Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 14 февраля 2025 г. Представлено Т. А. Суслиной.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

УДК 517.98

Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме

А. А. МИШУЛОВИЧ

Аннотация. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами вида $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}\widetilde{g}(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\nabla + \varepsilon^{-2}V(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$. Известно, что спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет зонную структуру: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон). Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. Для малого $\varepsilon > 0$ изучается поведение резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ вблизи регулярного края лакуны. В работе получена аппроксимация данной резольвенты в "энергетической" норме с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$.

§ 1. Введение

1.1. **Усреднение в пределе малого периода.** Работа относится к теории усреднения (гомогенизации). Задачи об усреднении решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в пределе малого периода представляют значительный интерес как в теоретическом плане, так и для приложений. Задачам гомогенизации посвящена обширная литература. Прежде всего укажем книги [1, 2, 3].

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ решетку $\mathbb{Z}^d$ и пусть $\Omega = (0,1)^d$ — элементарная ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$. Для функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{x})$, $\varepsilon > 0$. Если функция φ является $\mathbb{Z}^d$–периодической, то при малом ε функция φ^ε быстро осциллирует; теория усреднения изучает дифференциальные уравнения с такими коэффициентами.

Обсудим типичную задачу теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим эллиптический оператор $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla. \tag{1.1}$$

Также будем использовать запись

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} := -i\nabla.$$

Здесь $g(\boldsymbol{x})$ — симметричная матрица-функция размера $d \times d$ с вещественными элементами; предполагается, что $g(\boldsymbol{x})$ положительно определена, ограничена и $\mathbb{Z}^d$–периодична. Строгое

Key words and phrases. Периодические дифференциальные операторы, спектральная лакуна, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Исследование А.А. Мишуловича выполнено в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).

определение оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму. Пусть $u_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ — обобщенное решение эллиптического уравнения

$$- \operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) + \varkappa^2 u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\varkappa > 0$. Базовый результат теории усреднения: при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится (в некотором смысле) к решению u_0 "усредненного" уравнения

$$- \operatorname{div} g^0 \nabla u_0(\boldsymbol{x}) + \varkappa^2 u_0(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ называется *эффективным оператором* для $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. В теории усреднения применительно к уравнению (1.2) изучаются различные вопросы: нахождение эффективной матрицы g^0, характер сходимости u_ε к u_0, оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$, построение дальнейших членов асимптотического разложения решения u_ε по степеням ε. Поскольку $u_\varepsilon = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} f$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ при малом ε.

Процедура нахождения эффективной матрицы хорошо известна. Для описания g^0 нужно рассмотреть вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Пусть $\Phi_j(\boldsymbol{x})$ есть $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\boldsymbol{x})(\nabla \Phi_j(\boldsymbol{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \Phi_j(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Тогда g^0 — это $(d \times d)$-матрица со столбцами

$$\mathbf{g}_j^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\boldsymbol{x})(\nabla \Phi_j(\boldsymbol{x}) + \mathbf{e}_j)\, d\boldsymbol{x}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Выясняется, что эффективная матрица положительно определена.

1.2. **Операторные оценки погрешности.** В работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [4, 5, 6, 7] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения (вариант спектрального метода). При этом явление усреднения трактовалось как спектральный пороговый эффект на краю спектра эллиптического оператора. В рамках этого подхода в [4, 5] была установлена оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.5}$$

где u_ε — решение уравнения (1.2), а u_0 — решение усредненного уравнения (1.3). Оценка (1.5) точна по порядку; постоянная C явно контролируется в терминах данных задачи. В операторных терминах (1.5) означает, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$, причем

$$\left\| (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

В [6] была получена более точная аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$:

$$\left\| (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.6}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)$, называемый *корректором*, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon) = \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) + \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)^*, \quad \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) = \sum_{l=1}^d [\Phi_l^\varepsilon] \frac{\partial}{\partial x^l} (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1}, \tag{1.7}$$

где $\Phi_l(\boldsymbol{x})$ есть $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение задачи (1.4).

В работе [7] была найдена аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ по так называемой энергетической норме, то есть по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\left\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}-(\widehat{\mathcal{A}}^0+\varkappa^2 I)^{-1}-\varepsilon\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon. \tag{1.8}$$

Обратим внимание, что корректоры в (1.6) и (1.8) различны, то есть, вид корректора зависит от типа операторной нормы. Стандартный корректор, хорошо известный в теории усреднения, — это $\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)$.

К усреднению параболических уравнений теоретико-операторный подход применялся в работах [8, 9, 10, 11]. В [8, 9] была установлена оценка

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon t}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 t}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}},\quad t>0,\ \varepsilon>0.$$

В [10] получена более точная аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon t}$ при учете корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ (при фиксированном t); в [11] найдена аппроксимация экспоненты по энергетической норме.

В [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] изучались также более общие операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon=-\operatorname{div}\widetilde{g}^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla+\varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\boldsymbol{x}), \tag{1.9}$$

где $\widetilde{g}(\boldsymbol{x})$ — положительно определенная и ограниченная матрица–функция с вещественными элементами, а $V(\boldsymbol{x})$ — вещественная функция. Предполагалось, что $\widetilde{g}(\boldsymbol{x})$ и $V(\boldsymbol{x})$ $\mathbb{Z}^d$–периодичны и $V(\boldsymbol{x})$ принадлежит классу $L_q(\Omega)$ с подходящим q. Будем считать, что край спектра соответствующего оператора $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1=-\operatorname{div}\widetilde{g}(\boldsymbol{x})\nabla+V(\boldsymbol{x})$ есть точка $\lambda_0=0$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ допускает удобную факторизацию

$$\mathcal{A}=-\omega(\boldsymbol{x})^{-1}\operatorname{div}g(\boldsymbol{x})\nabla\omega(\boldsymbol{x})^{-1},\quad g(\boldsymbol{x})=\widetilde{g}(\boldsymbol{x})\omega^2(\boldsymbol{x}).$$

Здесь $\omega(\boldsymbol{x})$ — положительное $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div}\widetilde{g}(\boldsymbol{x})\nabla\omega(\boldsymbol{x})+V(\boldsymbol{x})\omega(\boldsymbol{x})=0, \tag{1.10}$$

подчиненное условию нормировки $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)}=1$. Тогда оператор (1.9) запишется в факторизованном виде

$$\mathcal{A}_\varepsilon=-(\omega^\varepsilon)^{-1}\operatorname{div}g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}=(\omega^\varepsilon)^{-1}\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1}, \tag{1.11}$$

где $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор (1.1). Для оператора (1.11) уже не удается найти такой оператор с постоянными коэффициентами, к резольвенте которого сходилась бы резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}$. Однако, некоторую “хорошую” аппроксимацию все же можно получить. В [5] было показано, что

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}-[\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^0+\varkappa^2 I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon. \tag{1.12}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор для оператора (1.1) при $g=\widetilde{g}\omega^2$, а $[\omega^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x})$. Аппроксимация теперь содержит быстро осциллирующие множители по краям от резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$.

В работе [6] аппроксимация (1.12) была уточнена за счет учета корректора

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}-[\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^0+\varkappa^2 I)^{-1}[\omega^\varepsilon]-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon^2.$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)=\mathcal{K}_1(\varepsilon)+\mathcal{K}_1(\varepsilon)^*$, $\mathcal{K}_1(\varepsilon)=[\omega^\varepsilon]\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)[\omega^\varepsilon]$, а оператор $\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)$ определен в (1.7). В [7] было получено приближение по энергетической норме

$$\left\|(\omega^\varepsilon)^{-1}\Big((\mathcal{A}_\varepsilon+\varkappa^2 I)^{-1}-[\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^0+\varkappa^2 I)^{-1}[\omega^\varepsilon]-\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon)\Big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon.$$

Отметим, что в цитированных работах [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] аппроксимации для резольвенты были найдены не только для операторов вида (1.1), (1.9), но для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка.

Поясним метод на примере более простого оператора (1.1). *Масштабным преобразованием* изучение оператора $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ при малом ε сводится к изучению поведения резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}} + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}$. Здесь $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_1 = -\operatorname{div} g(\boldsymbol{x})\nabla$. Аналогично, изучение оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon t}$ при малом ε сводится к изучению экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ при большом $\tau = \varepsilon^{-2}t$. С помощью теории Флоке–Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$ действует в $L_2(\Omega)$ и задается дифференциальным выражением $(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})^* g(\boldsymbol{x})(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})$ при периодических граничных условиях. Параметр $\boldsymbol{\xi}$ называют *квазиимпульсом.* Спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$ дискретен. Пусть $E_1(\boldsymbol{\xi})$ — первое собственное значение и $\varphi_1(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})$ — первая собственная функция оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$. Выясняется, что поведение резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}+\varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}$ либо экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ можно описать в терминах "пороговых" характеристик, то есть, спектральных характеристик оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ на краю спектра (имеются в виду асимптотики для $E_1(\boldsymbol{\xi})$ и $\varphi_1(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})$ при $|\boldsymbol{\xi}| \to 0$). В частности, эффективная матрица g^0 получается из асимптотики первой зонной функции $E_1(\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}| \to 0$: $E_1(\boldsymbol{\xi}) \sim \langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle$. Таким образом, эффект усреднения можно трактовать как пороговый эффект на краю спектра периодического оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических и параболических уравнений в $\mathbb{R}^d$ (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [12], [13], [14]; см. также обзор [15].

1.3. **Усреднение на краю внутренней спектральной лакуны.** Ясное понимание порогового характера эффекта усреднения влечет следующий естественный вопрос. Спектр периодического оператора $\mathcal{A}$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать с краями внутренних лакун аналоги задач усреднения? Этот вопрос для эллиптических уравнений изучался в работах [16, 17] в одномерном случае и в [18, 19] в случае произвольной размерности d.

Пусть $\nu > 0$ — невырожденный (для определенности) правый край внутренней лакуны в спектре оператора $\mathcal{A}$. Для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ этот край перейдет в точку $\varepsilon^{-2}\nu$, то есть в область высоких энергий. Вместо (1.2) рассматривается уравнение

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Вопрос о поведении решения u_ε при $\varepsilon \to 0$ сводится к изучению оператора $(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$, а после масштабного преобразования — к изучению резольвенты $(\mathcal{A} - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$. Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора $\mathcal{A}$ на данном краю лакуны.

