

# Гельдеровские оценки решений вырождающихся недивергентных эллиптических и параболических уравнений

*А.И. Назаров\**,

Санкт-Петербургский госуниверситет,

e-mail: an@AN4751.spb.edu

## 1 Введение

Пусть  $n \geq 2$ ,  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ , содержащая начало координат. Рассмотрим в  $\Omega$  эллиптическое уравнение недивергентного вида с измеримыми коэффициентами

$$\mathcal{L}u \equiv - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f(x). \quad (1.1)$$

Будем считать, что симметричная матрица  $\mathcal{A} = (a_{ij})$  имеет **диагональное вырождение** на координатных плоскостях  $x_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Именно, предположим, что

$$\mathcal{A} = \sqrt{\Lambda} \tilde{\mathcal{A}} \sqrt{\Lambda}, \quad (1.2)$$

где измеримая матрица-функция  $\tilde{\mathcal{A}}$  удовлетворяет условию равномерной эллиптичности: при всех  $x \in \Omega$

$$\nu |\xi|^2 \leq (\tilde{\mathcal{A}} \xi, \xi) \leq \nu^{-1} |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu > 0, \quad (1.3)$$

а  $\Lambda$  – диагональная матрица специального вида, отвечающая за вырождение:

$$\Lambda(x) = \text{diag}\{\lambda_1(|x_1|), \lambda_2(|x_2|), \dots, \lambda_n(|x_n|)\}. \quad (1.4)$$

В статье получены локальные априорные оценки гельдеровской нормы для решения уравнения (1.1), так же как и для решения аналогичного параболического уравнения

$$\mathcal{M}u \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} = f(x, t) \quad \text{в } Q = \Omega \times ]0, T[. \quad (1.5)$$

Для равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений такие оценки были установлены в классической статье [1] (см. также [2]); в [3] они были распространены на уравнения с неограниченными младшими коэффициентами. Другой

---

\*Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00748.

метод получения гельдеровских оценок был предложен в [4]. Гельдеровость решений некоторых неравномерно эллиптических (параболических) уравнений была доказана в [5].

Уравнения с диагональным вырождением (1.1)-(1.4) в частных случаях изучались еще в 60-е годы (см., напр., [6]), но при условии гладкости матрицы коэффициентов  $\tilde{A}$ . В последнее время возрос интерес к таким уравнениям при условии лишь измеримости коэффициентов. Это объясняется, в частности, активным изучением задач со свободными границами, связанных с потоками, порожденными гауссовой кривизной ([7]; см. также [8]–[10]).

В статье [11] получено неравенство Харнака и гельдеровские оценки для решений уравнения, заменой переменной сводящегося к (1.1)-(1.4) при

$$n = 2, \quad \lambda_1(t) \equiv 1, \quad \lambda_2(t) = t^\alpha, \quad \alpha < 1.$$

Существенно, что уравнение (1.1) в [11] рассматривается в области, лежащей в полупространстве  $x_2 > 0$ , причем на  $\partial\Omega \cap \{x_2 = 0\}$ , по существу, предполагается выполненным условие Неймана. Поэтому, применяя четное отражение относительно плоскости  $x_2 = 0$ , можно свести эту задачу к нашей. С другой стороны, барьер, построенный в [11], не применим в ситуации, когда плоскость вырождения пересекает область. Заметим еще, что обоснованность соответствующих результатов для параболических уравнений в этой статье под вопросом. Дело в том, что доказательство теоремы 3.2 [11] (вариант параболического принципа максимума Александрова) содержит ошибку, и в правой части оценки  $\sup u_+$  вместо  $\rho^{\frac{2}{3}}$  должно стоять  $\rho^{\frac{1}{3}}$ . Поскольку доказательства дальнейших утверждений в параболическом случае не приведены, неясно, сохраняются ли они после исправления этой ошибки.

В работе [12] (см. также [13]) доказывается гельдеровость аппроксимационных решений однородного уравнения (1.1)-(1.4) при условии

$$\lambda_k(t) = t^{\alpha_k}, \quad -\frac{1}{n-1} < \alpha_k < 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Метод [12], [13] основан на развитии техники [4] и связан с оценками функций Грина для равномерно эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами, аппроксимирующих уравнение, сопряженное к (1.1). На этом пути приходится преодолевать существенные аналитические трудности, и результат получается лишь при жестком ограничении на  $\alpha_k$ .

В настоящей статье гельдеровость решений уравнений (1.1) и (1.5) устанавливается при условии **регулярного изменения** функций  $\lambda_k$  в окрестности нуля (см. §2). В частности, допускаются функции  $\lambda_k(t) = t^{\alpha_k}$  при произвольных  $\alpha_k < 1$ .

Наш метод основан на классической технике барьерных функций. Для их построения мы унифицируем уравнение, сводя его к равномерно эллиптическому (равномерно параболическому) уравнению с младшими коэффициентами, имеющими сильные сингулярности на координатных плоскостях. Для полученного уравнения строятся барьерные функции, оценки для которых равномерны относительно близости к координатным плоскостям. Как будет показано, этот метод несложно модифицируется и для рассмотрения аппроксимационных решений.

Статья разделена на шесть параграфов. В §2 собраны вспомогательные леммы о регулярно меняющихся функциях. §3 посвящен униформизации уравнения и построению барьерных функций. В §4 доказывается гельдеровость решений эллиптических

уравнений, а в §5 – параболических уравнений. Наконец, в §6 рассматриваются аппроксимационные решения.

Введем некоторые обозначения.  $K_\rho(x)$  –  $n$ -мерный куб с центром в точке  $x$  и ребром  $2\rho$ , стороны которого параллельны координатным осям;  $K_\rho = K_\rho(0)$ . Если  $x = (x_1, \bar{x})$  (т.е.  $\bar{x}$  – проекция  $x$  на плоскость  $x_1 = 0$ ), то  $K'_\rho(\bar{x})$  –  $(n-1)$ -мерная проекция  $K_\rho(x)$ .

Для произвольного множества  $E$  обозначим  $|E|$  его  $n$ -мерную (в §5 –  $(n+1)$ -мерную) меру Лебега, и  $E^+ = E \cap \mathbb{R}_+^n$ .

Положим  $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$ . Если  $u$  – непрерывная функция, то  $A_s^u = \{x : u(x) > s\}$  – ее множество уровня.

## 2 О регулярно меняющихся функциях

Напомним, что положительная функция  $\varphi(\tau)$ ,  $\tau > 0$ , называется **регулярно меняющейся функцией порядка  $\alpha$**  в окрестности нуля<sup>1</sup> (будем обозначать это  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ ), если для любого  $c > 0$

$$\varphi(c\tau)/\varphi(\tau) \rightarrow c^\alpha \quad \text{при } \tau \rightarrow +0. \quad (2.1)$$

Аналогично определяются регулярно меняющиеся функции в окрестности бесконечности.

Свойства регулярно меняющихся функций хорошо изучены. Приведем некоторые из них, используемые далее. Доказательства можно найти, например, в монографии [14].

**Предложение 2.1.** 1. Если  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ , то предел в (2.1) равномерный относительно  $c \in [c_1, c_2]$  при всех  $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ .

2. Если  $\varphi_1 \in \mathcal{R}_{\alpha_1}$ ,  $\varphi_2 \in \mathcal{R}_{\alpha_2}$ , то  $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{R}_{\alpha_1+\alpha_2}$ . Если  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ , то  $1/\varphi \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ .

3. Если  $\varphi_1 \in \mathcal{R}_{\alpha_1}$ ,  $\varphi_2 \in \mathcal{R}_{\alpha_2}$ , и  $\alpha_1 > 0$ , то  $\varphi_2 \circ \varphi_1 \in \mathcal{R}_{\alpha_1\alpha_2}$ . В частности,  $\varphi_1^{\alpha_2} \in \mathcal{R}_{\alpha_1\alpha_2}$ .

4. Если  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , то функция  $\varphi$  возрастает в некоторой окрестности нуля, и  $\varphi^{-1} \in \mathcal{R}_{1/\alpha}$ .

5. Если  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , то интеграл  $\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$  сходится, причем  $\psi \in \mathcal{R}_{\alpha+1}$ .

6. Если  $\varphi \in \mathcal{C}^1$ , и  $\tau\varphi'(\tau)/\varphi(\tau) \rightarrow \alpha$  при  $\tau \rightarrow +0$ , то  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ . Более того, если  $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ , то существует непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi_1 \in \mathcal{R}_\alpha$ , такая, что

$$\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi(\tau)} \rightarrow 1, \quad \frac{\tau\varphi'_1(\tau)}{\varphi_1(\tau)} \rightarrow \alpha \quad \text{при } \tau \rightarrow +0. \quad (2.2)$$

В дальнейшем нам потребуются некоторые утверждения о мерах, порожденных регулярно меняющимися плотностями. Первое из них напоминает известное неравенство Чебышева.

