Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 6.05.2024
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Задача Робена для квазилинейных уравнений с критическим ростом правой части

Д.В. Быстров*, А.И. Назаров**

6 мая 2024 г.

1 Введение

Краевые задачи для уравнений с критическим ростом правой части изучаются уже более полувека, начиная с пионерской работы С.И. Похожаева [12], который, в частности, показал, что задача Дирихле

$$-\Delta u = u^{q-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

(здесь и далее $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – ограниченная область со строго липшицевой границей) имеет положительное решение с наименьшей энергией, если $1 < q < 2^* := \frac{2n}{n-2}$, $q \neq 2$, и не имеет положительных решений, если $q \geq 2^*$, а Ω – строго звездная область.

Подчеркнем, что несуществование решения (и, следовательно, недостижимость минимума соответствующего функционала энергии) весьма чувствительно к слабым возмущениям исходной задачи. Впервые этот эффект был открыт в знаменитой работе Х. Брезиса и Л. Ниренберга [3], где было показано, что задача

$$-\Delta u - \alpha u = u^{2^*-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

имеет положительное решение с наименьшей энергией при сколь угодно малом положительном значении параметра возмущения[1] α, если размерность $n \geq 4$. Заметим, что при отрицательных α ситуация с разрешимостью задачи (2) такая же, как для задачи (1).

*Санкт-Петербургский госуниверситет
**ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский госуниверситет

[1]Этот эффект является нелинейным аналогом виртуального уровня, хорошо известного в спектральной теории.

Решения с наименьшей энергией для задачи Неймана

$$-\Delta u + u = u^{2^*-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

изучались в работах [1] и [16]. Оказалось, что, в отличие от задачи Дирихле, такое решение существует[2] в любой области с границей класса $\mathcal{C}^2$.

Перечисленные результаты в дальнейшем обобщались на уравнения с p-лапласианом и другими операторами в главной части, а также на уравнения на многообразиях (см., например, обзор [9] и приведенную там библиографию).

Вопрос о разрешимости задачи Робэна

$$-\Delta u = u^{2^*-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (\partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

также обсуждался в статье [16]. Именно, было показано, что если $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, и существует точка $x^0 \in \partial\Omega$ (не умаляя общности, можно считать ее началом координат), такая, что в некоторой окрестности x^0 область задается неравенством

$$x_n > a|x'|^{1+\gamma}(1+o(1)), \qquad a > 0, \quad 0 < \gamma < 1 \tag{5}$$

(здесь и далее $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$), то задача (4) имеет (положительное) решение с наименьшей энергией при любом положительном α.

Заметим, что условие (5) исключает возможность $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, поскольку кривизна границы в начале координат бесконечна. В то же время, как показано в теореме 4.2 [16], задача (4) в единичном шаре имеет **радиальное** решение тогда и только тогда, когда $\alpha < n-2$.

В настоящей статье мы рассмотрим обобщение задачи (4) для квазилинейных уравнений – задачу Робэна

$$-\Delta_p u = u^{p^*-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (|\nabla u|^{p-2}\partial_{\mathbf{n}} u + u^{p-1})|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ – оператор p-лапласиана, $1 < p < n$, $p^* := \frac{pn}{n-p}$ – предельный показатель вложения пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ в пространство Лебега.

Мы будем считать, что $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, если не оговорено противное, и введем семейство сжатых/растянутых областей[3]

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x/R \in \Omega\}.$$

Определим **функционал энергии** для задачи (6):

$$\mathcal{E}[u] = \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} |u(x)|^p\,dS_x}{\Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p^*}dx\Big)^{\frac{p}{p^*}}} =: \frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_{L_{p^*}}^p}. \tag{7}$$

[2]Задача (3) имеет очевидное решение $u \equiv 1$. Однако, как показано в [11, Предложение 3.1], если область достаточно велика, то константа не является решением с наименьшей энергией.

[3]Заметим, что преобразование $u(x) \mapsto \alpha^{\frac{2-n}{2}}u(\alpha^{-1}x)$ переводит (4) в аналогичную задачу в области Ω_α с заменой $\alpha \mapsto 1$ в граничном условии.

