_1(F, Z^{**})$ — такой оператор, что $\Phi \circ T = w_0$ (так как $Z^{**} \in \mathrm{AP}$, то $\mathrm{N}_1(F, Z^{**}) = F^* \widehat{\otimes}_1 Z^{**}$). Ясно, что $\mathrm{trace}\ U \circ T = 1$ (при доказательстве утверждения 2) мы распишем это место подробнее). Так как $\mathrm{Ker}\ \Phi = \pi Z$, то $T(F) \subset \mathrm{Ker}\ \Phi = \pi Z$, т.е. $T \in \mathrm{L}\,(F, Z)$. Наконец, если $T \in \mathrm{N}^p(F, Z)$ при $p < 2$, то для произвольного N^p-представления T в виде $\sum f_n' \otimes z_n$ имеем:

$$1 = \mathrm{trace}\ U \circ T = \sum \langle f_n', U z_n \rangle = \sum \langle U^* f_n', z_n \rangle = 0.$$

Поэтому $T \notin \mathrm{N}^p(F, Z)$.

2). Воспользовавшись следствием 12.5, найдем такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства E, F, оператор $U_0 \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}^s E$, что $\mathrm{trace}\, z \circ U_0 = 1$ и $\mathrm{trace}\, z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$. Пусть $z = \sum f_n^* \otimes e_n$ — представление z в пространстве $F^* \widehat{\otimes}^s E$. Как и выше, рассмотрим пространство Z и гомоморфизм $\Phi : Z^{**} \to E$ из леммы 0.4.9.2 для $G = E$ и положим $U = U_0 \Phi$. Определим оператор $T \in \mathrm{N}^s(F, Z^{**})$, $T := \sum f_n' \otimes z_n''$, таким образом, чтобы было верно равенство $\Phi T = z$. Очевидно, $U|_Z = 0$ и $T(F) \subset \pi Z$. Кроме того,

$$\mathrm{trace}\ U \circ T = \sum \langle f_n', U z_n'' \rangle = \sum \langle f_n', U_0 e_n \rangle = \mathrm{trace}\ z \circ U_0 = 1.$$

Тот факт, что $T \notin \mathrm{N}^{\infty}(F, Z)$, проверяется так же, как и в случае 1) (используем то, что $U \in \mathrm{QN}^1(Z^{**}, F)$).

3). Пусть $E, F,\ z \in F^* \widehat{\otimes}_\alpha E$, $\overline{V} \in \bigcap_{s>p'} \mathrm{QN}_s^{\mathrm{dual}}$ — из теоремы 12.2,4), так что $\mathrm{trace}\ V \circ z = 1$ и $\widetilde{z} = 0$. Пусть, далее, Z и $\Phi : Z^{**} \to E$ — вполне сепарабельное пространство и факторотображение, построенные для пространства $G = E$ согласно лемме 0.4.9.2. Положим $U := \overline{V} \Phi : Z^{**} \to E \to F$. Если $z = \sum \lambda_j f_j' \otimes e_j$ — представление для z в пространстве $F^* \widehat{\otimes}_\alpha E$, где положительная последовательность (λ_j)

лежит в l_α, а последовательности (f'_j) и (e_j) ограничены, возьмем такую ограниченную в Z^{**} последовательность (z''_j), что $\Phi z''_j = e_j$ для каждого j. Поскольку $\Phi T = \widetilde{z} = 0$, то $T(F) \subset \pi_Z Z = Z$. Кроме того, так как $\operatorname{Ker}\Phi = Z$, то $U|Z = 0$. Далее, $\operatorname{trace} U \circ T = \sum \lambda_j \langle f'_j, U z''_j\rangle = \sum \lambda_j \langle f'_j, \overline{V} e_j\rangle = \operatorname{trace} \overline{V} \circ z = 1$. С другой стороны, если бы оператор T принадлежал пространству $\mathrm{N}^q(F, Z)$ для некоторого $q < p$, то, в силу равенства $U|Z = 0$, след $\operatorname{trace} U \circ T$ равнялся бы нулю. Таким образом, очевидно, $T^{**} \in \mathrm{N}_\alpha(F, Z^{**})$, но $T \notin \mathrm{N}^q(F, Z)$ ни для какого $q < p$. Тот факт, что оператор $T : F \to Z$ лежит в идеале N^p вытекает из общих соображений (надо надлежащим образом разложить последовательность (λ_j) на множители, используя соотношение $1/\alpha = 1/p + 1/2$). ■

Следствие 13.1. 1) *Существуют такие вполне сепарабельные пространства W, Z и оператор $T \in \mathrm{L}(W, Z)$, что W и Z^{**} имеют базисы, $T^* \in \mathrm{N}_1(Z^*, W^*)$, но $T \notin \mathrm{N}^p(W, Z)$, если $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют такие вполне сепарабельные пространства W и Z, и оператор $T \in \mathrm{L}(W, Z)$, что W и Z^{**} имеют базисы, $T^* \in \mathrm{N}_s(Z^*, W^*)$, но T не факторизуется ни через какое пространство $L^1(\mu)$.*

Для *доказательства* достаточно применить к пространству F из предыдущей теоремы лемму Линденштраусса 0.4.9.1 и воспользоваться (для установления самого последнего утверждения следствия) тем фактом, что пространство Z обладает свойством Радона-Никодима: если оператор T представим в виде произведения AB, где $A \in \mathrm{L}(L_1(\mu), Z)$ и $B \in \mathrm{L}(W, L_1(\mu))$, то оператор A факторизуется через пространство l_1 как всякий оператор, действующий из $L_1(\mu)$ в пространство со свойством Радона-Никодима. Наконец, оператор B будет слабо компактным в силу рефлексивности пространства F и того, что в конструкции из леммы 0.4.9.1 сопряженное к соответствующему факторотображению дополняемо вкладывает F^* в пространство W^*. Пространство l_1 обладает свойством Шура, и поэтому оператор AB будет N^∞-оператором вопреки утверждению 2) теоремы 12.1. ■

Следствие 13.2. *Существует сепарабельное пространство V, имеющее базис и такое, что для каждого $p \geqslant 1, p \neq 2$, существует оператор $T \in \mathrm{L}(V, V)$, для которого $T^* \in \mathrm{N}_p(V^*, V^*)$, но $T \notin \mathrm{N}^p(V, V)$.*

