Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 17 ноября 2024 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Усреднение одномерных гиперболических уравнений с корректором[1,2]

Дородный М. А.[3]

Аннотация

Рассматривается действующий в $L_2(\mathbb{R})$ эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g(x/\varepsilon) \frac{d}{dx}$, $\varepsilon > 0$, с периодическими коэффициентами. Мы изучаем поведение решений задачи Коши для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2 w_\varepsilon(x,\tau) = -(A_\varepsilon w_\varepsilon)(x,\tau)$ при $\varepsilon \to 0$: получена аппроксимация решения $w_\varepsilon(\cdot,\tau)$ по $L_2(\mathbb{R})$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учёте корректора.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, гиперболические уравнения, спектральные зоны, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов. Задачам гомогенизации посвящена обширная литература; см., например, книги [1–3]. Один из методов изучения задач усреднения в $\mathbb{R}^d$ — это спектральный метод, основанный на применении теории Флоке–Блоха (см., например, [1, гл. 4], [2, гл. 2], [4–6]).

Обсудим типичную задачу теории усреднения. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решётки Γ. Для любой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ введём обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ — (малый) параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим дифференциальный оператор (ДО), формально заданный выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla, \qquad (0.1)$$

где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова $(d \times d)$-матрица-функция периодическая относительно решётки Γ, ограниченная и положительно определённая. Оператор (0.1) моделирует простейшие случаи микронеоднородных сред с $\varepsilon\Gamma$-периодической структурой. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ — (слабое) решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

[1] Представлено Т. А. Суслиной.

[2] Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-287 от 06.04.2022).

[3] Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Хорошо известно, что при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится в некотором подходящем смысле к решению u_0 "усреднённого" уравнения

$$-\operatorname{div} g^0 \nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Оператор $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ называется эффективным оператором для $\mathcal{A}_\varepsilon$. Матрица g^0 определяется согласно следующей процедуре (см., например, [3, гл. 2, § 3], [7, гл. 3, § 1]). Требуется найти Γ-периодическое решение $\Psi(\mathbf{x})$ (d-вектор-строку) задачи на ячейке Ω:

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})\big(\nabla\Psi(\mathbf{x}) + \mathbb{1}_d\big) = 0, \qquad \int_\Omega \Psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \tag{0.2}$$

(здесь $\mathbb{1}_d$ — единичная $(d \times d)$-матрица). Тогда $g^0 = \int_\Omega g(\mathbf{x})(\nabla\Psi(\mathbf{x}) + \mathbb{1}_d)\, d\mathbf{x}$.

0.1. Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптических и параболических уравнений. М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [7]) был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. В [7] было доказано, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.3}$$

Поскольку $u_\varepsilon = (\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} f$, $u_0 = (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} f$, оценку (0.3) можно переписать в операторных терминах:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.4}$$

Аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учёте корректоров) были получены в [8, 9]:

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2,$$
$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

Здесь $K_1(\varepsilon) = \Psi^\varepsilon \nabla (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}\Pi_\varepsilon$ — традиционный для теории усреднения корректор, который дополнительно содержит вспомогательный сглаживающий оператор Π_ε, а $K(\varepsilon)$ имеет более сложную структуру: $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^* + K_3$, где K_3 не зависит от ε.

К усреднению параболических задач теоретико-операторный подход применялся в [10–13]. В операторных терминах речь идёт об аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$, $\tau > 0$. В [10, 11] была установлена оценка

$$\|e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \qquad \tau > 0. \tag{0.5}$$

Аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учёте корректоров) были получены в [12, 13].

Оценки (0.4), (0.5) точны по порядку; константы C контролируются явно в терминах данных задачи. Оценки такого вида называются *операторными оценками погрешности* в задачах усреднения. Другой подход к получению операторных оценок погрешности ("метод сдвига") для эллиптических и параболических задач был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [14–16]. См. также обзор [17].

0.2. Операторные оценки погрешности для уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. С усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа дело обстоит несколько иначе. Им были посвящены статьи [18–23], где изучалось поведение решений задач Коши

$$\begin{cases} \dfrac{i\partial z_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \\ z_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -(\mathcal{A}_\varepsilon w_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \\ w_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau w_\varepsilon)(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Соответствующие им “усреднённые” задачи выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{i\partial z_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} z_0)(\mathbf{x},\tau), \\ z_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} w_0)(\mathbf{x},\tau), \\ w_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau w_0)(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

Поскольку

$$z_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}\phi, \qquad w_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\phi + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\psi,$$

в операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, где $\tau\in\mathbb{R}$, соответственно. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В [18] были получены точные по порядку оценки

$$\| e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}} \|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.7}$$

$$\| \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.8}$$

Аналогичный результат для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ получен в работе [19]:

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) \|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.9}$$

Далее, в [20–23] была доказана точность этих результатов как по типу операторной нормы, так и относительно зависимости от τ (при больших τ). С другой стороны, было установлено, что при некоторых дополнительных предположениях (например, если матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы) оценки (0.7)–(0.9) допускают улучшения:

$$\| e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}} \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.10}$$

$$\| \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) \|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.11}$$

$$\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) \|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{0.12}$$

Поясним метод на примере вывода оценки (0.8). Ясно, что эта оценка эквивалентна неравенству

$$\big\| \big(\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\big)(-\Delta+I)^{-1} \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.13}$$

За счёт масштабного преобразования неравенство (0.13) равносильно оценке

$$\left\|\left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\right)\varepsilon^2(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (0.14)$$

где $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{A}_1$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega)$. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $-\operatorname{div}_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{k}}$, где $\nabla_{\mathbf{k}} = \nabla + i\mathbf{k}$, $\operatorname{div}_{\mathbf{k}} = \operatorname{div} + i\langle\cdot,\mathbf{k}\rangle$, при периодических граничных условиях. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом*. Спектр оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Оказывается, что вклад в усреднение дают лишь пороговые характеристики на краю спектра оператора $\mathcal{A}$, т. е. достаточно знать спектральное разложение $\mathcal{A}$ лишь вблизи нижнего края спектра. В частности, эффективная матрица g^0 — это гессиан первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ в точке $\mathbf{k} = 0$.

0.3. Аппроксимации решений уравнений гиперболического типа: “классические” результаты с корректором. Отдельно обсудим известные “классические” результаты с корректором, которые не могут быть записаны в терминах равномерной операторной сходимости. Эти результаты относятся к операторам в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$. Аппроксимации для решений гиперболических уравнений с нулевыми начальными данными и ненулевой правой частью были получены в [1, гл. 2, п. 3.6] и [3, гл. 4, п. 5]. В [1] была доказана сильная сходимость к нулю в $L_2((0,T); H^1(\mathcal{O}))$ разности решения и соответствующего первого приближения, а в [3] в предположении C^∞-гладкости правой части было построено полное асимптотическое разложение для решения и получена оценка порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ для $H^1(\mathcal{O}\times(0,T))$-нормы разности решения и его первого приближения.

Задача поиска приближения с корректором для решений гиперболических систем с ненулевыми начальными данными изучалась в статье [24]. В этой работе было выяснено, что получить член корректора с традиционной для теории усреднения структурой возможно лишь для очень специального класса начальных данных. В общем случае для произвольных начальных данных аппроксимации с корректором были найдены в [25, 26].

0.4. Операторные оценки погрешности для уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа: результаты с корректором. Перейдём теперь к описанию известных результатов об операторных оценках погрешности при усреднении уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа с корректором. В [19] была получена аппроксимация по “энергетической” норме для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\left(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\right)$:

$$\left\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\left(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\right) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\left(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}\right) - \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \ (0.15)$$

где $\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) = \Psi^\varepsilon\nabla(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\left(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}\right)\Pi_\varepsilon$ — соответствующий корректор. Далее, в рукописи [27] и в работах [28, 29] была найдена аппроксимация оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\left(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\right)$ по $(H^3 \to L_2)$-норме при учёте корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) - \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \ (0.16)$$

где $\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) = \tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) + \tilde{\mathcal{K}}_2(\tau)$, член $\tilde{\mathcal{K}}_2(\tau)$ не зависит от ε. Результаты (0.15) и (0.16) удалось получить за счёт присутствия “сглаживающего” множителя $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}$ в приближаемом операторе.

Вопрос о возможности найти аппроксимации экспоненты $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ по $(H^q \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(H^q \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ за счёт учёта корректоров исследовался в статье [30], вслед за этим для оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ данный вопрос изучался в [28, 29]. Выяснилось, что построить такие приближения в пороговых терминах для самих операторов не удаётся, но их можно получить для "подправленных" операторов — композиций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)$ и $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)$:

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.17}$$

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^6(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \tag{0.18}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.19}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \tag{0.20}$$

где

$$\check{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)=\check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)+\check{\mathcal{K}}_2(\tau),\qquad \check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)=\Psi^\varepsilon\nabla e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}\Pi_\varepsilon,$$
$$\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)=\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)+\mathcal{K}_2(\tau),\qquad \mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)=\Psi^\varepsilon\nabla\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Pi_\varepsilon,$$

члены $\check{\mathcal{K}}_2(\tau)$, $\mathcal{K}_2(\tau)$ не зависят от ε.

Оценки (0.15)–(0.20) точны по порядку. В [22, 28–30] было установлено, что в общем случае они точны также по типу операторной нормы и в отношении зависимости от времени τ. Однако, при дополнительных предположениях (тех же самых, при которых выполнены оценки (0.10)–(0.12)) эти результаты допускают усиление:

$$\begin{aligned}
&\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\\
&\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2,\\
&\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\\
&\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2,
\end{aligned}\tag{0.21}$$

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\big(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\big)-(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\big(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}\big)-\varepsilon\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\\
&\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})-(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2.
\end{aligned}\tag{0.22}$$

Также отметим, что в ряде случаев сглаживающий оператор Π_ε может быть заменён тождественным I. Полученные оценки применяются к исследованию решений задач Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера и гиперболического уравнения *с начальными данными из специального класса*:

$$\begin{cases}\dfrac{i\partial\check{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}=(\mathcal{A}_\varepsilon\check{z}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau),\\ \check{z}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\phi(\mathbf{x})+\varepsilon\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla\Pi_\varepsilon\phi(\mathbf{x}),\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\check{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2}=-(\mathcal{A}_\varepsilon\check{w}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau),\\ \check{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\phi(\mathbf{x})+\varepsilon\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla\Pi_\varepsilon\phi(\mathbf{x}),\\ (\partial_\tau\check{w}_\varepsilon)(\mathbf{x},0)=\psi(\mathbf{x}),\end{cases}\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

Отметим, что в работах [7–13, 18–23, 27–30] изучался гораздо более общий, чем (0.1), класс операторов (включающий в себя матричные ДО).

Наконец, мы упомянем статью [31], где авторы изучали скорость сходимости для решений начально-краевой задачи Дирихле для волнового уравнения в ограниченной области; получены аналоги оценок (0.11), (0.12), а также результаты с корректором при условии принадлежности начальных данных специальному классу.

0.5. Цели работы и метод исследования. В свете описанных выше результатов возникает вопрос: можно ли найти приближение по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ для решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -(\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \varepsilon\Psi^\varepsilon \nabla \Pi_\varepsilon \phi(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau u_\varepsilon)(\mathbf{x},0)=0, & \phi\in H^q(\mathbb{R}^d) \text{ с подходящим } q. \end{cases}$$

Эта задача эквивалентна изучению поведения оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\to 0$, для которого получить приближение в терминах пороговых характеристик на краю спектра оператора $\mathcal{A}$ *не представляется возможным.* Настоящая статья посвящена изучению этого вопроса в одномерном случае ($d=1$), при этом мы дополнительно считаем, что коэффициент $g(x)$ удовлетворяет условию липшицевости. В таком случае оператор (0.1) будем обозначать через A_ε. Также отметим, что в одномерном случае оператор Π_ε может быть заменён тождественным.