Сформулируем результат в одномерном случае. Рассматривается оператор вида (1.9) при $d = 1$. Считаем для определенности, что ν — правый край "периодической" лакуны в спектре оператора $\mathcal{A}$. Выясняется, что с краем лакуны ν связан эффективный оператор $\mathcal{A}^0_\nu = -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}$, $b_\nu > 0$. Справедлива оценка

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon](\mathcal{A}^0_\nu + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon]\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.13}$$

Здесь b_ν — коэффициент в асимптотике зонной функции $\lambda(\xi)$ (отвечающей зоне, для которой точка ν является левым краем): $\lambda(\xi) - \nu \sim b_\nu \xi^2$ при $|\xi| \to 0$, а $\varphi_0(x)$ — вещественное периодическое решение уравнения $\mathcal{A}\varphi_0 = \nu\varphi_0$, нормированное в $L_2(0,1)$.

Оценка (1.13) была установлена в [16] в случае $V(x) = 0$. В [18] аналог оценки (1.13) получен для оператора вида (1.9) в произвольной размерности $d \geqslant 1$. В работе [17] при $d = 1$ установлена более точная аппроксимация резольвенты $\bigl(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I\bigr)^{-1}$

с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учете корректора, а в [19] более точная аппроксимация резольвенты найдена в случае произвольной размерности.

Задача об аппроксимации резольвенты на краю лакуны в энергетической норме рассматривалась в работе [20] в случае $d = 1$. Мы изучаем многомерную задачу усреднения для эллиптического уравнения на краю спектральной лакуны оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$.

Усреднение параболического уравнения на краю внутренней спектральной лакуны рассматривалось в работе [21] в одномерном случае и в [22] для произвольной размерности.

1.4. **Постановка задачи.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ вида (1.9). Считаем, что край спектра оператора $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$ есть точка $\lambda_0 = 0$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ можно представить в факторизованном виде (1.11). Введем масштабное преобразование — семейство унитарных операторов T_ε в $L_2(\mathbb{R}^d)$: $(T_\varepsilon u)(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \boldsymbol{x})$, $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что справедливо соотношение

$$\mathcal{A}_\varepsilon = T_\varepsilon^* (\varepsilon^{-2} \mathcal{A}) T_\varepsilon. \tag{1.14}$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет зонную структуру: $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} [\nu_l, \mu_l]$. В силу (1.14) спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет вид: $\sigma(\mathcal{A}_\varepsilon) = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} [\varepsilon^{-2}\nu_l, \varepsilon^{-2}\mu_l]$. Предположим, что спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет внутреннюю лакуну (λ_-, λ_+); тогда спектр оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет лакуну $(\varepsilon^{-2}\lambda_-, \varepsilon^{-2}\lambda_+)$.

Основной объект изучения — резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon - \left(\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2\right) I)^{-1}$ (или резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon - \left(\varepsilon^{-2}\lambda_- + \varkappa^2\right) I)^{-1}$). Здесь $\varkappa$ — положительная постоянная такая, что точка $\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2$ (или $\varepsilon^{-2}\lambda_- + \varkappa^2$) лежит в лакуне оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ при $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Цель работы — получить аппроксимацию резольвенты в так называемой энергетической норме, то есть по норме операторов, действующих из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в *энергетическое пространство* $\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^d) : \left(\omega^\varepsilon\right)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ (это гильбертово пространство относительно нормы $\|u\|_{\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)} := \left\| \left(\omega^\varepsilon\right)^{-1} u \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$). Здесь ω — положительное $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение уравнения (1.10).

Мы находим аппроксимацию резольвенты в энергетической норме с погрешностью порядка ε. Аппроксимация дается через резольвенту эффективного оператора и трехчленный корректор.

1.5. **Обозначения.** Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$. Для положительной постоянной r через $\mathbb{B}^\circ_r(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$, $\mathbb{B}_r(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$, $\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in \mathbb{R}^d$, обозначим открытый и замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$, соответственно, радиуса r и с центром в точке $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$. Через $\mathbb{1}_Y$ мы обозначаем характеристическую функцию множества Y. Через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим стандартные L_p-классы в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$; через $\|\cdot\|_p$ — норму в L_p–классе. Для линейного ограниченного оператора $T : L_2 \longrightarrow L_2$ через $\|T\|$ обозначим стандартную операторную норму. Для измеримой функции f через $[f]$ или $[f(\boldsymbol{x})]$ обозначим оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями; через $H^1(\mathbb{R}^d)$ — стандартный класс Соболева; $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ — класс функций $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, для которых произведение $f\varphi$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^d)$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $\Omega := (0,1)^d$ — ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$; $\widetilde{H}^1(\Omega)$ — подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Далее, пусть A — самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве. В этом случае через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаем спектр и резольвентное множество оператора A, соответственно. Если ς — произвольное борелевское множество на $\mathbb{R}$, то $\mathcal{E}_A(\varsigma)$ — спектральный проектор оператора A, отвечающий множеству ς.

Пусть Φ — преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$:

$$(\Phi u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}\rangle} u(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d).$$

Символ $\mathbf{1}$ означает единичную $(d \times d)$–матрицу. Кроме того, $\mathrm{D}_l := -i\frac{\partial}{\partial x^l}$, $l = 1, \dots, d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_d)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Т. А. Суслиной за постановку задачи и внимание к работе и В. А. Слоущу за полезные обсуждения.

§ 2. Спектральное разложение периодического оператора в $L_2(\mathbb{R}^d)$

.

2.1. Определение оператора $\mathcal{A}$. Факторизация. Рассмотрим самосопряженный равномерно эллиптический оператор $\mathcal{A}$ (аналогичный тому, что был определен во введении), порожденный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = \mathbf{D}^* \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D} + V(\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

где $\widetilde{g}$ — симметричная измеримая $(d \times d)$–матрица-функция с вещественными элементами, а V — вещественная функция, причем выполнены условия

$$\begin{gathered} c_0 \mathbf{1} \leqslant \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant c_1 \mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \\ \widetilde{g}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = \widetilde{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} V \in L_{\mathfrak{q}}(\Omega), \quad 2\mathfrak{q} > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad \mathfrak{q} = 1 \text{ при } d = 1, \\ V(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = V(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Точное определение оператора $\mathcal{A}$ дается через полуограниченную замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратичную форму

$$a[u, u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \nabla u(\boldsymbol{x}), \nabla u(\boldsymbol{x}) \rangle + V(\boldsymbol{x}) |u(\boldsymbol{x})|^2 \right) d\boldsymbol{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

За счет добавления к $V(\boldsymbol{x})$ подходящей константы можно считать, что нижним краем спектра оператора $\mathcal{A}$ является точка $\nu_1 = 0$:

$$\inf \sigma(\mathcal{A}) = 0. \tag{2.5}$$

При условиях (2.2), (2.3) и (2.5) существует (слабое) $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение $\omega(\boldsymbol{x})$ уравнения (см. [5, гл. 6, §1])

$$\mathbf{D}^* \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D} \omega(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x}) \omega(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Решение ω определено с точностью до постоянного множителя, который можно фиксировать так, что $\omega(\boldsymbol{x}) > 0$ и

$$\int\limits_{\Omega} \omega^2(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = 1. \tag{2.6}$$

При этом $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ и обладает свойством

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega(\boldsymbol{x}) \leqslant \omega_1 < \infty. \tag{2.7}$$

Кроме того, $\omega \in C^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$ и ω является мультипликатором в $H^1(\mathbb{R}^d)$, а также в $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Подстановка $u = \omega v$ преобразует форму (2.4) к виду

$$a[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\boldsymbol{x}) \left\langle \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \nabla v(\boldsymbol{x}), \nabla v(\boldsymbol{x}) \right\rangle d\boldsymbol{x}, \quad v = \omega^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.8}$$

Тогда выражение (2.1) запишется в факторизованном виде

$$\mathcal{A} = \omega^{-1} \mathbf{D}^* g \, \mathbf{D} \omega^{-1}, \quad g := \widetilde{g} \omega^2. \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. *Выражение (2.9) можно принять за определение оператора $\mathcal{A}$, тогда можно считать, что ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Именно это определение и будет принято за исходное. Ниже считаем, что $\mathcal{A}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный квадратичной формой (2.8), где $\widetilde{g}$ — симметричная матрица-функция с вещественными элементами, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Вернуться к записи вида (2.1) можно, полагая $V(\boldsymbol{x}) = -\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D}^* \widetilde{g}\,(\boldsymbol{x})\, \mathbf{D} \omega(\boldsymbol{x})$. Получающийся при этом потенциал V может оказаться сингулярной обобщенной функцией.*

2.2. **Спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$.** Введем обозначения, связанные с факторизованной записью оператора $\mathcal{A}$. Обозначим

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{O}) := \{ f : \ \omega^{-1} f \in H^1(\mathcal{O}) \}, \quad \mathcal{O} = \Omega \text{ или } \mathbb{R}^d, \quad \|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{O})} := \|\omega^{-1} f\|_{H^1(\mathcal{O})},$$
$$\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) := \{ f : \ \omega^{-1} f \in \widetilde{H}^1(\Omega) \}.$$

Опишем спектральное разложение оператора $\mathcal{A}$. Мы следуем работам [23], [24], а также [25]. Нам понадобится преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$. Изначально оно определяется на функциях из класса Шварца $v \in S(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) = (\mathcal{U} v)(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n} \rangle} v(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Функция $\widetilde{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = \widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = e^{-i \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle} \widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{b} \in (2\pi \mathbb{Z})^d. \tag{2.12}$$

Восстановить v по $\widetilde{v}$ можно при помощи соотношения

$$v(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{U}^{-1} \widetilde{v})(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_F \widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) e^{i \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \rangle} \, d\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.13}$$

Здесь F — фундаментальное множество решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$ (т.е. фактор–множество $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$, реализованное как измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$). Интеграл в (2.13) не зависит от конкретного выбора фундаментального множества F.