Для *доказательства* надо сложить по типу l_2 последовательности подходящих пространств и операторов, предоставляемых предыдущим следствием. ■

Из следствия 13.1 мы также получаем:

Следствие 13.3. *Идеал конечномерных операторов вкладывается в каждый из идеалов $(\mathrm{N}^r)^{\mathrm{reg}}$, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не плотно. Таким образом, ни один из идеалов N^r, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не только не является регулярным, но и идеал $(\mathrm{N}^r)^{\mathrm{reg}}$ не минимален.*

Доказательство. Справедливость утверждения для $r \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ вытекает непосредственно из теоремы 13.1, пп. 1) и 2) (все дело в том, что второе сопряженное Z^{**} имеет свойство метрической аппроксимации). Что касается случая, когда

$2/3 < r < 1$ (в теореме 5.1, п. 3), этому соответствует изменение параметра α от 2/3 до 1), то здесь надо поступать так.

Пусть мы находимся в условиях утверждения 3) из теоремы 13.1. Если оператор T, лежащий в идеале $N_\alpha^{\rm reg}$, приближался бы операторами из пространства $F^* \otimes Z$ по $\nu_\alpha^{\rm reg}$-норме, то тем более он приближался бы соответствующими конечномерными операторами по норме $\nu_1^{\rm reg}$. Но естественное вложение пространства $F^* \widehat{\otimes}_1 Z$ в пространство $F^* \widehat{\otimes}_1 Z^{**}$ изометрично, а поскольку в Z^{**} имеется свойство метрической аппроксимации, то изометрично и естественное вложение пространства $N_1(F, Z)$ в операторное пространство $N_1(F, Z^{**})$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации замыкание множества $F^* \otimes Z \subset N_1(F, Z)$ содержало бы оператор T, и он был бы ядерным; но он не является даже $(p-\varepsilon)$-ядерным, если $1/\alpha = 1/2 + 1/p$ и $1 < p - \varepsilon < p$. $\blacksquare$

Из приведенных только что рассуждений, следует, между прочим, что *идеал конечномерных операторов не плотен в* $N_\alpha^{\rm reg}$, $2/3 < \alpha < 1$, *даже по* ν^q- *и* ν_q-*нормам, если только* $1/\alpha < 1/q + 1/2$.

Замечание 13.1. Нерегулярность идеала N_1 впервые установлена в [76]. Нерегулярность идеала N_r при $1 \leqslant r \neq 2 \leqslant \infty$ была доказана в [41, 130]. В работе [43] этот факт был распространен на все идеалы N_r, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$. В [48] было показано, что все идеалы N_p при $2/3 < r < 2$ не минимальны, и что конечномерные операторы не плотны в них. В [50] получена нерегулярность идеалов N^p, $1 \leqslant r \neq 2 \leqslant \infty$. Данный параграф (и работа [52]) ставит точку (или точку с запятой?) в рассмотрении соответствующих вопросов в шкалах r-ядерных и дуально r-ядерных операторов. Однако, остается открытым еще вопрос (хотя бы) о регулярности идеалов компактно p-факторизуемых операторов (см., например, [51]).

В монографии [27], среди большого числа так называемых теорем умножения операторных идеалов можно найти ряд результатов, в которых участвует регулярная оболочка того или иного нормированного идеала. Это вполне естественно, поскольку не каждый, даже минимальный, операторный идеал регулярен; и потому не всегда удается показать, что перемножая два оператора из классических (даже взаимно сопряженных друг к другу) операторных идеалов, мы получим оператор, который вроде бы должен лежать в таком-то идеале, а не только в его регулярной оболочке. Один из нетривиальных примеров — [27], теорема 24.6.4, соотношение (3), которая утверждает, например, что для $p \in (1, \infty)$ всегда имеет место включение $I_p^{\rm Gr} \circ \Pi_{p'} \subset N_1^{\rm reg}$.

В этом параграфе один из основных объектов исследования, — идеал дуально p-ядерных операторов N^p. Поэтому именно для него, мы приведем аналог упомянутой теоремы из [27]. Напомним, что включение $[A_1, a_1] \subset [A_2, a_2]$ для двух квазинормированных идеалов означает теоретико-множественное включение с неравенством $a_2 \leqslant a_1$ для соответствующих квазинорм.

Предложение 13.1. *Пусть* $1 < r, s < \infty$ *и* $1/r + 1/s = 1/p \leqslant 1$. *Тогда*

(1) $$[\Pi_r^{\mathrm{dual}}, \pi_r^{\mathrm{dual}}] \circ [\Pi_s^{\mathrm{dual}}, \pi_s^{\mathrm{dual}}] \subset [(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{sur}}, (\nu^p)^{\mathrm{sur}}]$$

(2) $$[\mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^r, i_{\mathrm{Gr}}^r] \circ [\Pi_s^{\mathrm{dual}}, \pi_s^{\mathrm{dual}}] \subset [(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}, (\nu^p)^{\mathrm{reg}}],$$

(3) $$[\Pi_r^{\mathrm{dual}}, \pi_r^{\mathrm{dual}}] \circ [\mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^s, i_{\mathrm{Gr}}^s] \subset [\mathrm{N}^p, \nu^p].$$

Доказательство. Идеалы Π_q инъективны, поэтому идеалы Π_q^{dual} сюръективны. Переходя к сюръективным оболочкам в (3), мы видим, что (1) есть следствие (3).