Заметим, что норма $\|u\|_p$ эквивалентна стандартной норме в пространстве $W_p^1(\Omega)$. Из теоремы вложения Соболева заключаем, что

$$\lambda(p,\Omega) := \inf_{v\in W_p^1(\Omega)\setminus\{0\}} \mathcal{E}[v] > 0. \tag{8}$$

Следующее утверждение достаточно стандартно. Для удобства читателя мы приводим его с доказательством.

Лемма 1.1. *Если инфимум в (8) достигается, то задача (6) имеет слабое положительное решение.*

Доказательство. Легко видеть, что если u – минимайзер в (8), то функция $|u|$ также является минимайзером. Поэтому можно, не умаляя общности, считать $u \geq 0$. Далее, необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера и естественное граничное условие) для неотрицательных функций совпадает с (6) после подходящей перенормировки (т.е. умножения u на некоторую константу). Поэтому u – слабое решение задачи (6). Более того, поскольку u – супер-p-гармоническая функция, то она не может обращаться в нуль внутри Ω (см. [15]). Наконец, u не может обратиться в нуль и в точках границы ввиду леммы о нормальной производной (см. [14]). □

Решение, построенное в лемме 1.1, мы будем называть **решением с наименьшей энергией**.

Обозначим $K(n,p)$ точную константу в неравенстве Соболева (см. [2, 13]):

$$K(n,p) = \sup_{v\in\mathcal{C}_0^\infty\setminus\{0\}} \frac{\|v\|_{L_{p^*}}}{\|\nabla v\|_{L_p}} = \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \mathcal{B}\left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'}+1\right)^{-\frac{1}{n}}, \tag{9}$$

где $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $p' = \frac{p}{p-1}$ – сопряженный к p показатель, а $\mathcal{B}$ – бета-функция Эйлера. Отметим, что супремум в (9) достигается только на **нефинитных** радиально симметричных функциях

$$w_\varepsilon(|x|) \equiv w_\varepsilon(r) := \left(\varepsilon + r^{p'}\right)^{1-\frac{n}{p}}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{10}$$

и на функциях, получаемых из них сдвигами и гомотетиями.

Ключевую роль в доказательстве существования решения задачи (6) с наименьшей энергией играет следующее утверждение. Доказательство его аналогично [8, Следствие 2.1] и [4, Предложение 1.1] и приводится для удобства читателя.

Предложение 1.1. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Пусть инфимум в (8) удовлетворяет условию*

$$\lambda(p,\Omega) < \frac{2^{-\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)}. \tag{11}$$

Тогда этот инфимум достигается.

Доказательство. Рассмотрим нормированную в $L_{p^*}(\Omega)$ минимизирующую последовательность $\{v_k\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W^1_p(\Omega)$. Согласно теореме Лионса ([7], часть 1; см. также [8, Лемма 2.2]),

$$|v_k|^{p^*} \rightharpoonup |v|^{p^*} + \sum_j c_j \delta(x - x_j), \qquad |\nabla v_k|^p \rightharpoonup |\nabla v|^p + \sum_j C_j \delta(x - x_j)$$

(сходимость в пространстве мер на $\overline{\Omega}$), где $\{x_j\}$ – не более чем счетный набор точек в $\overline{\Omega}$, c_j и C_j – положительные константы.

Поскольку $\{v_k\}$ – минимизирующая последовательность, дословно повторяя доказательство теоремы 2.2 [8], получим альтернативу: либо функция v реализует минимум в (8) (при этом множество $\{x_j\}$ пусто), либо $v = 0$, а набор $\{x_j\}$ состоит из одной точки $x_0 \in \partial\Omega$, причем $c_0 = 1$ и $C_0 = \lambda(p, \Omega)$.