Любая гладкая функция $\widetilde{v}$, удовлетворяющая условиям (2.11) и (2.12) может быть представлена в виде (2.10). Пополняя множество таких функций по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\widetilde{u}, \widetilde{v})_{\mathcal{K}} = \int\limits_F d\boldsymbol{\xi} \int\limits_\Omega d\boldsymbol{x} \; \widetilde{u}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \overline{\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})}, \tag{2.14}$$

получаем гильбертово пространство $\mathcal{K}$. Его можно рассматривать как прямой интеграл гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$:

$$\mathcal{K} = \int\limits_F \oplus L_2(\Omega) d\boldsymbol{\xi} = L_2(F, L_2(\Omega)).$$

Благодаря равенству $\int_F \int_\Omega |\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |v(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x}$ преобразование Гельфанда (2.10) продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{K}.$$

В $L_2(\Omega)$ введем семейство квадратичных форм

$$a(\boldsymbol{\xi})[u, u] = \int\limits_\Omega \langle g(\boldsymbol{x})(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}), (\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\rangle d\boldsymbol{x}, \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.15}$$

Параметр $\boldsymbol{\xi}$ будем называть *квазиимпульсом.* Порожденный формой (2.15) самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$ обозначим через $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$. Можем формально записать оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ в виде

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) = \omega(\boldsymbol{x})^{-1}(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})^* g(\boldsymbol{x})(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})\omega(\boldsymbol{x})^{-1}.$$

Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ периодический оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\,\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_F \oplus \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}. \tag{2.16}$$

Остановимся более подробно на данном разложении. Запись (2.16) означает, что если мы рассмотрим функцию $v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$, тогда $\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \cdot) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ при почти всех $\boldsymbol{\xi} \in F$, выполнено

$$\int\limits_F a(\boldsymbol{\xi})[\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \cdot), \widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \cdot)] \, d\boldsymbol{\xi} < \infty,$$

и имеет место равенство

$$a[v, v] = \int\limits_F a(\boldsymbol{\xi})[\widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \cdot), \widetilde{v}(\boldsymbol{\xi}, \cdot)] \, d\boldsymbol{\xi}. \tag{2.17}$$

Обратно, если $\widetilde{v} \in L_2\big(F; \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)\big)$, то $v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ и выполнено (2.17). Кроме того, для операторнозначной функции $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ справедливо (см. [25, гл. I, §4]) следующее функциональное соотношение:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}) = V_{\boldsymbol{b}}^{-1} \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) V_{\boldsymbol{b}}, \quad \boldsymbol{b} \in (2\pi\mathbb{Z})^d, \tag{2.18}$$

где $V_{\boldsymbol{b}} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — унитарный оператор, действующий по правилу

$$\big(V_{\boldsymbol{b}} u\big)(\boldsymbol{x}) = e^{i\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\rangle} u(\boldsymbol{x}).$$

Замечание 2.2. *Следуя* [25, гл. I, §4], *отметим, что если задать измеримую операторнозначную функцию* $B(\boldsymbol{\xi})$ ($B(\boldsymbol{\xi})$ *— оператор в* $L_2(\Omega)$), *удовлетворяющую функциональному соотношению, аналогичному* (2.18), *то оператор* B *в* $L_2(\mathbb{R}^d)$, *определенный формулой*

$$\mathcal{U}B\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_F \oplus B(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi},$$

будет периодическим оператором с решеткой периодов $\mathbb{Z}^d$. *Таким образом, достаточно задать семейство* $B(\boldsymbol{\xi})$ *на некотором фундаментальном множестве* F *решетки* $(2\pi\mathbb{Z})^d$, *а на остальные* $\boldsymbol{\xi}$ *продолжить по тождеству, аналогичному* (2.18).

Далее докажем несколько полезных свойств преобразования Гельфанда. Для функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и функции $\Upsilon \in L_2(\Omega)$ обозначим

$$\big(\mathcal{U}_\Upsilon f\big)(\boldsymbol{\xi}) := \Big(\big(\mathcal{U} f\big)(\boldsymbol{\xi}, \cdot), \Upsilon\Big)_{L_2(\Omega)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.19}$$

Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца и унитарности оператора $\mathcal{U}$ вытекает следующее соотношение.

Замечание 2.3. *Справедлива оценка*

$$\left\|\mathcal{U}_\Upsilon f\right\|_{L_2(F)} \leqslant \|\Upsilon\|_{L_2(\Omega)}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Для $\mathbb{Z}^d$–периодической функции $\Upsilon \in L_\infty(\Omega)$ рассмотрим оператор $\mathcal{U}_\Upsilon$ как оператор из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Установим связь $\mathcal{U}_\Upsilon$ с преобразованием Фурье Φ.

Предложение 2.4. *Для $\mathbb{Z}^d$–периодической функции $\Upsilon \in L_\infty(\Omega)$ справедливо*

$$\mathcal{U}_\Upsilon f = \Phi[\overline{\Upsilon}]f, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть $f \in S(\mathbb{R}^d)$, тогда из определения (2.10) и $\mathbb{Z}^d$–периодичности функции Υ следует, что

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_\Upsilon f)(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_\Omega (\mathcal{U}f)(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\overline{\Upsilon(\boldsymbol{x})}\,d\boldsymbol{x} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_\Omega e^{-i\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}\rangle}\overline{\Upsilon(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})\,d\boldsymbol{x}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_\Omega e^{-i\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}\rangle}\overline{\Upsilon(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})\,d\boldsymbol{x} = \Phi\big([\overline{\Upsilon}]f\big)(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

По непрерывности данное равенство распространяется на всё $L_2(\mathbb{R}^d)$, откуда и следует искомое тождество (2.20). $\square$

Замечание 2.5. *Очевидно, в условиях предложения 2.4 справедливо неравенство*

$$\left\|\Phi[\overline{\Upsilon}]f\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Upsilon\|_{L_\infty(\Omega)}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.21}$$

Все операторы $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ имеют дискретный спектр. Пусть $E_k(\boldsymbol{\xi})$, $k\in\mathbb{N}$, — последовательные собственные значения оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$, занумерованные с учетом кратностей. Таким образом,

$$E_1(\boldsymbol{\xi}) \leqslant E_2(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \dots \leqslant E_k(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \dots, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,$$

$$\sigma(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{E_k(\boldsymbol{\xi})\}.$$

Функции $E_k(\boldsymbol{\xi})$, $k\in\mathbb{N}$, называют "зонными функциями". Зонные функции непрерывны и периодичны с решеткой $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Пусть $\varphi_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})$ — ортонормированные собственные функции оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$. Они $\mathbb{Z}^d$–периодические по $\boldsymbol{x}$, а функции $e^{i\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\varphi_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})$ можно выбрать $(2\pi\mathbb{Z})^d$–периодическими по $\boldsymbol{\xi}$.

Далее, через $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ обозначим d–мерный тор с индуцированной $\mathbb{R}^d$–метрикой. Помимо полубесконечной лакуны в спектре оператора $\mathcal{A}$ также могут открываться внутренние лакуны. Пусть для некоторого $s\in\mathbb{N}$ выполнено

$$\lambda_- = \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d} E_s(\boldsymbol{\xi}) < \min_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d} E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_+. \tag{2.22}$$

В этом случае справедливы соотношения:

$$\sigma(\mathcal{A})\cap(\lambda_-,\lambda_+) = \varnothing, \quad \lambda_-,\lambda_+\in\sigma(\mathcal{A}).$$

Примем обычные (ср. [23], [24]) условия регулярности левого и правого края лакуны (λ_-,λ_+).

Для удобства введем обозначение $s_+ := s+1$ и $s_- := s$. Заметим, что данные условия не обязаны выполняться одновременно.

Условие 2.6. *Будем говорить, что правый край лакуны (λ_-,λ_+) регулярен, если выполнено следующее:*

(1) *Минимум зонной функции $E_{s_+}(\cdot)$ достигается лишь в конечном числе точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(+)}\in\mathbb{T}^d$, $j = 1,\dots,m_+$, каждая из которых есть точка невырожденного минимума функции $E_{s_+}(\cdot)$.*

(2) *Выполнено* $\min_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d} E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}) > \lambda_+$.

Условие 2.7. *Будем говорить, что левый край лакуны* (λ_-, λ_+) *регулярен, если выполнено следующее*:

(1) *Максимум зонной функции* $E_{s_-}(\cdot)$ *достигается лишь в конечном числе точек* $\boldsymbol{\xi}_j^{(-)} \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m_-$, *каждая из которых есть точка невырожденного максимума функции* $E_{s_-}(\cdot)$.

(2) *Выполнено* $\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d} E_{s-1}(\boldsymbol{\xi}) < \lambda_-$.

В силу условия регулярности число $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ является простым собственным значением оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ в некоторых окрестностях точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$. Отсюда следует, что в некоторых малых окрестностях точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$, функция $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ вещественно аналитична. Условимся считать, что для точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$ принята реализация $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)} \in \widetilde{\Omega}$, $j = 1, \dots, m_\pm$, где $\widetilde{\Omega} = [-\pi, \pi)^d$ — центральная зона Бриллюэна для решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Также предполагаем, что упомянутые выше окрестности точек $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$ реализованы открытыми шарами $\mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$ в $\mathbb{R}^d$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Не умаляя общности, можем считать, что точки $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$, и соответствующие окрестности $\mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$ лежат строго внутри ячейки $\widetilde{\Omega}$.

Рассмотрим точку экстремума $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)} \in \widetilde{\Omega}$, $j = 1, \dots, m_\pm$. В силу условия 2.6 (2.7 для s_-) для функции $E_{s_\pm}$ в окрестности $\mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$ справедливо разложение

$$\pm(E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_\pm) = b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}) + O(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}|^3), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}). \tag{2.23}$$

Здесь $b_j^{(\pm)}$, $j = 1, \dots, m_\pm$, — положительно определенная квадратичная форма в $\mathbb{R}^d$; при достаточно малом δ и при всех $j = 1, \dots, m_\pm$ справедливы оценки

$$2c_*|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}|^2 \leqslant b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}) \leqslant C_*|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < 2c_* \leqslant C_* < \infty, \tag{2.24}$$

$$\left|\pm(E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_\pm) - b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})\right| \leqslant \frac{b_j^{(\pm)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})}{2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}). \tag{2.25}$$

Замечание 2.8. *Заметим, что из разложения* (2.23) *и неравенств* (2.24) *и* (2.25) *следуют оценки*

$$c_*|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}|^2 \leqslant \pm(E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_\pm) \leqslant \frac{3}{2}C_*|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}). \tag{2.26}$$

Введем обозначения

$$d_0^{(+)} = \min_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d} E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+, \quad d_0^{(-)} = \lambda_- - \max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d} E_{s-1}(\boldsymbol{\xi}).$$

В силу непрерывности зонных функций можно выбрать число $t_0^{(\pm)} > 0$ так, чтобы

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_+ + \frac{d_0^{(+)}}{3}, \lambda_+ + \frac{2d_0^{(+)}}{3}\right) \cap \sigma(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})) = \varnothing, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}_{t_0^{(+)}}(\boldsymbol{\xi}_j^{(+)}), \quad j = 1, \dots, m_+, \\ &\left(\lambda_- - \frac{2d_0^{(-)}}{3}, \lambda_- - \frac{d_0^{(-)}}{3}\right) \cap \sigma(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})) = \varnothing, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}_{t_0^{(-)}}(\boldsymbol{\xi}_j^{(-)}), \quad j = 1, \dots, m_-. \end{aligned} \tag{2.27}$$

При этом выбираем $t_0^{(\pm)}$ так, чтобы $t_0^{(\pm)} \leqslant \delta$.

