# ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

А.И. Назаров[1]

## 1 Введение. Основная лемма

В недавней статье [De] П. Деовельс показал, что для стандартного броуновского моста $B(t)$, $0 \le t \le 1$, справедливо равенство по распределению

$$\mathcal{Y}_K(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{Y}_{2-K}(t), \qquad t \in [0,1],\ K \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{Y}_K(t) = B(t) - 6Kt(1-t)\int_0^1 B(s)\,ds$. Кроме того, им было получено явное разложение Кархунена – Лоэва (КЛ) для процесса $\mathcal{Y}_1(t)$.

В настоящей работе для гауссовских случайных функций общего вида, имеющих нулевые средние, вводятся однопараметрические семейства преобразований, для которых выполнено соотношение, обобщающее (1.1). В случае, когда $L_2$-норма исходной функции конечна п.н., выводится явное соотношение между точными асимптотиками вероятностей $L_2$-малых уклонений преобразованной и исходной функции. Для одномерных процессов, порождающих краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, в случае, когда известно КЛ-разложение для исходного процесса, будет получено также КЛ-разложение для преобразованных процессов.

Рассмотрим гауссовскую случайную функцию $X(x)$, $x \in \overline{\mathcal{O}}$, с нулевым средним и ковариационной функцией $G_X(x,y) = \mathbb{E}X(x)X(y)$, $x,y \in \overline{\mathcal{O}}$. Для простоты предположим, что $\mathcal{O}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\varphi$ – локально суммируемая в $\mathcal{O}$ функция. Предположим, что функция

$$\psi(x) = \int\limits_{\mathcal{O}} G_X(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{1.2}$$

определена п.в. в $\mathcal{O}$, $\psi \not\equiv 0$, и

$$q = \int\limits_{\mathcal{O}} \psi(u)\varphi(u)\,du = \int\limits_{\mathcal{O}}\int\limits_{\mathcal{O}} G_X(u,v)\varphi(u)\varphi(v)\,dudv < \infty. \tag{1.3}$$

Построим семейство гауссовских функций

$$\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}(x) = X(x) - \alpha\psi(x)\int\limits_{\mathcal{O}} X(u)\varphi(u)\,du, \quad x \in \overline{\mathcal{O}}. \tag{1.4}$$

**ОСНОВНАЯ ЛЕММА**. Функция $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$ имеет ковариацию

$$\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(x,y) = G_X(x,y) + Q\psi(x)\psi(y), \tag{1.5}$$

где $Q = q\alpha^2 - 2\alpha$.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00159.

**Доказательство**. Проверяется непосредственным вычислением с учетом (1.2). $\square$

**Следствие 1**. Для процессов (1.4) имеет место равенство

$$\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}(x) \stackrel{d}{=} \mathcal{X}_{\varphi,\frac{2}{q}-\alpha}(x), \quad x \in \overline{\mathcal{O}}.$$

В частности, $\mathcal{X}_{\varphi,\frac{2}{q}}(x) \stackrel{d}{=} X(x)$.

**Следствие 2**. Пусть $\widehat{\alpha} = \frac{1}{q}$. Тогда:
1. Имеет место тождество п.н.

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}}(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

2. Процесс $\mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}}(x)$ и с.в. $\int_{\mathcal{O}} X(u)\varphi(u)du$ независимы.
3. Если $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$, то интегральный оператор с ядром $\mathcal{G}_{\varphi,\widehat{\alpha}}(x,y)$ имеет нулевое собственное число, соответствующее собственной функции $\varphi$.

**Доказательство**. Все три утверждения следуют из несложно проверяемых соотношений

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \mathcal{X}_{\varphi,\alpha}(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{O}} X(u)\varphi(u)\,du \cdot (1 - q\alpha);$$

$$\mathbb{E}\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}(x) \int\limits_{\mathcal{O}} X(u)\varphi(u)\,du = \psi(x) \cdot (1 - q\alpha). \qquad \square$$

**Замечание**. Очевидно, что $\mathcal{Y}_K$ совпадает с $\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}$ при $\varphi \equiv 1$, $\alpha = 12K$. Поэтому Лемма 2.2 и Следствия 2.1 и 2.2 [De] являются частными случаями наших утверждений.

## 2 Асимптотика вероятности малых уклонений в $L_2$

Предположим теперь, что

$$\|X\|_2^2 \equiv \int\limits_{\mathcal{O}} X^2(x)\,dx < \infty \qquad \text{п.н.} \tag{2.1}$$

Тогда для процесса $X$ справедливо КЛ-разложение

$$X(x) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} u_k(x)\xi_k, \qquad x \in \mathcal{O}, \tag{2.2}$$

где $\xi_k$ – последовательность независимых стандартных нормальных с.в., $\lambda_k > 0$ и $u_k$ – соответственно, собственные числа и нормированные в $L_2(\mathcal{O})$ собственные функции интегрального оператора $\mathfrak{G}$ с ядром $G_X(x,y)$. При этом $\sum_k \lambda_k < \infty$, т.е. оператор $\mathfrak{G}$ принадлежит ядерному классу $\mathfrak{S}_1$. Отметим, что ряд (2.2) сходится в $L_2(\mathcal{O})$ п.н.

Из (2.2) следует, что

$$\|X\|_2^2 \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2.$$

Поэтому, зная собственные числа $\lambda_k$, можно получить информацию о распределении $\|X\|_2^2$ и, в частности, найти точную асимптотику вероятности малых уклонений в $L_2$, т.е. описать поведение при $\varepsilon \to 0$ вероятности $\mathbb{P}\{\|X\|_2 \leq \varepsilon\}$.

В абстрактном виде решение задачи об асимптотике вероятности малых уклонений было получено в [Syt]. Затем многие авторы занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях (см. статью [DLL] и имеющиеся в ней ссылки).