Во втором случае, домножая функции v_k на подходящую срезку с достаточно малым носителем и учитывая, что гладкая область в малой окрестности x_0 аппроксимируется полупространством, заключаем, что $\lambda(p, \Omega) = \frac{2^{-\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)}$. По условию это невозможно, что и доказывает требуемое утверждение. $\square$

Таким образом, для доказательства достижимости инфимума в (8) достаточно предъявить функцию, энергия которой меньше $\frac{2^{-\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)}$. Следуя [8] и [4], мы строим ее (при некоторых условиях на показатель p) в виде функции с малым носителем, имитирующей поведение функции $w_\varepsilon(r)$.

Опишем структуру нашей статьи. §2 посвящен построению решения с наименьшей энергией задачи (6). В §3 рассматривается аналогичная задача на многообразии с краем. В §4 собраны вспомогательные оценки интегралов.

Запись $o_\rho(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $\rho \to 0$. Все положительные константы, значение которых для нас несущественно, обозначаются буквой C. Зависимость этих констант от параметров отмечается в скобках.

2 Задача (6) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Следующий простой результат справедлив в любой размерности $n \geq 2$ (ср. [11, Теорема 1.1]).

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < n$, и Ω – произвольная ограниченная область со строго липшицевой границей. Тогда задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в области Ω_R при всех достаточно малых R.*

Доказательство. Из доказательства предложения 1.1 видно, что нам достаточно исключить возможность концентрации минимизирующей последовательности $|v_k|^{p^*} \rightharpoonup \delta(x - x_0)$. Но касательный конус к Ω_R в точке x_0 не зависит от R, и потому в случае концентрации $\lambda(p, \Omega_R) = \lim\limits_k \mathcal{E}[v_k]$ также не зависит от R. С другой стороны, для функции $c \equiv 1$ имеем

$$\mathcal{E}[c] = \frac{|\partial\Omega_R|}{|\Omega_R|^{\frac{p}{p^*}}} = \frac{|\partial\Omega|\, R^{n-1}}{(|\Omega|\, R^n)^{\frac{p}{p^*}}} = \mathrm{const} \cdot R^{p-1}.$$

Поэтому при достаточно малых R концентрация невозможна, и инфимум в (8) достигается. Из леммы 1.1 следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть $n \geq 4$ и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$ задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω.*

Доказательство. Рассмотрим шар наименьшего радиуса, содержащий Ω. Пусть $x_0 \in \partial\Omega$ – одна из точек касания с этим шаром. Тогда все главные кривизны $\partial\Omega$ в точке x_0 положительны, и потому средняя кривизна $H(x_0)$ положительна.

Для функции u, определенной в (15), из (16), (19) и (22) получаем

$$\|u\|_p^p \leq \begin{cases} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}}\left[E_1 - E_2\,(H(x_0)+o_\rho(1))\varepsilon^{\frac{1}{p'}} + E_3\,\varepsilon^{\frac{p-1}{p'}}\right] + C(\rho), & 2 < p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2};\\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}}\left[E_1 - E_2\,(H(x_0)+o_\rho(1))\varepsilon^{\frac{1}{p'}}\right] + C\ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2};\\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}}\left[E_1 - E_2\,(H(x_0)+o_\rho(1))\varepsilon^{\frac{1}{p'}}\right] + C(\rho), & \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < p < \frac{n+1}{2};\\ E_1\,\varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C\,\left(H(x_0)+o_\rho(1)\right)\ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

При $2 < p < \frac{n+1}{2}$ отсюда с учетом (17) получаем

$$\mathcal{E}[u] \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}}\left[1 + \left(\frac{p}{p^*}\,\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1}\right)\,(H(x_0)+o_\rho(1)+o_\varepsilon(1))\,\varepsilon^{\frac{1}{p'}}\right].$$

Прямой подсчет показывает, что при $p < \frac{n+1}{2}$

$$\frac{p}{p^*}\,\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} = -\frac{2p}{n}\,\frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}}\cdot\frac{\mathcal{B}\left(\frac{n+1}{p'},\frac{n+1}{p}-2\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n}{p'},\frac{n}{p}-1\right)} < 0.$$

Поэтому для достаточно малых ε и ρ получаем

$$\mathcal{E}[u] < \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} = \frac{2^{-\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)}. \tag{12}$$

При $p = \frac{n+1}{2}$ для достаточно малых ε и ρ также получим (12). Из соображений непрерывности при некотором $\beta > 0$ и $p < \frac{n+1}{2} + \beta$ имеем $\lambda(p,\Omega) < \frac{2^{-\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)}$.