Чтобы решить эту задачу, мы раскладываем решение Ψ задачи (0.2) в ряд Фурье по собственным функциям оператора $A(0)$: $\Psi=\sum_{j=2}^\infty \beta_j \varsigma_j$, и изучаем задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_{j,\varepsilon}(x,\tau)}{\partial \tau^2} = -(A_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(x,\tau), \\ u_{j,\varepsilon}(x,0) = \varepsilon\beta_j\varsigma_j^\varepsilon(x)\phi'(x), \quad (\partial_\tau u_{j,\varepsilon})(x,0)=0. \end{cases} \tag{0.23}$$

Отвечающие собственным функциям ς_j собственные числа являются краями “периодических” лакун в спектре оператора A. Каждой задаче (0.23) мы сопоставляем соответствующую эффективную задачу (см. (4.6), (4.7)) и эффективное приближение (см. (4.8)–(4.10)). Эффективные характеристики находятся на основании спектральных приближений на краях “периодических” лакун (теоремы 2.3, 2.5, 2.6). При этом мы разбиваем лакуны на две группы: те, которые лежат ближе к началу спектра, и те, которые лежат в подходящей окрестности бесконечности. Для невырожденных лакун из первой группы мы находим эффективные характеристики для каждого из краёв по отдельности, а для невырожденных лакун из второй группы и вырожденных лакун из обеих групп нужно учитывать оба края вместе. Способ получения спектральных приближений базируется на результатах из статьи [32], а проконтролировать зависимость оценок в этих приближениях от края лакуны удаётся за счёт асимптотики собственных чисел оператора $A(0)$ из работы [33] (см. теорему 2.1 ниже). Суммированием эффективных приближений мы получаем теорему 4.4 — *основной результат работы*:

$$\big\| u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_\varepsilon^{\mathrm{eff}}(x,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2 \|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, *вклад в эффективное приближение для $u_\varepsilon(\cdot,\tau)$ дают все края “периодических” лакун.*

Благодаря полученному результату вместе с (0.21), (0.22), нам удаётся найти приближение по $L_2(\mathbb{R})$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учёте корректора для решения *исходной задачи* (0.6) в одномерном случае:

$$\big\| w_\varepsilon(\cdot,\tau) - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\phi - \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\psi - u_\varepsilon^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2\big(\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{H^2(\mathbb{R})}\big).$$

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Если $A\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ — замкнутый линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается область определения оператора A, сопряжённый оператор обозначается через A^*. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_1}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}_1$, а символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_1\to\mathfrak{H}_2}$ — норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Далее, если A — самосопряжённый оператор в некотором гильбертовом пространстве, то для спектра оператора A мы используем обозначение $\operatorname{spec} A$.

Стандартные классы L_p функций, заданных на интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$, обозначаются через $L_p(a,b)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Если f — измеримая функция, то оператор умножения на функцию f в пространстве L_2 обозначается тем же символом. Далее, $H^s(\mathbb{R})$ — класс Соболева порядка $s\in\mathbb{R}$ с индексом суммирования 2; а $\widetilde{H}^1(0,\nu)$ — подпространство функций из $H^1(0,\nu)$, ν-периодическое продолжение которых принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Если $F(x)$ — ν-периодическая функция, то $F^\varepsilon(x) := F(\varepsilon^{-1}x)$. Через $\Phi := \Phi_{x\to k}$ обозначается преобразование Фурье в $\mathbb{R}$, определённое на классе Шварца формулой

$$(\Phi v)(k) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}v(x)\,dx, \qquad v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

и по непрерывности распространённое до унитарного оператора $\Phi\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$. Характеристическая функция множества $\delta\subset\mathbb{R}$ обозначается χ_δ. Для множества значений произвольной функции f будем использовать обозначение $\operatorname{Ran} f$.

Далее, $D=-id/dx$. Через C, C, $\mathcal{C}$, $\mathscr{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

0.7. Благодарности. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения и внимание к работе. Также автор благодарит Н. Д. Филонова за ценные советы.

1. Оператор A

В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается ν-периодический самосопряжённый оператор A, порождённый дифференциальным выражением

$$A = -\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx} = Dg(x)D, \qquad \operatorname{Dom} A = H^2(\mathbb{R}), \tag{1.1}$$

где $\nu > 0$,

$$\left.\begin{aligned} &g \text{ — липшицева вещественнозначная функция,}\\ &0<\alpha_0\leqslant g(x)\leqslant\alpha_1<\infty,\ g(x+\nu)=g(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$\int_0^\nu g(x)^{-1/2}dx = \pi. \tag{1.3}$$

2. Спектр оператора A

Нам понадобится описание спектра оператора (1.1). Для этого введём объекты, связанные со спектральным разложением оператора (1.1) (разложением Флоке–Блоха). Рассмотрим в $L_2(0,\nu)$ семейство операторов

$$A(k) = (D+k)g(x)(D+k), \qquad k\in\mathbb{R},$$

с периодическими граничными условиями. Оператору $A(k)$ отвечает форма

$$a(k)[u,u] = \int_0^\nu g(x)|(D+k)u(x)|^2 dx, \qquad u \in \widetilde{H}^1(0,\nu).$$

Параметр $k \in \mathbb{R}$ называют *квазиимпульсом.* Пусть $E_l(k)$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $A(k)$ и $\varphi_l(\cdot,k)$, $l \in \mathbb{N}$, — соответствующие ортонормированные собственные функции. Функции $E_l(k)$ называются *зонными функциями*; они $(2\pi/\nu)$-периодичны. Далее, $\varphi_l(x+\nu,k) = \varphi_l(x,k)$, а функции $e^{ikx}\varphi_l(x,k)$ можно выбрать $(2\pi/\nu)$-периодическими по k. Обозначим через $\widetilde{\Omega} = \big[-\pi/\nu, \pi/\nu\big)$ центральную (первую) зону Бриллюэна. В силу периодичности функций $E_l(k)$ и $e^{ikx}\varphi_l(x,k)$ достаточно рассматривать только $k \in \widetilde{\Omega}$.

Рассмотрим функцию $E_s(k)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Следующие утверждения хорошо известны (см., например, [34, XIII.16]).

1°. Функция E_s липшицева и чётна.

2°. Функция E_s — кусочно вещественно аналитическая, гладкость которой может нарушаться только в точках перемены кратности.

3°. Отображение $k \mapsto E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, дважды покрывает зону $\operatorname{Ran} E_s$.

4°. Равенство $E_s(k) = E_{s+1}(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, возможно только если $k = \pi/\nu$ (s — нечётное число).

5°. Равенство $E_s(k) = E_{s-1}(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, возможно только если $k = 0$ (s — нечётное число).

6°. При $0 \leqslant k \leqslant \pi/\nu$ функция $E_s(k)$ строго монотонна.

7°. Если номер s — нечётный, то при $k = 0$ функция $E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, имеет минимум, а при $k = \pi/\nu$ — максимум.

8°. Если номер s — чётный, то при $k = 0$ функция $E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, имеет максимум, а при $k = \pi/\nu$ — минимум.

Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ формулой

$$\tilde{v}(x,k) = (\mathscr{G}v)(x,k) = \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ik(x+\nu n)} v(x+\nu n), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \widetilde{\Omega}.$$

Функция $\tilde{v}(x,k)$ — ν-периодическая по x и $(2\pi/\nu)$-квазипериодическая по k (т. е. функция $e^{i\langle x,k\rangle}\tilde{v}(x,k)$ является $(2\pi/\nu)$-периодической). Таким образом, достаточно рассматривать $\tilde{v}(x,k)$ при $x \in (0,\nu)$ и $k \in \widetilde{\Omega}$. Обратное преобразование даётся формулой

$$v(x) = (\mathscr{G}^{-1}\tilde{v})(x) = \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{-1/2} \int_{\widetilde{\Omega}} \tilde{v}(x,k) e^{ikx} dk, \qquad x \in \mathbb{R},$$

и восстанавливает v по $\tilde{v}$. При этом $\int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\Omega} |\tilde{v}(x,k)|^2 dx\, dk = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx$ и $\mathscr{G}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathscr{G} \colon L_2(\mathbb{R}) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(0,\nu)\, dk =: \mathcal{K}.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R})$ под действием $\mathscr{G}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие оператора D на $v \in H^1(\mathbb{R})$ переходит в послойное действие оператора $D + k$ на $\tilde{v}(\cdot,k) \in \widetilde{H}^1(0,\nu)$.

Под действием преобразования Гельфанда $\mathscr{G}$ оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(k)$:

$$\mathscr{G} A \mathscr{G}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus A(k)\, dk. \tag{2.1}$$

В силу (2.1) спектр оператора A представляет собой объединение отрезков (зон), которые являются образами функций E_l:

$$\operatorname{spec} A = \bigcup_{l=1}^{\infty} \operatorname{Ran} E_l = [E_1(0), E_1(\pi/\nu)] \cup [E_2(\pi/\nu), E_2(0)] \cup [E_3(0), E_3(\pi/\nu)] \cup \dots .$$

В одномерном случае спектральные зоны не перекрываются. Интервалы

$$\big(-\infty, E_1(0)\big), \quad \big(E_1(\pi/\nu), E_2(\pi/\nu)\big), \quad \big(E_2(0), E_3(0)\big), \quad \dots$$

называются лакунами в спектре. Отметим, что зоны могут касаться друг друга, т. е. возможно их пересечение по граничной точке. Это означает, что некоторые лакуны могут быть пустыми.

Введём оператор P_0, который действует как усреднение по интервалу периодичности $(0, \nu)$:

$$P_0 u = \frac{1}{\nu} \int_0^{\nu} u(x)\, dx, \qquad u \in L_2(0, \nu).$$

Оператор P_0 является ортопроектором на подпространство констант

$$\mathfrak{N}_0 = \{u \in L_2(0, \nu) \colon u = c \in \mathbb{C}\}.$$

Справедливы следующие соотношения (см., например, [8, § 6, п. 6.1] и [35, (2.8), (2.9)]):

$$([P_0]\mathscr{G} u)(k) = \nu^{-1/2} (\Phi u)(k), \qquad u \in L_2(\mathbb{R}), \quad k \in \widetilde{\Omega}; \tag{2.2}$$

$$(\mathscr{G}^{-1} c)(x) = \nu^{1/2} (\Phi^* c)(x), \qquad c(k) \in \mathfrak{N}_0, \quad k \in \widetilde{\Omega}, \quad \operatorname{supp} c \subset \widetilde{\Omega}. \tag{2.3}$$

Здесь $[P_0]$ — проектор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор P_0.