Пусть $F_+(\boldsymbol{\xi})$ (соответственно, $F_-(\boldsymbol{\xi})$) — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ для промежутка $[\lambda_+, \lambda_+ + d_0^{(+)}/3]$ (соответственно, $[\lambda_- - d_0^{(-)}/3, \lambda_-]$). Также введем обозначение $F_\pm^\perp(\boldsymbol{\xi}) := I - F_\pm(\boldsymbol{\xi})$; это спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ для множества $[0, \lambda_-] \cup [\lambda_+ + d_0^{(+)}/3, \infty)$ (соответственно, $[0, \lambda_- - d_0^{(-)}/3] \cup [\lambda_+, \infty)$).

Замечание 2.9. *Заметим, что собственное значение* $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ *является простым при* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}_{t_0^{(\pm)}}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$, $j = 1, \dots, m_\pm$; *с учетом* (2.27) *можем заключить, что оператор* $F_\pm(\boldsymbol{\xi})$ *является ортогональным проектором на одномерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению* $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$.

Следуя [19], опишем свойства соответствующей собственной функции $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$. Функцию $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ можно выбрать измеримой по паре аргументов $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$, а также вещественно аналитической по $\boldsymbol{\xi}$ в $\mathbb{B}_\delta^\circ(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$, $j = 1, \dots, m_\pm$, со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$.

При необходимости уменьшая δ, можем считать, что $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ и $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \cdot)$ аналитически продолжены на комплексные шары $\mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$, $j = 1, \dots, m_\pm$, радиуса δ с центрами в точках $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$. Однако при данном продолжении L_2–нормировка функции $\varphi_{s_\pm}$ может не сохраняться.

Далее, заметим, что функция $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ является $\mathbb{Z}^d$–периодическим решением уравнения

$$\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}\right)^* g(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) = E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}) \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}). \tag{2.28}$$

Уравнение (2.28) понимается в слабом смысле, то есть $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \cdot) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ и удовлетворяет тождеству

$$\int_\Omega \left\langle g(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}), \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \zeta(\boldsymbol{x}) \right\rangle d\boldsymbol{x}$$
$$= E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}) \int_\Omega \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \overline{\zeta(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}, \quad \zeta \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega). \tag{2.29}$$

Функцию $E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})$ и решение $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ можно аналитически продолжить в некоторый комплексный шар $\mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$, $j = 1, \dots, m_\pm$, с центром в точке $\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$ так, что уравнение (2.28) сохранит свою силу. Разделяя в (2.28) вещественную и мнимую части, получаем систему уравнений с одинаковыми диагональными главными частями. В [26, теорема 2.1 из гл. VII] для решений таких систем при условиях Дирихле получены оценки максимума модуля. Однако вывод этих оценок без существенных изменений переносится на случай периодических граничных условий. В нашем случае правая часть равна нулю, что подпадает под условия теоремы, упомянутой выше, откуда следует оценка

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})| \leqslant \check{C}_j \|\omega^{-1} \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}), \tag{2.30}$$

где константа $\check{C}_j$ зависит от c_0, c_1, ω_0, ω_1 и $\max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})} |E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi})|$. Более того, из результатов [26, гл. VII] следует, что функция $\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ гельдеровски непрерывна по $\boldsymbol{x}$ с некоторым показателем $\alpha > 0$.

В силу ограниченности ω, ω^{-1}, а также аналитичности $\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ по $\boldsymbol{\xi}$ правая часть в (2.30) ограничена, а потому

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})| \leqslant C_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}), \quad j = 1, \dots, m_\pm. \tag{2.31}$$

Положим

$$\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) := \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}}, \quad j = 1, \dots, m_\pm,$$
$$\phi_{j,l}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial}{\partial \xi^l} \varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \Big|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}}, \quad j = 1, \dots, m_\pm, \quad l = 1, \dots, d.$$

Замечание 2.10. *Из соотношения* (2.31) *следует, что* $\varphi_j^{(\pm)} \in L_\infty(\Omega)$. *Кроме того, из сказанного выше следует, что функция* $\omega^{-1} \varphi_j^{(\pm)}$ *гельдеровски непрерывна.*

Норма $\|\varphi_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi},\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)}$ *равномерно ограничена по* $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$ *(неравенство* (2.31)*). В силу интегрального представления для производной функции* $\varphi_{s_\pm}$ *по* ξ^l *(формулы Коши), справедливо также включение* $\phi_{j,l}^{(\pm)}\in L_\infty(\Omega)$.

При $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$ уравнение (2.28) становится уравнением для функции $\varphi_j^{(\pm)}$:

$$\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\right)^* g(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x})=\lambda_\pm\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}), \tag{2.32}$$

которое понимается в слабом смысле, а именно, $\varphi_j^{(\pm)}\in\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_\Omega \left\langle g(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}),\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{x})\right\rangle d\boldsymbol{x}$$
$$=\lambda_\pm\int\limits_\Omega \varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\overline{\zeta(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x},\quad \zeta\in\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega). \tag{2.33}$$

Продифференцируем (2.29) по параметру ξ^l и положим $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}$, учитывая, что $\lambda_\pm$ — регулярный край лакуны (в частности, это значит, что $\nabla E_{s_\pm}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})=0$). Приходим к уравнению на $\phi_{j,l}^{(\pm)}\in\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \Big(\left\langle g(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\phi_{j,l}^{(\pm)}(\boldsymbol{x}),\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{x})\right\rangle-\lambda_\pm\phi_{j,l}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\overline{\zeta(\boldsymbol{x})}\Big)\,d\boldsymbol{x}$$
$$=-\int\limits_\Omega\Big(\left\langle g(\boldsymbol{x})\mathbb{e}_l\,\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}),\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{x})\right\rangle$$
$$+\left\langle g(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}),\mathbb{e}_l\,\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{x})\right\rangle\Big)d\,\boldsymbol{x},\quad\zeta\in\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \tag{2.34}$$

где $\{\mathbb{e}_l\}_{l=1}^d$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{C}^d$. Полагая в (2.34) $\zeta=\varphi_j^{(\pm)}$ и принимая во внимание (2.33), приходим к соотношению

$$\operatorname{Re}\int\limits_\Omega\left\langle g(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}\big)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}),\mathbb{e}_l\,\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\right\rangle d\,\boldsymbol{x}=0.$$

Решение задачи (2.34) из класса $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого вида $c\varphi_j^{(\pm)}$, $c\in\mathbb{C}$. Обозначим через $\varphi_{j,l}^{(\pm)}$ единственное (слабое) $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение задачи

$$\begin{cases}\Big(\omega^{-1}(\boldsymbol{x})(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})^*g(\boldsymbol{x})(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})-\lambda_\pm\Big)\varphi_{j,l}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})= \\ \qquad -\displaystyle\sum_{p=1}^d\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{lp}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_p+\xi_j^{(\pm),p}\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}) \\ \qquad -\displaystyle\sum_{p=1}^d\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_p+\xi_j^{(\pm),p}\right)g_{lp}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}), \\ \int\limits_\Omega\varphi_{j,l}^{(\pm)}(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x})}\,d\boldsymbol{x}=0.\end{cases} \tag{2.35}$$

Здесь $g(\boldsymbol{x})=\{g_{lp}(\boldsymbol{x})\}_{l,p=1}^d$.

Замечание 2.11. *Заметим, что* $\varphi_{j,l}^{(\pm)} \in L_\infty(\Omega)$*,* $j = 1, \dots, m_\pm$*. Действительно, так как* $\varphi_{j,l}^{(\pm)}$ *является линейной комбинацией функций* $\phi_{j,l}^{(\pm)}$ *и* $\varphi_j^{(\pm)}$*, которые, согласно замечанию 2.10, ограничены, то и сама функция* $\varphi_{j,l}^{(\pm)}$ *ограничена.*

Обозначим

$$R_j^\perp(\lambda_\pm) := P_{\pm,j}^\perp(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^\pm)^\perp - \lambda_\pm I)^{-1} P_{\pm,j}^\perp, \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})^\perp := \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}) P_{\pm,j}^\perp, \quad j = 1, \dots, m_\pm, \tag{2.36}$$

где $P_{\pm,j}$ — это ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на $\mathfrak{N}_j := \operatorname{Ker}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)}) - \lambda_\pm I)$ и $P_{\pm,j}^\perp := I - P_{\pm,j}$. В силу того, что λ_+ — простое собственное значение оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(\pm)})$, оператор $P_{\pm,j}$ является ортопроектором на одномерное подпространство:

$$(P_{\pm,j} f)(\boldsymbol{x}) = (f, \varphi_j^{(\pm)})_{L_2(\Omega)} \varphi_j^{(\pm)}(\boldsymbol{x}), \quad f \in L_2(\Omega). \tag{2.37}$$

Кроме того, рассмотрим полярное разложение оператора $R_j^\perp(\lambda_\pm)$:

$$R_j^\perp(\lambda_\pm) = |R_j^\perp(\lambda_\pm)| \operatorname{sgn} R_j^\perp(\lambda_\pm). \tag{2.38}$$

Замечание 2.12. *Для функции* $\varphi_{j,l}$ *справедливо представление в операторных терминах:*

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,l}^{(\pm)} &= -R_j^\perp(\lambda_\pm)\omega^{-1} \sum_{p=1}^d g_{lp}\big(\mathrm{D}_p + \xi_j^{(\pm),p}\big)\omega^{-1}\varphi_j^{(\pm)} \\
&\quad - |R_j^\perp(\lambda_\pm)|^{1/2} \operatorname{sgn} R_j^\perp(\lambda_\pm) \sum_{p=1}^d \Big(g_{lp}\big(\mathrm{D}_p + \xi_j^{(\pm),p}\big)\omega^{-1} |R_j^\perp(\lambda_\pm)|^{1/2}\Big)^* \omega^{-1}\varphi_j^{(\pm)}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки для сумм L_2–норм функций $\varphi_{j,l}^{(\pm)}$ и $h(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j)\omega^{-1}\varphi_{j,l}^{(\pm)}$. Здесь h — это матрица–функция такая, что g представима в виде $g(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x})^* h(\boldsymbol{x})$(например, можно положить $h(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})^{1/2}$). Получим оценки для правого края лакуны, случай левого края рассматривается аналогично. Обозначим

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \max\Big\{\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}, \frac{1}{d_0^{(+)}}\Big\}, \\
C_2 &:= \Big(\max\Big\{\frac{\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}, \frac{\lambda_+}{d_0^{(+)}} + 1\Big\}\Big)^{1/2}, \\
C_3 &:= \sqrt{d}\,\omega_0^{-1} \|g\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} C_1^{1/2}\Big(C_1^{1/2}\sqrt{\lambda_+} + C_2\Big), \\
C_4 &:= \sqrt{d}\,\omega_0^{-1} \|g\|_{L_\infty(\Omega)}^{1/2} C_2\Big(C_1^{1/2}\sqrt{\lambda_+} + C_2\Big).
\end{aligned}$$