**Лемма 2.2.** Пусть  $\varphi_k \in \mathcal{R}_{\alpha_k}$ ,  $k = 1, 2$ , причем  $\alpha_1 > -1$ ,  $\alpha_2 > -1$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$ .

---

<sup>1</sup>При  $\alpha = 0$  такая функция называется медленно меняющейся в окрестности нуля.

Тогда при  $-1 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\frac{(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(|\tau|) \varphi_2(|\tau|) d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(|\tau|) d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_2} \varphi_2(|\tau|) d\tau} \asymp 1. \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Не умаляя общности,  $t_2 \geq |t_1|$ . Заметим, что замена функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на эквивалентные в нуле сохраняет соотношение (2.3). Поэтому, согласно предложению 2.1, п.6, можно считать, что функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  гладкие, и

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t\varphi_1'(t)}{\varphi_1(t)} = \alpha_1, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t\varphi_2'(t)}{\varphi_2(t)} = \alpha_2. \quad (2.4)$$

Согласно предложению 2.1, пп.2 и 5, функции

$$\psi_1(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau, \quad \psi_2(t) = \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau, \quad \psi(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau) \varphi_2(\tau) d\tau$$

– регулярно меняющиеся с показателями  $\alpha_1 + 1$ ,  $\alpha_2 + 1$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$  соответственно. Зафиксируем число  $N \geq 3$ , такое, что

$$N^{\alpha_1+1} \geq 4, \quad N^{\alpha_2+1} \geq 4, \quad N^{\alpha_1+\alpha_2+1} \geq 4. \quad (2.5)$$

За счет эквивалентной замены можно считать, что при  $0 < t \leq 1/N$

$$\frac{\psi_1(Nt)}{\psi_1(t)} \geq \frac{N^{\alpha_1+1}}{2}, \quad \frac{\psi_2(Nt)}{\psi_2(t)} \geq \frac{N^{\alpha_2+1}}{2}, \quad \frac{\psi(Nt)}{\psi(t)} \geq \frac{N^{\alpha_1+\alpha_2+1}}{2}. \quad (2.6)$$

Поэтому, если  $t_2 \geq Nt_1$ , то

$$\frac{(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(|\tau|) \varphi_2(|\tau|) d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(|\tau|) d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_2} \varphi_2(|\tau|) d\tau} \asymp \frac{t_2 \psi(t_2)}{\psi_1(t_2) \psi_2(t_2)} = \frac{\psi(t_2)}{t_2 \varphi_1(t_2) \varphi_2(t_2)} \cdot \frac{t_2 \varphi_1(t_2)}{\psi_1(t_2)} \cdot \frac{t_2 \varphi_2(t_2)}{\psi_2(t_2)} \asymp 1$$

(первое соотношение следует из (2.5) и (2.6), последнее – из того, что ввиду (2.4) это произведение имеет в нуле предел, равный  $\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{\alpha_1+\alpha_2+1}$ ).

Если же  $t_2 < Nt_1$ , то по теореме Лагранжа для некоторых  $1 < \theta, \theta_1, \theta_2 < N$

$$\frac{(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(|\tau|) \varphi_2(|\tau|) d\tau}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(|\tau|) d\tau \cdot \int_{t_1}^{t_2} \varphi_2(|\tau|) d\tau} = \frac{\varphi_1(\theta t_1) \varphi_2(\theta t_1)}{\varphi_1(\theta_1 t_1) \varphi_2(\theta_2 t_1)} \asymp 1$$

(последнее соотношение следует из предложения 2.1, п.1). □

Следующая лемма утверждает, что множество, "тощее" по мере Лебега, остается "тощим" и относительно меры с регулярно меняющейся плотностью.

**Лемма 2.3.** Пусть  $\varphi_k \in \mathcal{R}_{\alpha_k}$ ,  $\alpha_k > -1$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Для измеримых множеств  $E \subset \mathbb{R}^n$  определим меру

$$|E|_* = \int_E \varphi_1(|x_1|) \dots \varphi_n(|x_n|) dx_1 \dots dx_n.$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , зависящее только от  $\varepsilon$  и набора  $(\varphi_k)$ , такое, что для всех кубов  $K_\rho(x^0) \subset K_1$  и произвольного измеримого множества  $E$

$$|E \cap K_\rho(x^0)| \leq \delta \cdot |K_\rho(x^0)| \implies |E \cap K_\rho(x^0)|_* \leq \varepsilon \cdot |K_\rho(x^0)|_*.$$

*Доказательство.* Не умаляя общности, можно считать  $x^0 \in \mathbb{R}_+^n$ . Зафиксируем число  $N \geq 3$ , такое, что  $N^{\alpha_k+1} \geq 4$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и будем считать, также не ограничивая общности, что точка  $x^0$  лежит "близко" к координатным плоскостям  $x_k = 0$  при  $k \leq m$  и "далеко" от координатных плоскостей  $x_k = 0$  при  $k > m$  (здесь  $0 \leq m \leq n$ ), а именно,

$$x_k^0 \leq \frac{N+1}{N-1} \cdot \rho, \quad k = 1, \dots, m; \quad x_k^0 > \frac{N+1}{N-1} \cdot \rho, \quad k = m+1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Заметим, что при замене функций  $\varphi_k$  на эквивалентные в нуле мера  $|E|_*$  любого множества  $E$  умножается на величину, ограниченную и отделенную от нуля, и справедливость утверждения леммы не меняется. Поэтому можно считать, что все функции  $\psi_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau) d\tau$  удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\psi_k(Nt)}{\psi_k(t)} \geq \frac{N^{\alpha_k+1}}{2}, \quad 0 < t \leq 1/N. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что

$$\int_{x_k^0 - \rho}^{x_k^0 + \rho} \varphi_k(\tau) d\tau \asymp \begin{cases} \psi_k(\rho) \asymp \rho \varphi_k(\rho), & k = 1, \dots, m; \\ \rho \varphi_k(x_k^0), & k = m+1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.9)$$

откуда

$$|K_\rho(x^0)|_* \asymp \rho^n \varphi_1(\rho) \dots \varphi_m(\rho) \varphi_{m+1}(x_{m+1}^0) \dots \varphi_n(x_n^0). \quad (2.10)$$

Займемся теперь оценкой меры  $|E \cap K_\rho(x^0)|_*$ . Из "принципа наполняющейся ванны" (см., например, [15, Теорема 1.14]) следует, что при фиксированной мере  $|E \cap K_\rho(x^0)|$  максимум  $|E \cap K_\rho(x^0)|_*$  достигается тогда, когда  $E$  – множество уровня

$$E_s = \{x : \varphi_1(|x_1|) \dots \varphi_n(|x_n|) > s\}$$

при подходящим образом выбранном  $s$  (заменяя функции  $\varphi_k$  на эквивалентные, можно считать, не умаляя общности, что множества  $\{\varphi_1(|x_1|) \dots \varphi_n(|x_n|) = s\}$  при всех  $s$  имеют меру ноль).

Очевидно,  $K_\rho(x^0)$  содержится в параллелепипеде

$$\mathcal{P}(\rho) = \{x : |x_k| < 3\rho, \quad k \leq m; \quad x_k^0 - \rho < x_k < x_k^0 + \rho, \quad k > m\}.$$

С другой стороны, из (2.10) видно, что  $|K_\rho(x^0)|_* \asymp |\mathcal{P}(\rho)|_*$ . Поэтому достаточно оценить  $|E_s \cap \mathcal{P}(\rho)|_*$ , а ввиду симметрии –  $|E_s \cap \mathcal{P}^+(\rho)|_*$ .

Введем множества

$$\tilde{E}_1(\hat{\delta}, \rho) = \mathcal{P}^+(\rho) \cap \{x : x_k > \hat{\delta}\rho, k \leq m\}; \quad \tilde{E}_2(\hat{\delta}, \rho) = \mathcal{P}^+(\rho) \setminus \tilde{E}_1(\hat{\delta}, \rho).$$

Тогда, очевидно,  $|E_s \cap \mathcal{P}^+(\rho)|_* \leq |E_s \cap \tilde{E}_1(\hat{\delta}, \rho)|_* + |\tilde{E}_2(\hat{\delta}, \rho)|_*$ .

Из (2.9) и (2.10) следует, что при достаточно малых  $\hat{\delta}$

$$|\tilde{E}_2(\hat{\delta}, \rho)|_* \asymp |K_\rho(x^0)|_* \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\psi_k(\hat{\delta}\rho)}{\psi_k(\rho)},$$

и потому для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\hat{\delta} > 0$ , зависящее только от  $\varepsilon$  и  $(\varphi_k)$ , такое, что  $|\tilde{E}_2(\hat{\delta}, \rho)|_* \leq \frac{\varepsilon}{2} |K_\rho(x^0)|_*$ .