Для нас важную роль будут играть спектральные характеристики оператора A в окрестности точки $k = 0$. Введём обозначения $\lambda_l \coloneqq E_l(0)$, $\varsigma_l(x) \coloneqq \varphi_l(x, 0)$. Это собственные числа и собственные функции задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx} g(x) \dfrac{d}{dx} \varsigma_l(x) = \lambda_l \varsigma_l(x), \qquad 0 < x < \nu, \\ \varsigma_l(0) = \varsigma_l(\nu), \qquad \big(\tfrac{d}{dx}\varsigma_l\big)(0) = \big(\tfrac{d}{dx}\varsigma_l\big)(\nu). \end{cases} \tag{2.4}$$

Преобразование Грина–Лиувилля (см. [36, гл. 3, п. 3.2])

$$t(x) = \int_0^x g(\tilde{x})^{-1/2} d\tilde{x}, \qquad z_l(t) = g(x)^{1/4} \varsigma_l(x)\big|_{x = x(t)} \tag{2.5}$$

преобразует задачу (2.4) в задачу с сингулярным потенциалом

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dt^2} z_l(t) + V(t) z_l(t) = \lambda_l z_l(t), \qquad 0 < t < \pi, \\ z_l(0) = z_l(\pi), \qquad \left(\tfrac{d}{dt} z_l - Q z_l\right)(0) = \left(\tfrac{d}{dt} z_l - Q z_l\right)(\pi), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $V(t) = -\, g(x)^{1/4}\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1/4}\right)\Big|_{x=x(t)}$, $V \in H^{-1}_{\rm loc}(\mathbb{R})$, $V(t+\pi) = V(t)$, и Q определяется из соотношения

$$V = V_0 + Q', \qquad V_0 = \mathrm{const}, \quad Q \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad Q(t+\pi) = Q(t), \quad \int_0^\pi Q(t)\,dt = 0.$$

(Точную постановку задачи (2.6) с сингулярным потенциалом V см. в [33,37].) Для больших собственных чисел λ_l задачи (2.6) известна асимптотика [33, теорема 28] (для случая регулярного потенциала см. также [36, гл. 3, пп. 3.3–3.5]).

Теорема 2.1 ([33]). *Для достаточно больших номеров $m \geqslant M = M(V)$ имеют место оценки*

$$|\lambda_{2m} - (2m)^2| < \frac{m}{2}, \qquad |\lambda_{2m+1} - (2m)^2| < \frac{m}{2}. \tag{2.7}$$

Далее, следующая лемма позволяет оценить скорость изменения $E_l(k)$ при изменении k (ср. [38, лемма 4.2]).

Лемма 2.2. *Для достаточно больших $l \geqslant \widetilde{M}$ справедливы оценки*

$$|E_l(k) - \lambda_l| \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{\lambda_l}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2. \tag{2.8}$$

Доказательство. Рассмотрим разность форм

$$a(k)[u,u] - a(0)[u,u] = k(gDu,u) + k(gu,Du) + k^2(gu,u), \qquad u \in \widetilde{H}^1(0,\nu),\ \|u\|_{L_2(0,\nu)} = 1.$$

С учётом неравенства $\|Du\|^2_{L_2(0,\nu)} \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}a(0)[u,u]$ отсюда следует, что

$$\big|a(k)[u,u] - a(0)[u,u]\big| \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{a(0)[u,u]}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2 \tag{2.9}$$

и, в частности,

$$a(k)[u,u] \leqslant a(0)[u,u] + 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{a(0)[u,u]}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2.$$

Используя вариационный принцип

$$E_l(k) = \max_{\Sigma\subset\widetilde{H}^1(0,\nu)} \inf_{\substack{u\in\Sigma,\\ \|u\|_{L_2(0,\nu)}=1}} a(k)[u,u], \qquad \dim \widetilde{H}^1(0,\nu)/\Sigma \leqslant l-1,$$

с учётом того, что $t \mapsto t + 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{t}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2$ — возрастающая функция от $t \geqslant 0$, получаем неравенство

$$E_l(k) \leqslant \lambda_l + 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{\lambda_l}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2, \qquad l \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

что доказывает оценку сверху.

Докажем оценку снизу для $E_l(k)$. Из (2.9) следует, что

$$a(k)[u,u] \geqslant a(0)[u,u] - 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{a(0)[u,u]}|k| - \|g\|_{L_\infty}k^2.$$

Функция $t \mapsto t - 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{t}|k| - \|g\|_{L_\infty}k^2$ возрастает при $t \geqslant \|g\|^2_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}k^2$. Выберем число $\widetilde{M} \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\lambda_{\widetilde{M}} \geqslant \|g\|^2_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}(\pi/\nu)^2$. Тогда, применяя вариационный принцип, отсюда получаем нижнюю оценку

$$E_l(k) \geqslant \lambda_l - 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\sqrt{\lambda_l}|k| - \|g\|_{L_\infty}k^2, \qquad l \geqslant \widetilde{M}.$$

Это вместе с (2.10) завершает доказательство неравенства (2.8). $\square$

Собственные функции задачи (2.6) принадлежат $H^1([0,\pi])$ и для них справедлива асимптотика ([33, теорема 45]; см. также [39, (1.3.9)] для случая регулярного потенциала)

$$\begin{aligned} z_{2m}(t) &= a_{2m}e^{i2mt} + b_{2m}e^{-i2mt} + o(1), \\ z_{2m+1}(t) &= a_{2m+1}e^{i2mt} + b_{2m+1}e^{-i2mt} + o(1), \end{aligned} \qquad \pi(|a_j|^2+|b_j|^2) = 1+o(1),$$

при больших m. Вместе с (1.2), (2.5) отсюда следует равномерная ограниченность собственных функций задачи (2.4):

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} \max_{x\in[0,\nu]} |\varsigma_l(x)| \leqslant C_\varsigma < \infty. \tag{2.11}$$

Наконец, через λ_l° обозначим *различные* собственные числа оператора $A(0)$, занумерованные в порядке возрастания, и пусть p_l — их кратности (которые могут равняться 1 или 2). Введём обозначения

$$\Upsilon^{(1)} = \{l \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \colon p_l = 1\}, \qquad \Upsilon^{(2)} = \{l\in\mathbb{N} \colon p_l = 2\},$$

и положим

$$\begin{aligned} q(l) &= p_1 + \ldots + p_{l-1} + 1, \\ \Upsilon^{(<)} &= \{l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\colon q(l) < \max\{2(M+1), \widetilde{M}, 20\}\}, \\ \Upsilon^{(1,<)} &= \Upsilon^{(<)}\cap\Upsilon^{(1)}, \qquad \Upsilon^{(2,<)} = \Upsilon^{(<)}\cap\Upsilon^{(2)}, \\ \Upsilon^{(1,>)} &= \{l\in\Upsilon^{(1)}\colon q(l) \geqslant \max\{2(M+1),\widetilde{M},20\},\ q(l) \text{ — чётное число}\}, \\ \Upsilon^{(2,>)} &= \{l\in\Upsilon^{(2)}\colon q(l) \geqslant \max\{2(M+1),\widetilde{M},20\}\}. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу свойств зонных функций числа $q(l)$, $l\in\Upsilon^{(2)}$, всегда чётные.

2.1. Спектральные приближения. Положим $\mathfrak{N}_l \coloneqq \operatorname{Ker}(A(0)-\lambda_l^\circ I)$, $l\in\mathbb{N}$, и пусть P_l — ортопроектор пространства $L_2(0,\nu)$ на $\mathfrak{N}_l$. Далее, обозначим $\mathfrak{N}_{l,l+1} \coloneqq \mathfrak{N}_l\oplus\mathfrak{N}_{l+1}$ и, соответственно, $P_{l,l+1} \coloneqq P_l + P_{l+1}$. Введём в рассмотрение операторы

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{1,l}^\circ &\coloneqq P_l g D P_l + (DP_l)^* g P_l, \\ \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ &\coloneqq P_{l,l+1} g D P_{l,l+1} + (DP_{l,l+1})^* g P_{l,l+1}, && (2.12) \\ \mathfrak{A}_l(k) &\coloneqq \sqrt{\lambda_l^\circ}P_l + \frac{k}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{G}_{1,l}^\circ P_l, && (2.13) \\ \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k) &\coloneqq (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{1/2} P_{l,l+1} \\ &\quad + \frac{k}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2} P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1}+\zeta I)^{-1}P_{l,l+1}\,d\zeta. && (2.14) \end{aligned}$$

Получим сначала спектральные приближения в окрестности собственного числа λ_l°, $l\in\Upsilon^{(<)}$, оператора $A(0)$ с кратностью p_l. Пусть d_l — расстояние от λ_l° до остального спектра оператора $A(0)$. В силу непрерывности зонных функций можно выбрать $\varkappa_l > 0$ такое, что при $|k|\leqslant\varkappa_l$ на отрезке $[\lambda_l^\circ - d_l/3, \lambda_l^\circ + d_l/3]$ имеется p_l собственных чисел оператора $A(k)$ и

$$\big([\lambda_l^\circ - 2d_l/3, \lambda_l^\circ - d_l/3) \cup (\lambda_l^\circ + d_l/3, \lambda_l^\circ + 2d_l/3]\big)\cap \operatorname{spec} A(k) = \varnothing.$$

Через $F_l(k)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(k)$, отвечающий отрезку $[\lambda_l^\circ - d_l/3, \lambda_l^\circ + d_l/3]$, и пусть γ_l — контур, эквидистантно охватывающий отрезок $[\lambda_l^\circ - d_l/3, \lambda_l^\circ + d_l/3]$ и проходящий через точку $\lambda_l^\circ + d_l/2$. Его длина равна

$$\ell_l = \frac{\pi + 4}{3} d_l.$$

В [32, теорема 4.15] был получен следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}$ и $|k| \leqslant \varkappa_l$, где $\varkappa_l$ подчинено дополнительному условию*

$$\varkappa_l \leqslant \min\{(4C_{6,l})^{-1}\lambda_l^\circ, (8C_{7,l})^{-1}\}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\| \left(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \mathfrak{A}_l(k) P_l}\right) P_l \right\|_{L_2(0,\nu)\to L_2(0,\nu)} \leqslant \mathscr{C}_{1,l}|k| + \mathscr{C}_{2,l}|\tau||k|^2.$$

Здесь константы $\mathscr{C}_{1,l}$, $\mathscr{C}_{2,l}$, $C_{7,l}$ и $C_{6,l}$ заданы выражениями

$$\mathscr{C}_{1,l} = 3(2\pi)^{-1}\ell_l(C_{1,l}C_{2,l} + C_{1,l}\check{C}_{2,l} + C_{1,l}^2\varkappa_l),$$
$$\mathscr{C}_{2,l} = 4\left(\sqrt{\lambda_l^\circ}C_{8,l}^2 + \sqrt{\lambda_l^\circ}C_{9,l}\varkappa_l + (\lambda_l^\circ)^{-1/2}C_{10,l} + (\lambda_l^\circ)^{-3/2}C_{6,l}C_{11,l}\right),$$
$$C_{6,l} = (2\pi)^{-1}(\lambda_l^\circ + d_l/2)\ell_l(C_{1,l}C_{2,l} + C_{1,l}\check{C}_{2,l} + C_{1,l}^2\varkappa_l),$$
$$C_{7,l} = (2\pi)^{-1}\ell_l(C_{1,l}C_{2,l} + C_{1,l}\check{C}_{2,l} + C_{1,l}^2\varkappa_l),$$

где

$$C_{8,l} = \pi^{-1}\ell_l C_{1,l}C_{2,l}, \qquad C_{9,l} = 2^{-1}\pi^{-2}\ell_l^2 C_{1,l}C_{2,l}C_{5,l},$$
$$C_{10,l} = (2\pi)^{-1}(\lambda_l^\circ + d_l/2)\ell_l C_{5,l}, \qquad C_{11,l} = \pi^{-1}(\lambda_l^\circ + d_l/2)\ell_l C_{1,l}C_{2,l}$$

и

$$C_{1,l} = 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2} d_l^{-1}, \qquad C_{2,l} = (24 d_l^{-1} + 36\lambda_l^\circ d_l^{-2})^{1/2}, \qquad \check{C}_{2,l} = C_{2,l} + 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\varkappa_l d_l^{-1},$$
$$C_{3,l} = 4 + 6\lambda_l^\circ d_l^{-1}, \qquad C_4 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2},$$
$$C_{5,l} = 2C_{1,l}C_{2,l}\check{C}_{2,l}C_4 + C_{1,l}^2 C_{3,l} + 2C_{1,l}^2 C_{2,l}C_4\varkappa_l + C_{1,l}C_{2,l}^2 C_4 + C_{1,l}^2.$$

Замечание 2.4. *Если $p_l = 1$, то из свойств 2°, 7°, 8° и равенства $A(k)F_l(k) = E_{q(l)}(k)\big(\cdot, \varphi_{q(l)}(\cdot,k)\big)\varphi_{q(l)}(\cdot,k)$ следует, что $\mathfrak{G}_{1,l}^\circ = 0$. См. также [35, (3.36)]. Помимо этого отметим, что если $p_l = 1$, то функцию $\varsigma_{q(l)}$ можно выбрать вещественной.*

Теперь получим спектральные приближения в окрестности пары собственных чисел λ_l° и λ_{l+1}°, $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, оператора $A(0)$. С учётом (2.7) (с $m = q(l)/2$) и неравенства $\lambda_l^\circ > \pi^2\nu^{-2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$, $l \geqslant 2$, (см. [7, гл. 2, § 2, (2.14)]) имеем

$$\begin{aligned} 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\sqrt{\lambda_j}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2 &\leqslant 3\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\sqrt{\lambda_j}|k| \\ &\leqslant 3\sqrt{2}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} q(l)|k|, \qquad j = q(l), q(l)+1, \quad k \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу (2.7) и (2.8) можно выбрать величину

$$\varkappa^{(>)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\|g\|_{L_\infty}^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \tag{2.15}$$

так, что при $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$ на отрезке $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$ имеется 2 собственных числа оператора $A(k)$ и

$$\big([q(l)^2 - 8q(l)/3, q(l)^2 - 4q(l)/3\big) \cup \big(q(l)^2 + 4q(l)/3, q(l)^2 + 8q(l)/3]\big) \cap \operatorname{spec} A(k) = \varnothing. \quad (2.16)$$

Здесь также учтено условие $q(l) \geqslant 20$.