Для доказательства (2) мы сначала приведем правильную формулу для [27, теорема 24.6.4, (2)], — это одно из двух соотношений, указанных *в формулировке* теоремы 24.6.4 в [27] с опечаткой! Надо надеяться, что в оригинале [125] этих двух опечаток (см. формулы (2) и (3) в теореме 24.6.4) нет. Доказательства в [27] тех формул, которые имелись в виду автором монографии, однако, совершенно точны. Вот доказанное в [27] соотношение (2):

$$[\Pi_r, \pi_r] \circ [\mathrm{I}_s^{\mathrm{Gr}}, i_s^{\mathrm{Gr}}] \subset [\mathrm{N}_p, \nu_p].$$

Из него вытекает включение

$$[\mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^r, i_{\mathrm{Gr}}^r] \circ [\Pi_s^{\mathrm{dual}}, \pi_s^{\mathrm{dual}}] \subset [\mathrm{N}_p^{\mathrm{dual}}, \nu_p^{\mathrm{dual}}] \subset [(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}, (\nu^p)^{\mathrm{reg}}].$$

Теперь — правильная формула для соотношения (3) из [27]:

($3'$) $$[\mathrm{I}_r^{\mathrm{Gr}}, i_r^{\mathrm{Gr}}] \circ [\Pi_s, \pi_s] \subset [\mathrm{N}_p, \nu_p]^{\mathrm{reg}}.$$

Мы готовы доказать (3).

Пусть $S \in \mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^s(Z, X)$, $T \in \Pi_r^{\mathrm{dual}}(X, Y)$. Так как $T^* \in \Pi_r(Y^*, X^*)$, то, по факторизационной теореме Пича для таких операторов, для каждого $\varepsilon > 0$ оператор T^* представим как произведение A^*B^* операторов A^* и B^*, где, для некоторого рефлексивного пространства F, $A \in \mathrm{L}(X, F)$ с нормой $\|A\| = 1$ и $B \in \Pi_r^{\mathrm{dual}}(F, Y)$ с нормой $\pi_r^{\mathrm{dual}}(B) < (1+\varepsilon)\pi_r(T^*) = (1+\varepsilon)\pi_r^{\mathrm{dual}}(T)$ (сначала мы получаем оператор $B_0 \in \Pi_r^{\mathrm{dual}}(F, Y^{**})$, а затем, сужая его на замыкание образа оператора A, и оператор B). По следствию 11.1, оператор AS принадлежит идеалу N^s и, значит, допускает факторизацию вида $B_1 \Delta A_1$ (см. диаграмму 1), в которой $\|B_1\| = 1$, $\|A_1\| = 1$ и $\nu^s(\Delta) < (1+\varepsilon)\nu^s(AS) \leqslant (1+\varepsilon) i_{\mathrm{Gr}}^s(S)$.

$$Z \xrightarrow{A_1} l_{s'} \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{B_1} F \xrightarrow{B} Y$$

Диагр. 1

Оператор $B_1\Delta$ лежит в пространстве $\mathrm{N}^s(l_{s'}, F)$, а оператор B — в $\Pi_r^{\mathrm{dual}}(F, Y)$, поэтому сопряженный к суперпозиции этих операторов попадает в пространство $\mathrm{N}_s \circ \Pi_r(Y^*, l_s)$ и, по формуле ($3'$), в пространство $\mathrm{N}_p(Y^*, l_s)$. Отсюда следует, что $BB_1\Delta \in (\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(l_{s'}, Y)$. Остается применить теорему 11.1, — так как рефлексивное пространство $l_{s'}$ удовлетворяет условию метрической аппроксимации, то согласно этой теореме оператор $BB_1\Delta$, а, значит, и TS является N^p-оператором. ■

§14. Два применения: полунепрерывность операторных норм и достижимость тензорных норм

1. Одно применение в теории операторных идеалов. Напомним, что *слабая операторная топология* в $\mathrm{L}(X,Y)$ — это топология, базис окрестностей которой составляют множества

$$N(T;A,B,\varepsilon) := \{U :\ U \in \mathrm{L}(X,Y), |\langle y',(T-U)x\rangle| < \varepsilon, y' \in B, x \in A\},$$

где A и B — произвольные конечные подмножества соответственно в X и Y^*, $\varepsilon > 0$ — произвольно [12, с. 512-513], [27, п. A.3.3]. Таким образом, в слабой операторной топологии сеть $(T_\nu)_\nu$ сходится к T тогда и только тогда, когда сеть $(\langle y',T_\nu x\rangle)$ сходится к $\langle y',Tx\rangle$ для всех $x \in X$ и $y' \in Y^*$.

Рассмотрим простейший пример, в котором естественным образом возникает сходимость в слабой операторной топологии (он нам пригодится ниже). Пусть α — некоторая тензорная норма на классе $\mathfrak{T}$ всех тензорных произведений банаховых пространств. Она не сильнее проективной и не слабее инъективной тензорных норм. Следовательно, для данной пары банаховых пространств X,Y сопряженное к тензорному произведению $Y^* \otimes_\alpha X$ пространство отождествляется с некоторым пространством операторов $\mathrm{G}(X,Y^{**})$, снабженным соответствующей нормой. Поэтому *-*слабая сходимость некоторой сети в этом операторном пространстве влечет сходимость этой сети в слабой операторной топологии.*

Пусть a — квазинорма на операторном идеале A . Говорят, что *a слабо полунепрерывна снизу* [27, п. 8.6.16], если для любых банаховых пространств X,Y и для каждой сети $(S_\nu)_\nu$ операторов из пространства $\mathrm{A}(X,Y)$, сходящейся к $S \in \mathrm{A}(X,Y)$ в слабой операторной топологии, выполняется неравенство

$$a(S) \leqslant \varliminf_\nu a(S_\nu).$$

В качестве примера приведем предложение из [27, п. 8.7.17]: если $[\mathrm{A},a]$ — максимальный p-нормированный (для квазинормы выполняется p-неравенство треугольника [27, 6.2.1]) операторный идеал, то квазинорма a слабо полунепрерывна снизу. Таковы, например, идеалы Π_p, $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$ [27, пп. 17.1.3, 19.2.2].

В [27, п. 8.7.18] отмечается, что "используя контрпример Энфло, можно показать, что ядерная норма N не является слабо полунепрерывной снизу." Кстати, в формулировке предложения из того же пункта в [27], приведенного без доказательства, содержится очевидная опечатка (*это перевод монографии А.Пича* [125], *а не ее оригинал*). Поэтому формально, по крайней мере, в русскоязычной литературе, соответствующий пример с подробным рассмотрением не появлялся. Сейчас мы дополним картину и обобщим приведенное утверждение А.Пича, приведя большое количество примеров не слабо полунепрерывных снизу идеальных норм.