Далее, на отрезке  $[\hat{\delta}, 1]$  имеем  $\varphi_k(\rho z) \asymp z^{\alpha_k} \varphi_k(\rho)$ . Отсюда с учетом второй строки в (2.9) получаем соотношение на множестве  $E_1(\hat{\delta}, \rho)$  (здесь  $z_k = \frac{x_k}{\rho}$ ,  $\hat{N}$  зависит только от  $\hat{\delta}$  и  $(\varphi_k)$ ,  $\mu$  – произвольное положительное число):

$$\begin{aligned} z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} > \hat{N}\mu &\implies \\ \implies \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) > \mu \varphi_1(\rho) \dots \varphi_m(\rho) \varphi_{m+1}(x_{m+1}^0) \dots \varphi_n(x_n^0) &\implies \\ &\implies z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} > \frac{\mu}{\hat{N}}. \end{aligned}$$

Обозначим  $s = \mu \varphi_1(\rho) \dots \varphi_m(\rho) \varphi_{m+1}(x_{m+1}^0) \dots \varphi_n(x_n^0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} |E_s \cap \tilde{E}_1(\hat{\delta}, \rho)|_* &\leq \int_{\substack{z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} > \mu/\hat{N} \\ x_k \geq \hat{\delta}\rho, k=1, \dots, m \\ x \in \mathcal{P}^+(\rho)}} \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \\ &\leq \hat{N} \rho^n \varphi_1(\rho) \dots \varphi_m(\rho) \varphi_{m+1}(x_{m+1}^0) \dots \varphi_n(x_n^0) \cdot \int_{\substack{z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} > \mu/\hat{N} \\ z_k \leq 1, k=1, \dots, m}} z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} dz_1 \dots dz_m. \end{aligned}$$

В силу (2.10) найдется  $\mu$ , зависящее только от  $\varepsilon$ ,  $\hat{N}$  и  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , такое, что  $|E_s \cap \tilde{E}_1(\hat{\delta}, \rho)|_* \leq \frac{\varepsilon}{2} |K_\rho(x^0)|_*$ . Выберем  $\mu$  наименьшим из возможных и возьмем  $\hat{\delta}$ , зависящее от  $\mu$ ,  $\hat{N}$  и набора  $(\alpha_k)$ , так, что  $|K_1^+ \cap \{z : z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m} > \mu/\hat{N}\}| \geq \delta$  для любого  $m \leq n$  и для любого выбора  $m$  показателей  $\alpha_k$  из имеющихся. Это заканчивает доказательство леммы.  $\square$

### 3 Преобразование координат. Барьеры

Будем предполагать, что в (1.4)

$$\lambda_k \in \mathcal{R}_{\alpha_k}, \quad \alpha_k < 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Заметим, что при замене функций  $\lambda_k$  на эквивалентные в нуле уравнение (1.1) сохраняет свою структуру, а в (1.3) константа  $\nu$  изменяется в ограниченное число раз.

Поэтому, с учетом предложения 2.1, п.6, можно считать, не ограничивая общности, что  $\lambda_k \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ , и  $t\lambda'_k(t)/\lambda_k(t) \rightarrow \alpha_k$  при  $t \rightarrow +0$ . На отрицательной полуоси зададим функции  $\lambda_k$  четным продолжением.

Далее, поскольку гильдеровость – локальное свойство, его достаточно установить в кубе  $K_{R_0}(x^0) \Subset \Omega$  с малым (но фиксированным) ребром  $2R_0$  и произвольным центром  $x^0$ . При этом, если точка  $x^0$  находится "далеко" от  $k$ -й координатной плоскости (т.е.  $|x_k^0| \geq 2R_0$ ), можно считать (сдвигая начало координат и изменив при необходимости  $\nu$ ), что  $\lambda_k \equiv 1$  и  $x_k^0 = 0$ . Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда  $x^0$  находится "близко" к началу координат (т.е.  $|x_k^0| < 2R_0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ).

**Замечание 1.** В этом параграфе неоднократно возникают регулярно меняющиеся функции, полученные различными преобразованиями из  $\lambda_k$ , а также разнообразные агрегаты из них, имеющие конечные пределы в нуле. Легко видеть, что можно выбрать  $R_0 \leq 1$ , зависящее только от набора  $(\lambda_i)$ , так, что если  $|x_k| < 3R_0$ , все эти агрегаты "мало отличаются" от предельных значений (естественно, в каждом случае это утверждение будет конкретизировано).

Введем новую систему координат

$$y_k = \int_0^{x_k} \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda_k(\tau)}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Очевидно, преобразование (3.2), так же как и обратное к нему, удовлетворяет условию Гельдера в  $\bar{\Omega}$ . Поэтому показатель и константа Гельдера для любой функции в исходных координатах зависит только от ее показателя (соответственно, константы) Гельдера в новых координатах, а также от набора  $(\lambda_i)$ .

В  $y$ -координатах уравнение (1.1) принимает вид (для "пересаженных" функций мы сохраняем старые обозначения)

$$\tilde{\mathcal{L}}u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(y) u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii}(y) \beta_i(y) u_{y_i} = f(y), \quad (3.3)$$

где

$$\beta_k(y_k) = \frac{\lambda'_k(x_k)}{2\sqrt{\lambda_k(x_k)}}.$$

Заметим, что

$$\sigma_k \equiv \lim_{y_k \rightarrow 0} y_k \beta_k(y_k) = \lim_{x_k \rightarrow 0} \frac{x_k \lambda'_k(x_k)}{\lambda_k(x_k)} \cdot \lim_{x_k \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x_k} \frac{d\tau}{\sqrt{\lambda_k(\tau)}}}{2x_k / \sqrt{\lambda_k(x_k)}} = \frac{\alpha_k}{2 - \alpha_k} \in ] -1, 1[.$$

В силу Замечания 1 можно считать, что если  $|x_k| < 3R_0$ , то

$$\sigma_k - \frac{1 - |\sigma_k|}{2} \leq y_k \beta_k(y_k) \leq \sigma_k + \frac{1 - |\sigma_k|}{2}. \quad (3.4)$$

Образ куба  $K_{3R_0}$  при преобразовании (3.2) есть прямоугольный параллелепипед, который обозначим  $\tilde{\Pi}$ .

Введем теперь набор "одномерных" функций, из которых будут сконструированы барьеры.

**Лемма 3.1.** Пусть  $K_\rho(y^0) \subset \tilde{\Pi}$ . Тогда найдутся числа  $B_k$ , зависящие только от  $y_k^0$  и  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), такие, что функции  $w_k(y_k) = -y_k^2 + B_k x_k$  (здесь  $x_k(y_k)$  – функция, обратная (3.2)) обладают следующими свойствами:

1.  $0 < \nu(1 - (\sigma_k)_+) \leq \tilde{\mathcal{L}}w_k \leq 4\nu^{-1}$  в  $K_\rho(y^0)$ ;
2.  $w_k$  достигает максимума в точке  $y_k^0$ , причем

$$C_1 \rho^2 \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 + \rho) \leq C_2 \rho^2; \quad C_1 \rho^2 \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq C_2 \rho^2, \quad (3.5)$$

где положительные константы  $C_1, C_2$  зависят только от набора  $(\lambda_i)$ ;

3. существует  $\vartheta > 0$ , зависящее только от набора  $(\lambda_i)$ , такое, что если  $|1 - \frac{\rho}{y_k^0}| \leq \vartheta$ , то

$$\hat{C}_1 \rho^2 \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq \hat{C}_2 \rho^2, \quad (3.6)$$

где константы  $\hat{C}_1, \hat{C}_2$  также зависят только от набора  $(\lambda_i)$ , причем  $\hat{C}_2 \leq \frac{5}{4} \hat{C}_1$ .

*Доказательство.* Непосредственный подсчет дает  $\tilde{\mathcal{L}}(-y_k^2) = 2\tilde{a}_{kk}(1 - y_k\beta_k(y_k))$ . Поскольку  $\mathcal{L}x_k = 0$ , ввиду (3.4) свойство 1 выполнено при любом выборе  $B_k$ .