В статьях [NN], [Na], [Na1] был разработан подход, позволяющий получать асимптотику малых уклонений в $L_2$-норме для гауссовского процесса с нулевым средним, ковариация которого является функцией Грина для обыкновенного дифференциального оператора. В более общей ситуации решить задачу полностью пока не удается. Однако в рассматриваемом случае, поскольку оператор с ядром $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(x,y)$ является одномерным возмущением исходного оператора, можно выразить асимптотику малых уклонений для $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$ через асимптотику малых уклонений для исходного процесса.

**Замечание**. Если оператор $\mathfrak{G}$ имеет нетривиальное нуль-пространство $U_0$, то в силу очевидного соотношения $\psi \perp U_0$ оно содержится в нуль-пространстве оператора с ядром $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(x,y)$. Поэтому все рассуждения можно проводить в ортогональном дополнении к $U_0$ (т.е. в образе оператора $\mathfrak{G}$) и считать, что в разложении (2.2) функции $\{u_k\}$ образуют полную ортонормированную систему.

**ТЕОРЕМА 1**. Пусть выполнено условие (2.1), и функция $\varphi \in L_{1,loc}(\mathcal{O})$ удовлетворяет условию (1.3). Если $\alpha \neq \frac{1}{q}$, то при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}\|_2 \leq \varepsilon\} \sim \frac{1}{|1-\alpha q|} \cdot \mathbb{P}\{\|X\|_2 \leq \varepsilon\}. \tag{2.3}$$

**Доказательство**. По теореме сравнения ([Li]; см. также [GHT])

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}\|_2 \leq \varepsilon\} \sim \mathbb{P}\{\|X\|_2 \leq \varepsilon\} \cdot \Big(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\widetilde{\lambda}_k}\Big)^{1/2}, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{\lambda}_k$ – собственные числа интегрального оператора с ядром $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(x,y)$. Отметим, что в силу минимаксимального принципа (см., напр., [BS, §10.2]) последовательности $\lambda_k$ и $\widetilde{\lambda}_k$ перемежаются. Отсюда, в частности, следует, что ряд $\sum_k \widetilde{\lambda}_k$ также сходится.

Обозначим $\mu_k = \lambda_k^{-1}$, $\widetilde{\mu}_k = \widetilde{\lambda}_k^{-1}$ и рассмотрим определители Фредгольма для ядер $G_X$ и $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}$:

$$\mathcal{F}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_k}\right); \qquad \widetilde{\mathcal{F}}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\widetilde{\mu}_k}\right).$$

В силу сходимости рядов $\sum\limits_k \mu_k^{-1}$ и $\sum\limits_k \widetilde{\mu}_k^{-1}$ эти канонические произведения Адамара сходятся при всех $z \in \mathbb{C}$. Ввиду (1.5) они связаны между собой формулой[2]

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \mathcal{F}(z) \cdot \Big(1 + Q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 \mu_k}{1 - \frac{\mu_k}{z}}\Big), \tag{2.5}$$

[2]В статистической литературе формулу преобразования определителя Фредгольма при конечномерном возмущении оператора, частным случаем которой является (2.5), обычно возводят к работе [Su]. Статистические приложения, полученные в этой работе, по-видимому, новы, но сама формула, полученная еще Бэйтменом [Ba], к тому времени уже была хорошо известна как в теории вычислительных методов, так и в спектральной теории операторов, причем в более общей ситуации (см., [KK, Гл.II, п.4.6] и [AG, п.106]).

где $a_k$ – коэффициенты Фурье функции $\psi$ по п.о.н.с. $\{u_k\}$.

Из теоремы Йенсена (см. [Ti], §3.6) следует, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\widetilde{\mu}_k} = \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{|\widetilde{\mathcal{F}}(z)|}{|\mathcal{F}(z)|}\right) d\arg(z)\right). \tag{2.6}$$

Формула (2.5) и лемма 5.1 показывают, что последний предел равен $\left|1 + Q\sum_k a_k^2\mu_k\right|$. Но из $\psi = \sum_k a_k u_k$ следует $\varphi = \sum_k \mu_k a_k u_k$, и потому

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\mu_k = \int_{\mathcal{O}} \psi(u)\varphi(u)\,du = q. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получим (2.3). □

Рассмотрим теперь критический случай $\widehat{\alpha} = \frac{1}{q}$.

**ТЕОРЕМА 2**. Пусть выполнено условие (2.1), и $\widehat{\alpha} = \frac{1}{q}$. Если $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$, то при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}}\|_2 \le \varepsilon\} \sim \frac{\sqrt{q}}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\varepsilon^2} \frac{d}{dt}\mathbb{P}\{\|X\|_2 \le t\}\ \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon^2 - t^2}}. \tag{2.8}$$

**Доказательство**. Введем три функции распределения:

$$F(r) = \mathbb{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\xi_k^2 \le r\} = \mathbb{P}\{\|X\|_2 \le \sqrt{r}\};$$

$$\widetilde{F}(r) = \mathbb{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_k\xi_k^2 \le r\} = \mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}}\|_2 \le \sqrt{r}\};$$

$$F_1(r) = \mathbb{P}\{\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k\xi_k^2 \le r\}.$$

Аналогично предыдущей теореме, при $r \to 0$

$$\widetilde{F}(r) \sim F_1(r) \cdot \Big(\prod_{k=2}^{\infty} \frac{\widetilde{\mu}_k}{\mu_{k-1}}\Big)^{1/2}.$$

Теорема Йенсена дает

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_{k-1}}{\widetilde{\mu}_k} = \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\Big(1 - \frac{z}{\mu_1}\Big) \cdot \frac{\widetilde{\mathcal{F}}(z)}{\mathcal{F}(z)}\right| d\arg(z)\right). \tag{2.9}$$

Условие $\widehat{\alpha} = \frac{1}{q}$ влечет $Q = -\frac{1}{q}$, и выражение под знаком модуля можно переписать с учетом (2.5) и (2.7):

$$\Big(1 - \frac{z}{\mu_1}\Big) \cdot \Big(1 + Q\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2\mu_k}{1 - \frac{\mu_k}{z}}\Big) = \frac{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{z}}{q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2\mu_k^2}{1 - \frac{\mu_k}{z}}.$$