Лемма 2.13. *Справедливы оценки*

$$\sum_{l=1}^d \big\|\varphi_{j,l}^{(+)}\big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3, \quad j = 1, \dots, m_+, \tag{2.40}$$

$$\sum_{l=1}^d \big\|h(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\omega^{-1}\varphi_{j,l}^{(+)}\big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4, \quad j = 1, \dots, m_+. \tag{2.41}$$

Доказательство. Сперва заметим, что в силу спектральной теоремы справедливы следующие соотношения:

$$\left\|R_j^{\perp}(\lambda_+)\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(+)}))\setminus\{\lambda_+\}} \frac{1}{|\lambda-\lambda_+|} \leqslant C_1, \tag{2.42}$$

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})^{\perp}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(+)}))\setminus\{\lambda_+\}} \frac{\lambda}{|\lambda-\lambda_+|} \leqslant C_2^2. \tag{2.43}$$

Кроме того, из (2.43) и тождества

$$\left\|h(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})^{\perp}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|u,u\right)_{L_2(\Omega)}, \quad u\in L_2(\Omega),$$

вытекает оценка

$$\left\|h(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\right\| \leqslant C_2. \tag{2.44}$$

В силу представления (2.39), неравенств (2.42), (2.44), с учетом того, что $\operatorname{sgn} R_j^{\perp}(\lambda_+)$ — частично изометрический оператор, а функция ω удовлетворяет свойству (2.7), получаем

$$\sum_{l=1}^{d}\left\|\varphi_{j,l}^{(+)}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \omega_0^{-1}C_1W_{j,1} + C_1^{1/2}W_{j,2}, \tag{2.45}$$

$$\sum_{l=1}^{d}\left\|h(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\omega^{-1}\varphi_{j,l}^{(+)}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \omega_0^{-1}C_1^{1/2}C_2W_{j,1} + C_2W_{j,2}. \tag{2.46}$$

Здесь

$$W_{j,1} := \sum_{l=1}^{d}\left\|\sum_{p=1}^{d} g_{lp}\left(\mathrm{D}_p + \xi_j^{(+),p}\right)\omega^{-1}\varphi_j^{(+)}\right\|_{L_2(\Omega)},$$

$$W_{j,2} := \sum_{l=1}^{d}\left\|\sum_{p=1}^{d}\left(g_{lp}\left(\mathrm{D}_p + \xi_j^{(+),p}\right)\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\right)^*\omega^{-1}\varphi_j^{(+)}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Оценим $W_{j,1}$ и $W_{j,2}$:

$$\begin{aligned} W_{j,1} &\leqslant \sqrt{d}\left\|g(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\omega^{-1}\varphi_j^{(+)}\right\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leqslant \sqrt{d}\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\varphi_j^{(+)},\varphi_j^{(+)}\right)^{1/2}_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\lambda_+}\sqrt{d}\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$W_{j,2} \leqslant \sqrt{d}\left\|\left(g(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j^{(+)})\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\right)^*\omega^{-1}\varphi_j^{(+)}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{d}\omega_0^{-1}\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}C_2. \tag{2.48}$$

Из (2.45)—(2.48) следуют искомые оценки (2.40) и (2.41). □

2.3. **Факторизованное семейство.** Случаи правого и левого края лакуны рассматриваются схожим образом. Поэтому в дальнейшем остановимся на случае правого края лакуны. Обозначим

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\xi}) := E_{s_+}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi}_j := \boldsymbol{\xi}_j^{(+)}, \quad m := m_+, \quad b_j := b_j^{(+)}, \quad d_0 := d_0^{(+)}, \quad t_0 := t_0^{(+)}, \\ \varphi_j := \varphi_j^{(+)}, \quad F(\boldsymbol{\xi}) := F_+(\boldsymbol{\xi}), \quad P_j := P_{+,j}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Представим оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) &= \omega(\boldsymbol{x})^{-1}(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})^*g(\boldsymbol{x})(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi})\omega(\boldsymbol{x})^{-1} \\ &= \omega(\boldsymbol{x})^{-1}\left(\mathbf{D}+(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\boldsymbol{\xi}_j\right)^*g(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\boldsymbol{\xi}_j\right)\omega(\boldsymbol{x})^{-1}, \quad j=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Введем $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j$ для фиксированной точки минимума $\boldsymbol{\xi}_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, и представим функцию g в виде $g(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x})^* h(\boldsymbol{x})$. С учетом введенных обозначений из (2.50) вытекают соотношения

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_j), \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_j) = \mathcal{X}_j(\boldsymbol{\eta})^* \mathcal{X}_j(\boldsymbol{\eta}). \tag{2.51}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_j(\boldsymbol{\eta}) = h(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_j\right) \omega(\boldsymbol{x})^{-1} = h(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right) \omega(\boldsymbol{x})^{-1} + h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\eta} \omega(\boldsymbol{x})^{-1}, \quad (2.52)\\ &\operatorname{Dom} \mathcal{X}_j(\boldsymbol{\eta}) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ зависит от многомерного параметра $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$. Введем одномерный параметр t следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j = t\boldsymbol{\theta}, \tag{2.53}$$

где $t = |\boldsymbol{\eta}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Положим

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_j) =: A_j(t; \boldsymbol{\theta}), \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_j) =: A_{j,0},\\ &\mathcal{X}_j(\boldsymbol{\eta}) =: X_j(t; \boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

В силу (2.52) для оператора $X_j(t, \boldsymbol{\theta})$ справедливо представление

$$X_j(t; \boldsymbol{\theta}) = X_{j,0} + t X_{j,1}(\boldsymbol{\theta}).$$

Здесь

$$X_{j,0} := h(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right) \omega(\boldsymbol{x})^{-1}, \tag{2.54}$$

$$X_{j,1}(\boldsymbol{\theta}) := h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\theta} \omega(\boldsymbol{x})^{-1}. \tag{2.55}$$

Норма оператора $X_{j,1}(\boldsymbol{\theta})$ допускает оценку

$$\|X_{j,1}(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)} \omega_0^{-1}. \tag{2.56}$$

Так как оценка (2.56) равномерна по $\boldsymbol{\theta}$, в дальнейшем аргумент $\boldsymbol{\theta}$ будем опускать в обозначениях. Именно, оператор $A_j(t; \boldsymbol{\theta})$ обозначим через $A_j(t)$, $X_j(t; \boldsymbol{\theta})$ обозначим через $X_j(t)$ и $X_{j,1}(\boldsymbol{\theta})$ — через $X_{j,1}$. Имеем $\operatorname{Dom} X_j(t) = \operatorname{Dom} X_{j,0} = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$. Через $F_j(t)$ обозначим спектральный проектор оператора $A_j(t)$ для промежутка $\left[\lambda_+, \lambda_+ + \frac{d_0}{3}\right]$. Также обозначим через $a_j(t)$ и $a_{j,0}$ замкнутые квадратичные формы, отвечающие операторам $A_j(t)$ и $A_{j,0}$, соответственно.

Замечание 2.14. *Из равенства (2.37) и обозначений (2.49) следует, что для линейного оператора B в $L_2(\Omega)$ справедливы соотношения*

$$(BP_j f)(\boldsymbol{x}) = (f, \varphi_j)(B\varphi_j)(\boldsymbol{x}), \quad \textit{если } f \in L_2(\Omega),\ \varphi_j \in \operatorname{Dom} B, \tag{2.57}$$

$$(P_j B f)(\boldsymbol{x}) = (Bf, \varphi_j)\varphi_j(\boldsymbol{x}), \quad \textit{если } f \in \operatorname{Dom} B, \tag{2.58}$$

$$P_j B P_j = (B\varphi_j, \varphi_j) P_j, \quad \textit{если } \varphi_j \in \operatorname{Dom} B. \tag{2.59}$$

Предложение 2.15. *Для $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ выполнены соотношения*

$$\Big([P_j]\mathcal{U} f\Big)(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) = \varphi_j(\boldsymbol{x}) \big(\mathcal{U}_{\varphi_j} f\big)(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d; \tag{2.60}$$

$$\Big([P_j]\mathcal{U} f\Big)(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) = \varphi_j(\boldsymbol{x}) \Phi\big([\overline{\varphi_j}] f\big)(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.61}$$

Здесь и в дальнейшем для линейного оператора $M(\boldsymbol{\xi})$, действующего в $L_2(\Omega)$, при $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}$, через $[M(\cdot)]$ обозначаем оператор, который действует как оператор $M(\boldsymbol{\xi})$ в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$.

Доказательство. Из (2.58) вытекает тождество

$$\Big([P_j]\mathcal{U}f\Big)(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) = \Big((\mathcal{U}f)(\boldsymbol{\xi},\cdot),\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}\varphi_j(\boldsymbol{x}). \tag{2.62}$$

Отсюда и из определения (2.19) вытекает (2.60). Далее, вспомним, что функция $\varphi_j \in L_\infty(\Omega)$ (см. замечание 2.10) $\mathbb{Z}^d$–периодична, а потому из тождеств (2.20) и (2.62) следует равенство (2.61). □

§ 3. Пороговые аппроксимации

3.1. **Резольвентное тождество.** Наша цель в этом параграфе — получить аппроксимации при малом t для операторов $F_j(t)$ и $A_j(t)F_j(t) - \lambda_+ F_j(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Напомним, что $t = |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|$, где $\boldsymbol{\xi}_j$, $j \in \{1,\dots,m\}$ — фиксированная точка минимума зонной функции E, причем $E(\boldsymbol{\xi}_j) = \lambda_+$, а λ_+ — это правый край спектральной лакуны в спектре оператора $\mathcal{A}$. Получать аппроксимации мы будем с помощью интегрирования разности резольвент операторов $A_{j,0}$ и $A_j(t)$ по подходящему контуру в комплексной плоскости. Отметим, что (стандартное) второе резольвентное тождество в данном случае не применимо, так как области определения операторов $A_{j,0}$ и $A_j(t)$ могут отличаться (из-за чего разность $A_j(t) - A_{j,0}$ может не иметь смысла). Для того, чтобы справиться с данной трудностью, нами будет использована следующая лемма (мы следуем [27, §3, лемма 3.1]). Введём обозначения

$$R_j(t,z) := (A_j(t) - zI)^{-1}, \quad R_{j,0}(z) := (A_{j,0} - zI)^{-1}.$$

Лемма 3.1. *При $z \in \rho(A_j(t)) \cap \rho(A_{j,0})$ справедливо тождество*

$$R_j(t,z) = R_{j,0}(z) + t\mathfrak{R}_{j,1}(t,z), \tag{3.1}$$

где

$$\mathfrak{R}_{j,1}(t,z) := -(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z) - tR_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z), \tag{3.2}$$

$$\Omega_j(z) := (A_{j,0}+\gamma I)R_{j,0}(z) = I + (z+\gamma)R_{j,0}(z), \tag{3.3}$$

$$\widetilde{T}_j := (X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2})^* X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} + (X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2})^* X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} \tag{3.4}$$

Здесь $\gamma > 0$ — фиксированная постоянная.