Теорема 14.1.1. *Никакая из норм ν_p или ν^p при $p \in [1,\infty]$, $p \neq 2$, не является слабо полунепрерывной снизу.*

Доказательство. Пусть a обозначает одну из норм на соответствующем идеале операторов: ν_p или ν^p ($p \in [1,\infty]$), и $[\mathrm{A},a]$ — соответствующий операторный идеал.

Сужая идеальную норму a на операторный идеал всех конечномерных операторов, мы автоматически переносим ее на класс всех тензорных произведений вида $Z^* \otimes W$, пополнения которых по этой норме мы будем обозначать *в этом доказательстве* через $Z^* \widetilde{\otimes}_a W$ (так нам удобнее, и это обозначение согласуется со всеми аналогичными обозначениями в этой работе для рассматриваемых ниже пространств X, Y).

Рассмотрим следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} Y^* \widetilde{\otimes}_a X & \xrightarrow[1-1]{J} & \mathrm{A}^{**}(Y, X^{**}) \\ \mathrm{A}^*(X, Y) & \xleftarrow{J^*} & (\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**}))^* \xleftarrow{\pi} X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y. \end{array}$$

Диагр. 1

Здесь в качестве банаховых пространств X, Y мы берем *рефлексивное* сепарабельное пространство Y и *вполне сепарабельное* пространство X, $X \in \mathrm{AP}$, из теоремы 7.3.2, либо из [130, теорема 4.1] — в зависимости от того какую норму обозначает a; см. также теорему 12.5 выше для случая ν^p-норм (то, что пространство X в теореме 7.3.2 вполне сепарабельно, вытекает из доказательства этой и предшествующих ей теорем). Эти пространства обладают тем свойством, что каноническое отображение вложения J, появившееся в диаграмме 1, взаимно однозначно, но не является изоморфным вложением.

Обозначим через B_a замкнутый единичный шар пространства $Y^* \widetilde{\otimes}_a X$, а через w^* — *-слабую топологию в пространстве $\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**})$ (это пространство сопряжено к $X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y$)

Пусть $\varepsilon > 0$. Если U — такой оператор из $\mathrm{A}(Y, X)$, что $J(U) \notin \overline{J(B_a)}^{w^*}$, то найдется элемент $\varphi \in X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y$, для которого

$$\sup_{z \in B_a} |\langle \varphi, J(z) \rangle| = 1, \quad \langle \varphi, J(U) \rangle > 1.$$

Отображение $J^* \pi : X^* \widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y \to \mathrm{A}^*(X, Y)$ есть изометрическое вложение, поэтому норма φ как функционала на $Y^* \widetilde{\otimes}_a X$ — та же, что и его норма как элемента пространства $(\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**}))^*$, т.е. равна 1. Поэтому $a^{**}(J(U)) \geqslant \langle \varphi, J(U) \rangle > 1$. Таким образом, если $J(U)$ не лежит в $\overline{J(B_a)}^{w^*}$, то его a^{**}-норма больше единицы.

Предположим теперь, что никакой элемент U из $Y^* \widetilde{\otimes}_a X$, не принадлежащий шару $(1+\varepsilon)B_a$, не попадает при отображении J во множество $\overline{J(B_a)}^{w^*}$. Тогда, как было только что установлено, для любого такого элемента $a^{**}(J(U)) > 1$, и это ведет к противоречию с тем фактом, что вложение J не является изоморфным.

Итак, мы окончательно получили, что существует по крайней мере один оператор $U_0 \in \mathrm{A}(Y, X)$, для которого $a(U_0) > 1 + \varepsilon$, и образ $J(U_0)$ которого принадлежит *-слабому замыканию множества $J(B_a)$. Но *-слабая сходимость в $\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**})$ влечет сходимость в слабой операторной топологии, откуда вытекает, что найдется такая сеть $(U_\nu)_\nu \subset Y^*\widetilde{\otimes}_a X$, что $a(U_\nu) \leqslant 1$, (U_ν) сходится к U_0 в слабой операторной топологии, но $a(U_0) > 1+\varepsilon$. В заключение доказательства отметим, что в качестве ε можно взять сколь угодно большое число. ■

2. Одно применение в теории тензорных произведений. Определения тензорных норм α и ассоциированных с ними операторных идеалов $\mathrm{N}_{[\alpha]}$ приведены в п. 0.3.3. Для формулировки теоремы этого пункта нам понадобятся некоторые дополнительные сведения из теории нормированных тензорных произведений [67].

Пусть α — тензорная норма. Мы будем обозначать через $\alpha(z; X, Y)$ значение α на тензорном элементе $z \in X \otimes Y$. Для банаховых пространств E и F и для $z \in E \otimes F$ полагаем (см. [67; 12.4])

$$\overrightarrow{\alpha}(z; E, F) := \inf\{\alpha(z; M, N) \,|\, M \subset E, N \subset F, z \in M \otimes N\},$$

где infimum берется по всем конечномерным подпространствам $M \subset E$ и $N \subset F$, и

$$\overleftarrow{\alpha}(z; E, F) := \sup\{\alpha(Q_K^E \otimes Q_L^F(z); E/K, F/L) \,|\, K \subset E, L \subset F\},$$

где supremum берется по всем замкнутым подпространствам $K \subset E$ и $L \subset F$ конечной коразмерности (здесь $Q_K^E : E \to E/K$ — каноническое отображение).

Известно (см. [1; Prop. 12.4]), что $\overrightarrow{\alpha}$ и $\overleftarrow{\alpha}$ — тензорные нормы и

$$\overleftarrow{\alpha} \leq \alpha \leq \overrightarrow{\alpha}.$$

Тензорная норма α называется *конечно порожденной* (finitely generated), если $\alpha = \overrightarrow{\alpha}$ и *ко-конечно порожденной* (cofinitely generated), если $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$.

Примеры. Тензорные нормы g_p и w_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, из [67] являются конечно порожденными. В обозначениях, которые мы использовали ранее, $g_p(\cdot) = \|\cdot\|_p$ и $w_p = k_p^0$. Напомним (см. п. 0.3.3 и начало главы II), что для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $z \in X \otimes Y$

$$\|z\|_p := \inf \ \alpha_p(x_k)\,\varepsilon_{p'}(y_k)$$

и

$$k_p^0(z) := \inf \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \varepsilon_p(x_k)\,\varepsilon_{p'}(y_k),$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^N x_k \otimes y_k$.