Применение предложения 1.1 и леммы 1.1 заканчивает доказательство. □

Гипотеза 1. Пусть $n \geq 3$, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\frac{n+1}{2} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$, такое, что при $R > R^*$ задача (6) не имеет решения с наименьшей энергией в области Ω_R.

При $p = 2$ формулы (16) и (22) показывают, что первая поправка в градиентном члене и добавка от граничного члена в $\mathcal{E}[u]$ имеют одинаковый порядок. Следующая теорема уточняет результат теоремы 2.1 для гладкой области.

Теорема 2.3. *Пусть $n \geq 3$ и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Пусть на $\partial\Omega$ найдется точка x_0, такая, что $H(x_0) > \frac{2}{n-2}$. Тогда задача (6) с $p = 2$ имеет решение с наименьшей энергией в Ω.*

Доказательство. Пусть $n \geq 4$. Тогда формулы (16), (17) и (22) дают

$$\mathcal{E}[u] \leq \frac{E_1}{D_1^{\frac{n-2}{n}}}\left[1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{n-2}{n}\,\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1}\right)H(x_0) + \frac{E_3}{E_1} + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)\right)\right].$$

Прямой подсчет показывает, что при $p = 2$ и $H(x_0) > \frac{2}{n-2}$

$$\Big(\frac{n-2}{n}\,\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1}\Big)\,H(x_0) + \frac{E_3}{E_1} < \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}}\left(-\frac{8}{n(n-2)}\cdot\frac{\mathcal{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{n-3}{2}\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n}{2},\frac{n-2}{2}\right)} + \frac{2}{(n-2)^2}\cdot\frac{\mathcal{B}\left(\frac{n-1}{2},\frac{n-3}{2}\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n+2}{2},\frac{n-2}{2}\right)}\right) = 0.$$

Поэтому для достаточно малых ε и ρ получаем

$$\mathcal{E}[u] < \frac{E_1}{D_1^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{2^{-\frac{2}{n}}}{K^2(n,2)}. \tag{13}$$

Если же $n = 3$, то формулы (16), (19) и (24) дают

$$\|u\|_2^2 \le E_1\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \pi(H(x_0) + o_\rho(1))\int\limits_0^{\frac{\rho}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{t^5\,dt}{(1+t^2)^3} + \ln(\varepsilon^{-1})\cdot(\pi + o_\rho(1)) + C(\rho)$$
$$\le E_1\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \pi\ln(\varepsilon^{-1})(1 - \frac{1}{2}H(x_0) + o_\rho(1)) + C(\rho).$$

С учетом (17), при $H(x_0) > \frac{2}{n-2} = 2$ для достаточно малых ε и ρ вновь получаем (13). Применение предложения 1.1 и леммы 1.1 заканчивает доказательство. $\square$

Сравним результат теоремы 2.3 с примером из теоремы 4.2 [16]. Как указано во введении, задача (4) в единичном шаре имеет радиальное решение тогда и только тогда, когда $\alpha < n-2$. Согласно замечанию 3, задача

$$-\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^{2^*-1} \quad \text{в} \quad B_R, \qquad (\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u} + \mathbf{u})|_{\partial B_R} = 0 \tag{14}$$

имеет радиальное решение в шаре B_R тогда и только тогда, когда $R < n-2$. В то же время условие теоремы 2.3 дает $R < \frac{n-2}{2}$. Однако мы покажем, что при $R > \frac{n-2}{2}$ радиальное решение не является решением с наименьшей энергией.