Далее, заметим, что при  $y_k^0 = 0$  можно положить  $B_k = 0$ , и свойство 2 становится очевидным. Если же  $y_k^0 \neq 0$ , то в силу симметрии можно считать  $y_k^0 > 0$ . Поскольку  $dx_k/dy_k = \sqrt{\lambda_k(x_k)}$ , условие  $w'_k(y_k^0) = 0$  будет выполнено, если положить  $B_k = \frac{2y_k^0}{\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}}$ . Отметим, что, согласно предложению 2.1, пп.3-5,

$$\frac{y_k}{\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k))}} \in \mathcal{R}_{1-\sigma_k} - \text{возрастающая функция}, \quad (3.7)$$

т.е.  $B_k$  зависит от  $y_k^0$  монотонно, и потому при фиксированном  $B_k$  функция  $w_k$  возрастает на  $] -\infty, y_k^0[$  и убывает на  $]y_k^0, +\infty[$ .

Имеем

$$w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 + \rho) = \rho^2 + 2y_k^0 \left( \rho + \frac{x_k(y_k^0)}{\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} - \frac{x_k(y_k^0 + \rho)}{\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} \right).$$

Разлагая  $x_k(y_k^0 + \rho)$  по формуле Тейлора, получаем

$$w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 + \rho) = \rho^2 \left( 1 - \frac{y_k^0}{2\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} \cdot \lambda'_k(x_k(y_k^0 + \theta\rho)) \right), \quad (3.8)$$

где  $\theta \in ]0, 1[$ .

Из (3.7) видно, что

$$\left| \frac{y_k^0 \cdot \lambda'_k(x_k(y_k^0 + \theta\rho))}{2\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} \right| \leq \left| (y_k^0 + \theta\rho) \cdot \frac{\lambda'_k(x_k(y_k^0 + \theta\rho))}{2\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0 + \theta\rho))}} \right| = |(y_k^0 + \theta\rho)\beta_k(y_k^0 + \theta\rho)|,$$

откуда  $\frac{1-\sigma_k}{2}\rho^2 \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 + \rho) \leq \frac{3-\sigma_k}{2}\rho^2$ .



Второе неравенство в (3.5) доказывается несколько сложнее. Аналогично (3.8), имеем

$$w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) = \rho^2 \left( 1 - \frac{y_k^0}{2\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} \cdot \lambda'_k(x_k(y_k^0 - \theta\rho)) \right).$$

Предположим сначала, что  $\rho \leq \delta y_k^0$ , где число  $\delta \in ]0, 1[$  будет выбрано ниже. В силу предложения 2.1, п.1, Замечания 1 и соотношения (3.7) можно считать, что

$$\frac{y_k^0 \sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0 - \theta\rho))}}{(y_k^0 - \theta\rho) \sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} \leq \left( \frac{y_k^0}{y_k^0 - \theta\rho} \right)^{1-\sigma_k} \cdot \frac{4 - |\sigma_k|}{3} \leq \frac{4 - |\sigma_k|}{3(1 - \delta)^{1-\sigma_k}},$$

и потому

$$\left| \frac{y_k^0}{2\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))}} \cdot \lambda'_k(x_k(y_k^0 - \theta\rho)) \right| \leq \frac{4 - |\sigma_k|}{3(1 - \delta)^{1-\sigma_k}} \cdot |(y_k^0 - \theta\rho) \beta_k(y_k^0 - \theta\rho)|.$$

Выбрав  $\delta = 1 - (1 - (1 - |\sigma_k|)^2/9)^{\frac{1}{1-\sigma_k}}$ , получим в этом случае

$$\frac{1 - |\sigma_k|}{2 + |\sigma_k|} \frac{\rho^2}{2} \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq \frac{7 + 5|\sigma_k|}{2 + |\sigma_k|} \frac{\rho^2}{2}.$$

Пусть теперь  $\delta y_k^0 \leq \rho \leq 2y_k^0$ . Тогда из предыдущей оценки получаем

$$w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \geq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \delta y_k^0) \geq \frac{1 - |\sigma_k|}{2 + |\sigma_k|} \cdot \frac{(\delta y_k^0)^2}{2} \geq \frac{1 - |\sigma_k|}{2 + |\sigma_k|} \cdot \frac{\delta^2}{8} \rho^2.$$

С другой стороны,  $\frac{x_k}{\sqrt{\lambda_k(x_k)}} = x_k \cdot dy_k/dx_k$ , и  $y_k(x_k) \in \mathcal{R}_{\frac{2-\alpha_k}{2}}$ . В силу предложения 2.1, п.6, и Замечания 1 можно считать, что  $B_k x_k(y_k^0) \leq 2(2 - \alpha_k)(y_k^0)^2$ , и потому

$$w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq w_k(y_k^0) - w_k(-y_k^0) = 2B_k x_k(y_k^0) \leq 4(2 - \alpha_k)(y_k^0)^2 \leq 4 \frac{2 - \alpha_k}{\delta^2} \rho^2.$$

Пусть, наконец,  $\rho \geq 2y_k^0$ . Тогда  $-\rho \leq y_k^0 - \rho \leq -\frac{\rho}{2}$ , и потому

$$\frac{\rho^2}{4} \leq -w_k(-\frac{\rho}{2}) \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq w_k(\frac{\rho}{2}) - w_k(-\rho) \leq 2B_k x_k(\rho) + \rho^2 \leq (9 - 4\alpha_k)\rho^2,$$

что заканчивает доказательство п.2.

В условиях п.3 имеем  $y_k^0 > 0$  и  $|y_k^0 - \rho| \leq \vartheta y_k^0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} B_k(x_k(y_k^0) - x_k(\vartheta y_k^0)) - (1 - \vartheta^2)(y_k^0)^2 &= \\ &= w_k(y_k^0) - w_k(\vartheta y_k^0) \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq w_k(y_k^0) - w_k(-\vartheta y_k^0) = \\ &= B_k(x_k(y_k^0) + x_k(\vartheta y_k^0)) - (1 - \vartheta^2)(y_k^0)^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $x_k(y_k) \in \mathcal{R}_{1+\sigma_k}$ , в силу Замечания 1 можно считать, что  $x_k(\vartheta y_k^0) \leq 2\vartheta^{1+\sigma_k} x_k(y_k^0)$ . Далее, в силу предложения 2.1, п.6, и Замечания 1 можно считать, что

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \vartheta)(2 - \alpha_k)}{(1 + \vartheta)^2} \rho^2 &\leq (1 - \vartheta)(2 - \alpha_k)(y_k^0)^2 \leq B_k x_k(y_k^0) \leq \\ &\leq (1 + \vartheta)(2 - \alpha_k)(y_k^0)^2 \leq \frac{(1 + \vartheta)(2 - \alpha_k)}{(1 - \vartheta)^2} \rho^2, \end{aligned}$$

и потому

$$(1 - \alpha_k - c(\vartheta, \sigma_k))\rho^2 \leq w_k(y_k^0) - w_k(y_k^0 - \rho) \leq (1 - \alpha_k + c(\vartheta, \sigma_k))\rho^2,$$

где  $c \rightarrow 0$  при  $\vartheta \rightarrow 0$ .

Осталось выбрать  $\vartheta$  так, что  $c(\vartheta, \sigma_k) \leq \frac{1-\alpha_k}{9}$  при всех  $k = 1, \dots, n$ .  $\square$

## 4 Эллиптический случай

Во всех леммах этого параграфа предполагается, что функция  $v \in W_n^2(K_{3R_0})$  после перехода к  $y$ -координатам неотрицательна в кубе  $K_\rho(y^0) \subset \tilde{\Pi}$  и удовлетворяет в нем неравенству  $\tilde{\mathcal{L}}v \geq -f(y)$  п.в. Введем обозначение  $\lambda = \det(\Lambda) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ .

Мы следуем классической схеме [3]. Первая лемма показывает, что если в каком-то кубе множество уровня  $A_s^v$  имеет достаточно большую меру, то некоторый меньший куб целиком лежит в множестве уровня  $A_{s/2}^v$  (с поправкой на правую часть уравнения). Фольклорное название "лемма о тощем множестве" объясняется тем, что множество *под уровнем  $s$*  является "тощим" (имеет малую меру).

**Лемма 4.1.** *Существуют константы  $\zeta \in ]0, 1[$ ,  $\eta \in ]0, 1[$ ,  $\gamma > 0$  и  $C_3 > 0$ , зависящие только от  $n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такие, что если для какого-то  $s > 0$  выполнено неравенство  $|K_\rho(y^0) \cap A_s^v| \geq (1 - \zeta)|K_\rho(y^0)|$ , то*

$$v \geq \frac{s}{2} - C_3 \rho^\gamma \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \quad \text{в } K_{\eta\rho}(y^0). \quad (4.1)$$

*Доказательство.* Построим барьерную функцию

$$W(y) = \frac{1}{C_1 \rho^2} \sum_{k=1}^n w_k(y_k) + \tilde{C}, \quad (4.2)$$

где  $w_k$  – функции в кубе  $K_\rho(y^0)$ , определенные в лемме 3.1,  $C_1$  – константа из (3.5), а  $\tilde{C}$  подбирается из условия  $W(y^0) = 1$ . Из (3.5) следует, что  $W|_{\partial K_\rho(y^0)} \leq 0$ .