Отметим, что $g_\infty = w_\infty$ и $w_{p'} = w_p^{\mathrm{dual}}$ для $p \in [1, \infty]$. Кроме того, g_p — тензорная норма, ассоциированная с p-ядерными операторами, а w_p — тензорная норма, ассоциированная с операторами, факторизующимися через l_p компактным образом.

Тензорная норма α называется *вполне достижимой* (totally accessible), если $\overrightarrow{\alpha} = \overleftarrow{\alpha}$, т. е. если α конечно и ко-конечно порождена.

Мы будем использовать предложение 21.7,(2) из [67]:

(∗) *Если конечно порожденная тензорная норма α вполне достижима, то каждое банахово пространство обладает свойством α-аппроксимации.*

Пример Энфло показывает, что проективная тензорная норма Гротендика не является вполне достижимой. Такие тензорные нормы, как нормы, индуцированные естественным образом операторными π_p-нормами вполне достижимы.

В [67] в качестве следствия утверждения (∗) отмечается, что из результатов работы автора [130] вытекает тот факт, что нормы g_p не являются вполне достижимыми для $1 < p < \infty$.

И там же поставлен вопрос: являются ли вполне достижимыми тензорные нормы g_∞, w_1, w_∞?

Ответ дан в работе [93]. Следующая теорема принадлежит автору. Независимо и примерно одновременно ответ на приведенные вопросы А. Дефанта и Ф. Флорета дал швейцарский математик Ф. Оэртель [114], используя совершенно другой подход.

Теорема 14.2.1. *Последние три тензорных нормы не являются вполне достижимыми.*

Доказательство. Достаточно применить утверждение (∗) и следствие 7.1.2 для $p = \infty$ с одной стороны и утверждение (∗) и следствие 12.7 для $p = 1$ с другой стороны. ■

Таким образом, ответы на эти три поставленных в [67] вопроса отрицательны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенштейн М.Х., Брудный Ю.А., *Вычислимые интерполяционные функторы*, Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль: ЯГУ, 1986, pp. 3–35.
2. Александров П.С., Урысон П.С., *Мемуар о компактных топологических пространствах*, М.: Наука, 1971.
3. Бурбаки Н., *Общая топология*, вып. 3 М.: Наука, 1975.
4. Бухвалов А.В., *Пространства вектор-функций и тензорные произведения*, Сиб. матем. ж. **13** (1972), No 6 1229-1238.
5. Бухвалов А.В., *Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой*, Докл. АН СССР **208** (1973), No 5 1012-1015.
6. Бухвалов А.В., *Аналитическое представление операторов при помощи измеримых вектор-функций*, Вестник ЛГУ (1974), No 7 157-158.
7. Бухвалов А.В., *Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой*, Изв. вузов (1975), No 11 21-32.
8. Бухвалов А.В., *О двойственности функторов, порождаемых пространствами вектор-функций*, Изв. АН СССР **39** (1975), No 6 1284-1309.
9. Бухвалов А.В., *Факторизация компактных операторов и пример рефлексивной банаховой решетки без свойства аппроксимации*, ДАН СССР **227** (1976), no. 3.
10. Глускин Е.Д., Кисляков С.В., Рейнов О.И., *Тензорные произведения абсолютно p-суммирующих операторов и правые (Ip, Np)-мультипликаторы*, Записки научн. сем. ПОМИ **89** (1979), 85-102.
11. Гротендик А., *О пространствах $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{DF})$*, Математика **2** (1958), no. 3, 81–128.
12. Данфорд Н., Шварц Дж.Е., *Линейные операторы (общая теория) Том I*, Москва: Иностранная литература (1962), 895 с.
13. Кадец М.И., Фонф В.П., *Некоторые свойства множества крайних точек единичного шара пространства Банаха*, Мат. Заметки **20** (1976), 315–319.
14. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г., *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, М.—Л., Гостехиздат (1950).
15. Канторович Л.В., Акилов Г.П., *Функциональный анализ*, второе издание, Москва: Наука, 1977, 742 с.
16. Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, Москва: Наука (1984), 496.
17. Кисляков С.В., *О пространствах с малым аннулятором*, Записки науч. семин. ЛОМИ **65** (1976), 192–195.
18. Кисляков С.В., *Два замечания по поводу равенства $\Pi_p(X,\cdot) = I_p(X,\cdot)$*, Записки науч. семин. ЛОМИ **113** (1981), 135-148.
19. Левин В. Л., *Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые KB-линеалами*, Тр. Моск. матем. об-ва **20** (1969), 42–82.
20. Левин В. Л., *К двойственности некоторых классов линейных операторов, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками*, Сиб. матем. ж. **14** (1973), no. 3, 599–608.
21. Лидский В.Б., *Несамосопряженные операторы, имеющие след*, Докл. АН СССР **125** (1959), no. 3, 485–488.
22. Люстерник Л.А., Соболев В.И., *Краткий курс функционального анализ*, М.: Высш. Школа (1982), 271.
23. Макаров Б.М., Самарский В.Г., *Слабая секвенциальная полнота и близкие к ней свойства некоторых пространств операторов*, Теория операторов и теория функций, 1, ЛГУ, Ленинград, 1983, 122-144
24. Натансон И.П., *Теория функций вещественной переменной*, М.: Наука, 1974.
25. Оя Э., Рейнов О., *Контрпример А.Гротендику*, Известия АН Эстонской ССР. Физика – Математика **37** (1988), 14-17.
26. Пич А., *Ядерные локально выпуклые пространства*, Москва: Мир, 1967.

27. Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир, 1982, 536 с.
28. Рейнов О.И., *Свойство Радона-Никодима и интегральные представления линейных операторов*, Функц. анализ и его приложен. **9** (1975), 87-88.
29. Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, Докл. АН СССР **220** (1975), no. 3, 528-531.
30. Рейнов О.И., *Операторы типа RN и аналитические представления линейных операторов*, В кн. Теория операторов в функциональных пространствах, Новосибирск:Наука, 1977, pp. 283-295.
31. Рейнов О. И., *Некоторые классы множеств в банаховых пространствах и топологическая характеристика операторов типа RN*, Записки научн. сем. ЛОМИ **73** (1977), 224-228.
32. Рейнов О.И., *Геометрическая характеризация RN-операторов*, Матем. заметки **22** (1977), вып. 2, 189-202.
33. Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, Сиб. матем. журн. **19** (1978), 4 857-865.
34. Рейнов О.И., *RN–множества в банаховых пространствах*, Функц. анализ и его приложен. **12** (1978), no. 1, 80-81.
35. Рейнов О.И., *О некоторых классах линейных непрерывных отображений*, Матем. заметки **23** (1978), вып. 2, 285–286.
36. Рейнов О.И., *О двух вопросах в теории линейных операторов*, Применение функционального анализа в теории приближений, Калинин: КГУ, 1979, pp. 102-114.
37. Рейнов О.И., *Об одном классе универсально измеримых отображений*, Матем. заметки **26** (1979), no. 6, 949-954.
38. Рейнов О.И., *О наследственно заостренных множествах в банаховых пространствах*, Записки научн. сем. ПОМИ **89** (1979), 294-299.
39. Рейнов О. И., *Об интегральных представлениях линейных операторов, действующих из пространства $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$*, Матем. заметки **27** (1980), $N^\circ 2$ 283-290.
40. Рейнов О.И., *О некоторых векторно-решеточных характеристиках операторов типа RN*, Матем. заметки **27** (1980), вып. 4 607-620.
41. Рейнов О.И., *Свойства аппроксимации порядка p и существование не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными*, ДАН СССР **256** (1981), no. 1, 43-47.
42. Рейнов О.И. *О банаховых пространствах без свойства аппроксимации* Функц. анализ и его приложения. Т. 16. 1982. Вып. 4. С. 84-85.
43. Рейнов О.И., *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.:ЛГУ (1983), 145-165.
44. Рейнов О.И., *Простое доказательство двух теорем А. Гротендика*, Вестн. ЛГУ **7** (1983), 115-116.
45. Рейнов О.И., *Насколько плохим может быть банахово пространство со свойством аппроксимации?*, Матем. заметки **33** (1983), no. вып. 6,, 833-846.
46. О.И. Рейнов, *Аппроксимация операторов в банаховых пространствах*, Применения функционального анализа в теории приближений, Калинин, КГУ (1985), 128-142.
47. Рейнов О.И., *О непрерывности шкал некоторых операторных идеалов*, в кн. Проблемы математического анализа, вып. 19: Нелинейные уравнения и математический анализ, Новосибирск: Научная книга, 1999, pp. 193–214.
48. Рейнов О.И., *Аппроксимационные свойства* AP_s *и p-ядерные операторы (случай* $0 < s \leqslant 1$*)*, Записки научн. сем. ПОМИ **270** (2000), 277-291.
49. Рейнов О.И., *Геометрические свойства универсально измеримых отображений*, в кн. Проблемы математического анализа, вып. 21, Новосибирск: Научная книга, 2000, pp. 193-210.
50. Рейнов О.И., *О линейных операторах с p-ядерными сопряженными*, Вестник СПбГУ, Сер. 1 (2000), вып. 4 с. 24-27.
51. Рейнов О.И., *О факторизации операторов через пространства l_p*, Вестник СПб ГУ. Сер.1 **2** (2000), вып. 2 (No 8), 27-32.

52. Рейнов О.И., *Аппроксимационные свойства и некоторые классы операторов*, в кн. Проблемы математического анализа, вып. 23, Новосибирск: Научная книга, 2001, pp. 147-205.
53. Рейнов О.И., *Насколько плохим может быть банахово пространство со свойством аппроксимации? II*, в кн. Проблемы математического анализа, вып. 24, Новосибирск: Научная книга, 2002, pp. 205-216.
54. Шеффер Х., *Топологические векторные пространства*, Москва: Мир (1971), 360 с.
55. Эдвардс Р., *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, Москва, 1969. 1071 с..
56. Bourgain J., *On dentability and the Bishop-Phelps property*, Isr. J. Math. **28** (1977), no. 4, 265–271.
57. Bourgain J., Reinov O.I., *On the approximation properties for the space H^∞*, Math. Nachr. **122** (1985), 19-27.
58. Bourgin R.D., *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property*, Lecture Notes in Math., 993 Springer, Berlin-Hiedelberg-New York, 1983. 474 pp..
59. Casazza P.G., *Approximation properties*, Handbook of the geometry of Banach spaces, W. B Johnson and J. Lindenstrauss, vol. 1, Elsevier, Amsterdam – London – New York – Oxford – Paris – Shannon – Tokyo, 2001, pp. 271–316.
60. Casazza P.G., Jarchow H., *Self-induced compactness in Banach spaces*, Proceedings of the Edinburg Mathematical Society. Section A **126** (1996), 355–362.
61. Casazza P.G., García C.L., Johnson W.B., *An example of an asymptotically Hilbertian space which fails the approximation property*, Preprint (2000), see also math.FA/0006134 (math@arXiv.org).
62. Cascales B., Namioka I., Vera G., *The Lindelof property and fragmentability*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3301-3309.
63. Cascales B., Manjabacas G., Vera G., *Fragmentability and compactness in [$C(K)$]-spaces*, Studia Mathematica **131** (1998), 73-87.
64. Contreras M. D., Díaz-Madrigal S., *Uniform approximation properties for spaces of analytic functions*, Math. Nachr. **210** (2000), 85-91.
65. Davie A.M., *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261-266.
66. Davis W.J, Figiel T., Johnson W.B., Pelczynski A., *Factoring weakly compact operators*, J. Functional Analysis **17** (1974), 311-327, $MR50\#8010$..
67. Defant A. and Floret F., *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokio, 1993.
68. Davis W.J., Phelps R.R., *The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 119–122.
69. Diestel J., *The Radon–Nikodym property and coincidence of integral and nuclear operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **17** (1972), 1611-1620.
70. Diestel J., *Geometry of Banach spaces*, Lecture Notes in Math., 485 Berlin-Hiedelberg-New York, 1975. 282 pp..
71. Diestel J., Uhl J.J., *Vector measures*, Math. Survey, Amer. Math. Soc., Providence RI **15** (1977).
72. Diestel J., Jarchow H., Pietsch A., *Operator ideals*, Handbook of the geometry of Banach spaces, W. B Johnson and J. Lindenstrauss, vol. 1, Elsevier, Amsterdam – London – New York – Oxford – Paris – Shannon – Tokyo, 2001, pp. 437–496.
73. Dinculeanu N., *Vector Measures*, Pergamon Press, New York, 1967.
74. Dunford N., Pettis B.J., *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 323–392.
75. Enflo P., *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.
76. Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197-200.
77. Ghoussoub N., Johnson W.B., *Counterexamples to several problems on the factorization of bounded linear operators*, Proc. AMS **92** (1984), 233–238.
78. Gordon Y., Lewis D.R., Retherford H.R., *Banach ideals of operators with applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), no. 1, 85-129.