Решение, построенное в [16], равно $\mathbf{u}(x) = Cw_\varepsilon(x)$, где функция w_ε определена в (10) с $p = 2$, $\varepsilon = R(n-2-R)$, а C – подходящим образом выбранная константа. Из леммы 2.3 [5] видно, что любое положительное радиальное решение задачи (14) совпадает с $\mathbf{u}$.

Теорема 2.4. *При $\frac{n-2}{2} < R < n-2$ справедливо неравенство $\mathcal{E}[\mathbf{u}] > \frac{2^{-\frac{2}{n}}}{K^2(n,2)}$ и, следовательно, $\mathbf{u}$ не является решением с наименьшей энергией задачи (14).*

Доказательство. Записав интегралы в сферических координатах и сделав замену переменной $r^2 = \varepsilon t$, получим

$$\int\limits_{B_R}|\nabla\mathbf{u}(x)|^2\,dx = C^2(n-2)^2\omega_{n-1}\int\limits_0^R\frac{r^{n+1}\,dr}{(\varepsilon+r^2)^n} = C^2\,\frac{(n-2)^2\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}}\int\limits_0^{R^2\varepsilon^{-1}}\frac{t^{\frac{n}{2}}\,dt}{(1+t)^n};$$

$$\int\limits_{\partial B_R}|\mathbf{u}(x)|^2\,dS_x = C^2\omega_{n-1}\,\frac{R^{n-1}}{(\varepsilon+R^2)^{n-2}};$$

$$\int\limits_{B_R}|\mathbf{u}(x)|^{2^*}\,dx = C^{2^*}\omega_{n-1}\int\limits_0^R\frac{r^{n-1}\,dr}{(\varepsilon+r^2)^n} = C^{2^*}\,\frac{\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^{R^2\varepsilon^{-1}}\frac{t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(1+t)^n}.$$

Согласно формуле 2.111.2 [6],

$$\int\limits_0^{R^2\varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}}\,dt}{(1+t)^n} = -\frac{2}{n-2}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{(1+t)^{n-1}}\Bigg|^{t=R^2\varepsilon^{-1}} + \frac{n}{n-2}\int\limits_0^{R^2\varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(1+t)^n}.$$

Поскольку $\varepsilon = R(n-2-R)$, подстановка сокращается с интегралом по ∂B_R, и мы получаем

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = C^2\,\frac{n(n-2)\omega_{n-1}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2}-1}}\int\limits_0^{R^2\varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(1+t)^n};$$

$$\mathcal{E}[\mathbf{u}] = n(n-2)\left(\frac{\omega_{n-1}}{2}\int\limits_0^{R^2\varepsilon^{-1}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(1+t)^n}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Очевидно, что $R^2\varepsilon^{-1} = \frac{R}{n-2-R}$ – возрастающая функция R. Поэтому $\mathcal{E}[\mathbf{u}]$ – также возрастающая функция от радиуса, и остается показать, что при $R = \frac{n-2}{2}$ получается равенство $\mathcal{E}[\mathbf{u}] = \frac{2^{-\frac{2}{n}}}{K^2(n,2)}$.

Из формулы (9) видно, что это равенство равносильно

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(1+t)^n} = \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right).$$

Замена переменной $t = \mathrm{tg}^2(\frac{\varphi}{2})$ дает

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2^n}\,\mathcal{B}\Big(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\Big)$$

(последнее равенство см. формулу 8.380.2 [6]), а равенство $\frac{1}{2^n}\mathcal{B}\big(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\big) = \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right)$ следует из формулы удвоения Лежандра для Г-функции (формула 8.335.1 [6]). $\square$

Гипотеза 2. При $R \le \frac{n-2}{2}$ функция $\mathbf{u}$ является решением с наименьшей энергией задачи (14), а при $R > \frac{n-2}{2}$ решения с наименьшей энергией у этой задачи не существует.

3 Задача (6) на многообразии с краем

В этом параграфе Ω – гладкое компактное n-мерное риманово многообразие со строго липшицевым краем, с метрикой g (в дальнейшем слова "гладкое", "компактное" и "риманово" будут опускаться). Соответственно, Ω_R – "гомотетичный образ" Ω с метрикой $g_R = R^2 g$.