Перейдем в  $x$ -координаты и обозначим  $x^0$  образ  $y^0$  и  $\Pi_\rho(x^0)$  прямоугольный параллелепипед – образ  $K_\rho(y^0)$ . За "пересадками" функций сохраним прежние обозначения.

Очевидно, функция  $sW(x) - v(x)$  неположительна на  $\partial \Pi_\rho(x^0)$ . Применяя к ней принцип максимума Александрова ([16]), получим

$$\begin{aligned} \left( \max_{\Pi_\rho(x^0)} (sW - v)_+ \right)^n &\leq N_1(n) |\Pi_\rho(x^0)| \cdot \int_{A_0^{sW-v} \cap \Pi_\rho(x^0)} \frac{(\mathcal{L}(sW(x) - v(x)))_+^n}{\det(\mathcal{A})} dx \leq \\ &\leq \frac{N_1(n)}{\nu^n} |\Pi_\rho(x^0)| \cdot \int_{A_0^{sW-v} \cap K_\rho(y^0)} \frac{(\tilde{\mathcal{L}}(sW(y) - v(y)))_+^n}{\sqrt{\lambda(x(y))}} dy. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.1, п.1,  $\tilde{\mathcal{L}}(sW - v) \leq \frac{4n\nu^{-1}}{C_1 \rho^2} s + f_+(x)$ . Поэтому

$$(sW - v)_+ \leq \frac{N_2(n)}{\nu} |\Pi_\rho(x^0)|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( s \frac{|A_0^{sW-v} \cap K_\rho(y^0)|_*^{\frac{1}{n}}}{\nu C_1 \rho^2} + \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \right),$$

где, аналогично лемме 2.2,

$$|E|_* = \int_E \frac{dy_1 \dots dy_n}{\prod_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k(x_k(y_k))}}.$$

Поскольку  $W \leq 1$ , легко видеть, что  $(A_0^{sW-v} \cap K_\rho(y^0)) \subset K_\rho(y^0) \setminus A_s^v$ . Введя обозначение  $\varepsilon = \frac{|K_\rho(y^0) \setminus A_s^v|_*}{|K_\rho(y^0)|_*}$ , получим

$$v(y) \geq sW(y) - \frac{N_2(n)}{\nu} |\Pi_\rho(x^0)|^{\frac{1}{n}} \cdot \left( s \frac{(\varepsilon |K_\rho(y^0)|_*)^{\frac{1}{n}}}{\nu C_1 \rho^2} + \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \right). \quad (4.3)$$

Заметим, что

$$\frac{|\Pi_\rho(x^0)| \cdot |K_\rho(y^0)|_*}{\rho^{2n}} = \prod_{k=1}^n \frac{\int_{y_k^0-\rho}^{y_k^0+\rho} \sqrt{\lambda_k(x_k(y_k))} dy_k \cdot \int_{y_k^0-\rho}^{y_k^0+\rho} \frac{dy_k}{\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k))}}}{\rho^2}.$$

Согласно лемме 2.2, последнее выражение ограничено константой, зависящей только от набора  $(\lambda_i)$ . Поэтому оценка (4.3) с учетом (3.5) дает при  $y \in K_{\eta\rho}(y^0)$

$$v(y) \geq s \left( 1 - \frac{nC_2}{C_1} \eta^2 - N_3 \varepsilon^{\frac{1}{n}} \right) - N_4 |\Pi_\rho(x^0)|^{\frac{1}{n}} \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \quad (4.4)$$

(здесь  $C_2$  – константа из (3.5), а  $N_3$  и  $N_4$  зависят только от  $n$ ,  $\nu$  и набора  $(\lambda_i)$ ).

Поскольку  $\sqrt{\lambda_k(x_k(y_k))} \in \mathcal{R}_{\sigma_k}$ , формула (2.10) дает

$$|\Pi_\rho(x^0)| \asymp \rho^n \prod_{k=1}^m \sqrt{\lambda_k(x_k(\rho))} \cdot \prod_{k=m+1}^n \sqrt{\lambda_k(x_k(y_k^0))} \leq N_5 \rho^{n\gamma}, \quad (4.5)$$

где  $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (\sigma_k)_- > 0$ , а  $N_5$  зависит только от набора  $(\lambda_i)$ .

Подставим (4.5) в (4.4) и положим  $\eta = \sqrt{C_1/(4nC_2)}$ ,  $C_3 = N_4 N_5^{\frac{1}{n}}$ . Осталось заметить, что согласно лемме 2.3 оценка  $|K_\rho(y^0) \setminus A_s^v| \leq \zeta \cdot |K_\rho(y^0)|$  при достаточно малом  $\zeta$  обеспечивает  $\varepsilon \leq (4N_3)^{-n}$ , что дает (4.1).  $\square$

Следующая лемма показывает, что положительная "подпорка" для  $v$  на грани достаточно большого подкуба, лежащей близко к координатной плоскости, может быть переброшена через эту плоскость по тонкому "мостику".

**Лемма 4.2.** *Существуют константы  $\widehat{\vartheta} \in ]0, \frac{1}{4}[$  и  $C_4 > 0$ , зависящие только от  $n$ ,  $\nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такие, что если  $0 \leq y_m^0 \leq (1 - \widehat{\vartheta})\rho$  для некоторого  $m$  (пусть для определенности  $m = 1$ ), и для какого-то  $s > 0$  на множестве  $\{\widehat{\vartheta}^2 \rho\} \times K'_{(1-\widehat{\vartheta})\rho}(\overline{y^0})$  выполнено неравенство  $v \geq s$ , то*

$$v \geq \frac{s}{2} - C_4 \rho^\gamma \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \quad \text{в параллелепипеде } ] - \widehat{\vartheta}^2 \rho, \widehat{\vartheta}^2 \rho[ \times K'_{\widehat{\vartheta}\rho}(\overline{y^0}), \quad (4.6)$$

где  $\gamma$  – константа из леммы 4.1.

*Доказательство.* Не умаляя общности, можно считать  $\widehat{\vartheta} \leq \vartheta$ , где  $\vartheta$  – константа из леммы 3.1, п.3. Введем обозначение  $\widehat{y^0} = (-\widehat{\vartheta}\rho, \overline{y^0})$  и построим барьерную функцию

$$\widehat{W}(y) = \frac{1}{C_1((1 - \widehat{\vartheta})\rho)^2} \sum_{k=2}^n w_k(y_k) - \frac{w_1(y_1)}{\widehat{C}_1(\widehat{\vartheta}(\widehat{\vartheta} + 1)\rho)^2} + \widetilde{C}, \quad (4.7)$$

где  $w_k$  – функции в кубе  $K_\rho(\widehat{y}^0)$ , определенные в лемме 3.1,  $C_1$  и  $\widehat{C}_1$  – константы из (3.5) и (3.6) соответственно, а  $\widetilde{C}$  подбирается из условия  $\widehat{W}(\widehat{\vartheta}^2\rho, \overline{y}^0) = 1$ .

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед толщины  $\widehat{\vartheta}(\widehat{\vartheta} + 1)\rho$ , примыкающий к плоскости  $y_1 = \widehat{\vartheta}^2\rho$ :

$$\widetilde{\widehat{\Pi}}_\rho = ] - \widehat{\vartheta}\rho, \widehat{\vartheta}^2\rho[ \times K'_{(1-\widehat{\vartheta})\rho}(\overline{y}^0) \subset (K_\rho(\widehat{y}^0) \cap K_\rho(y^0)).$$

Из (3.5), (3.6) следует, что  $\widehat{W}|_{\widetilde{\widehat{\Pi}}_\rho} \leq 1$ , и  $\widehat{W} \leq 0$  на  $\partial\widetilde{\widehat{\Pi}}_\rho$ , за исключением грани  $y_1 = \widehat{\vartheta}^2\rho$ . Далее, согласно лемме 3.1, п.1,

$$\widetilde{\widehat{\mathcal{L}W}} \leq \frac{1}{\rho^2} \cdot \left( \frac{4(n-1)\nu^{-1}}{C_1(1-\widehat{\vartheta})^2} - \frac{\nu(1-(\sigma_1)_+)}{\widehat{C}_1\widehat{\vartheta}^2(\widehat{\vartheta}+1)^2} \right).$$

Обозначим  $\vartheta_1$  положительный корень выражения в последней скобке. Тогда при  $\widehat{\vartheta} \leq \vartheta_1$  имеем  $\widetilde{\widehat{\mathcal{L}W}} \leq 0$ .