Обозначим через $F_{l,l+1}(k)$ спектральный проектор оператора $A(k)$, $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$, отвечающий отрезку $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$. Далее, пусть $\tilde{\gamma}_l$ — контур, эквидистантно охватывающий этот отрезок и проходящий через точку $q(l)^2 + 2q(l)$. Его длина равна

$$\tilde{\ell}_l = \frac{\pi + 4}{3} \cdot 4q(l),$$

По аналогии с [32, теорема 4.15] можно получить (см. приложение A) следующий результат.

Теорема 2.5. *Пусть $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$. Справедлива оценка*

$$\big\|\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k) P_{l,l+1}}\big) P_{l,l+1}\big\|_{L_2(0,\nu)\to L_2(0,\nu)} \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}|k| + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}|\tau||k|^2.$$

Константы $\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}$ и $\widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}$ заданы выражениями

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l} &= 3(2\pi)^{-1}\tilde{\ell}_l(\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2 + \widetilde{C}_{1,l}^2\varkappa^{(>)}),\\
\widetilde{\mathscr{C}}_{2,l} &= 20\sqrt{2}\big(q(l)\widetilde{C}_{6,l}^2 + q(l)\widetilde{C}_{7,l}\varkappa^{(>)} + q(l)^{-1}\widetilde{C}_{9,l} + q(l)^{-3}\widetilde{C}_{8,l}\widetilde{C}_{10,l}\big),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_{6,l} = \pi^{-1}\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2, \qquad \widetilde{C}_{7,l} = 2^{-1}\pi^{-2}\tilde{\ell}_l^2\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2\widetilde{C}_{5,l},\\
\widetilde{C}_{8,l} = 3(2\pi)^{-1}q(l)^2\tilde{\ell}_l(\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2 + \widetilde{C}_{1,l}^2\varkappa^{(>)}),\\
\widetilde{C}_{9,l} = 3(2\pi)^{-1}q(l)^2\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{5,l}, \qquad \widetilde{C}_{10,l} = 3\pi^{-1}q(l)^2\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_{1,l} = \frac{3}{2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}q(l)^{-1}, \quad \widetilde{C}_2 = 3, \quad \check{\widetilde{C}}_2 = 3 + \frac{3}{2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\varkappa^{(>)}, \quad \widetilde{C}_{3,l} = 4 + \frac{3}{2}q(l),\\
\widetilde{C}_{5,l} = 2\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2\check{\widetilde{C}}_2C_4 + \widetilde{C}_{1,l}^2\widetilde{C}_{3,l} + 2\widetilde{C}_{1,l}^2\widetilde{C}_2C_4\varkappa^{(>)} + \widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2^2C_4 + \widetilde{C}_{1,l}^2.
\end{gathered}$$

Наконец, получим спектральные приближения в окрестности собственного числа λ_l°, $l \in \Upsilon^{(2,>)}$. Аналогично, при $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$ на отрезке $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$ имеется 2 собственных числа оператора $A(k)$ и выполнено (2.16) (с заменой $l \in \Upsilon^{(1,>)}$ на $l \in \Upsilon^{(2,>)}$). Через $F_l(k)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(k)$, отвечающий отрезку $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$, и пусть $\tilde{\gamma}_l$ — контур, эквидистантно охватывающий этот отрезок и проходящий через точку $q(l)^2 + 2q(l)$. Его длина равна $\tilde{\ell}_l = \frac{\pi+4}{3} \cdot 4q(l)$. По аналогии с теоремами 2.3 и 2.5 можно получить следующий результат.

Теорема 2.6. *Пусть $l \in \Upsilon^{(2,>)}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$. Справедлива оценка*

$$\big\|\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \mathfrak{A}_l(k) P_l}\big) P_l\big\|_{L_2(0,\nu)\to L_2(0,\nu)} \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}|k| + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}|\tau||k|^2.$$

Замечание 2.7. *Теорема 2.3 верна для всех номеров $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Однако, она не позволяет получить нужные нам оценки при больших l.*

Замечание 2.8. *Для нас важно отследить зависимость констант в теоремах 2.5 и 2.6 от l (при больших l). Так как* $\widetilde{C}_{1,l} = O\big(q(l)^{-1}\big)$, $\widetilde{C}_{3,l} = O\big(q(l)\big)$ *и* $\tilde{\ell}_l = O\big(q(l)\big)$, *то мы имеем* $\widetilde{C}_{5,l} = O\big(q(l)^{-1}\big)$, $\widetilde{C}_{6,l} = O(1)$, $\widetilde{C}_{7,l} = O(1)$, $\widetilde{C}_{8,l} = O\big(q(l)^2\big)$, $\widetilde{C}_{9,l} = O\big(q(l)^2\big)$, $\widetilde{C}_{10,l} = O\big(q(l)^2\big)$, *а значит*

$$\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l} = O(1), \qquad \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l} = O\big(q(l)\big).$$

3. Матричные элементы

Пусть $\boldsymbol{\varsigma}_l = \{\varsigma_l^p\}_{p=1}^{p_l}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_l$, $l \in \Upsilon^{(<)} \cup \Upsilon^{(2,>)}$, причём $\varsigma_l^1 = \varsigma_{q(l)}$, $l \in \Upsilon^{(<)} \cup \Upsilon^{(2,>)}$, и $\varsigma_l^2 = \varsigma_{q(l)+1}$, если $l \in \Upsilon^{(2)}$. В [35, п. 3.3] были получены выражения для матричных элементов операторов $\mathfrak{G}_{1,l}^\circ$:

$$\begin{gathered}(\mathfrak{G}_{1,l}^\circ \varsigma_l^p, \varsigma_l^q)_{L_2(0,\nu)} = \mathfrak{g}_l^{1,qp}, \qquad p,q = 1,\dots,p_l, \\ \mathfrak{g}_l^{1,qp} := i\int_0^\nu g(x)\left(\varsigma_l^p(x)\frac{d}{dx}\varsigma_l^q(x)^* - \varsigma_l^q(x)^*\frac{d}{dx}\varsigma_l^p(x)\right)dx.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Поэтому оператор (2.13) в базисе $\boldsymbol{\varsigma}_l$ изображается числом

$$\mathfrak{a}_l(k) = \sqrt{\lambda_l^\circ}, \qquad \text{если} \quad l \in \Upsilon^{(1)},$$

(здесь учтено замечание 2.4) или матрицей

$$\mathfrak{a}_l(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_l^\circ} + \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,11}k & \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,12}k \\ \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,21}k & \sqrt{\lambda_l^\circ} + \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,22}k \end{pmatrix}, \qquad \text{если} \quad l \in \Upsilon^{(2)}. \tag{3.2}$$

Теперь, пусть $\boldsymbol{\varsigma}_l = \{\varsigma_l^p\}_{p=1}^2$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{l,l+1}$, $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, причём $\varsigma_l^1 = \varsigma_{q(l)}$, $\varsigma_l^2 = \varsigma_{q(l)+1}$. Аналогично имеем

$$\begin{gathered}(\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ \varsigma_l^p, \varsigma_l^q)_{L_2(0,\nu)} = \widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,qp}, \qquad p,q = 1,2, \\ \widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,qp} := i\int_0^\nu g(x)\left(\varsigma_l^p(x)\frac{d}{dx}\varsigma_l^q(x)^* - \varsigma_l^q(x)^*\frac{d}{dx}\varsigma_l^p(x)\right)dx.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Поэтому оператор $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2} P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}P_{l,l+1}\,d\zeta$ в базисе $\boldsymbol{\varsigma}_l$, $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, изображается матрицей

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}\begin{pmatrix}(\lambda_l^\circ+\zeta)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda_{l+1}^\circ+\zeta)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,12} \\ \widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\lambda_l^\circ+\zeta)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda_{l+1}^\circ+\zeta)^{-1}\end{pmatrix}d\zeta \\ = \frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\begin{pmatrix}0 & \widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,12} \\ \widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,21} & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

а оператор (2.14) — матрицей

$$\mathfrak{a}_l(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_l^\circ} & \frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,12}k \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,21}k & \sqrt{\lambda_{l+1}^\circ} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Здесь также учтено замечание 2.4.

4. Основные результаты работы

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ оператор, заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g^\varepsilon(x) \frac{d}{dx}, \qquad \operatorname{Dom} A = H^2(\mathbb{R}). \tag{4.1}$$

Здесь ν-периодическая функция g удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Операторы (1.1) и (4.1) связаны между собой соотношением

$$A_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* A T_\varepsilon,$$

где T_ε — оператор масштабного преобразования: $(T_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{1/2} u(\varepsilon x)$.

Пусть $\Psi(x)$ — периодическое решение задачи (0.2) в одномерном случае. Мы изучаем поведение при $\varepsilon \to 0$ решения $u_\varepsilon(x,\tau)$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} u_\varepsilon(x,\tau) = -(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,\tau), \\ u_\varepsilon(x,0) = \varepsilon \Psi^\varepsilon(x) \phi'(x), \ (\partial_\tau u_\varepsilon)(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Здесь $\phi(x)$ — заданная функция, далее мы будем считать, что $\phi \in H^4(\mathbb{R})$. Разложим Ψ в ряд по собственным функциям задачи (2.4):

$$\Psi = \sum_{j=2}^{\infty} \beta_j \varsigma_j, \qquad \beta_j = (\Psi, \varsigma_j)_{L_2(0,\nu)}. \tag{4.3}$$

Введём также обозначение $\beta_j' := (g', \varsigma_j)_{L_2(0,\nu)}$, $j \geqslant 2$.