Доказательство. Рассмотрим разность форм $(R_j(t,z)u,v) - (u, R_{j,0}(\overline{z})v)$, где $u,v \in L_2(\Omega)$. Обозначим

$$f := R_j(t,z)u, \quad g := R_{j,0}(\overline{z})v.$$

Рассматриваемую разность можно представить в виде

$$\begin{aligned}\big(R_j(t,z)u,v\big) - \big(u,R_{j,0}(\overline{z})v\big) &= \big(f,(A_{j,0}-\overline{z}I)g\big) - \big((A_j(t)-zI)f,g\big)\\ &= -\big(a_j(t)[f,g] - a_{j,0}[f,g]\big) = -\big((X_j(t)f,X_j(t)g) - (X_{j,0}f,X_{j,0}g)\big)\\ &= -t(X_{j,1}f,X_{j,0}g) - t(X_{j,0}f,X_{j,1}g) - t^2(X_{j,1}f,X_{j,1}g).\end{aligned}$$

Перейдем от форм к операторам. Перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned}R_j(t,z) = R_{j,0}(z) - t(X_{j,1}R_{j,0}(\overline{z}))^*X_{j,0}R_j(t,z) - t(X_{j,0}R_{j,0}(\overline{z}))^*X_{j,1}R_j(t,z)&\\ - t^2(X_{j,1}R_{j,0}(\overline{z}))^*X_{j,1}R_j(t,z).&\end{aligned} \tag{3.5}$$

В слагаемых с t подставим между $X_{j,\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \in \{0,1\}$, и $R_{j,0}(\overline{z})$ единичный оператор в виде $(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}(A_{j,0}+\gamma I)$. В слагаемом с t^2 все операторы ограничены, потому можем раскрыть скобки с сопряжением. После подстановок и раскрытия скобок, используя обозначение (3.3), перепишем (3.5) в виде

$$R_j(t,z) = R_{j,0}(z) - t\big((X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2})\Omega_j(\overline{z})(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^* X_{j,0}R_j(t,z)$$
$$- t\big((X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2})\Omega_j(\overline{z})(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^* X_{j,1}R_j(t,z) - t^2 R_{j,0}(z)X_{j,1}^* X_{j,1}R_j(t,z). \quad (3.6)$$

Операторы $X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$, $\Omega_j(\overline{z})$ и $(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$ ограничены, поэтому можем раскрыть сопряжение. После раскрытия сопряжений, подставим в (3.6) между $X_{j,\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \in \{0,1\}$ и $R_j(t,z)$ единичный оператор в виде $(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}$, что вместе с (3.4) приводит к (3.1). □

Теперь оценим нормы операторов $\widetilde{T}_j$, $\Omega_j(z)$ и $(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$. Как следствие, мы получим оценку нормы остатка $\mathfrak{R}_{j,1}(t,z)$. Оценку для нормы оператора $\Omega_j(z)$ можно написать сразу, исходя из определения (3.3).

Предложение 3.2. *Справедлива оценка*

$$\|\Omega_j(z)\| \leqslant 1 + |z+\gamma|\|R_{j,0}(z)\|. \quad (3.7)$$

Для дальнейших оценок нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 3.3. *При $t \geqslant 0$ справедливы оценки*

$$\|X_{j,1}(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\gamma^{-1/2}, \quad (3.8)$$
$$\|X_j(t)(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant 1. \quad (3.9)$$

Доказательство. Очевидно, $\|X_{j,1}(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant \|X_{j,1}\|\|(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}\|$. Из спектральной теоремы следуют соотношения

$$\|(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant \sup_{\lambda\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{\lambda+\gamma}} \leqslant 1/\sqrt{\gamma}, \quad (3.10)$$

отсюда и из (2.56) получаем оценку (3.8). Теперь докажем (3.9). Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Из представления $A_j(t) = X_j(t)^*X_j(t)$ вытекает равенство

$$\|X_j(t)(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2 = (A_j(t)(A_j(t)+\gamma I)^{-1}u,u). \quad (3.11)$$

В силу спектральной теоремы справедливы соотношения

$$\|A_j(t)(A_j(t)+\gamma I)^{-1}\| \leqslant \sup_{\lambda\geqslant 0}\frac{\lambda}{\lambda+\gamma} \leqslant 1. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует оценка (3.9). □

Следствие 3.4. *Справедливы оценки*

$$\|X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\gamma^{-1/2}, \quad (3.13)$$
$$\|X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant 1. \quad (3.14)$$

Из определения (3.4) и неравенств (3.13), (3.14) вытекает оценка для нормы оператора $\widetilde{T}_j$.

Лемма 3.5. *Справедлива оценка*

$$\|\widetilde{T}_j\| \leqslant C_5, \quad C_5 := 2\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\gamma^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Теперь оценим норму оператора $\mathfrak{R}_{j,1}(t,z)$. Для этого нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений. Заметим сначала, что

$$(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z) = (A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}(A_j(t)+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z). \quad (3.16)$$

Предложение 3.6. *При $0 \leqslant t_1 \leqslant t_0$, $0 \leqslant t_2 \leqslant t_0$ справедливы неравенства*

$$\|(A_j(t_1)+\gamma I)^{1/2}(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant C_6, \tag{3.17}$$

$$C_6 := \sqrt{C_7^2+1}, \quad C_7 := 1+t_0\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\gamma^{-1/2}.$$

Доказательство. Для $u \in L_2(\Omega)$ рассмотрим форму

$$\|(A_j(t_1)+\gamma I)^{1/2}(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2 = a_j(t_1)\left[(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u, (A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\right]$$
$$+\gamma\|(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2 = \|X_j(t_1)(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2+\gamma\|(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2. \tag{3.18}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части, добавляя и вычитая член $t_2X_{j,1}(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u$ под знаком нормы и учитывая неравенства (3.8), (3.9):

$$\|X_j(t_1)(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2 = \|X_j(t_2)(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u+(t_1-t_2)X_{j,1}(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2$$
$$\leqslant \left(\|X_j(t_2)(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|+|t_1-t_2|\|X_{j,1}(A_j(t_2)+\gamma I)^{-1/2}u\|\right)^2$$
$$\leqslant \left(1+t_0\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\gamma^{-1/2}\right)^2\|u\|^2 = C_7^2\|u\|^2. \tag{3.19}$$

Из (3.10) вытекает оценка для второго слагаемого в правой части (3.18):

$$\gamma\|(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}u\|^2 \leqslant \gamma\|(A_j(t)+\gamma I)^{-1}\|\|u\|^2 \leqslant \|u\|^2. \tag{3.20}$$

Из (3.18), (3.19) и (3.20) следует (3.17). □

Следствие 3.7. *При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ справедливы оценки*

$$\|(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}(A_j(t)+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant C_6, \tag{3.21}$$

$$\|(A_j(t)+\gamma I)^{1/2}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant C_6, \tag{3.22}$$

$$\|A_j(t)^{1/2}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\| \leqslant C_7. \tag{3.23}$$

Доказательство. Соотношения (3.21) и (3.22) напрямую следуют из (3.17) при $t_1 = 0$, $t_2 = t \leqslant t_0$ и $t_1 = t \leqslant t_0$, $t_2 = 0$, соответственно. Оценка (3.23) вытекает из равенства

$$\|A_j(t)^{1/2}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}u\|^2 = \|X_j(t)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega),$$

и неравенства (3.19) при $t_1 = t \leqslant t_0$ и $t_2 = 0$. □

Предложение 3.8. *При $t \geqslant 0$ справедлива оценка*

$$\|(A_j(t)+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)\| \leqslant \sqrt{\|R_j(t,z)\|}\sqrt{1+|z+\gamma|\|R_j(t,z)\|}. \tag{3.24}$$

Доказательство. Для $u \in L_2(\Omega)$ рассмотрим форму

$$\|(A_j(t)+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)u\|^2 = \big((A_j(t)+\gamma I)R_j(t,z)u, R_j(t,z)u\big).$$

Поскольку $A_j(t)+\gamma I = (A_j(t)-zI)+(z+\gamma)I$, приходим к неравенству

$$\|(A_j(t)+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)u\|^2 \leqslant (\|R_j(t,z)\|+|z+\gamma|\|R_j(t,z)\|^2)\|u\|^2,$$

откуда и следует искомая оценка (3.24). □

Благодаря тождеству (3.16), оценке (3.21) и предложению 3.8 мы можем оценить норму оператора $(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$.

Лемма 3.9. *При $t \geqslant 0$ справедлива оценка*

$$\|(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)\| \leqslant C_6\sqrt{\|R_j(t,z)\|}\sqrt{1+|z+\gamma|\|R_j(t,z)\|}. \tag{3.25}$$

Из (2.56), (3.2), (3.7), (3.10), (3.15) и (3.25) вытекает оценка для нормы оператора $\mathfrak{R}_{j,1}(t,z)$.