По лемме 5.1 предел в (2.9) равен

$$\frac{1}{\mu_1 q}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\mu_k^2 = \frac{\|\varphi\|_2^2}{\mu_1 q},$$

что дает

$$\widetilde{F}(r) \sim F_1(r)\cdot\frac{\sqrt{q\mu_1}}{\|\varphi\|_2}. \tag{2.10}$$

Далее, очевидно, $F(r) = (F_1 * f)(r)$, где

$$f(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}\{\lambda_1\xi^2 \le x\} = \frac{\exp\left(-\frac{x}{2\lambda_1}\right)}{\sqrt{2\pi\lambda_1 x}}.$$

С помощью преобразования Лапласа получаем решение этого сверточного уравнения:

$$F_1(r) = \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi}}\exp\left(-\frac{r}{2\lambda_1}\right)\int\limits_0^r \left(F(x)\exp\left(\frac{x}{2\lambda_1}\right)\right)'\frac{dx}{\sqrt{r-x}}. \tag{2.11}$$

**Лемма 2.1**. $F(x) = o(F'(x))$ при $x \to +0$.

**Доказательство**. Заметим, что $F'$ абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ (если в сумме (2.2) есть хотя бы три ненулевых слагаемых). При этом $F'' > 0$ в правой полуокрестности нуля (это свойство непосредственно проверяется для трех слагаемых и очевидно сохраняется при добавлении нового слагаемого, причем радиус полуокрестности при этом не уменьшается; поэтому оно сохраняется и при переходе к бесконечной сумме). Таким образом, $F$ выпукла в правой полуокрестности нуля, и потому $F'(x) \ge F(x)/x$ в этой полуокрестности. □

Продолжим доказательство теоремы. В силу леммы 2.1 из (2.11) получаем

$$F_1(r) \sim \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi}}\int\limits_0^r F'(x)\cdot\frac{\exp\left(-\frac{r-x}{2\lambda_1}\right)dx}{\sqrt{r-x}} \sim \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi}}\int\limits_0^r F'(x)\,\frac{dx}{\sqrt{r-x}}. \tag{2.12}$$

Подставив это соотношение в (2.10) и сделав замену $r = \varepsilon^2$, получим (2.8). □

**Замечание**. Формулу (2.10) можно (несколько вольно) интерпретировать так: при $\alpha \ne \frac{1}{q}$ последовательности $\mu_k$ и $\widetilde{\mu}_k$ имеют одинаковые асимптотики; в условиях Теоремы 2, согласно п.3 Следствия 2, одно из собственных чисел $\widetilde{\lambda}_k$ обращается в нуль, что порождает сбой в нумерации $\widetilde{\mu}_k$; изъятие из суммы (2.2) лишнего слагаемого восстанавливает соответствие нумераций.

# 3 Разложение Кархунена – Лоэва

Предположим теперь, что $n = 1$, $\mathcal{O} = (0, a)$ – интервал, и ковариационная функция $G_X(t,s)$, $t,s \in [0,a]$, является функцией Грина для самосопряженного оператора $L_X$ в пространстве $L_2(0,a)$, порождаемого дифференциальным выражением порядка $2\ell$

$$L_X u \equiv (-1)^\ell u^{(2\ell)} + \left(p_{\ell-1}u^{(\ell-1)}\right)^{(\ell-1)} + \dots + p_0 u, \tag{3.1}$$

с $2\ell$ граничными условиями. Напомним, это означает, что функция $G_X$ при каждом $s \in (0, a)$ удовлетворяет уравнению $L_X G_X = \delta(t-s)$ в смысле обобщенных функций, а также граничным условиям. Не умаляя общности, можно считать $a = 1$.

Обозначим $\mathcal{D}(L_X)$ образ интегрального оператора с ядром $G_X(t,s)$. Тогда легко видеть, что обратный оператор есть как раз $L_X$ с областью определения $\mathcal{D}(L_X)$. В частности, если $\varphi \in L_2(0,1)$, то $\psi \in \mathcal{D}(L_X)$, и $L_X \psi = \varphi$.

Будем предполагать для простоты, что $p_j \in \mathcal{C}^j[0,1]$. Тогда $\mathcal{D}(L_X)$ совпадает с множеством функций, принадлежащих $W_2^\ell(0,1)$ и удовлетворяющих граничным условиям. С учетом (1.5) получаем, что ковариация преобразованного процесса $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$ удовлетворяет уравнению

$$L_X \mathcal{G}_{\varphi,\alpha} = \delta(t-s) + Q\varphi(t)\psi(s) \tag{3.2}$$

(напомним, что $Q = q\alpha^2 - 2\alpha$) и тем же граничным условиям.

Допустим, что нам известно КЛ-разложение (2.2) для исходного процесса. Тогда, очевидно, $u_k$ – собственные функции, а $\mu_k = \lambda_k^{-1}$ – собственные числа краевой задачи

$$L_X u = \mu u, \qquad u \in \mathcal{D}(L_X). \tag{3.3}$$

На практике собственные функции задачи (3.3) известны в аналитическом виде, только если при произвольном $\mu \in \mathbb{R}$ известна фундаментальная система решений уравнения $L_X v - \mu v = 0$. Воспользуемся этим, чтобы дать алгоритм вычисления КЛ-разложения для процесса $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$. Отметим, что в частном случае идея этого алгоритма применялась в [KKW] (см. далее пример **5**).