Аналогично случаю области в $\mathbb{R}^n$, условие (11) обеспечивает достижимость инфимума функционала энергии (7) и, таким образом, существование решения задачи (6) с наименьшей энергией.

Доказательство следующей теоремы дословно повторяет доказательства теорем 2.1 и 2.2.

Теорема 3.1. **А**. *Пусть $n \geq 2$, $1 < p < n$, и Ω – произвольное многообразие со строго липшицевым краем. Тогда задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω_R при всех достаточно малых R.*

Б. *Пусть $n \geq 4$, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, и на $\partial\Omega$ найдется точка x_0, такая, что $H(x_0) > 0$. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$ задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω.*

Теорема 2.3 также справедлива для многообразий.

Случай, когда средняя кривизна $\partial\Omega$ всюду неположительна, более сложен. Мы рассмотрим его на примере полусферы. Аналогичный результат можно получить для любого многообразия, край которого является вполне геодезическим подмногообразием, если на $\partial\Omega$ найдется точка, в которой скалярная кривизна Ω положительна (ср. [10, Theorem 1]).

Теорема 3.2. *Пусть $n \geq 8$, и Ω – n-мерная полусфера. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $3 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ задача (6) имеет решение с наименьшей энергией в Ω.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \partial\Omega$. Для функции u, определенной формулой (15) с $r = dist(x, x_0)$, из (25), (27) и (22) получаем

$$\|u\|_p^p \leq \begin{cases} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - \widetilde{E}_2 \, (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} + E_3 \, \varepsilon^{\frac{p-1}{p'}} \right] + C(\rho), & 3 < p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - \widetilde{E}_2 \, (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right] + C \ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} \left[E_1 - \widetilde{E}_2 \, (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right] + C(\rho), & \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1 \, \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C \, (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \ln(\varepsilon^{-1}) + C(\rho), & p = \frac{n+2}{3}. \end{cases}$$

При $3 < p < \frac{n+2}{3}$ отсюда с учетом (26) получаем

$$\mathcal{E}[u] \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 + \left(\frac{p}{p^*} \frac{\widetilde{D}_2}{D_1} - \frac{\widetilde{E}_2}{E_1} \right) (\mathcal{R}_g + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)) \, \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right].$$

Прямой подсчет показывает, что при $p < \frac{n+2}{3}$

$$\frac{p}{p^*} \frac{\widetilde{D}_2}{D_1} - \frac{\widetilde{E}_2}{E_1} = -\frac{p}{2n^2} \cdot \frac{\mathcal{B}\left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p} - 3\right)}{\mathcal{B}\left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p} - 1\right)} < 0.$$

Поэтому для достаточно малых ε и ρ получаем (12).

При $p = \frac{n+2}{3}$ для достаточно малых ε и ρ также получим (12). Из соображений непрерывности при некотором $\beta > 0$ и $p < \frac{n+2}{3} + \beta$ имеем $\lambda(p, \Omega) < \frac{2^{-\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)}$. Применение Предложения 1.1 и леммы 1.1 заканчивает доказательство. $\square$

Гипотеза 3. Пусть $n \geq 7$ и $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$, такое, что при $R > R^*$ задача (6) не имеет решения с наименьшей энергией на полусфере с радиусом R.

Следующая теорема уточняет результат части **А** теоремы 3.1 для $p = 3$ на полусфере.