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$|\beta_j| = \frac{|\beta_j'|}{\lambda_j}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Задача на Ψ сейчас выглядит следующим образом:

$$\tfrac{d}{dx} g(x) \left(\tfrac{d}{dx} \Psi(x) + 1 \right) = 0, \qquad \int_0^\nu \Psi(x)\, dx = 0.$$

Отсюда легко видеть, что $\Psi'(x) + 1 = \underline{g} g(x)^{-1}$, $\underline{g} := \left(\frac{1}{\nu} \int_0^\nu g(x)^{-1} dx \right)^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\Psi, \varsigma_j)_{L_2(0,\nu)} = \frac{1}{\lambda_j} \big(\Psi, A(0)\varsigma_j\big)_{L_2(0,\nu)} &= \frac{1}{\lambda_j} (g\Psi', \varsigma_j')_{L_2(0,\nu)} \\ &= \frac{1}{\lambda_j} \big(-(g, \varsigma_j')_{L_2(0,\nu)} + \underline{g}(1, \varsigma_j')_{L_2(0,\nu)} \big) = \frac{1}{\lambda_j} (g', \varsigma_j)_{L_2(0,\nu)}. \end{aligned}$$

□

Замечание 4.2. *Из* (2.7) *и* (4.4) *следует, что* $|\beta_j| = O\big(j^{-2}\big)$ *при больших* j. *Учитывая* (2.11), *получаем, что ряд* (4.3) *сходится абсолютно и равномерно.*

Рассмотрим задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} u_{j,\varepsilon}(x,\tau) = -(A_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(x,\tau), \\ u_{j,\varepsilon}(x,0) = \varepsilon\beta_j\varsigma_j^\varepsilon(x)\phi'(x),\ (\partial_\tau u_{j,\varepsilon})(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

В $L_2(\mathbb{R})$ определим операторы

$$A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}} = \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I, \qquad l\in\Upsilon^{(1,<)};$$

$$A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I - i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,11}\frac{d}{dx} & -i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,12}\frac{d}{dx} \\ -i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,21}\frac{d}{dx} & \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I - i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,22}\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, \qquad l\in\Upsilon^{(2)};$$

$$A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I & -i\frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,12}\frac{d}{dx} \\ -i\frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,21}\frac{d}{dx} & \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}I \end{pmatrix}, \qquad l\in\Upsilon^{(1,>)};$$

которые назовём *эффективными операторами*. Напомним, что $\mathfrak{g}_l^{1,lp}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,lp}$ определены в (3.1) и (3.3). Пусть $v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau)$ и $\mathbf{v}_{lr,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) = \big(v_{lr,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau), v_{lr,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau)\big)^{\mathrm{t}}$ — решения соответствующих "эффективных" задач

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) = A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau), \\ v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,0) = \phi'(x), \end{cases} \qquad l\in\Upsilon^{(1,<)}; \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}_{lr,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) = A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}\mathbf{v}_{lr,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau), \\ \mathbf{v}_{lr,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,0) = \phi'(x)\mathbf{e}_r, \end{cases} \qquad l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}, \quad r=1,2. \tag{4.7}$$

Здесь $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^2$. Определим "эффективные" приближения:

$$u_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) \coloneqq \frac{1}{2}\varepsilon\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon(x)\big(v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau)+v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,-\tau)\big), \qquad l\in\Upsilon^{(1,<)}; \tag{4.8}$$

$$u_{l,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) \coloneqq \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)+s-1}^\varepsilon(x)\big(v_{l1,s,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau)+v_{l1,s,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,-\tau)\big), \qquad l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}; \tag{4.9}$$

$$u_{l,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) \coloneqq \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)+1}\varsigma_{q(l)+s-1}^\varepsilon(x)\big(v_{l2,s,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau)+v_{l2,s,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,-\tau)\big), \quad l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}. \tag{4.10}$$

Для решений задачи (4.5), "эффективных" систем (4.6), (4.7) и "эффективных" приближений (4.8)–(4.10) справедливы операторные представления

$$\begin{aligned}
u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau) &= \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_j\varsigma_j^\varepsilon D\phi, \\
v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}iD\phi, && l\in\Upsilon^{(1,<)}, \\
\mathbf{v}_{lr,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}J_r iD\phi, && l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}, \\
u_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= \frac{1}{2}i\varepsilon\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)D\phi, && l\in\Upsilon^{(1,<)}, \\
u_{l,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= \frac{1}{2}i\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)+s-1}^\varepsilon\check{J}_s\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_1D\phi, && l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}, \\
u_{l,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= \frac{1}{2}i\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)+1}\varsigma_{q(l)+s-1}^\varepsilon\check{J}_s\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_2D\phi, && l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

где оператор $J_r\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ действует по правилу $a\mapsto a\mathbf{e}_r$, а $\check{J}_s\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ задаётся формулой $\check{J}_s\mathbf{c} = \langle \mathbf{c},\mathbf{e}_s\rangle$.

Теорема 4.3. *Пусть $\varepsilon>0$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\phi\in H^4(\mathbb{R})$.*

1°. *Пусть $l\in\Upsilon^{(1,<)}$. Справедлива оценка*

$$\|u_{q(l),\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_1+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_2|\tau|\big)\varepsilon^2\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}. \tag{4.12}$$

2°. *Пусть $l\in\Upsilon^{(2,<)}$. Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|u_{q(l),\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{l,1,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_1+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_2|\tau|\big)\varepsilon^2\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})},\\ \|u_{q(l)+1,\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{l,2,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)+1}|\mathcal{C}_1+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_2|\tau|\big)\varepsilon^2\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

3°. *Пусть $l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}$. Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|u_{q(l),\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{l,1,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_3+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_{4,l}|\tau|\big)\varepsilon^2\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})},\\ \|u_{q(l)+1,\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{l,2,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)+1}|\mathcal{C}_3+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_{4,l}|\tau|\big)\varepsilon^2\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})},\end{aligned}\tag{4.14}$$

где $\mathcal{C}_{4,l}=O(q(l)^{-1})$.

Доказательство. Докажем пункт 3°. В силу (4.11) оценки (4.14) допускают переформулировку в операторных терминах:

$$\begin{aligned}&\Big\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma^\varepsilon_{q(l)}D\\&\quad-\frac12\varepsilon i\beta_{q(l)}\Big(\varsigma^\varepsilon_{q(l)}\check{J}_1\big(e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}+e^{i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}\big)J_1+\varsigma^\varepsilon_{q(l)+1}\check{J}_2\big(e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}+e^{i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}\big)J_1\Big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\&\qquad\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_3+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_{4,l}|\tau|\big)\varepsilon^2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}&\Big\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)+1}\varsigma^\varepsilon_{q(l)+1}D\\&\quad-\frac12 i\varepsilon\beta_{q(l)+1}\big(\varsigma^\varepsilon_{q(l)}\check{J}_1\big(e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}+e^{i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}\big)J_2+\varsigma^\varepsilon_{q(l)+1}\check{J}_2\big(e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}+e^{i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}\big)J_2\big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\&\qquad\leqslant\big(|\beta_{q(l)+1}|\mathcal{C}_3+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_{4,l}|\tau|\big)\varepsilon^2,\end{aligned}\tag{4.16}$$

где $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Таким образом, наша цель — доказать (4.15) и (4.16). Докажем оценку (4.15), оценка (4.16) проверяется совершенно аналогично. В силу формулы Эйлера $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})=\frac12\big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}+e^{i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\big)$ достаточно рассмотреть оператор

$$e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma^\varepsilon_{q(l)}D-\varepsilon i\beta_{q(l)}\big(\varsigma^\varepsilon_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}J_1+\varsigma^\varepsilon_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}J_1\big)D.$$

Оператор $(-\Delta+I)^2$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^4(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$, поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\Big\|e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma^\varepsilon_{q(l)}D-\varepsilon i\beta_{q(l)}\big(\varsigma^\varepsilon_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}J_1+\varsigma^\varepsilon_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}J_1\big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\&\quad=\Big\|\Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon\beta_{q(l)}\varsigma^\varepsilon_{q(l)}D\\&\qquad-\varepsilon\beta_{q(l)}\big(\varsigma^\varepsilon_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}J_1+\varsigma^\varepsilon_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}}J_1\big)D\Big)(-\Delta+I)^{-2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Затем, в силу унитарности оператора масштабного преобразования имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}} \varepsilon \beta_{q(l)} \varsigma^\varepsilon_{q(l)} D \\
&\qquad - \varepsilon \beta_{q(l)} \big(\varsigma^\varepsilon_{q(l)} \check{J}_1 e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}} J_1 + \varsigma^\varepsilon_{q(l)+1} \check{J}_2 e^{-i\tau A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}} J_1 \big) D \Big) (-\Delta + I)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \\
&= \Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{1/2}} \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)} D - \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)} \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{\mathrm{eff}}_l} J_1 + \varsigma_{q(l)+1} \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{\mathrm{eff}}_l} J_1 \big) D \Big) \\
&\qquad \times \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})},
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

где $A^{\mathrm{eff}}_l := A^{\mathrm{eff}}_{l,1}$.

Далее,

$$
\Phi^* k \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \Phi = D \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2}, \tag{4.19}
$$

$$
\Phi^* \check{J}_s e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_r k \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \Phi = \check{J}_s e^{-i\varepsilon^{-1}\tau A^{\mathrm{eff}}_l} J_r D \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2}, \tag{4.20}
$$

где $s, r = 1, 2$, и $\mathfrak{a}_l(k)$ — символ эффективного оператора — определён в (3.2) (если $l \in \Upsilon^{(2,>)}$) или в (3.4) (если $l \in \Upsilon^{(1,>)}$). Введём проектор $F_{\varkappa^{(>)}} := \Phi^* \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k) \Phi$, где число $\varkappa^{(>)}$ было определено в (2.15). Очевидно,

$$
\varepsilon^4 |k| (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \big(1 - \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k) \big) \leqslant \big(\varkappa^{(>)} \big)^{-1} \varepsilon^2,
$$

и ввиду (4.19) с учётом (2.11) имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{1/2}} \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)} D - \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)} \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{\mathrm{eff}}_l} J_1 + \varsigma_{q(l)+1} \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{\mathrm{eff}}_l} J_1 \big) D \Big) \\
&\qquad \times \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2} (I - F_{\varkappa^{(>)}}) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant |\beta_{q(l)}| \big(2 \|\varsigma_{q(l)}\|_{L_\infty} + \|\varsigma_{q(l)+1}\|_{L_\infty} \big) \big(\varkappa^{(>)} \big)^{-1} \varepsilon^2 \leqslant 3 |\beta_{q(l)}| C_\varsigma \big(\varkappa^{(>)} \big)^{-1} \varepsilon^2.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Рассмотрим оператор

$$
\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{1/2}} \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)} D - \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)} \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{\mathrm{eff}}_l} J_1 + \varsigma_{q(l)+1} \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{\mathrm{eff}}_l} J_1 \big) D \Big) \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2} F_{\varkappa^{(>)}},
$$

который в силу тождеств (4.19), (4.20) можно записать как

$$
\begin{aligned}
&\beta_{q(l)} \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{1/2}} \varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)} \Phi^* \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_1 \Phi + \varsigma_{q(l)+1} \Phi^* \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_1 \Phi \big) \Big) \\
&\qquad \times \Phi^* k \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k) \Phi.
\end{aligned}
$$

Напомним, что оператор A раскладывается в прямой интеграл (2.1). Принимая также во внимание соотношения (2.2) и (2.3), получаем равенство