Перейдем в  $x$ -координаты и обозначим  $\widehat{\Pi}_\rho$  прямоугольный параллелепипед – образ  $\widetilde{\widehat{\Pi}}_\rho$ . За "пересадками" функций сохраним прежние обозначения.

Очевидно, функция  $s\widehat{W}(x) - v(x)$  неположительна на  $\partial\widehat{\Pi}_\rho$ . Применяя к ней принцип максимума Александрова, получим

$$\begin{aligned} (\max_{\widehat{\Pi}_\rho} (sW - v)_+)^n &\leq N_1(n) |\widehat{\Pi}_\rho| \cdot \int_{\widehat{\Pi}_\rho} \frac{(\mathcal{L}(sW(x) - v(x)))_+^n}{\det(\mathcal{A})} dx \leq \\ &\leq \frac{N_1(n)}{\nu^n} |\widehat{\Pi}_\rho| \cdot \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, \widetilde{\widehat{\Pi}}_\rho}^n. \end{aligned}$$

Аналогично (4.5), имеем  $|\widehat{\Pi}_\rho| \leq N_6\rho^{n\gamma}$ , где  $N_6$  зависит только от набора  $(\lambda_i)$ . С учетом (3.5), (3.6) при  $y \in ] - \widehat{\vartheta}^2\rho, \widehat{\vartheta}^2\rho[ \times K'_{\widehat{\vartheta}\rho}(\overline{y}^0)$  получаем

$$v(y) \geq s \left[ \widehat{W}(\widehat{y}^0) - \frac{(n-1)C_2\widehat{\vartheta}^2}{C_1(1-\widehat{\vartheta})^2} + \frac{(1-\widehat{\vartheta})^2}{(1+\widehat{\vartheta})^2} \right] - C_4\rho^\gamma \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)}$$

(здесь  $C_2$  – константа из (3.5)).

В силу (3.6)  $\widehat{W}(\widehat{y}^0) \geq 1 - \frac{\widehat{C}_2}{\widehat{C}_1} \geq -\frac{1}{4}$ . Поэтому можно выбрать  $\widehat{\vartheta} \leq \min\{\vartheta, \vartheta_1\}$  так, чтобы выражение в квадратной скобке было не меньше  $\frac{1}{2}$ , что дает (4.6).  $\square$

Следующая лемма позволяет распространить на весь куб положительную "подпорку" для  $v$ , полученную в лемме 4.1 для малого подкуба.

**Лемма 4.3.** *Существуют константы  $\varkappa \in ]0, 1[$  и  $C_5 > 0$ , зависящие только от  $n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такие, что если для какого-то  $s > 0$  выполнено неравенство  $|K_{\frac{\rho}{2}}(y^0) \cap A_s^v| \geq (1 - \zeta)|K_{\frac{\rho}{2}}(y^0)|$ , то*

$$v \geq \varkappa s - C_5\rho^\gamma \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \quad \text{в } K_{\frac{\rho}{2}}(y^0) \quad (4.8)$$

(здесь  $\zeta \in ]0, 1[$  и  $\gamma > 0$  – константы из леммы 4.1).

*Доказательство.* Не умаляя общности, можно считать  $y^0 \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ . Предположим сначала, что  $f \equiv 0$ . Применив лемму 4.1 к кубу  $K_{\frac{\rho}{2}}(y^0)$ , получим оценку  $v \geq \frac{s}{2}$  в  $K_{\frac{\rho}{2}}(y^0)$ .

Положим  $\hat{\eta} = \min\{\eta, \hat{\vartheta}^4\}$  (здесь  $\hat{\vartheta}$  – константа из леммы 4.2). На множестве  $K_{\rho}(y^0) \cap \{y_k > \frac{\hat{\eta}}{3}\rho, \quad k = 1, \dots, n\}$  коэффициенты  $\beta_i$  ограничены, а их  $L_n$ -нормы в силу (3.4) оцениваются сверху константой, не зависящей от  $\rho$  и  $y^0$ . Применяя "лемму о расползании чернильных пятен" ([3, Лемма 2.2]), получим оценку  $v \geq \varkappa_1 s$  на множестве  $K_{(1-\frac{\hat{\eta}^3}{2})\rho}(y^0) \cap \{y_k \geq \frac{\hat{\eta}^4}{2}\rho, \quad k = 1, \dots, n\}$  (здесь  $\varkappa_1$  зависит только от  $n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ ).

Предположим, что куб  $K_{(1-\frac{\hat{\eta}^3}{2})\rho}(y^0)$  пересекает какую-нибудь координатную плоскость (для определенности,  $y_1 = 0$ ). Рассмотрим всевозможные кубики  $K_{\frac{\hat{\eta}^2}{2}\rho}$ , целиком лежащие в полупространствах  $y_k > 0, \quad k = 2, \dots, n$ , и вылезаящие из полупространства  $y_1 > 0$  на глубину  $\frac{\hat{\eta}^3}{2}\rho$ . Применяя к ним лемму 4.2, получим оценку  $v \geq \frac{\varkappa_1}{2}s$  на множестве  $K_{(1-\frac{\hat{\eta}^3}{2})\rho}(y^0) \cap \{|y_1| \leq \frac{\hat{\eta}^4}{2}\rho; \quad y_k > \frac{\hat{\eta}^2}{2}\rho, \quad k = 2, \dots, n\}$ . Вновь применяя "лемму о расползании чернильных пятен" (во втором ортанте), получим оценку  $v \geq \varkappa_2 s$  на множестве  $K_{(1-\frac{\hat{\eta}^3}{2})\rho}(y^0) \cap \{y_k \geq \frac{\hat{\eta}^4}{2}\rho, \quad k = 2, \dots, n\}$ , за исключением "коридора" глубины  $\frac{\hat{\eta}^2}{2}\rho$  в окрестности плоскости  $y_1 = 0$  (здесь  $\varkappa_2$  также зависит только от  $n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ ).

Продолжая этот процесс, мы не более чем за  $n$  шагов получим оценку  $v \geq 2\varkappa s$  в кубе  $K_{(1-\frac{\hat{\eta}^3}{2})\rho}(y^0)$ , за исключением крестообразного симметричного "коридора" глубины  $\hat{\vartheta}^2\rho$  в окрестности плоскостей  $y_k = 0, \quad k = 1, \dots, n$ . Наконец, применяя лемму 4.2 в кубах  $K_{\frac{\rho}{2}}$ , вылезаящих из полупространства  $y_k > 0$  на глубину  $\frac{\hat{\eta}}{2}\rho$ , мы получим оценку  $v \geq \varkappa s$  в кубе  $K_{\frac{\rho}{2}}(y^0)$ .

Для рассмотрения общего случая осталось заметить, что на каждом шаге из оценки вычитается величина вида  $c\rho^\gamma \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n, K_{\rho}(y^0)}$ , где все константы  $c$  зависят только от  $n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ . Это дает (4.8).  $\square$

Лемма 4.3 является прямым аналогом Леммы 2.3 [3], и оценка Гельдера для решения уравнения (3.3) выводится из нее стандартным способом (см. [3, §2]). После перехода в  $x$ -координаты мы получаем оценку для решения уравнения (1.1). Сформулируем только последний результат.

**Теорема 4.4.** Пусть функция  $u \in W_{n,loc}^2(\Omega)$  удовлетворяет уравнению (1.1), и  $|u| \leq M_0$  в  $\Omega$ . Пусть коэффициенты (1.1) удовлетворяют условиям (1.2)-(1.4), (3.1), а  $\frac{f}{\det(\Lambda)} \in L_n(\Omega)$ . Тогда в любой строго внутренней подобласти  $\Omega' \Subset \Omega$  справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{\hat{\gamma}}(\overline{\Omega'})} \leq M_{\hat{\gamma}},$$

где  $\hat{\gamma}$  определяется только  $n, \nu$  и набором  $(\lambda_i)$ , а  $M_{\hat{\gamma}}$ , кроме того, зависит от  $M_0, \left\| \frac{f}{\det(\Lambda)} \right\|_{n,\Omega}$  и  $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ .

## 5 Параболический случай

В этом параграфе будет рассмотрено уравнение (1.5) при условиях (1.2)-(1.4), (3.1). Схема получения гельдеровских оценок в существенном повторяет предыдущий па-

раграф, поэтому здесь будут даны только формулировки соответствующих лемм и краткие указания к доказательствам. Введем обозначения  $Q_\rho(x, t) = K_\rho(x) \times ]t - \rho^2, t[$ ,  $Q'_\rho(\bar{x}, t) = K'_\rho(\bar{x}) \times ]t - \rho^2, t[$ .

Доказательство следующей леммы дословно повторяет лемму 2.3.