Лемма 3.10. *При $z \in \rho(A_j(t)) \cap \rho(A_{j,0})$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0$ справедлива оценка*

$$\|\mathfrak{R}_{j,1}(t,z)\| \leqslant \gamma^{-1/2}(1+|z+\gamma|\|R_{j,0}(z)\|)C_5C_6\sqrt{\|R_j(t,z)\|}\sqrt{1+|z+\gamma|\|R_j(t,z)\|} + t_0\|g\|_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-2}\|R_{j,0}(z)\|\|R_j(t,z)\|. \quad (3.26)$$

3.2. **Оценки на контуре.** Пусть теперь Γ — контур, эквидистантно охватывающий отрезок $[\lambda_+, \lambda_+ + d_0/3]$ и проходящий через точку $\lambda_+ + d_0/2$. Его длина равна

$$l_\Gamma = \frac{\pi+2}{3}d_0.$$

Оценим нормы операторов $R_j(t,z)$, $R_{j,0}(z)$, $\Omega_j(z)$ и $\mathfrak{R}_{j,1}(t,z)$ при $z \in \Gamma$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Для резольвент на Γ справедливы оценки

$$\|R_j(t,z)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \quad \|R_{j,0}(z)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \ z \in \Gamma. \quad (3.27)$$

Очевидно, из (3.27) следует, что

$$1+|z+\gamma|\|R_{j,0}(z)\| \leqslant C_8, \quad 1+|z+\gamma|\|R_j(t,z)\| \leqslant C_8, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \ z \in \Gamma, \quad (3.28)$$

$$C_8 := 1 + 6d_0^{-1}(\lambda_+ + d_0/2 + \gamma). \quad (3.29)$$

Из предложения 3.2 и первого неравенства (3.28) вытекает оценка для нормы оператора $\Omega_j(z)$ на контуре Γ:

$$\|\Omega_j(z)\| \leqslant C_8, \quad z \in \Gamma. \quad (3.30)$$

Из (3.25), (3.27) и (3.28) следует неравенство

$$\|(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)\| \leqslant C_9, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \ z \in \Gamma, \quad (3.31)$$

$$C_9 = \sqrt{6}d_0^{-1/2}C_6C_8^{1/2}. \quad (3.32)$$

Очевидно, (2.56) и (3.27) влекут оценки

$$\|X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)\| \leqslant C_{10}, \quad \|R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}\| \leqslant C_{10}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \ z \in \Gamma, \quad (3.33)$$

$$C_{10} = 6d_0^{-1}\|g\|_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-2}. \quad (3.34)$$

Благодаря соотношениям (3.26)—(3.29) и (3.32), (3.34) заключаем, что выполнено неравенство

$$\|\mathfrak{R}_{j,1}(t,z)\| \leqslant C_{11}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \ z \in \Gamma, \quad (3.35)$$

$$C_{11} := \gamma^{-1/2}C_5C_8C_9 + 6t_0d_0^{-1}C_{10}.$$

3.3. **Итерирование резольвентного тождества.** Последовательно итерируя тождество (3.1) так, чтобы слагаемые порядка t, t^2 и t^3 не содержали резольвенты $R_j(t,z)$, приходим к соотношениям

$$R_j(t,z) = R_{j,0}(z) + tI_{j,1}(z) + t^2\,\mathfrak{R}_{j,2}(t,z), \quad (3.36)$$

$$R_j(t,z) = R_{j,0}(z) + tI_{j,1}(z) + t^2I_{j,2}(z) + t^3\,\mathfrak{R}_{j,3}(t,z), \quad (3.37)$$

$$R_j(t,z) = R_{j,0}(z) + tI_{j,1}(z) + t^2I_{j,2}(z) + t^3I_{j,3}(z) + t^4\,\mathfrak{R}_{j,4}(t,z), \quad (3.38)$$

где

$$I_{j,1}(z) = -(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}, \quad (3.39)$$

$$I_{j,2}(z) = (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} - R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z), \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} I_{j,3}(z) = &-(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} \\ &+ R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} \\ &+ (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Остатки же имеют вид

$$\mathfrak{R}_{j,2}(t,z) = (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z) - R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$+ t(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z), \quad (3.42)$$

$$\mathfrak{R}_{j,3}(t,z) = -(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$$
$$+ R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$$
$$+ (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$- t(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$+ tR_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z),$$

$$\mathfrak{R}_{j,4}(t,z) = -(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$+ R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$+ (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$$
$$- R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$$
$$-(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j(t,z)$$
$$+ t(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$- tR_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z)$$
$$- t(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_j(t,z).$$

Здесь при выводе формул для $I_{j,k}(z)$ и $\mathfrak{R}_{j,l}(t,z)$, $k\in\{1,2,3\}, l\in\{2,3,4\}$, использовалось соотношение $(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_{j,0}(z) = (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z) = \Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$. В силу (3.10), (3.15), (3.27), (3.30), (3.31) и (3.33) нормы операторов $I_{j,k}(z)$, $k=1,2,3$, и $\mathfrak{R}_{j,l}(t,z)$, $l=2,3,4$, на контуре Γ допускают оценки

$$\|I_{j,1}(z)\| \leqslant C_{12}, \quad \|I_{j,2}(z)\| \leqslant C_{13}, \quad \|I_{j,3}(z)\| \leqslant C_{14}, \quad z\in\Gamma, \tag{3.43}$$
$$\|\mathfrak{R}_{j,2}(t,z)\| \leqslant C_{15}, \quad \|\mathfrak{R}_{j,3}(t,z)\| \leqslant C_{16}, \quad \|\mathfrak{R}_{j,4}(t,z)\| \leqslant C_{17}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\ z\in\Gamma. \tag{3.44}$$

Здесь

$$C_{12} := \gamma^{-1}C_5C_8^2,$$
$$C_{13} := \gamma^{-1}C_5^2C_8^3 + 6d_0^{-1}C_{10},$$
$$C_{14} := \gamma^{-1}C_5^3C_8^4 + 2\gamma^{-1}C_5C_8^2C_{10},$$
$$C_{15} := \gamma^{-1/2}C_5^2C_8^2C_9 + 6d_0^{-1}C_{10} + t_0\gamma^{-1}C_5C_8^2C_{10},$$
$$C_{16} := \gamma^{-1/2}C_5^3C_8^3C_9 + \gamma^{-1/2}C_5C_8C_9C_{10} + \gamma^{-1}C_5C_8^2C_{10} + t_0\gamma^{-1}C_5^2C_8^3C_{10} + 6d_0^{-1}t_0C_{10}^2,$$
$$C_{17} := \gamma^{-1}C_5^2C_8^3C_{10} + 6d_0^{-1}C_{10}^2 + \gamma^{-1/2}C_5^4C_8^4C_9$$
$$+ \gamma^{-1/2}C_5^2C_8^2C_9C_{10} + \gamma^{-3/2}\|g\|_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-2}C_5^2C_8^3C_9 + t_0\gamma^{-1}C_5^3C_8^4C_{10} + 2t_0\gamma^{-1}C_5C_8^2C_{10}^2,$$

Замечание 3.11. *Заметим, что константы $C_k, k=1,\dots,17$, не зависят от точки минимума зонной функции E.*

3.4. **Пороговые аппроксимации.** Наша цель — получить аппроксимации для операторов $F_j(t)$ и $(A_j(t)-\lambda_+ I)F_j(t)$. В силу интегрального исчисления Рисса–Данфорда

$$F_j(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_j(t,z)\,dz, \qquad (A_j(t)-\lambda_+ I)F_j(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (z-\lambda_+)R_j(t,z)\,dz. \tag{3.45}$$

Здесь интегрирование по контуру Γ идет в положительном направлении. Подставляя (3.1) и, для более точной аппроксимации, (3.36) в интегральное представление (3.45) спектрального проектора $F_j(t)$ и принимая во внимание равенство

$$P_j = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} R_{j,0}(z)\,dz,$$

получаем

$$F_j(t) = P_j + t\widetilde{F}_{j,1}(t), \tag{3.46}$$

$$F_j(t) = P_j + tF_{j,1} + t^2\widetilde{F}_{j,2}(t). \tag{3.47}$$

Здесь

$$F_{j,1} := -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} I_{j,1}(z)\,dz, \tag{3.48}$$

$$\widetilde{F}_{j,k}(t) := -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \mathfrak{R}_{j,k}(t,z)\,dz, \quad k = 1,2. \tag{3.49}$$

Далее, вычислим оператор

$$G_{j,0} := -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (z-\lambda_+)R_{j,0}(z)\,dz. \tag{3.50}$$

Представляя в (3.50) резольвенту $R_{j,0}(z)$ в виде

$$R_{j,0}(z) = R_{j,0}(z)P_j + R_{j,0}(z)P_j^{\perp} = -\frac{1}{z-\lambda_+}P_j + R_{j,0}(z)P_j^{\perp}, \quad z \in \Gamma, \tag{3.51}$$

приходим к представлению

$$G_{j,0} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (z-\lambda_+)\Big(-\frac{1}{z-\lambda_+}P_j + R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\Big)\,dz. \tag{3.52}$$

Заметим, что оператор–функция $R_{j,0}(z)P_j^{\perp}$ является голоморфной по z внутри контура Γ, откуда с учетом (3.52) следует, что

$$G_{j,0} = 0. \tag{3.53}$$

Подставим (3.36), (3.37) и (3.38) в интегральное представление (3.45) для оператор–функции $(A_j(t) - \lambda_+ I)F_j(t)$. Принимая во внимание тождество (3.53), получаем

$$(A_j(t) - \lambda_+ I)F_j(t) = tG_{j,1} + t^2\widetilde{G}_{j,2}(t), \tag{3.54}$$

$$(A_j(t) - \lambda_+ I)F_j(t) = tG_{j,1} + t^2 G_{j,2} + t^3\widetilde{G}_{j,3}(t), \tag{3.55}$$

$$(A_j(t) - \lambda_+ I)F_j(t) = tG_{j,1} + t^2 G_{j,2} + t^3 G_{j,3} + t^4\widetilde{G}_{j,4}(t), \tag{3.56}$$

где

$$G_{j,k} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (z-\lambda_+)I_{j,k}(z)\,dz, \quad k = 1,2,3, \tag{3.57}$$

$$\widetilde{G}_{j,k}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} (z-\lambda_+)\mathfrak{R}_{j,k}(t,z)\,dz, \quad k = 2,3,4. \tag{3.58}$$

Лемма 3.12. *Справедливы оценки*

$$\|F_{j,1}\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma C_{12}, \tag{3.59}$$

$$\|\widetilde{F}_{j,1}(t)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma C_{11}, \quad \|\widetilde{F}_{j,2}(t)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma C_{15}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{3.60}$$

$$\|G_{j,1}\| \leqslant \frac{d_0}{4\pi} l_\Gamma C_{12}, \quad \|G_{j,2}\| \leqslant \frac{d_0}{4\pi} l_\Gamma C_{13}, \quad \|G_{j,3}\| \leqslant \frac{d_0}{4\pi} l_\Gamma C_{14}, \tag{3.61}$$

$$\|\widetilde{G}_{j,2}(t)\| \leqslant \frac{d_0}{4\pi} l_\Gamma C_{15}, \quad \|\widetilde{G}_{j,3}(t)\| \leqslant \frac{d_0}{4\pi} l_\Gamma C_{16}, \quad \|\widetilde{G}_{j,4}(t)\| \leqslant \frac{d_0}{4\pi} l_\Gamma C_{17}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{3.62}$$

$$\|A_j(t)^{1/2}\widetilde{F}_{j,1}(t)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma C_7 C_8 \Big(C_5 C_9 + \gamma^{-1/2} t_0 C_{10}\Big), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{3.63}$$

$$\|A_j(t)^{1/2}\widetilde{F}_{j,2}(t)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma C_7 C_8 \Big(C_5^2 C_8 C_9 + \gamma^{-1/2} C_{10} + t_0 \gamma^{-1/2} C_5 C_8 C_{10}\Big), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{3.64}$$