79. Gordon Y., Reisner S., *Some geometrical propeties of Banach spaces of polynomials*, Isr. J. Math. **42** (1982), 99-116.
80. Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), pp. 196 + 140.
81. Grønbæck N., Willis G.A., *Approximate identities in Banach algebras of compact operators*, Canadian Math. Bul. **36** (1993), 45–53.
82. Hagler J., Stegall Ch., *Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to* $C[0,1]$, J. Funct. Anal. **13** (1973), 233–251.
83. Haydon R., *Some more characterizations of Banach spaces containing* l_1, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **80** (1976), no. 2, 269–276.
84. Heinrich S., *Closed operator ideals and interpolation*, J. Functional Analysis **35** (1980), 397–411.
85. Huff R.E., *Dentability and the Radon–Nikodym property*, Duke Math. J. **41** (1974), no. 1, 111–114.
86. Huff R.E., Morris P.D., *Geometric characterizations of the Radon-Nikodym property*, Studia Math. **56** (1976), 157–164.
87. Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C., *Topics in the theory of lifting*, Springer, Berlin — Heidenberg — New York, 1969. 189 p..
88. James R.C., *A separable somewhat reflexive Banach spaces with nonseparable dual*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 738–743.
89. Johnson W.B., *Factoring compact operators*, Israel J. Math. **9** (1971), 337-345.
90. Johnson W.B., *A complementary universal conjugate Banach space and its relation to thr approximation problem*, Israel J. Math. **13** (1972), 301–310, $MR48\#4700$..
91. Johnson W.B., *Banach spaces all of whose subspaces have the approximation property*, Seminaire d'analyse fonctionelle 1979–1980 (1980), exp. 16 1-11.
92. Johnson W.B., *Banach spaces all whose subspaces have the approximation property*, Special Topics of Applied Mathematics, North–Holland, 1980, pp. 15–26.
93. Kaijser S., Reinov O., *On α-nuclearity and total accessibility for some tensor norms α*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica **5** (2001), 59-64.
94. Kakutani S., *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. **42** (1941), no. 2, 523–537.
95. Kakutani S., *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. **42** (1941), no. 2, 994–1024.
96. Karn Anil K., Sinha Deba P., *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of* l_p, Studia Math. **150** (2001), no. 1, 17-33.
97. Kwapień S., *On a theorem of L.Schwartz and its applications to absolutely summing operators*, Studia Math. **38** (1970), 193–201.
98. Kwapień S., *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients,*, Studia Math. **44** (1972), 583–595.
99. Lima A., Nygaard O., Oja E., *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.
100. Linde W., *An operator ideal in connection with the Radon-Nikodym property of Banach spaces*, Math. Nachr. **71** (1976), 65-73.
101. Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279-284.
102. Lindenstrauss J., *Weakly compact sets — their topological properties and the Banach spaces they generate*, Symposium on Infinite Dimensional Topology, Prinston, N.J., Prinston Univ. Press (1972), 235–273.
103. Lindenstrauss J., Pełczyński A., *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.
104. Lindenstrauss J., Rosenthal H.P., *The $\mathcal{L}_p$ spaces*, Isr. J. Math. **7** (1969), 325–349.
105. Lindenstrauss J., Stegall Ch., *Examples of separable spaces which does not contain l_1 and whose duals are non–separable*, Studia Math. **56** (1975), 81–105.
106. Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin – Heldelberg – New York, 1977.