Теорема 3.3. *Пусть $n \geq 7$, и радиус R n-мерной полусферы Ω удовлетворяет неравенству $R^2 < \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} \frac{(n-1)(2n+1)(n-3)^2}{72(n-2)}$. Тогда задача (6) с $p = 3$ имеет решение с наименьшей энергией в Ω.*

Доказательство. Аналогично теореме 2.3, с использованием при $n \geq 8$ формул (25), (26) и (22), а при $n = 7$ – (25), (26), (27) и (28). □

4 Вспомогательные вычисления

4.1 Оценки для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, и $x_0 \in \partial\Omega$. Введём функцию

$$u(x) := u(r) := \varphi(r) w_\varepsilon(r), \tag{15}$$

где $r := |x - x_0|$, w_ε определена в (10), а $\varphi(r)$ – гладкая срезающая функция

$$\varphi(r) = \begin{cases} = 1, & \text{для } r \leq \frac{\rho}{2}; \\ \leq 1, & \text{для } \frac{\rho}{2} \leq r \leq \rho; \\ = 0, & \text{для } r \geq \rho. \end{cases}$$

Следующие оценки получены в [4][4]:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \left\{ \begin{array}{ll} E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - E_2(H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{1}{p'}} + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+1}{2}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - (H(x_0) + o_\rho(1)) F(\varepsilon) + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+1}{2}; \end{array} \right. \tag{16}$$

$$\int\limits_\Omega |u|^{p^*} dx \geq D_1 \varepsilon^{-\frac{n}{p}} - D_2(H(x_0) + o_\rho(1)) \varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{1}{p'}} - C\rho^{-\frac{n}{p-1}}, \tag{17}$$

где $H(x_0)$ – средняя кривизна $\partial\Omega$ в точке x_0 (все кривизны мы считаем относительно внутренней нормали),

$$E_1 = \frac{\omega_{n-1}}{2p'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'} + 1, \frac{n}{p} - 1 \right), \tag{18}$$

$$E_2 = \frac{\omega_{n-2}}{2p'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n+1}{p'} + 1, \frac{n+1}{p} - 2 \right),$$

$$F(\varepsilon) = \frac{\omega_{n-2}}{2} \int\limits_0^{\frac{\rho}{2}\varepsilon^{-\frac{n-1}{n+1}}} \frac{t^{\frac{n^2+1}{n-1}} \, dt}{\left(1 + t^{\frac{n+1}{n-1}}\right)^n} \geq C \ln(\varepsilon^{-1}); \tag{19}$$

$$D_1 = \frac{\omega_{n-1}}{2p'} \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p} \right), \tag{20}$$

$$D_2 = \frac{\omega_{n-2}}{2p'} \mathcal{B} \left(\frac{n+1}{p'}, \frac{n+1}{p} - 1 \right).$$

[4] Подчеркнем, что наши обозначения отличаются от принятых в [4].

Теперь оценим

$$\int\limits_{\partial\Omega} |u|^p\, dS_x \le \int\limits_{\partial\Omega\cap\{r<\rho\}} \frac{dS_x}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-p}} = \omega_{n-2} \int\limits_0^\rho \frac{r^{n-2}\, dr}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-p}} \cdot (1 + o_\rho(1))$$

$$= \omega_{n-2} \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{p-1}{p'}} \int\limits_0^{\rho\varepsilon^{-\frac{1}{p'}}} \frac{t^{n-2}\, dt}{(1 + t^{p'})^{n-p}} \cdot (1 + o_\rho(1)). \quad (21)$$

Заметим, что при $p > \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ (т.е. при $p'(n-p) < n-1$) предпоследний интеграл в (21) ограничен равномерно по ε, а при $p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ равномерно ограничен (т.е. сходится на полуоси) последний интеграл.

При $n \ge 4$ справедливы неравенства $2 < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < \frac{n+1}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_{\partial\Omega} |u|^p\, dS_x \le \begin{cases} E_3 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{p-1}{p'}} \cdot (1 + o_\rho(1)), & \text{если } p < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ C \ln(\varepsilon^{-1}), & \text{если } p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}; \\ C, & \text{если } p > \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$E_3 = \frac{\omega_{n-2}}{p'} \mathcal{B}\left(\frac{n-1}{p'}, \frac{n}{p} - 1 - \frac{p-1}{p'}\right). \quad (23)$$

При $n = 3$ имеем $2 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} = \frac{n+1}{2}$, и

$$\int\limits_{\partial\Omega} |u|^2\, dS_x \le 2\pi \int\limits_0^{\rho\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{t\, dt}{1+t^2} \cdot (1 + o_\rho(1)) \le \ln(\varepsilon^{-1}) \cdot (\pi + o_\rho(1)). \quad (24)$$