Из (3.2) получаем краевую задачу для собственных функций интегрального оператора с ядром $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(t,s)$:

$$L_X u = \mu u + \mu Q \varphi \int\limits_0^1 u(s)\psi(s)\,ds, \qquad u \in \mathcal{D}(L_X). \tag{3.4}$$

Пусть $\mu$ – пока что неизвестный параметр. Методом вариации произвольных постоянных построим частное решение уравнения $L_X \eta - \mu\eta = \varphi$. Тогда общее решение уравнения (3.4) записывается в виде

$$u = c_0\eta + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{2\ell} v_{2\ell},$$

где $v_1, \dots, v_{2\ell}$ – ф.с.р. уравнения $L_X v - \mu v = 0$. Подстановка в граничные условия дает $2\ell$ уравнений для констант $c_0, c_1, \dots, c_{2\ell}$. Еще одно уравнение получаем, приравнивая коэффициенты при $\varphi$ в (3.4):

$$\frac{c_0}{\mu Q} = c_0 \int\limits_0^1 \eta(s)\psi(s)\,ds + c_1 \int\limits_0^1 v_1(s)\psi(s)\,ds + \dots + c_{2\ell} \int\limits_0^1 v_{2\ell}(s)\psi(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Собственные числа задачи (3.4) являются корнями определителя полученной однородной системы, а собственные функции – ее нетривиальными решениями.

Для иллюстрации алгоритма приведем несколько примеров.

**Пример 1**. Пусть $X = W$ – винеровский процесс, $\varphi \equiv 1$. Тогда

$$\psi(s) = \int\limits_0^1 \min(t,s)\,ds = \frac{2t - t^2}{2}; \qquad q = \int\limits_0^1 \frac{2t-t^2}{2}\,dt = \frac{1}{3}.$$

Соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{2}\int_0^1 u(s)\,(2s-s^2)\,ds, \qquad u(0)=u'(1)=0.$$

Общее решение этого уравнения

$$u(t) = c_0 + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), \qquad \omega = \mu^{1/2}. \tag{3.6}$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$Q\sin(\omega) = \cos(\omega)\cdot(Q\omega + (1+Q/3)\omega^3). \tag{3.7}$$

При $Q=0$ мы получаем $\cos(\omega)=0$, как и должно быть, поскольку в этом случае мы имеем обычный винеровский процесс. Отметим еще, что $1+Q/3=(1-\alpha/3)^2\geq 0$. При $\alpha=3$ уравнение сводится к $\mathrm{tg}(\omega)=\omega$.

Если $\omega_k$ – положительные корни (3.7), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{W}_{\mathbf{1},\alpha}$ имеем

$$\widetilde{\lambda}_k = \omega_k^{-2}, \qquad \widetilde{u}_k(t) = \gamma_k(\cos(\omega_k t) - 1 + \mathrm{tg}(\omega_k)\sin(\omega_k t)),$$

где $\gamma_k$ – нормирующие константы.

**Пример 2**. Пусть $X=B$ – броуновский мост, $\varphi\equiv 1$. Тогда $\psi(t)=\frac{t-t^2}{2}$, $q=\frac{1}{12}$. Соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{2}\int_0^1 u(s)\,(s-s^2)\,ds, \qquad u(0)=u(1)=0. \tag{3.8}$$

Общее решение этого уравнения дается формулой (3.6). Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$\left[\begin{array}{rcl} \sin(\tau) &=& 0; \\ Q\sin(\tau) &=& \cos(\tau)\cdot(Q\tau+(4+Q/3)\tau^3), \end{array}\right. \qquad \tau = \frac{\omega}{2}. \tag{3.9}$$

При $Q=0$ два уравнения в (3.9), как и следовало ожидать, объединяются в $\sin(\omega)=0$. Отметим еще, что $4+Q/3=(2-\alpha/6)^2\geq 0$. При $\alpha=12$ второе уравнение сводится к $\mathrm{tg}(\tau)=\tau$. Этот случай рассмотрен в [De, Теорема 1.2].

Любопытным свойством обладает последовательность

$$Q_k = -\frac{12}{1+\frac{3}{(k\pi)^2}} \searrow -12$$

(каждому $Q_k$ соответствуют два значения $\alpha$): при $Q=Q_k$ $k$-е корни первой и второй серий в (3.9) совпадают. Таким образом, при $Q=Q_1$ задача (3.8) имеет кратное наименьшее собственное число – эффект, невозможный для обычной задачи Штурма - Лиувилля.

Если $\tau_k$ – положительные корни второй серии в (3.9), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{B}_{\mathbf{1},\alpha}$ имеем

$$\begin{array}{ll} \widetilde{\lambda}_k = (2k\pi)^{-2}, & \widetilde{u}_k(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi kt); \\ \widetilde{\widetilde{\lambda}}_k = (2\tau_k)^{-2}, & \widetilde{\widetilde{u}}_k(t) = \gamma_k(\cos(2\tau_k t) - 1 + \mathrm{tg}(\tau_k)\sin(2\tau_k t)), \end{array}$$

где $\gamma_k$ – нормирующие константы.

**Пример 3**. Пусть $X = B$, $\varphi(t) = t(1-t)$. Тогда $\psi(t) = \frac{t-2t^3+t^4}{12}$, $q = \frac{17}{5040}$. Соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{12} t(1-t) \int_0^1 u(s)\,(s - 2s^3 + s^4)\,ds, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$u(t) = c_0(t - t^2 + \tfrac{2}{\omega^2}) + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), \qquad \omega = \mu^{1/2}.$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$\left[\begin{array}{rcl} \sin(\tau) & = & 0; \\ Q\sin(\tau) & = & \cos(\tau)\cdot(Q\tau + Q\tau^3/3 + 2Q\tau^5/15 + 16(1+Qq)\tau^7), \end{array}\right. \qquad \tau = \frac{\omega}{2}. \tag{3.10}$$

При $Q = 0$ два уравнения в (3.10) объединяются в $\sin(\omega) = 0$. Отметим, что $1 + Qq = (1 - q\alpha)^2 \geq 0$.

Если $\tau_k$ – положительные корни второй серии в (3.10), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}$ имеем

$$\begin{array}{ll} \widetilde{\lambda}_k = (2k\pi)^{-2}, & \widetilde{u}_k(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi k t); \\ \widetilde{\widetilde{\lambda}}_k = (2\tau_k)^{-2}, & \widetilde{\widetilde{u}}_k(t) = \gamma_k(\cos(2\tau_k t) - 1 + 2\tau_k^2(t^2 - t) + \mathrm{tg}(\tau_k)\sin(2\tau_k t)), \end{array}$$

где $\gamma_k$ – нормирующие константы.