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \beta_{q(l)} \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{1/2}} \varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)} \Phi^* \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_1 \Phi + \varsigma_{q(l)+1} \Phi^* \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_1 \Phi \big) \Big) \\
&\qquad \times \Phi^* k \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k) \Phi \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \\
&= \operatorname*{ess\text{-}sup}_{k \in \widetilde{\Omega}} \Big\| \beta_{q(l)} \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A(k)^{1/2}} \varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)} \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_1 + \varsigma_{q(l)+1} \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_1 \big) \Big) \\
&\qquad \times k \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k) P_0 \Big\|_{L_2(0,\nu) \to L_2(0,\nu)}.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Учитывая включения $\operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)}P_0 \subset \mathfrak{N}_l$, $\operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)+1}P_0 \subset \mathfrak{N}_l$ (если $l \in \Upsilon^{(2,>)}$) или $\operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)}P_0 \subset \mathfrak{N}_{l,l+1}$, $\operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)+1}P_0 \subset \mathfrak{N}_{l,l+1}$ (если $l \in \Upsilon^{(1,>)}$) получаем, что

$$\begin{aligned}&\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1 + \varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\big)\Big)k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_0\\ &= \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{A}_l(k)P_l}\Big)P_l\varsigma_{q(l)}k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_0, \qquad \text{если} \quad l\in\Upsilon^{(2,>)};\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}&\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1 + \varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\big)\Big)k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_0\\ &= \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}\Big)P_{l,l+1}\varsigma_{q(l)}k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_0, \quad \text{если} \quad l\in\Upsilon^{(1,>)}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Применение теоремы 2.5 (если $l \in \Upsilon^{(1,>)}$) или теоремы 2.6 (если $l \in \Upsilon^{(2,>)}$) с заменой τ на $\tau\varepsilon^{-1}$ при учёте равенства $\|\varsigma_{q(l)}\|_{L_2(0,\nu)} = 1$ даёт оценку для $\big(L_2(0,\nu) \to L_2(0,\nu)\big)$-норм правых частей равенств (4.23), (4.24) через

$$(\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}|k| + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}\varepsilon^{-1}|\tau|k^2)\varepsilon^4|k|(k^2+\varepsilon^2)^{-2} \leqslant (\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l} + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}|\tau|)\varepsilon^2.$$

Таким образом, из (4.17), (4.18), (4.21)–(4.24) и теорем 2.5, 2.6 с учётом (4.4) следует оценка (4.15), где в качестве констант можно выбрать

$$\mathcal{C}_3 = 3C_{\boldsymbol{\varsigma}}\big(\varkappa^{(>)}\big)^{-1} + \sup_{l\in\Upsilon^{(1,>)}\cup\Upsilon^{(2,>)}}\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}, \qquad \mathcal{C}_{4,l} = (\lambda_l^\circ)^{-1}\widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}$$

(конечность супремума и равенство $\mathcal{C}_{4,l} = O(q(l)^{-1})$ следуют из замечания 2.8 и (2.7)).

Докажем теперь пункт 1°. Аналогично (4.15), (4.16) в силу (4.11) оценка (4.12) допускает переформулировку в операторных терминах:

$$\begin{aligned}\Big\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \frac{1}{2}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} + e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}&\\ \leqslant \big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_1 + |\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_2|\tau|\big)\varepsilon^2.&\end{aligned} \tag{4.25}$$

В силу формулы Эйлера достаточно рассмотреть оператор

$$e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}D.$$

Справедливо равенство (ср. (4.17), (4.18))

$$\begin{aligned}&\Big\|e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ &\quad= \Big\|\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D - \beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}D\Big)\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Положим $F_{\varkappa_l} \coloneqq \Phi^*\chi_{(-\varkappa_l,\varkappa_l)}(k)\Phi$. По аналогии с доказательством пункта 3° получаем

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D - \beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}D\Big)\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa_l})\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}&\\ \leqslant 2|\beta_{q(l)}|C_{\boldsymbol{\varsigma}}\varkappa_l^{-1}\varepsilon^2,&\\ \Big\|\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D - \beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}D\Big)\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}F_{\varkappa_l}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}&\\ \leqslant |\beta_{q(l)}|(\mathscr{C}_{1,l} + \mathscr{C}_{2,l}|\tau|)\varepsilon^2.&\end{aligned}$$

Здесь при доказательстве второй оценки используется теорема 2.3. Это доказывает оценку (4.25), где в качестве констант можно выбрать

$$\mathcal{C}_1 = \max_{l\in\Upsilon^{(<)}}\bigl(3C_\varsigma\varkappa_l^{-1} + \mathscr{C}_{1,l}\bigr), \qquad \mathcal{C}_2 = \max_{l\in\Upsilon^{(<)}}(\lambda_l^\circ)^{-1}\mathscr{C}_{2,l}$$

(максимумы конечны, поскольку множество $\Upsilon^{(<)}$ конечно; мы написали множитель 3 в выражении для $\mathcal{C}_1$ и рассмотрели максимумы по $\Upsilon^{(<)}$ для того, чтобы эти же константы подошли для оценок пункта 2°).

Пункт 2° доказывается по той же схеме, что и предыдущие два пункта. □

Теорема 4.4. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\phi \in H^4(\mathbb{R})$. Положим*

$$u_\varepsilon^{\mathrm{eff}}(x,\tau) := \sum_{l\in\Upsilon^{(1,<)}} u_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) + \sum_{l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\bigl(u_{l,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau) + u_{l,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(x,\tau)\bigr).$$

Тогда

$$\bigl\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_\varepsilon^{\mathrm{eff}}(x,\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \bigl(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2|\tau|\bigr)\varepsilon^2\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})},$$

где $\mathrm{C}_1 = \max\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3\}\cdot\sum_{j=2}^\infty|\beta_j|$ *и* $\mathrm{C}_2 = \mathcal{C}_2\sum_{l\in\Upsilon^{(1,<)}}|\beta'_{q(l)}| + \mathcal{C}_2\sum_{l\in\Upsilon^{(2,<)}}\bigl(|\beta'_{q(l)}| + |\beta'_{q(l)+1}|\bigr) + \sum_{l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\bigl(|\beta'_{q(l)}| + |\beta'_{q(l)+1}|\bigr)\mathcal{C}_{4,l}$.

Доказательство. С учётом (4.3) и замечания 4.2 утверждение теоремы доказывается при помощи суммирования оценок (4.12)–(4.14). Остаётся проверить сходимость рядов

$$\sum_{j=2}^\infty|\beta_j| \qquad \text{и} \qquad \sum_{l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\bigl(|\beta'_{q(l)}| + |\beta'_{q(l)+1}|\bigr)\mathcal{C}_{4,l}.$$

Сходимость первого ряда следует из равенства $|\beta_j| = O\bigl(j^{-2}\bigr)$. Сходимость второго ряда следует из $\sum_{j=2}^\infty|\beta'_j|^2 < \infty$ (так как $g' \in L_2(0,\nu)$), $\sum_{l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\mathcal{C}_{4,l}^2 < \infty$ (поскольку $\mathcal{C}_{4,l} = O(q(l)^{-1})$) и неравенства Коши. □

А. Доказательство теоремы 2.5

Теорема доказывается аналогично теореме 2.3, которая была установлена в [32, пп. 4.1, 4.3, 4.6, 4.9] адаптацией метода из [40, § 4, п. 4.2, третий метод] (см. также [41, § 2, п. 2.2], [42]).

А.1. Аппроксимации для операторов $F_{l,l+1}(k)$ и $A(k)F_{l,l+1}(k)$, $l \in \Upsilon^{(1,>)}$. Мы применяем подходящий вариант резольвентного тождества (см. формулу (А.3) ниже) и представления

$$F_{l,l+1}(k) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_l}(A(k)-\zeta I)^{-1}d\zeta, \tag{A.1}$$

$$A(k)F_{l,l+1}(k) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\tilde\gamma_l}\zeta(A(k)-\zeta I)^{-1}d\zeta. \tag{A.2}$$

Положим

$$R(k,\zeta) := (A(k)-\zeta I)^{-1}, \qquad R_0(\zeta) := R(0,\zeta) = (A(0)-\zeta I)^{-1};$$

обе резольвенты на контуре $\tilde\gamma_l$ удовлетворяют оценкам

$$\|R(k,\zeta)\| \leqslant \frac{3}{2}q(l)^{-1}, \qquad \|R_0(\zeta)\| \leqslant \frac{3}{2}q(l)^{-1}, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}, \quad \zeta \in \tilde\gamma_l.$$

(Здесь и далее мы опускаем индекс у $(L_2(0,\nu)\to L_2(0,\nu))$-нормы.)

Имеет место тождество [35, (3.3)]

$$R(k,\zeta)=R_0(\zeta)-\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)-\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta), \tag{A.3}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(k,\zeta)&=g^{1/2}DR(k,\zeta), & \mathcal{Y}(k,\zeta)&=g^{1/2}kR(k,\zeta),\\ \mathcal{X}_0(\zeta)&=g^{1/2}DR_0(\zeta), & \mathcal{Y}_0(k,\zeta)&=g^{1/2}kR_0(\zeta).\end{aligned}\tag{A.4}$$

Для операторов $\mathcal{X}(k,\zeta)$, $\mathcal{X}_0(\zeta)$, $\mathcal{Y}(k,\zeta)$ и $\mathcal{Y}_0(k,\zeta)$ справедливы оценки (ср. [35, (3.5)–(3.8)])

$$\|\mathcal{Y}(k,\zeta)\|\leqslant\widetilde{C}_{1,l}|k|,\qquad \|\mathcal{Y}_0(k,\zeta)\|\leqslant\widetilde{C}_{1,l}|k|,\qquad |k|\leqslant\varkappa^{(>)},\ \zeta\in\tilde\gamma_l; \tag{A.5}$$

и

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_0(\zeta)\|&\leqslant\sqrt{\frac94+\frac{6}{q(l)}}\leqslant\widetilde{C}_2, & |k|\leqslant\varkappa^{(>)},\ \zeta\in\tilde\gamma_l,\\ \|\mathcal{X}(k,\zeta)\|&\leqslant\sqrt{\frac94+\frac{6}{q(l)}}+\frac32\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\varkappa^{(>)}q(l)^{-1}\leqslant\check{\widetilde{C}}_2, & |k|\leqslant\varkappa^{(>)},\ \zeta\in\tilde\gamma_l.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Итерирование тождества (A.3) даёт равенство [35, (3.9)]:

$$R(k,\zeta)=R_0(\zeta)+T_1(k,\zeta)+\mathscr{R}_1(k,\zeta), \tag{A.7}$$

$$T_1(k,\zeta):=-\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(k,\zeta), \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_1(k,\zeta):=\,&\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(k)^*\mathcal{X}(k,\zeta)+\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}(k,\zeta)\\ &+\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(k)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(k,\zeta)\check{\mathcal{Y}}(k)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\\ &+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(k)\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(k,\zeta)\check{\mathcal{Y}}(k)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)\\ &-\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta),\end{aligned}$$

где

$$\check{\mathcal{X}}_0(\zeta):=g^{1/2}D\big(g^{1/2}DR_0(\zeta^*)\big)^*,\qquad \check{\mathcal{Y}}(k):=g^{1/2}k. \tag{A.9}$$

Нормы операторов $\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)$ и $\check{\mathcal{Y}}(k)$ допускают оценки (ср. [35, (3.11) и (3.12)])

$$\|\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\|\leqslant\widetilde{C}_{3,l},\qquad \|\check{\mathcal{Y}}(k)\|\leqslant C_4|k|,\qquad |k|\leqslant\varkappa^{(>)},\quad \zeta\in\tilde\gamma_l. \tag{A.10}$$

Поэтому остаток $\mathscr{R}_1(k,\zeta)$ допускает оценку (ср. [35, (3.14)])

$$\|\mathscr{R}_1(k,\zeta)\|\leqslant\widetilde{C}_{5,l}|k|^2,\qquad |k|\leqslant\varkappa^{(>)},\quad \zeta\in\tilde\gamma_l. \tag{A.11}$$

Теорема A.1. *Для оператора $F_{l,l+1}(k)$, $l\in\Upsilon^{(1,>)}$, при $|k|\leqslant\varkappa^{(>)}$ справедливы аппроксимации*

$$\|F_{l,l+1}(k)-P_{l,l+1}\|\leqslant\widetilde{C}_{11,l}|k|; \tag{A.12}$$

$$F_{l,l+1}(k)=P_{l,l+1}+F_{1,l,l+1}(k)+\Phi_{1,l,l+1}(k),\qquad \|\Phi_{1,l,l+1}(k)\|\leqslant\widetilde{C}_{12,l}|k|^2. \tag{A.13}$$

Оператор $F_{1,l,l+1}(k)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}F_{1,l,l+1}(k)&=F^\times_{1,l}(k)+F^\times_{1,l+1}(k)+F^\times_{1,l}(k)^*+F^\times_{1,l+1}(k)^*,\\ F^\times_{1,j}(k)&:=-k\big(P_jgDR^\perp_{0,l,l+1}(\lambda^\circ_j)+(DP_j)^*gR^\perp_{0,l,l+1}(\lambda^\circ_j)\big),\end{aligned}\tag{A.14}$$

$R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta) \coloneqq R_0(\zeta)P^{\perp}_{l,l+1}$, *а константы* $\widetilde{C}_{11,l}$, $\widetilde{C}_{12,l}$ *заданы выражениями*

$$\widetilde{C}_{11,l} = (2\pi)^{-1}\tilde{\ell}_l(\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2 + \widetilde{C}^2_{1,l}\varkappa^{(>)}), \qquad \widetilde{C}_{12,l} = (2\pi)^{-1}\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{5,l}.$$

Оператор $F^{\times}_{1,j}(k)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|F^{\times}_{1,j}(k)\| \leqslant \widetilde{C}_{6,l}|k|. \tag{A.15}$$

Доказательство. Оценка (A.12) следует из представления (A.1), аналогичного представления для проектора $P_{l,l+1}$ и тождества (A.3) с учётом (A.5), (A.6) (ср. [35, (3.16)]).