4.2 Оценки для полусферы

Пусть Ω – n-мерная полусфера с радиусом R, и $x_0 \in \partial\Omega$. Обозначим $r = dist(x, x_0)$ и введём функцию u по формуле (15). Следующие оценки получены в [4][5]:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx \le \begin{cases} E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - \widetilde{E}_2 (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \widetilde{F}(\varepsilon) + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+2}{3}; \end{cases} \quad (25)$$

$$\int\limits_\Omega |u|^{p^*} dx \ge D_1 \varepsilon^{-\frac{n}{p}} - \widetilde{D}_2 (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} - C\rho^{-\frac{n}{p-1}}, \quad (26)$$

где E_1 и D_1 определены в (18), (20) соответственно, $\mathcal{R}_g = n(n-1)R^{-2}$ – скалярная кривизна сферы, и

$$\widetilde{E}_2 = \frac{\omega_{n-1}}{12np'} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \mathcal{B}\left(\frac{n+2}{p'} + 1, \frac{n+2}{p} - 3\right),$$

[5] В [4] оценивались интегралы по геодезическому шару, поэтому все коэффициенты отличаются от наших множителем 2.

$$\widetilde{F}(\varepsilon) = \frac{2^{\frac{n-4}{3}}\omega_{n-1}}{3n} \int\limits_0^{\frac{\rho}{2}\varepsilon^{-\frac{n-1}{n+2}}} \frac{t^{\frac{n^2+n+1}{n-1}}dt}{\left(1+t^{\frac{n+2}{n-1}}\right)^n} \geq C\ln(\varepsilon^{-1}), \tag{27}$$

$$\widetilde{D}_2 = \frac{\omega_{n-1}}{12np'}\,\mathcal{B}\left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p} - 2\right).$$

При $n \geq 8$ справедливы соотношения $3 < \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < \frac{n+2}{3}$, поэтому для оценки интеграла по $\partial\Omega$ мы можем воспользоваться формулами (22) и (23).

При $n = 7$ имеем $3 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} = \frac{n+2}{3}$, и

$$\int\limits_{\partial\Omega} |u|^3\,dS_x \leq \omega_5 \int\limits_0^{\rho\varepsilon^{-\frac{2}{3}}} \frac{t^5}{(1+t^{\frac{3}{2}})^4}\,dt \cdot (1+o_\rho(1)). \tag{28}$$

Список литературы

[1] Adimurthi, G. Mancini, *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*, Nonlinear Analysis, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni (1991), 9–25.

[2] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 573–598.

[3] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[4] А.В. Демьянов, А.И. Назаров, *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем*, Алгебра и анализ **17** (2005), no. 5, 105—140.

[5] B. Gidas, W.-M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[6] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. **5**, М.: Наука, 1971.

[7] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoam. **1** (1985), 45–121, 145–201.

[8] P.-L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, *Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), no. 2, 301–324.

[9] A.I. Nazarov, *Dirichlet and Neumann problems to critical Emden–Fowler type equations*, J. Global Optim. **40** (2008), 289—303.

[10] A.I. Nazarov, A.B. Reznikov, *Attainability of infima in the critical Sobolev trace embedding theorem on manifolds*, AMS Transl. Series 2. **229** (2010), 197—210.

[11] А.И. Назаров, А.П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева*, Нелин. задачи и теория функций (ПМА. Вып.**27**). Нов., Т. Рожковская (2004), 109–136.

[12] С.И. Похожаев, *О собственных функциях уравнения* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Докл. АН СССР **165** (1965), no. 1, 36—39.

[13] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

[14] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for Quasilinear Equations in Domains with Conical Boundary Points*, Comm. PDE. **8** (1983), no. 7, 773—817.

[15] N.S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 721–747.

[16] X.J. Wang, *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, J. Diff. Eqs. **93** (1991), no. 2, 283–310.