**Пример 4**. Пусть

$$X(t) = \overline{W}_1(t) = \int_0^t \Big(W(s) - \int_0^1 W(u)\,du\Big)\,ds$$

– проинтегрированный центрированный винеровский процесс. Ковариация $G_{\overline{W}_1}$ (см., напр., [HN] и [NN, Prop. 5.4]) есть функция Грина для оператора $L_{\overline{W}_1} = L_B^2$.

Если $\varphi \equiv 1$, то $\psi(t) = \frac{t-2t^3+t^4}{24}$, $q = \frac{1}{120}$, и соотношение (3.4) принимает вид

$$u^{IV} = \mu u + \frac{\mu Q}{24} \int_0^1 u(s)\,(s - 2s^3 + s^4)\,ds, \qquad u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$u(t) = c_0 + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + c_3\,\mathrm{ch}(\omega t) + c_4\,\mathrm{sh}(\omega t), \qquad \omega = \mu^{1/4}.$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$\left[\begin{array}{rcl} \sin(\tau) & = & 0; \\ Q(\sin(\tau) + \cos(\tau)\,\mathrm{th}(\tau)) & = & \cos(\tau)\cdot(2Q\tau + (32 + 4Q/15)\tau^5), \end{array}\right. \qquad \tau = \frac{\omega}{2}. \tag{3.11}$$

При $Q = 0$ два уравнения в (3.11) объединяются в $\sin(\omega) = 0$. Отметим, что $32 + 4Q/15 = 32(1 - q\alpha)^2 \geq 0$.

Если $\tau_k$ – положительные корни второй серии в (3.11), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{X}_{\mathbf{1},\alpha}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\lambda}_k = (2k\pi)^{-4}, && \widetilde{u}_k(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi kt);\\
&\widetilde{\widetilde{\lambda}}_k = (2\tau_k)^{-4}, && \widetilde{\widetilde{u}}_k(t) = \gamma_k(\cos(2\tau_k t) + \mathrm{ch}(2\tau_k t) - 2 + \mathrm{tg}(\tau_k)\sin(2\tau_k t)) - \mathrm{th}(\tau_k)\,\mathrm{sh}(2\tau_k t)),
\end{aligned}
$$

где $\gamma_k$ – нормирующие константы.

Следует отметить, что в примерах **2-4** собственные числа из первой серии в (3.9)-(3.11) не зависят от $Q$. Это связано с тем, что соответствующие собственные функции $\sin(2\pi kt)$, $k \in \mathbb{N}$, ортогональны $\psi$ в $L_2(0,1)$, и последний член в уравнении (3.4) обнуляется.

**Пример 5**. Пусть $X = B$, и

$$
\varphi(t) = \frac{1}{\phi(\mathbf{\Phi}^{-1}(t))}, \qquad \text{где} \qquad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2/2); \qquad \mathbf{\Phi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt.
$$

В этом важном для статистики примере (см. [KKW], [Su]), очевидно, $\varphi \notin L_2(0,1)$. Однако прямая выкладка дает $\psi = \phi(\mathbf{\Phi}^{-1}) = \frac{1}{\varphi}$, $q = 1$, и потому применимы все утверждения §1.

Далее, соотношение (3.4) принимает вид

$$
-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{\phi(\mathbf{\Phi}^{-1}(t))}\int\limits_0^1 u(s)\phi(\mathbf{\Phi}^{-1}(s))\,ds, \qquad u(0) = u(1) = 0.
$$

Общее решение этого уравнения

$$
u(t) = c_0 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{\sin(\omega(\tau - t))\,d\tau}{\omega\phi(\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau))} + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t), \qquad \omega = \mu^{1/2}.
$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), после некоторых преобразований получим уравнение для собственных чисел[3]:

$$
\det\begin{bmatrix}
0 & \int\limits_0^1 \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau & -\frac{1}{\omega^2 Q} + \int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega}\,dt d\tau \\
\sin(\omega) & 0 & -\frac{1}{\omega}\int\limits_0^1 \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau \\
\cos(\omega) & 1 & \frac{1}{\omega}\int\limits_0^1 \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\sin(\omega\tau)\,d\tau
\end{bmatrix} = 0.
$$

При $Q = 0$ предельный переход дает, естественно, $\sin(\omega) = 0$. Отметим, что здесь также половина из собственных функций исходного процесса, а именно, $\sin(2\pi kt)$, $k \in \mathbb{N}$, ортогональны $\psi$ в $L_2(0,1)$, и потому не меняются при изменении $Q$.

Опишем еще один случай, когда КЛ-разложение для преобразованного процесса строится элементарно. Пусть $\varphi = u_m$ – собственная функция ковариации $G_X$. Тогда $\psi = \lambda_m u_m$,

[3] В [KKW] это уравнение записано в ином, эквивалентном, виде.

где $\lambda_m$ – соответствующее собственное число. Поэтому все собственные функции $u_k$, $k \neq m$, ортогональны $\psi$, и потому

$$\begin{array}{lll} \widetilde{\lambda}_k = \lambda_k, & \widetilde{u}_k = u_k, & k \neq m, \\ \widetilde{\lambda}_m = \lambda_m(1-q\alpha)^2, & \widetilde{u}_m = u_m. & \end{array}$$

Установим теперь формулу, упрощающую (2.8) для процессов рассматриваемого класса.