Докажем (A.13). Для этого подставим (A.7) в (A.1). Получаем равенство (A.13), где

$$\begin{aligned} F_{1,l,l+1}(k) &\coloneqq \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}_l}\big(\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(k,\zeta)\big)\,d\zeta, \\ \Phi_{1,l,l+1}(k) &\coloneqq \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}_l}\mathscr{R}_1(k,\zeta)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Вычислим интеграл в выражении для $F_{1,l,l+1}(k)$. Вспоминая обозначения (A.4) и принимая во внимание разложение резольвенты

$$\begin{aligned} R_0(\zeta) &= R_0(\zeta)P_{l,l+1} + R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta) \\ &= (\lambda^{\circ}_l - \zeta)^{-1}P_l + (\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta)^{-1}P_{l+1} + R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta), \qquad \zeta \in \tilde{\gamma}_l, \end{aligned} \tag{A.17}$$

получаем

$$\begin{aligned} F_{1,l,l+1}(k) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}_l} k\Big(&\big((\lambda^{\circ}_l - \zeta)^{-1}P_l + (\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta)^{-1}P_{l+1} + R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta)\big)g \\ &\times D\big((\lambda^{\circ}_l - \zeta)^{-1}P_l + (\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta)^{-1}P_{l+1} + R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta)\big) \\ &+\Big(D\big((\lambda^{\circ}_l - \zeta^*)^{-1}P_l + (\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta^*)^{-1}P_{l+1} + R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta^*)\big)\Big)^*g \\ &\times\big((\lambda^{\circ}_l - \zeta)^{-1}P_l + (\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta)^{-1}P_{l+1} + R^{\perp}_{0,l,l+1}(\zeta)\big)\Big)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Вычисление интеграла (A.18) с учётом равенства

$$\frac{1}{(\lambda^{\circ}_l - \zeta)(\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta)} = \frac{1}{\lambda^{\circ}_{l+1} - \lambda^{\circ}_l}\left(\frac{1}{\lambda^{\circ}_l - \zeta} - \frac{1}{\lambda^{\circ}_{l+1} - \zeta}\right) \tag{A.19}$$

даёт (A.14).

Далее, благодаря (A.11) остаток $\Phi_{1,l,l+1}(k)$ допускает оценку (A.13) (ср. [35, (3.22)]), а оценка (A.15) для оператора $F^{\times}_{1,j}(k)$ следует из интегрального представления (A.16) и (A.5), (A.6), (A.10), а также соотношения $F^{\times}_{1,j}(k) = P_jF_{1,l,l+1}(k)P^{\perp}_{l,l+1}$ (ср. [35, (3.23)]). □

Кроме того, нам понадобятся следующие соотношение и оценка (ср. [35, (3.25), (3.26)]):

$$\begin{aligned} &F^{\times}_{1,j}(k)F_{l,l+1}(k) = F^{\times}_{1,j}(k)(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1})F_{l,l+1}(k) \\ &\quad = F^{\times}_{1,j}(k)\big(F^{\times}_{1,l}(k)^* + F^{\times}_{1,l+1}(k)^*\big)F_{l,l+1}(k) + F^{\times}_{1,j}(k)\Phi_{1,l,l+1}(k)F_{l,l+1}(k), \quad j = l, l+1; \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\|F^{\times}_{1,j}(k)\Phi_{1,l,l+1}(k)F_{l,l+1}(k)\| \leqslant \widetilde{C}_{7,l}|k|^3, \quad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}. \tag{A.21}$$

Теорема A.2. *Для оператора* $A(k)F_{l,l+1}(k)$, $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, *при* $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$ *справедливы аппроксимации*

$$\|A(k)F_{l,l+1}(k) - (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})\| \leqslant \widetilde{C}_{8,l}|k|; \tag{A.22}$$

$$A(k)F_{l,l+1}(k) = \lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + G_{1,l,l+1}(k) + \Xi_{1,l,l+1}(k), \qquad \|\Xi_{1,l,l+1}(k)\| \leqslant \widetilde{C}_{9,l}|k|^2. \tag{A.23}$$

Оператор $G_{1,l,l+1}(k)$ *имеет следующую структуру*:

$$G_{1,l,l+1}(k) = k\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ + \lambda_l^\circ\big(F_{1,l}^\times(k) + F_{1,l}^\times(k)^*\big) + \lambda_{l+1}^\circ\big(F_{1,l+1}^\times(k) + F_{1,l+1}^\times(k)^*\big), \tag{A.24}$$

где оператор $\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ$ *определён в* (2.12), *а операторы* $F_{1,l}^\times(k)$, $F_{1,l+1}^\times(k)$ — *в* (A.14). *Кроме того,*

$$\|\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ\| \leqslant \widetilde{C}_{10,l}. \tag{A.25}$$

Доказательство. Оценка (A.22) следует из (A.2) и (A.3) вместе с оценками (A.5), (A.6). Далее, (A.2) и (A.7) дают равенство (A.23) с

$$\begin{aligned} G_{1,l,l+1}(k) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\widetilde{\gamma}_l} \zeta T_1(k,\zeta)\,d\zeta, \\ \Xi_{1,l,l+1}(k) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\widetilde{\gamma}_l} \zeta \mathscr{R}_1(k,\zeta)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Вычисляя интеграл в выражении (A.26) с помощью (A.4), (A.8), (A.9), разложения резольвенты (A.17), а также формулы (A.19), получаем (A.24) (ср. [35, (3.33), (3.34)]). Затем, применение (A.11) даёт оценку для остаточного члена $\Xi_{1,l,l+1}(k)$ в (A.23). Наконец, использование (A.5), (A.6), (A.8), (A.26) и соотношения $k\widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ = P_{l,l+1}G_{1,l,l+1}(k)P_{l,l+1}$ даёт оценку (A.25). □

A.2. Аппроксимации для оператора $(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)$**,** $l \in \Upsilon^{(1,>)}$**,** $\zeta > 0$**.** В этом пункте мы находим подходящее приближение для оператора $P_{l,l+1}(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)$ при $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$ и $\zeta > 0$.

Сперва отметим оценку

$$\begin{gathered} \|(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)\| \leqslant \big(q(l)^2 - \tfrac{4}{3}q(l) + \zeta\big)^{-1} \leqslant \big(\tfrac{1}{2}q(l)^2 + \zeta\big)^{-1}, \\ |k| \leqslant \varkappa^{(>)}, \quad \zeta > 0. \end{gathered} \tag{A.27}$$

Рассмотрим разность

$$P_{l,l+1}(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k).$$

Применение резольвентного тождества даёт равенство

$$\begin{aligned} &P_{l,l+1}(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) \\ &\quad = -P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} \\ &\qquad\quad \times \big(A(k)F_{l,l+1}(k) - \lambda_l^\circ P_l - \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1}\big)(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k), \end{aligned} \tag{A.28}$$

откуда с учётом (2.7), (A.22) и (A.27) следует оценка

$$\begin{aligned} &\|P_{l,l+1}(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)\| \\ &\qquad \leqslant \big(\tfrac{1}{2}q(l)^2 + \zeta\big)^{-2}\,\widetilde{C}_{8,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}, \quad \zeta > 0. \end{aligned} \tag{A.29}$$

Далее, из (A.23), (A.24) и тождества $P_{l,l+1}F^{\times}_{1,j}(k)^* = 0$, $j = l, l+1$, следует соотношение

$$
\begin{aligned}
&P_{l,l+1}\big(A(k)F_{l,l+1}(k) - \lambda^\circ_l P_l - \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1}\big)F_{l,l+1}(k)\\
&\qquad = k\widetilde{\mathfrak{G}}^\circ_{1,l}F_{l,l+1}(k) + \lambda^\circ_l F^{\times}_{1,l}(k)F_{l,l+1}(k) + \lambda^\circ_{l+1}F^{\times}_{1,l+1}(k)F_{l,l+1}(k) + P_{l,l+1}\Xi_{1,l,l+1}(k)F_{l,l+1}(k),
\end{aligned}
$$

поэтому правую часть (A.28) можно записать как

$$
\begin{aligned}
&-P_{l,l+1}(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}\big(A(k)F_{l,l+1}(k) - \lambda^\circ_l P_l - \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1}\big)(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)\\
&\quad = -(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}k\widetilde{\mathfrak{G}}^\circ_{1,l}(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) + \mathcal{J}_1(k,\zeta) + \mathcal{J}_2(k,\zeta),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_1(k,\zeta) &\coloneqq -(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}P_{l,l+1}\\
&\qquad\qquad\times \big(\lambda^\circ_l F^{\times}_{1,l}(k)F_{l,l+1}(k) + \lambda^\circ_{l+1}F^{\times}_{1,l+1}(k)F_{l,l+1}(k) + \Xi_{1,l,l+1}(k)\big)\\
&\qquad\qquad\times (A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k),\\
\mathcal{J}_2(k,\zeta) &\coloneqq -(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}k\widetilde{\mathfrak{G}}^\circ_{1,l}\\
&\qquad\qquad\times \big((A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) - (\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)\big),\\
\|\mathcal{J}_1(k,\zeta)\| &\leqslant \big(\tfrac12 q(l)^2 + \zeta\big)^{-2}\big(8q(l)^2\widetilde{C}^2_{6,l} + 4q(l)^2\widetilde{C}_{7,l}\varkappa^{(>)} + \widetilde{C}_{9,l}\big)|k|^2, \quad |k|\leqslant\varkappa^{(>)}, \quad \zeta>0,\\
\|\mathcal{J}_2(k,\zeta)\| &\leqslant \big(\tfrac12 q(l)^2 + \zeta\big)^{-3}\widetilde{C}_{8,l}\widetilde{C}_{10,l}|k|^2, \qquad |k|\leqslant\varkappa^{(>)}, \quad \zeta>0.
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

При оценивании $\mathcal{J}_1(k,\zeta)$ мы использовали (2.7), (A.15), (A.20), (A.21), (A.23) и (A.27), а при оценивании $\mathcal{J}_2(k,\zeta)$ — (2.7), (A.25) и (A.29).