**Лемма 5.1.** Пусть  $\varphi_k \in \mathcal{R}_{\alpha_k}$ ,  $\alpha_k > -1$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Для измеримых множеств  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$  определим меру

$$|E|_\star = \int_E \varphi_1(|x_1|) \dots \varphi_n(|x_n|) dx_1 \dots dx_n dt.$$

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , зависящее только от  $\varepsilon$  и набора  $(\varphi_k)$ , такое, что для всех цилиндров  $Q_\rho(x^0, t^0) \subset K_1 \times ]0, T[$  и произвольного измеримого множества  $E$

$$|E \cap Q_\rho(x^0, t^0)| \leq \delta \cdot |Q_\rho(x^0, t^0)| \implies |E \cap Q_\rho(x^0, t^0)|_\star \leq \varepsilon \cdot |Q_\rho(x^0, t^0)|_\star.$$

При преобразовании координат (3.2) уравнение (1.5) принимает вид (для "пересаживаемых" функций мы по-прежнему сохраняем старые обозначения)

$$\widetilde{\mathcal{M}}u \equiv \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(y, t) u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^n \widetilde{a}_{ii}(y, t) \beta_i(y_i) u_{y_i} = f(y, t). \quad (5.1)$$

В леммах 5.2-5.4 предполагается, что функция  $v \in W_{n+1}^{2,1}(K_{3R_0} \times ]0, T[)$  после перехода к  $y$ -координатам неотрицательна в цилиндре  $Q_\rho(y^0, t^0) \subset (\widetilde{\Pi} \times ]0, T[)$  и удовлетворяет в нем неравенству  $\widetilde{\mathcal{M}}v \geq -f(y, t)$ .

**Лемма 5.2.** Существуют константы  $\zeta \in ]0, 1[$ ,  $\tilde{\eta} \in ]0, 1[$ ,  $\tilde{\gamma} > 0$  и  $C_6 > 0$ , зависящие только от  $n$ ,  $\nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такие, что если для какого-то  $s > 0$  выполнено неравенство  $|Q_\rho(y^0, t^0) \cap A_s^v| \geq (1 - \zeta)|Q_\rho(y^0, t^0)|$ , то

$$v \geq \frac{s}{2} - C_6 \rho^{\tilde{\gamma}} \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n+1, Q_\rho(y^0, t^0)} \quad \text{в } Q_{\tilde{\eta}\rho}(y^0, t^0).$$

*Доказательство* по схеме следует лемме 4.1. Вместо барьерной функции  $W$  (см. (4.2)) вводится функция  $\mathcal{W}(y, t) = W(y) + \frac{t^0 - t}{\rho^2}$ , а вместо принципа максимума Аلكсандрова используется его параболическая версия ([17]; см. также [18] и [19]). Это дает аналог неравенства (4.3):

$$v(y, t) \geq s \mathcal{W}(y, t) - N_7 |\Pi_\rho(x^0)|^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left( s \frac{(\varepsilon |Q_\rho(y^0, t^0)|_\star)^{\frac{1}{n+1}}}{\rho^2} + \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n+1, Q_\rho(y^0, t^0)} \right),$$

где  $N_7$  зависит только от  $n$ ,  $\nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , а  $\varepsilon = \frac{|Q_\rho(y^0, t^0) \setminus A_s^v|_\star}{|Q_\rho(y^0, t^0)|_\star}$ . Дальнейшее доказательство проходит практически без изменений.  $\square$

**Лемма 5.3.** Существуют константы  $\tilde{\vartheta} \in ]0, \frac{1}{4}[$  и  $C_7 > 0$ , зависящие только от  $n$ ,  $\nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такие, что если  $0 \leq y_m^0 \leq (1 - \tilde{\vartheta})\rho$  для некоторого  $m$  (пусть для определенности  $m = 1$ ), и для какого-то  $s > 0$  на множестве  $\{\tilde{\vartheta}^2 \rho\} \times Q'_{(1-\tilde{\vartheta})\rho}(\bar{y}^0, t^0)$  выполнено неравенство  $v \geq s$ , то

$$v \geq \frac{s}{2} - C_7 \rho^{\tilde{\gamma}} \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n+1, Q_\rho(y^0, t^0)} \quad \text{в цилиндре } ] - \tilde{\vartheta}^2 \rho, \tilde{\vartheta}^2 \rho[ \times Q'_{\tilde{\vartheta}\rho}(\bar{y}^0, t^0),$$

где  $\tilde{\gamma}$  – константа из леммы 5.2.

*Доказательство* по схеме следует лемме 4.2, лишь вместо барьерной функции  $\widehat{W}$  (см. (4.7)) вводится функция  $\widehat{W}(y, t) = \widehat{W}(y) + \frac{t^0 - t}{\rho^2}$ , и используется принцип максимума Александрова для параболических уравнений.  $\square$

**Лемма 5.4.** *Существуют константы  $\tilde{\varkappa} \in ]0, 1[$  и  $C_8 > 0$ , зависящие только от  $n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такие, что если для какого-то  $s > 0$  выполнено неравенство  $|Q_{\frac{\rho}{2}}(y^0, t^0 - \frac{3\rho^2}{4}) \cap A_s^v| \geq (1 - \tilde{\zeta})|Q_{\frac{\rho}{2}}(y^0, t^0)|$ , то*

$$v \geq \tilde{\varkappa}s - C_8\rho^{\tilde{\gamma}} \left\| \frac{f_+}{\sqrt{\lambda}} \right\|_{n+1, Q_\rho(y^0, t^0)} \quad \text{в } Q_{\frac{\rho}{2}}(y^0, t^0)$$

(здесь  $\tilde{\zeta} \in ]0, 1[$  и  $\tilde{\gamma} > 0$  – константы из леммы 5.2).

*Доказательство* по схеме следует лемме 4.3. Вместо Леммы 2.2 [3] следует на каждом шаге применять Лемму 3.2 [3] с учетом того, что на множестве  $Q_\rho(y^0, t^0) \cap \{y_k > \frac{\tilde{\vartheta}^4}{3}\rho, k = 1, \dots, n\}$  коэффициенты  $\beta_i$  ограничены, а их  $L_{n+2}$ -нормы в силу (3.4) оцениваются сверху константой, не зависящей от  $\rho$  и  $y^0$ .  $\square$

Лемма 5.4 является прямым аналогом Леммы 3.3 [3], и оценка Гельдера для решения уравнения (5.1) выводится из нее стандартным способом (см. [3, §3]). После перехода в  $x$ -координаты мы получаем оценку для решения уравнения (1.5). Сформулируем только последний результат.

**Теорема 5.5.** *Пусть функция  $u \in W_{n+1, loc}^{2,1}(Q)$  удовлетворяет уравнению (1.5), и  $|u| \leq M_0$  в  $Q$ . Пусть коэффициенты (1.5) удовлетворяют условиям (1.2)-(1.4), (3.1), а  $\frac{f}{\det(\Lambda)} \in L_{n+1}(Q)$ . Тогда в любом строго внутреннем цилиндре  $Q' = \Omega' \times ]\delta, T[$ ,  $\Omega' \Subset \Omega$ , справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^{\overline{\gamma}}(\overline{Q'})} \leq M_{\overline{\gamma}}, \quad (5.2)$$

где  $\overline{\gamma}$  определяется только  $n, \nu$  и набором  $(\lambda_i)$ , а  $M_{\overline{\gamma}}$ , кроме того, зависит от  $M_0, \left\| \frac{f}{\det(\Lambda)} \right\|_{n+1, Q}, \delta$  и  $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ .

**Замечание 2.** В (5.2) гельдеровская норма, как обычно, берется в параболической метрике

$$d_{\text{пар}}((x^1, t^1), (x^2, t^2)) = |x^1 - x^2| + |t^1 - t^2|^{1/2}.$$

## 6 Об аппроксимационных решениях

В общем случае, если уравнение (1.1) имеет лишь измеримые коэффициенты, даже в равномерно эллиптическом случае ( $\lambda_k \equiv 1, k = 1, \dots, n$ ), невозможно обеспечить существование решения  $u \in W_{n, loc}^2(\Omega)$ . Поэтому нередко рассматривают *аппроксимационные решения* уравнения (1.1). Именно, положим для  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$

$$\lambda_i^{(\varepsilon)}(t) = \begin{cases} \lambda_i(t) & \text{при } |t| \geq \varepsilon; \\ \lambda_i(\varepsilon) & \text{при } |t| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

аппроксимируем (в смысле сходимости п.в.) матрицу  $\tilde{\mathcal{A}}$  гладкими матрицами-функциями  $\tilde{\mathcal{A}}^{(\varepsilon)}$ , удовлетворяющими при всех  $\varepsilon$  условию равномерной эллиптичности с