**ТЕОРЕМА 3**. Пусть ковариация $G_X$ является функцией Грина для оператора вида (3.1), $\widehat{\alpha} = \frac{1}{q}$. Если $\varphi \in L_2(0,1)$, то при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}}\| \le \varepsilon\} \sim \frac{\sqrt{q}}{\|\varphi\|_2} \cdot \big(2\ell \sin(\tfrac{\pi}{2\ell})\varepsilon^2\big)^{-\frac{\ell}{2\ell-1}} \cdot \mathbb{P}\{\|X\| \le \varepsilon\}. \tag{3.12}$$

**Доказательство**. Как показано в [Na1, Теорема 1.2] (случай оператора $L_X$ с разделенными граничными условиями был рассмотрен ранее в [NN, §7]), для процесса $X$ справедливо соотношение

$$F(r) = \mathbb{P}\{\|X\| \le \sqrt{r}\} \sim \mathcal{C} \cdot r^\beta \exp\left(-\mathfrak{D} r^{-d}\right), \qquad r \to 0, \tag{3.13}$$

где $d = \frac{1}{2\ell-1}$, $\mathfrak{D} = \frac{1}{2d}\big(2\ell\sin(\frac{\pi}{2\ell})\big)^{-d-1}$ (значения констант $\mathcal{C}$ и $\beta$ для нас сейчас несущественны).

Поведение плотности распределения $F'(r)$ при малых $r$ изучалось в [Lf2, Теорема 3] при весьма общих предположениях. В наших условиях (см. в связи с этим доказательство Теоремы 6.2 [NN]) этот результат [Lf2] можно записать так:

$$F'(r) \sim \mathcal{C}\mathfrak{D}d \cdot r^{\beta-d-1} \exp\left(-\mathfrak{D} r^{-d}\right), \qquad r \to 0, \tag{3.14}$$

что, очевидно, означает просто дифференцируемость асимптотики (3.13) по $r$.

Подставляя (3.14) и (2.12) в (2.10), получим

$$\widetilde{F}(r) \sim \frac{\mathcal{C}\mathfrak{D}d}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \cdot \int\limits_0^r \frac{x^{\beta-d-1}}{\sqrt{r-x}} \exp\left(-\mathfrak{D}x^{-d}\right)\, dx.$$

Замена переменной $x = r(1-y)$ дает

$$\widetilde{F}(r) \sim \frac{\mathcal{C}\mathfrak{D}d}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \cdot r^{\beta-d-\frac{1}{2}} \exp\left(-\mathfrak{D}r^{-d}\right) \int\limits_0^1 \frac{(1-y)^{\beta-d-1}}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{D}}{r^d}\big((1-y)^{-d}-1\big)\right) dy.$$

Легко видеть, что при $y \ge r^{d/2}$ подынтегральное выражение экспоненциально мало. Поэтому можно интегрировать только по промежутку $[0, r^{d/2}]$, на котором $(1-y)^{\beta-d-1} \sim 1$ и $(1-y)^{-d}-1 \sim yd$. Сделав еще замену $y = r^d z$, получим

$$\widetilde{F}(r) \sim \frac{\mathcal{C}\mathfrak{D}d}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \cdot r^{\beta-\frac{d+1}{2}} \exp\left(-\mathfrak{D}r^{-d}\right) \int\limits_0^{r^{-d/2}} \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left(-d\mathfrak{D}z\right) dz \sim$$

$$\sim \frac{\mathcal{C}}{\|\varphi\|_2} \cdot \sqrt{2q\mathfrak{D}d} \cdot r^{\beta-\frac{d+1}{2}} \exp\left(-\mathfrak{D}r^{-d}\right) \sim \frac{\sqrt{2q\mathfrak{D}d}}{\|\varphi\|_2} \cdot r^{-\frac{d+1}{2}} \cdot F(r),$$

что дает (3.12). $\square$

В примерах, рассмотренных выше, асимптотика малых уклонений для исходных процессов хорошо известна (процессы $W$ и $B$ являются классическими, процесс $\overline{W}_1$ разобран в [BNO]). Применяя теоремы 1 и 3, получаем

**Предложение 1**. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{W}_{\mathbf{1},\alpha}\| \le \varepsilon\} \sim \left[\begin{array}{ll} \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}|1-\frac{\alpha}{3}|} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha \ne 3, \\ \frac{2\varepsilon^{-1}}{\sqrt{3\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha = 3; \end{array}\right.$$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{B}_{\mathbf{1},\alpha}\| \le \varepsilon\} \sim \left[\begin{array}{ll} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}|1-\frac{\alpha}{12}|} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha \ne 12, \\ \frac{\varepsilon^{-2}}{\sqrt{6\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha = 12; \end{array}\right.$$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}\| \le \varepsilon\} \sim \left[\begin{array}{ll} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}|1-\frac{17\alpha}{5040}|} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha \ne \frac{5040}{17}, \\ \frac{\sqrt{17}\varepsilon^{-2}}{2\sqrt{21\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha = \frac{5040}{17}, \end{array}\right. \qquad \varphi(t) = t(1-t);$$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\mathbf{1},\alpha}\| \le \varepsilon\} \sim \left[\begin{array}{ll} \frac{4\sqrt{2}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3\pi}|1-\frac{\alpha}{120}|} \cdot \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right), & \alpha \ne 120, \\ \frac{\varepsilon^{-\frac{5}{3}}}{3\sqrt{5\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right), & \alpha = 120, \end{array}\right. \qquad X(t) = \overline{W}_1(t);$$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}\| \le \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}|1-\alpha|} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), \qquad \alpha \ne 1, \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\phi(\mathbf{\Phi}^{-1}(t))}.$$

**Замечание**. В примере **5** при $\alpha = 1$ теорема 2 (и, следовательно, теорема 3) не применима.

# 4 Некоторые обобщения

Конструкция (1.4) может быть распространена на некоторый специальный класс обобщенных функций $\varphi$.

Пусть $\varphi \in D'(\mathcal{O})$ такова, что $q \equiv \mathbb{E}|\langle\varphi, X\rangle|^2 < \infty$. Определим семейство гауссовских функций формулой, аналогичной (1.4):

$$\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}(x) = X(x) - \alpha\psi(x)\langle\varphi, X\rangle, \quad x \in \overline{\mathcal{O}}, \tag{4.1}$$

где $\psi(x) = \mathbb{E}X(x)\langle\varphi, X\rangle$.