107.Maurey B., *Démonstration d'une conjecture de A. Pietsch*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **274** (1972), 73–76.
108.Maynard H.B., *A geometrical characterization of Banach spaces having the Radon–Nikodym property*, Trans. Amer. Math. Soc. **185** (1973), 493–500.
109.Mickael E., *Continuous selections*, Ann. Math. **63** (1956), 361–382.
110.Namioka I., Phelps R.R., *Banach spaces which are Asplund spaces*, Duke Math. **42** (1975), 735.
111.Namioka I., *Radon-Nikodm compact spaces and fragmentability*, Mathematika **34** (1987), no. 2, 258-281.
112.Nielsen N. J., *On Banach ideals determined by Banach lattices and their applications*, Dissertationes Math. **109** (1973), 1–66.
113.Odell E., Rosenthal H.P., *A double dual characterization of separable Banach spaces containing* l_1,, Israel J. Math. **20** (1975), no. 3-4, 375-384.
114.F. Oertel, *Extension of Finite Rank Operators and Operator Ideals with the Property (I)*, Math. Nachr. (2002), 144–159.
115.Oja E., Reinov O.I., *Un contre-exemple a une affirmation de A. Grothendieck*, C. R. Acad. Sc. Paris, Serie I **305** (1987), 121-122.
116.Pełczyński A., *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astro. Phys. **10** (1962), 641-648.
117.Pełczyński A., *p-integral operators commuting with group represetations andexamples of quasi-p-integral operators which are not p-integral*, Studia Math. **33** (1969), 63–70.
118.Pełczyński A., *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators*, AMS Regional Conference Series in Mathematics, 30 Providence, 1977.
119.Pełczyński A., Ovsepian R.I., *The existence in any separable Banach space of a fundamental, total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonomal system in* L_2, Studia Math. **54** (1975), no. 2, 149–159.
120.Persson A., *On some properties of p-nuclear and p-integral operators*, Studia Math. **33** (1969), 213–232.
121.Persson A. and Pietsch A., *p-nucleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. **33** (1969), 19-62.
122.Phillips R.S., *On linear transformations*, Tran. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516-541.
123.Pietsch A., *Quasinukleare Abbildungen in normierten Ŕamen*, Math. Ann. **165** (1966), no. 1, 76–90.
124.Pietsch A., *Theorie der Operatorenideale (Zusamenfassung)*,, Jena, 1972.
125.Pietsch A., *Operator ideals*, North-Holland, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1978. 451 p..
126.Pisier G., *Estimations des distances à un espace euclidien et des constantes de projéction des espace de Banach de dimensions finie*, Seminaire d'analyse fonctionelle 1978–1979 (1979), exp. 10, 1-21.
127.Pisier G., *Counterexamples to a conjecture of Grothendieck*, Acta Math. **151** (1983), 181-208.
128.Pisier G., *Weak Hilbert spaces*, Proc. London Math. Soc. **56** (1988), 547-579.
129.Reinov O.I., *On some Banach ideals of operators*, Studia Math. **69** (1980), no. 2, 125-133.
130.Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.
131.Reinov O.I., *A finite dimensional aspect of the existence of non-nuclear operators with nuclear ajoints*, Reports of the Univ. of Stockholm., No 12 (1983).
132.Reinov O.I., *A survey of some results in connection with Grothendieck approximation property*, Math. Nachr. **119** (1984), 257-264.
133.Reinov O.I., *Un contre-exemple a une conjecture de A.Grothendieck*, C. R. Acad. Sc. Paris, Serie I **296** (1983), 597-599.
134.Reinov O.I., *Sur les operateurs p-nucléaires entre espaces de Banach avec bases*, C. R. Acad. Sc. Paris. — Serie I **316** (1993), 905-907.
135.Reinov Oleg, *On non-nuclear operators with nuclear adjoints*, Estonian Acad. Sci. Phis. Math. **45** (1996), no. 2/3, 226-233.

136. Retherford J.R., *Applications of Banach ideals of operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 978–1012.
137. Rieffel M.A., *Dentable subsets of Banach spaces with applications to a Radon-Nikodym property*, Proc. Conf. Functional Analysis, Thompson Book Co., Washington, D.C., 1967, pp. 71-77.
138. Rosenthal H.P., *On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ*, Acta Math. **124** (1970), 205–248.
139. Rosenthal H., *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37** (1971), 13-36.
140. Rosenthal H.P., *On factors of $C[0,1]$ with non-separable dual*, Israel J. Math. **13** (1972), 361–378.
141. Rosenthal H.P., *A characterization of Banach spaces containing l_1*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **71** (1974), no. N6, 2411-2413;.
142. Rosenthal H.P., *The Banach spaces $C(K)$ and $L^p(\mu)$*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 763–781.
143. Rosenthal H.P., *Pointwise compact subset of the first Baire class*, Amer. J. Math. (1977), no. 2, 362–378.
144. Saab E., *A characterizationof w^*-compactconvex sets having the Radon–Nikod'ym property*, Bull. Sci. Math. **104** (1980), 79-88.
145. Saphar P., *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications lineaires*, Studia Math. **38** (1970), 71-100 $MR43\#878$..
146. Saphar P., *Hypothèse dápproximation à lórdre p dans les espaces de Banach et approximation dápplication p-absolument sommantes*, Isr. J. Math. **13** (1972), 379-399.
147. Schachermeier V., *Additif au théorem (4.3) du Exposé 4 du Séminaire Maurey–Schwartz 1974–75*, Séminaire Maurey–Schwartz (1974/1975).
148. Schatten R., *A theory of cross spaces*, Ann. Math. Studies **26** (1950).
149. Schwartz L., Séminaire. Applications radonifiantes, Paris, École Polytechnique, Centre de Mathématieques, 1969–1970.
150. Schwartz L., *Radon measureson arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford Univ. Press, for Tata Inst. of Fund Research, London, 1973.
151. Schwartz L., Séminaire Maurey–Schwartz (1974/1975), exposé V–VI.
152. Stegall Ch., *Banach spaces whose duals contain $l_1(\Gamma)$ with applications to the study of dual $L_1(\mu)$ spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **175** (1973), 463–477.
153. Stegall C., *The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **206** (1975), 213-223, $MR51\#10581$..
154. Stegall C., *A proof of the Huff–Morris Radon–Nikodym theorem*, Seminaire Maurey–Schwartz 1975/76, Centre de Math., Ecole Polytech., Paris, 1976.
155. Stegall C., *Optimization and differentiation in Banach spaces*, Linear Algebra Appl. **84** (1986), 191-211.
156. Stegall C., *More facts about conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodym property*, Acta Univ. Carol., Math. Phys. **31** (1990), no. 2, 107-117.
157. Stegall C., *Large subsets of dual Banach spaces*, Acta Univ. Carol., Math. Phys. **32** (1991), no. 2, 41-46.
158. Stegall C., *Functions of the first Baire class with values in Banach spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **111** (1991), no. 4, 981-991.
159. Stegall Ch., Retherford J.R., *Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to L_1 and L_∞-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 457–493.
160. Stegall C.P., Ruess, W.M., *Exposed and denting points in duals of operator spaces*, Isr. J. Math. **53** (1986), 163-190.
161. Swartz C., *An operator characterization of vector measures which have Radon–Nikodym derivatives*, Math. Ann. **30** (1973), 77-84.
162. Szankowski A., *Subspaces without approximation property*, Israel J. Math. **30** (1978), 123–130.
163. Thomas E., *Sur les applications linéaires 1-sommantes et nikodymisantes*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A **278** (1974), 253–255.

164.Troyanski S.L., *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces*, Studia Math. **38** (1971), 173–180.
165.Uhl J.J.Jr., *A note on the Radon-Nikodym property*, Rev. roumaine math. pures. et appl. **17** (1972), no. 1, 113–115.
166.Willis G.A., *The compact pproximation property does not imply the approximation property*, Studia Math. **103** (1992), 99-108.
167.Wong T.K., *On a class of absolutely p-summing operators*, Studia Math. **39** (1971), 181-189.