константой  $\nu$ , определим матрицы

$$\Lambda^{(\varepsilon)}(x) = \text{diag}\{\lambda_1^{(\varepsilon)}(|x_1|), \lambda_2^{(\varepsilon)}(|x_2|), \dots, \lambda_n^{(\varepsilon)}(|x_n|)\},$$

$$\mathcal{A}^{(\varepsilon)} = \sqrt{\Lambda^{(\varepsilon)}} \tilde{\mathcal{A}}^{(\varepsilon)} \sqrt{\Lambda^{(\varepsilon)}},$$

и рассмотрим последовательность равномерно эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами

$$\mathcal{L}^{(\varepsilon)} u^{(\varepsilon)} \equiv - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(\varepsilon)}(x) u_{x_i x_j}^{(\varepsilon)} = f^{(\varepsilon)}(x), \quad (6.1)$$

где  $f^{(\varepsilon)}$  – последовательность гладких функций, таких, что  $\| \frac{f^{(\varepsilon)} - f}{\det(\Lambda)} \|_{n,\Omega} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Стандартная эллиптическая теория (см., напр., [20, Гл. III]) показывает, что уравнения (6.1) имеют при всех  $\varepsilon > 0$  классические решения  $u^{(\varepsilon)} \in C^\infty(\Omega)$ . Функция  $u$  называется **аппроксимационным решением** уравнения (1.1), если существует подпоследовательность уравнений (6.1) и их решений  $u^{(\varepsilon_k)}$ , которые сходятся при  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  к  $u$  п.в. в  $\Omega$ .

**Замечание 3.** Из результата [1] следует, что задача Дирихле для равномерно эллиптического уравнения (1.1) имеет аппроксимационное решение для любых непрерывных граничных данных. Более того, сходимость решений задач Дирихле для уравнений (6.1) к аппроксимационному решению равномерна в  $\bar{\Omega}$ . Однако, как показано в [21] (см. также [22]), даже для равномерно эллиптического уравнения (1.1) аппроксимационное решение задачи Дирихле при  $n \geq 3$ , вообще говоря, зависит от последовательности  $\tilde{\mathcal{A}}^{(\varepsilon)}$ .

В этом параграфе будет установлена гельдеровость *любого* аппроксимационного решения уравнения (1.1) при условиях (1.2)-(1.4), (3.1). Для этого введем преобразование координат по формуле (3.2) с заменой  $\lambda_k$  на  $\lambda_k^{(\varepsilon)}$  и обозначим  $\tilde{\Pi}^{(\varepsilon)}$  параллелепипед – образ  $K_{3R_0}$  при этом преобразовании. Отметим, что в новых координатах оператор  $\mathcal{L}^{(\varepsilon)}$  будет иметь вид

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(\varepsilon)} u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{(\varepsilon)}(y) u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii}^{(\varepsilon)}(y) \beta_i^{(\varepsilon)}(y_i) u_{y_i},$$

(здесь  $\beta_k^{(\varepsilon)}(y_k) = \frac{\lambda'_k(x_k)}{2\sqrt{\lambda_k(x_k)}} \cdot \chi_{[\varepsilon, +\infty[}(|x_k|)$ ).

**Лемма 6.1.** Пусть  $\rho > 0$ . Существует  $\hat{\varepsilon} > 0$ , зависящее только от  $\rho, n, \nu$  и набора  $(\lambda_i)$ , такое, что при  $0 < \varepsilon \leq \hat{\varepsilon}$  справедливо следующее утверждение:

Пусть функция  $v \in C^2(\tilde{\Pi}^{(\varepsilon)})$  неотрицательна в кубе  $K_\rho(y^0) \subset \tilde{\Pi}^{(\varepsilon)}$  и удовлетворяет в нем неравенству  $\tilde{\mathcal{L}}^{(\varepsilon)} v \geq -f^{(\varepsilon)}(y)$ . Если для какого-то  $s > 0$  выполнено неравенство  $|K_{\frac{\rho}{2}}(y^0) \cap A_s^v| \geq (1 - \frac{\zeta}{2})|K_{\frac{\rho}{2}}(y^0)|$ , то

$$v \geq \frac{\varkappa}{2}s - 2C_5 \rho^\gamma \left\| \frac{f_+^{(\varepsilon)}}{\sqrt{\lambda^{(\varepsilon)}}} \right\|_{n, K_\rho(y^0)} \quad \text{в } K_{\frac{\rho}{2}}(y^0)$$

(здесь  $\zeta$  и  $\gamma$  – константы из леммы 4.1,  $\varkappa$  и  $C_5$  – константы из леммы 4.3).

*Доказательство* повторяет схему из §4. Достаточно заметить, что все величины, фигурирующие в доказательстве лемм 4.1-4.3, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходятся к пределам равномерно.  $\square$



Из леммы 6.1 следует, что если  $v$  – неотрицательная функция в кубе  $K_\rho(y^0) \subset \tilde{\Pi}$ , которая удовлетворяет неравенству  $\tilde{\mathcal{L}}v \geq -f(y)$  в аппроксимационном смысле, то для нее (возможно, после изменения на множестве меры нуль) выполнено утверждение леммы 4.3 (с заменой  $\zeta \rightarrow \frac{\zeta}{2}$ ,  $\varkappa \rightarrow \frac{\varkappa}{2}$ ,  $C_5 \rightarrow 2C_5$ ). Поскольку дальнейшие рассуждения из [3, §2] не требуют гладкости функций, теорема 4.4 остается верной и для аппроксимационных решений.

Аппроксимационные решения для уравнения (1.5) определяется аналогично. Для них также справедлива Теорема 5.5.

Я весьма признателен Ю.А. Алхуту, который предоставил мне возможность ознакомиться со статьей [12] в рукописи.

## Список литературы

- [1] Н.В. Крылов, М.В. Сафонов, *Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами*, Изв. АН СССР, Сер. мат., Т.44 (1980), N1, С.161–175.
- [2] М.В. Сафонов, *Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений*, ЗНС ЛОМИ, Т.96 (1980), С.272–287.
- [3] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уралцева, *Оценки константы Гельдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентами*, ЗНС ЛОМИ, Т.147 (1985), С.72–94.
- [4] E.B. Fabes, D.W. Strook, *The  $L_p$ -integrability of Green's functions and fundamental solutions for elliptic and parabolic equations*, Duke Math. J., V.51 (1984), N4, P.997–1016.
- [5] Н.В. Крылов, *Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области*, Изв. АН СССР, Сер. мат., Т.47 (1983), N1, С.75–108.
- [6] J.J. Kohn, L. Nirenberg, *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order*, CPAM, V.20 (1967), P.797–872.
- [7] P. Daskalopoulos, K. Lee, *Free-boundary regularity on the focusing problem for the Gauss curvature flow with flat sides*, Math. Z., V.237 (2001), N4, P.847–874.
- [8] R. Hamilton, *Worn stones with flat sides*, Discourses Math. Appl., V.3 (1994), P.69–78.
- [9] P. Daskalopoulos, R. Hamilton, *The free boundary in the Gauss curvature flow with flat sides*, J. Reine Angew. Math., V.510 (1999), P.187–227.
- [10] P. Daskalopoulos, K. Lee, *Worn stones with flat sides all time regularity of the interface*, Invent. math., V.156 (2004), P.445–493.

- [11] P. Daskalopoulos, K. Lee, *Hölder regularity of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations*, J. Funct. Anal. V.5 (2002), P.633–653.
- [12] Ю.А. Алхутов, *О гельдеровой непрерывности решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка недивергентного вида*, Доклады РАН, Т.413 (2007), N3, С.295–300.
- [13] Ю.А. Алхутов, *Неравенство Харнака для решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений*, Межд. конф. по дифф. ур. и дин. сист. Суздаль, 10-15 июля 2006г. Тезисы докладов. С.22–24.
- [14] E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Lect. Notes in Mathem., V.508 (1976).
- [15] Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Новосибирск, Научная книга, 1998.
- [16] А.Д. Александров, *Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле*, Вестник ЛГУ, Сер. мат., мех. и астр., 1963, N3(13), С.5–29.
- [17] Н.В. Крылов, *Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения*, Сиб. мат. журн., Т.17 (1976), N2, С.290–303.
- [18] А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева, *Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения*, ЗНС ЛОМИ, Т.147 (1985), С.95–109.
- [19] K. Tso, *On an Aleksandrov-Bakel'man type maximum principle for second-order parabolic equations*, Comm. in PDE, V.10 (1985), N5, P.543–553.
- [20] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, изд.2, М.: Наука, 1973.
- [21] N.S. Nadirashvili, *Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), V.24 (1997), N3, P.537–550.
- [22] M.V. Safonov, *Nonuniqueness for the second-order elliptic equations with measurable coefficients*, SIAM J. Math. Anal., V.30 (1999), N4, P.879–895.