В итоге, мы получили следующий результат:

$$
\begin{aligned}
P_{l,l+1}(A(k)+\zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k) &= P_{l,l+1}(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}F_{l,l+1}(k)\\
&\quad - (\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}k\widetilde{\mathfrak{G}}^\circ_{1,l}(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}P_{l,l+1}F_{l,l+1}(k)\\
&\quad + \mathcal{J}_1(k,\zeta) + \mathcal{J}_2(k,\zeta), \qquad |k|\leqslant\varkappa^{(>)}, \quad \zeta>0,
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

где $\mathcal{J}_1(k,\zeta)$ и $\mathcal{J}_2(k,\zeta)$ удовлетворяют оценкам (A.30).

A.3. Аппроксимация оператора $P_{l,l+1}A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k)$, $l\in\Upsilon^{(1,>)}$. Для оператора $A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k)$ справедливо интегральное представление (см., например, [43, гл. III, § 3, п. 3])

$$
A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(A(k)+\zeta I)^{-1}A(k)F_{l,l+1}(k)\,d\zeta. \tag{A.32}
$$

Рассмотрим оператор $P_{l,l+1}A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k)$. Подставляя (A.31) в (A.32), запишем его следующим образом:

$$
P_{l,l+1}A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k) = I_1(k) + I_2(k) + \mathcal{J}_3(k),
$$

где

$$
I_1(k) \coloneqq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}P_{l,l+1}(\lambda^\circ_l P_l + \lambda^\circ_{l+1}P_{l+1} + \zeta I)^{-1}A(k)F_{l,l+1}(k)\,d\zeta,
$$

$$I_2(k) := -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2} P_{l,l+1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} k \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} P_{l,l+1} \times A(k) F_{l,l+1}(k)\, d\zeta,$$

$$\mathcal{J}_3(k) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\mathcal{J}_1(k,\zeta) + \mathcal{J}_2(k,\zeta)\big) A(k) F_{l,l+1}(k)\, d\zeta.$$

Начнём с рассмотрения $I_1(k)$. Применяя (A.15), (A.20), (A.21), (A.23), (A.24), представление

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} P_{l,l+1} d\zeta = (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} P_{l,l+1}$$

и соотношения $P_{l,l+1} F_{1,j}^\times(k)^* = 0$, $j = l, l+1$, имеем

$$\begin{aligned}
I_1(k) &= (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} P_{l,l+1} A(k) F_{l,l+1}(k) \\
&= \big((\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{1/2} P_{l,l+1} + (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} k \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ\big) F_{l,l+1}(k) + \mathcal{J}_4(k),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_4(k) := \lambda_l^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} F_{1,l}^\times(k) F_{l,l+1}(k) + \lambda_{l+1}^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} F_{1,l+1}^\times(k) F_{l,l+1}(k) + (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} P_{l,l+1} \Xi_{1,l,l+1}(k) F_{l,l+1}(k),$$

$$\|\mathcal{J}_4(k)\| \leqslant \big(4\sqrt{2} q(l) \widetilde{C}_{6,l}^2 + 2\sqrt{2} q(l) \widetilde{C}_{7,l} \varkappa^{(>)} + \sqrt{2} q(l)^{-1} \widetilde{C}_{9,l}\big) |k|^2, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}. \tag{A.33}$$

Далее, рассмотрим $I_2(k)$. Вычисляя интеграл и применяя (A.22), (A.25), а также равенство

$$(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1}) = P_{l,l+1} - \zeta(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} P_{l,l+1}$$

имеем

$$\begin{aligned}
I_2(k) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} k \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} P_{l,l+1} A(k) F_{l,l+1}(k)\, d\zeta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} k \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1}\, d\zeta \\
&\quad - (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{-1/2} k \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ + \mathcal{J}_5(k),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_5(k) := -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} k \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} \times \big(A(k) F_{l,l+1}(k) - \lambda_l^\circ P_l - \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1}\big)\, d\zeta,$$

$$\|\mathcal{J}_5(k)\| \leqslant \sqrt{2} q(l)^{-3} \widetilde{C}_{8,l} \widetilde{C}_{10,l} |k|^2. \tag{A.34}$$

Остаётся оценить $\mathcal{J}_3(k)$. Использование (A.30) даёт оценку

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}_3(k)\| &\leqslant \sqrt{2} q(l)^{-3}\big(8 q(l)^2 \widetilde{C}_{6,l}^2 + 4 q(l)^2 \widetilde{C}_{7,l} \varkappa^{(>)} + \widetilde{C}_{9,l}\big) \cdot 2 q(l)^2 |k|^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} q(l)^{-5} \widetilde{C}_{8,l} \widetilde{C}_{10,l} \cdot 2 q(l)^2 |k|^2 \\
&= 2\sqrt{2}\big(8 q(l) \widetilde{C}_{6,l}^2 + 4 q(l) \widetilde{C}_{7,l} \varkappa^{(>)} + q(l)^{-1} \widetilde{C}_{9,l}\big)|k|^2 + 3\sqrt{2} q(l)^{-3} \widetilde{C}_{8,l} \widetilde{C}_{10,l} |k|^2, \\
&\qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Мы получили следующий результат.

Предложение A.3. *Пусть $l \in \Upsilon^{(1,>)}$. При $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$ справедливо равенство*

$$P_{l,l+1} A(k)^{1/2} F_{l,l+1}(k) = \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k) F_{l,l+1}(k) + \mathcal{J}_3(k) + \mathcal{J}_4(k) + \mathcal{J}_5(k) F_{l,l+1}(k),$$

где $\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)$ *определён в* (2.14), *а* $\mathcal{J}_3(k)$, $\mathcal{J}_4(k)$, $\mathcal{J}_5(k)$ *удовлетворяют оценкам* (A.33), (A.34), (A.35).

A.4. Приближение для операторной экспоненты $e^{-i\tau A(k)^{1/2}}P_{l,l+1}$**,** $l \in \Upsilon^{(1,>)}$**.** В этом пункте мы хотим приблизить оператор $e^{-i\tau A(k)^{1/2}}P_{l,l+1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, с помощью $e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}$. Имеем

$$\begin{aligned}\big(&e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}\big)P_{l,l+1}\\ &= P_{l,l+1}\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k) - e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}\big)\\ &+ e^{-i\tau A(k)^{1/2}}(P_{l,l+1} - F_{l,l+1}(k)) + (F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1})e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k).\end{aligned} \tag{A.36}$$

В силу (A.12) последние два слагаемых допускают оценки

$$\|e^{-i\tau A(k)^{1/2}}(P_{l,l+1} - F_{l,l+1}(k))\| \leqslant \widetilde{C}_{11,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}, \tag{A.37}$$

$$\|(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1})e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k)\| \leqslant \widetilde{C}_{11,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}. \tag{A.38}$$

Далее,

$$P_{l,l+1}\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k) - e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}\big) = P_{l,l+1}e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}\Sigma(k,\tau), \tag{A.39}$$

где $\Sigma(k,\tau) := e^{i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}F_{l,l+1}(k)e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - P_{l,l+1}$. Справедливо равенство

$$\Sigma(k,\tau) = \Sigma(k,0) + \int_0^\tau \Sigma'(k,\tilde{\tau})d\tilde{\tau}. \tag{A.40}$$

Очевидно, $\Sigma(k,0) = F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}$, и в силу (A.12)

$$\|P_{l,l+1}e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}\Sigma(k,0)\| \leqslant \widetilde{C}_{11,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}. \tag{A.41}$$

Затем,

$$\Sigma'(k,\tau) := \frac{d\Sigma}{d\tau}(k,\tau) = -ie^{i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}\big(A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k) - \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}\big)F_{l,l+1}(k)e^{-i\tau A(k)^{1/2}}.$$

Применение предложения A.3 для оценки оператора

$$P_{l,l+1}\big(A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k) - \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}\big)F_{l,l+1}(k)$$

даёт

$$\left\|P_{l,l+1}e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}\int_0^\tau \Sigma'(k,\tilde{\tau})\,d\tilde{\tau}\right\| \leqslant \mathscr{C}_{2,l}|\tau||k|^2, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}. \tag{A.42}$$

Из (A.36)–(A.42) следует утверждение теоремы 2.5.

Список литературы

[1] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analisys for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[2] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[3] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[4] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Матем. сб., **115(157)**:2(6) (1981), 204–222.

[5] Жиков В. В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифференц. уравнения, **25**:1 (1989), 44–50.

[6] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal., **33**:5 (2002), 1166–1198.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.

[8] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.

[9] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ, **18**:6 (2006), 1–130.

[10] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.

[11] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.

[12] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ, **21**:1 (2009), 3–60.

[13] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom., **5**:4 (2010), 390–447.

[14] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.

[15] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.

[16] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237.

[17] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН, **71**:3(429) (2016), 27–122.

[18] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

[19] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, J. Spectr. Theory, **11**:2 (2021), 587–660.

[20] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523.

[21] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Differ. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.

[22] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в* $\mathbb{R}^d$*: точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

[23] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal., **101**:16 (2022), 5582–5614.

[24] Brahim-Otsmane S., Francfort G. A., Murat F., *Correctors for the homogenization of the wave and heat equations*, J. Math. Pures Appl., **71**:3 (1992), 197–231.

[25] Brassart M., Lenczner M., *A two scale model for the periodic homogenization of the wave equation*, J. Math. Pures Appl., **93**:3 (2010), 474–517.

[26] Casado-Diaz J., Couce-Calvo J., Maestre F., Martin-Gomez J. D., *Homogenization and correctors for the wave equation with periodic coefficients*, Math. Models Methods Appl. Sci. **24**:7 (2014), 1343–1388.

[27] Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических гиперболических систем при учёте корректора по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме*, черновик, (2018), http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.15658.08643.

[28] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров*, Функ. анализ и его прил., **57**:4 (2023), 123–129.

[29] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров*, препринт, готовится к печати.

[30] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, УМН, **78**:6 (2023), 47–178.

[31] Lin F., Shen Zh., *Uniform boundary controllability and homogenization of wave equations*, J. Eur. Math. Soc., **24**:9 (2021), 3031–3053.

[32] Dorodnyi M. A., *High-frequency homogenization of multidimensional hyperbolic equations*, Appl. Anal., (2024), https://doi.org/10.1080/00036811.2024.2358136.

[33] Djakov P., Mityagin B., *Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials*, Dynamics of PDE, **6**:2 (2009), 95–165.

[34] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики.* Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М, 1982.

[35] Dorodnyi M. A. *High-energy homogenization of a multidimensional nonstationary Schrödinger equation*, Russ. J. Math. Phys., **30**:4 (2023), 480–500.

[36] Brown B. M., Eastham M. S. P., Schmidt K. M., *Periodic differential operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. **230**, Birkhäuser, Basel, 2013.

[37] Савчук А. М., Шкаликов А. А., *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897–912.

[38] Barletti L., Ben Abdallah N., *Quantum transport in crystals: effective mass theorem and $k \cdot p$ Hamiltonians*, Comm. Math. Phys., **307**:3 (2011), 567–607.

[39] Veliev O., *Multidimensional periodic Schrödinger operator. Perturbation theory and applications*, Springer Tracts in Modern Physics, vol. **263**, Springer, Cham, 2015.

[40] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Differ. Equ., **352** (2023), 153–188.

[41] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Homogenization of nonlocal convolution type operators: approximation for the resolvent with corrector*, preprint, (2023), arXiv:2311.16574 [math.AP].

[42] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On the homogenization of nonlocal convolution type operators*, Russ. J. Math. Phys., **31**:1 (2024), 137–145.

[43] под ред. Крейна С.Г., *Функциональный анализ (серия “Справочная математическая библиотека”)*, Наука, М., 1972.