**Замечание**. В терминах теории операторов условие на $\varphi$ означает, что $\varphi \in (Im(\mathfrak{G}^{1/2}))'$. Соответственно, $\psi \in Im(\mathfrak{G}^{1/2})$, и $q = \langle\varphi, \psi\rangle$. В теории случайных процессов $Im(\mathfrak{G}^{1/2})$ именуется ядром распределения процесса $X$, а $\varphi$ – линейным измеримым функционалом от процесса $X$ (см. [Lf1, §9]).

Для процессов (4.1) выполнена Основная лемма и Следствие 1. Вместо Следствия 2 имеет место следующий его аналог:

**Следствие 2'**. При $\widehat{\alpha} = \frac{1}{q}$ процесс $\mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}}(x)$ и с.в. $\langle \varphi, X \rangle$ независимы. Кроме того, $\langle \varphi, \mathcal{X}_{\varphi,\widehat{\alpha}} \rangle = 0$ п.н.

Далее, при выполнении условия (2.1) справедлива теорема 1. Если же ковариация $G_X(t,s)$ удовлетворяет условиям, описанным в §3, то проходит и алгоритм построения КЛ-разложения для процесса $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$.

Приведем несколько примеров.

**Пример 6**. Пусть $X = W$, $\varphi(t) = \delta(t-1)$. Тогда $\psi(t) = G_W(t,1) = t$, $q = G_W(1,1) = 1$, и

$$\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(t,s) = \min\{t,s\} + Qts \qquad (Q = \alpha^2 - 2\alpha).$$

Таким образом, при $\alpha \in ]0,2[$ процесс $\mathcal{W}_{\varphi,\alpha}$ совпадает по распределению с броуновским мостом от нуля до нуля длины $-\frac{1}{Q}$ (см. [BoS, 4.4.20]).

Теорема 1 дает для $\alpha \neq 1$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{W}_{\varphi,\alpha}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}|1-\alpha|} \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), \qquad \varepsilon \to 0,$$

что совпадает с частными случаями [Na, Предложение 1.9] и [NP, Теорема 4.1].

**Замечание**. При $\alpha = 1$ процесс $\mathcal{W}_{\varphi,\alpha}$ совпадает по распределению со стандартным броуновским мостом. Легко видеть, что бесконечное произведение в (2.9) при этом расходится, и теорема 2 места не имеет (как и в дальнейших примерах).

**Пример 7**. Рассмотрим проинтегрированный винеровский процесс

$$X(t) = W_1^{[0]}(t) = \int_0^t W(s)\,ds.$$

Если $\varphi(t) = \delta'(t-1)$, то $\psi(t) = -(G_{W_1})_s(t,1) = -\frac{t^2}{2}$, $q = (G_{W_1})_{st}(1,1) = 1$, и

$$\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(t,s) = G_{W_1}(t,s) + Q\frac{t^2 s^2}{4} \qquad (Q = \alpha^2 - 2\alpha).$$

Таким образом, процесс $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$ совпадает по распределению с проинтегрированным процессом из примера **6**. Утверждение теоремы 1 соответствует случаю $m = 1$ в [Na, Предложение 1.9]. Малые уклонения в случае $\alpha = 1$ (проинтегрированный броуновский мост) рассмотрены в [Na, Предложение 1.6].

Пусть теперь $\varphi(t) = \delta(t-1)$. Тогда $\psi(t) = G_{W_1}(t,1) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$, и $q = G_{W_1}(1,1) = \frac{1}{3}$. Теорема 1 дает для $\alpha \neq 3$

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{8\sqrt{6}\,\varepsilon^{1/3}}{\sqrt{\pi}|3-\alpha|} \cdot \exp\left(-\tfrac{3}{8}\varepsilon^{-2/3}\right), \qquad \varepsilon \to 0.$$

При $\alpha = 3$ можно прямым вычислением проверить, что $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(t,s)$ есть функция Грина краевой задачи

$$u^{IV} = \mu u; \qquad u(0) = u'(0) = u(1) = u''(1) = 0.$$

Применяя Теорему 1.4 [Na], получаем

$$\mathbb{P}\{\|\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{4\sqrt{2}\,\varepsilon^{-2/3}}{3\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\tfrac{3}{8}\varepsilon^{-2/3}\right), \qquad \varepsilon \to 0.$$

**Пример 8**. Рассмотрим еще процесс Слепяна [Sl] – стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $G_S(t,s) = 1-|t-s|$, $t,s \in [0,1]$. Пусть $\varphi(t) = \delta(t)+\delta(t-1)$. Тогда $\psi \equiv 1$, $q = 2$, и

$$\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(t,s) = 1 + Q - |t-s| \qquad (Q = 2\alpha^2 - 2\alpha).$$

Таким образом, процесс $\mathcal{S}_{\varphi,\alpha}$ совпадает по распределению с обобщенным процессом Слепяна $S^{(c)}$, $c = 1+Q$ (см. [GL] и [Na1, §2]). Отметим, что при $Q \ge 0$ справедливо также равенство

$$S^{(c)}(t) \stackrel{d}{=} W(t+c) - W(t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Утверждение теоремы 1 соответствует [Na1, Теорема 2.1, п.2]. Малые уклонения в случае $\alpha = 1/2$ (т.е. $c = 1/2$) рассмотрены в [Na1, Теорема 2.1, п.1].

**Пример 9**. Аналогично несложно показать, что к теореме 1 сводится утверждение [Na, Предложение 1.9] при произвольном $m \in \mathbb{N}$, а также [Na1, Теорема 2.2, п.2] и некоторые утверждения из [NP]. Таким образом, эта теорема дает единый подход к многим формулам, полученным ранее.

Можно также рассматривать многопараметрические аналоги преобразования (1.4). Мы ограничимся простейшим случаем.

Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2 \in L_{1,loc}(\mathcal{O})$ удовлетворяют условию (1.3) и условию "ортогональности"[4]

$$\int\limits_{\mathcal{O}}\int\limits_{\mathcal{O}} G_X(u,v)\varphi_1(u)\varphi_2(v)\,dudv = 0$$

Рассмотрим семейство гауссовских функций

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}}(x) = X(x) - \alpha_1\psi_1(x)\int\limits_{\mathcal{O}} X(u)\varphi_1(u)\,du - \alpha_2\psi_2(x)\int\limits_{\mathcal{O}} X(u)\varphi_2(u)\,du, \quad x \in \overline{\mathcal{O}}, \tag{4.2}$$

где $\psi_k = \mathfrak{G}\varphi_k$, $k = 1,2$.

Легко видеть, что функция (4.2) имеет ковариацию

$$\mathcal{G}_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}}(x,y) = G_X(x,y) + Q_1\psi_1(x)\psi_1(y) + Q_2\psi_2(x)\psi_2(y),$$

где $Q_k = q_k\alpha_k^2 - 2\alpha_k$, $q_k = \langle\varphi_k, \psi_k\rangle$. Поэтому, например, асимптотика $L_2$-малых уклонений функции $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}}$ при $\alpha_k \ne \frac{1}{q_k}$, $k = 1,2$, получается двукратным применением теоремы 1. Так же получаются аналоги остальных утверждений.

# 5 Приложение

**ЛЕММА 5.1**. Рассмотрим две последовательности: $\mu_k > 0$ и $b_k \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\sum_k \mu_k^{-1} < \infty$ и $\sum_k b_k < \infty$. Тогда для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ при $R \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\gamma_1 + \gamma_2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{1 - \frac{\mu_k}{R\exp(i\theta)}}\right| d\theta \;\longrightarrow\; \ln\left|\gamma_1 + \gamma_2\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right|. \tag{5.1}$$

[4] Для обобщенных функций $\varphi_1, \varphi_2 \in (Im(\mathfrak{G}^{1/2}))'$ это условие принимает вид $\langle\varphi_1, \mathfrak{G}\varphi_2\rangle = 0$.

**Доказательство**. При любом фиксированном $\theta \in ]0, 2\pi[$ выражение $1 - \frac{\mu_k}{R\exp(i\theta)}$ отделено от нуля. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком суммы. Таким образом, подынтегральное выражение в (5.1) сходится к $\ln|\gamma_1 + \gamma_2 \sum_k b_k|$ при $\theta \in ]0, 2\pi[$, причем сходимость равномерная на любом сегменте.

Далее, выражение под знаком модуля имеет лишь простые нули и полюсы. Поэтому подынтегральное выражение в (5.1) имеет лишь логарифмические особенности, и потому несложно построить суммируемую мажоранту. Повторное применение теоремы Лебега заканчивает доказательство. □

Я весьма признателен М.А. Лифшицу и Я.Ю. Никитину за стимулирующие обсуждения и библиографические указания.

# Список литературы

[AG] Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд.2. М.: Наука, 1966.

[Ba] H. Bateman, *A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind*, Messenger Math., V.37 (1908), 179-187.

[BNO] L. Beghin, Ya. Nikitin, E. Orsingher, *Exact small ball constants for some Gaussian processes under the $L_2$-norm*, ЗНС ПОМИ, Т.298 (2003), 5-21.

[BS] М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Л.: Изд. ЛГУ, 1980.

[BoS] A.N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae*, Birkhäuser, Basel, 1996.

[De] P. Deheuvels, *A Karhunen – Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge*, Stat. Prob. Letters, V.77 (2007), N12, 1190-1200.

[DLL] T. Dunker, M.A. Lifshits, W. Linde, *Small deviations of sums of independent variables*, Progr. Probab. V.43 (1998), 59-74.

[GHT] F. Gao, J. Hannig, F. Torcaso, *Comparison theorems for small deviations of random series*, Electron. J. Probab. V.8 (2003), N21, 1-17.

[GL] F. Gao, W.V. Li, *Small ball probabilities for the Slepian Gaussian fields*, Trans. AMS **359** (2007), 1339-1350.

[HN] N. Henze, Ya.Yu. Nikitin, *Watson-type goodness-of-fit tests based on the integrated empirical process*, Math. Meth. of Statist., V.11 (2002), 183-202.

[KK] Л.В. Канторович, В.И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Изд.5. М.: ФМЛ, 1962.

[KKW] M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz, *On tests of normality and other tests of goodness of fit based on the minimum distance method*, Ann. Math. Statist., V.26 (1955), N2, 189-211.

[Li] W.V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms*, J. Theor. Probab. V.5 (1992), N1, 1-31.

[Lf1] M.A. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* Киев: ТВиМС, 1995.

[Lf2] M.A. Lifshits, *On the lower tail probabilities of some random series*, Ann. Prob. V.25 (1997), N1, 424-442.

[Na] А.И. Назаров, *О точной константе в асимптотике малых уклонений в $L_2$-норме некоторых гауссовских процессов*, Пробл. Мат. Ан., V.26 (2003), 179-214.

[Na1] А.И. Назаров, *Точная асимптотика малых уклонений гауссовских процессов в $L_2$-норме и спектр краевых задач с нераспадающимися граничными условиями*, Препринт СПбМО, N 2007-03, 25с.

[NN] A.I. Nazarov, Ya.Yu. Nikitin, *Exact small ball behavior of integrated Gaussian processes under $L_2$-norm and spectral asymptotics of boundary value problems*, Probab. Theory and Rel. Fields, V.129 (2004), N4, 469-494.

[NP] А.И. Назаров, Р.С. Пусев, *Точная асимптотика малых уклонений в $L_2$-норме для некоторых взвешенных гауссовских процессов*, Препринт СПбМО, N 2006-1, 16с.

[Sl] D. Slepian, *First passage time for a particular Gaussian process,* Ann. Math. Statist. **32** (1961), 610-612.

[Su] S. Sukhatme, *Fredholm determinant of a positive definite kernel of a special type and its application*, Ann. Math. Statist., V.43 (1972), N6, 1914-1926.

[Syt] Г.Н. Сытая, *О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве*, Теория случайных процессов. V.2 (1974), 93-104.

[Ti] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Изд.2. М.: Наука, 1980.