Доказательство. Первая оценка в лемме вытекает из неравенства (3.43) (для нормы оператора $I_{j,1}(z)$) и представления (3.48). Соотношения (3.60) следуют из (3.35), первой оценки (3.44) и тождеств (3.49). Аналогично, из неравенств (3.43) и (3.44), а также равенств (3.57), (3.58) получаем оценки (3.61) и (3.62). Соотношения (3.2), (3.10), (3.15), (3.23), (3.30), (3.31), (3.33), (3.42), (3.49) и тождество

$$A_j(t)^{1/2} R_{j,0}(z) = A_j(t)^{1/2} (A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2} \Omega_j(z) (A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}.$$

влекут неравенства (3.63) и (3.64). □

§ 4. Вычисление коэффициентов пороговых аппроксимаций

Перейдем к вычислению коэффициентов пороговых аппроксимаций. Найдем выражение для $F_{j,1}$. Из (3.39) и (3.48) следует, что

$$F_{j,1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma I_{j,1}(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\, \Omega_j(z) \widetilde{T}_j\, \Omega_j(z) (A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\, dz.$$

Принимая во внимание разложение

$$\Omega_j(z) = \Omega_j(z) P_j + \Omega_j(z) P_j^\perp = -\frac{\lambda_+ + \gamma}{z - \lambda_+} P_j + \Omega_j(z) P_j^\perp, \quad z \in \Gamma, \tag{4.1}$$

получаем представление

$$F_{j,1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2} \Big(-\frac{\lambda_+ + \gamma}{z - \lambda_+} P_j + \Omega_j(z) P_j^\perp \Big) \widetilde{T}_j \times \Big(-\frac{\lambda_+ + \gamma}{z - \lambda_+} P_j + \Omega_j(z) P_j^\perp \Big) (A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\, dz.$$

Оператор–функция $\Omega_j(z) P_j^\perp$ является голоморфной по z внутри контура Γ. Используя представление для резольвенты в виде ряда Лорана в окрестности особой точки λ_+

$$R_{j,0}(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} (z - \lambda_+)^m R_j^\perp(\lambda_+)^{(m+1)}, \quad R_j^\perp(\lambda_+)^{(0)} = -P_j, \quad R_j^\perp(\lambda_+)^{(m)} = R_j^\perp(\lambda_+)^m, \quad m > 0,$$

где резольвента $R_j^\perp(\lambda_+)$ определена в (2.36), и вытекающее из него представление для $\Omega_j(z) P_j^\perp$

$$\Omega_j(z) P_j^\perp = P_j^\perp + \sum_{m=1}^{\infty} (z - \lambda_+)^m\, R_j^\perp(\lambda_+)^{(m)} + (\lambda_+ + \gamma) \sum_{l=0}^{\infty} (z - \lambda_+)^l\, R_j^\perp(\lambda_+)^{(l+1)}, \tag{4.2}$$

получаем

$$F_{j,1} = -(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)\widetilde{T}_j\,(\lambda_+ +\gamma)\,P_j(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$$
$$-\,(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,(\lambda_+ +\gamma)\,P_j\,\widetilde{T}_j\,(A_{j,0}+\gamma I)\,R_j^{\perp}(\lambda_+)\,(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}. \quad (4.3)$$

Для вывода данной формулы также было использовано равенство

$$P_j^{\perp} + (\lambda_+ +\gamma)\,R_j^{\perp}(\lambda_+) = (A_{j,0}+\gamma I)R_j^{\perp}(\lambda_+). \quad (4.4)$$

Заметим, что в силу (4.3) для оператора $F_{j,1}$ справедливо представление

$$F_{j,1} = P_j^{\perp}F_{j,1}P_j + P_jF_{j,1}P_j^{\perp} = F_j^{\times} + (F_j^{\times})^*. \quad (4.5)$$

Здесь

$$F_j^{\times} = -(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)\widetilde{T}_j\,(\lambda_+ +\gamma)\,P_j(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}. \quad (4.6)$$

Лемма 4.1. *Для коэффициента $F_{j,1}$ пороговой аппроксимации (3.47) справедливо следующее представление*

$$F_{j,1} = \sum_{l=1}^{d}[\varphi_{j,l}]\theta^l(\cdot,\varphi_j)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{l=1}^{d}[\varphi_{j,l}]\theta^l(\cdot,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}\right)^*, \quad (4.7)$$

где функции $\varphi_{j,l}$ являются единственными слабыми $\mathbb{Z}^d$–периодическими решениями задач (2.35).

Доказательство. В силу тождества (4.5) достаточно провести вычисление оператора $F_j^{\times}$. Из (2.57) и (4.6) следует, что для $f\in L_2(\Omega)$ справедлива цепочка равенств

$$\Big(F_j^{\times}f\Big)(\boldsymbol{x}) = -(\lambda_+ +\gamma)^{1/2}\Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_jP_jf\Big)(\boldsymbol{x})$$
$$= -(\lambda_+ +\gamma)^{1/2}\Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_j\varphi_j\Big)(\boldsymbol{x})(f,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}.$$

Из (3.4) и того факта, что $\varphi_j\in\operatorname{Dom}X_{j,0}$, следует, что

$$\widetilde{T}_j\varphi_j = (\lambda_+ +\gamma)^{-1/2}\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j + \big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j\Big). \quad (4.8)$$

Отсюда вытекает, что

$$\Big(F_j^{\times}f\Big)(\boldsymbol{x}) = -\Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j$$
$$+\,R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j\Big)(\boldsymbol{x})(f,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}.$$

Используя полярное разложение (2.38) для оператора $R_j^{\perp}(\lambda_+)$, получаем

$$\Big(F_j^{\times}f\Big)(\boldsymbol{x}) = -\Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j$$
$$+\,|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\operatorname{sgn}R_j^{\perp}(\lambda_+)\big(X_{j,0}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j\Big)(\boldsymbol{x})(f,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}. \quad (4.9)$$

Подставляя явные формулы (2.54), (2.55) для $X_{j,0}$ и $X_{j,1}$ и пользуясь тождеством $h^*h=g$, преобразуем (4.9) к виду

$$\Big(F_j^{\times}f\Big)(\boldsymbol{x}) = -\Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)\omega^{-1}\boldsymbol{\theta}^*g\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}\varphi_j$$
$$+\,|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\operatorname{sgn}R_j^{\perp}(\lambda_+)\big(\boldsymbol{\theta}^*g\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\big)^*\omega^{-1}\varphi_j\Big)(\boldsymbol{x})(f,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}. \quad (4.10)$$

Заметим, что

$$\boldsymbol{\theta}^*g\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}\varphi_j = \sum_{l=1}^{d}\theta^l\sum_{p=1}^{d}g_{lp}\big(\,\mathrm{D}_p+\xi_j^p\big)\omega^{-1}\varphi_j, \quad (4.11)$$

$$\Big(\boldsymbol{\theta}^* g\big(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}|R_j^\perp(\lambda_+)|^{1/2}\Big)^*\omega^{-1}\varphi_j \;=\; \sum_{l=1}^d \theta^l \sum_{p=1}^d \Big(g_{lp}\big(\mathrm{D}_p + \xi_j^p\big)\omega^{-1}|R_j^\perp(\lambda_+)|^{1/2}\Big)^*\omega^{-1}\varphi_j. \tag{4.12}$$

Из (2.39), (4.10)—(4.12) вытекает, что

$$\Big(F_j^\times f\Big)(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^d \theta^l \varphi_{j,l}(\boldsymbol{x})(f,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}. \tag{4.13}$$

Из (4.5) и (4.13) следует искомое равенство (4.7). □

Для оператора $G_{j,1}$ в силу (3.39) и (3.57) имеем:

$$G_{j,1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (z-\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\,\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz.$$

Принимая во внимание разложение (4.1) для $\Omega_j(z)$, получаем

$$G_{j,1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (z-\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Big(-\frac{\lambda_+ + \gamma}{z-\lambda_+}P_j + \Omega_j(z)P_j^\perp\Big)\widetilde{T}_j$$
$$\times\Big(-\frac{\lambda_+ + \gamma}{z-\lambda_+}P_j + \Omega_j(z)P_j^\perp\Big)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz.$$

Учитывая тот факт, что оператор–функция $\Omega_j(z)P_j^\perp$ является голоморфной по z внутри контура Γ, а интеграл по Γ от функции голоморфной внутри контура равен нулю, получаем

$$G_{j,1} = (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j(\lambda_+ + \gamma)\widetilde{T}_j(\lambda_+ + \gamma)P_j(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} = (\lambda_+ + \gamma)P_j\,\widetilde{T}_j P_j. \tag{4.14}$$

Замечание 4.2. *Заметим, что из* (4.14) *следует, что* $G_{j,1} = P_j\,G_{j,1}P_j$.

Примем во внимание тот факт, что точка λ_+ является краем спектральной лакуны.

Лемма 4.3. *Пусть* (λ_-,λ_+) *— внутренняя лакуна в спектре оператора* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющая условию* (2.22). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда справедливо тождество*

$$G_{j,1} = P_j\,G_{j,1}P_j = 0. \tag{4.15}$$

Доказательство. В силу замечания 2.9 для $u\in L_2(\Omega)$ и $0\leqslant t\leqslant t_0$ имеем:

$$\big((A_j(t)-\lambda_+ I)F_j(t)u,u\big) = (E(t)-\lambda_+)\|F_j(t)u\|^2. \tag{4.16}$$

С другой стороны, из разложения (3.54) вытекает, что

$$\big((A_j(t)-\lambda_+ I)F_j(t)u,u\big) = t(G_{j,1}u,u) + t^2(\widetilde{G}_{j,2}(t)u,u). \tag{4.17}$$

Из оценок (2.26), (3.62) и равенств (4.16), (4.17) получаем, что

$$\frac{1}{t}|(G_{j,1}u,u)|\leqslant \mathrm{const},\quad u\in L_2(\Omega),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0.$$

Отсюда следует, что $(G_{j,1}u,u)=0$ для всех $u\in L_2(\Omega)$, что и доказывает утверждение леммы. □

Сопоставляя соотношения (4.14) и (4.15), заключаем, что

$$P_j\,\widetilde{T}_j P_j = 0. \tag{4.18}$$

Перейдем к вычислению оператора $G_{j,2}$. Проведем подробное вычисление. В силу (3.40) и (3.57)

$$G_{j,2} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} - R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)\Big)\,dz.$$

Подставляя в интеграл разложения (3.51) и (4.1), получаем

$$G_{j,2} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j \times\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2} - \Big(-\frac{1}{z-\lambda_+}P_j+R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\Big)X_{j,1}^*X_{j,1}\Big(-\frac{1}{z-\lambda_+}P_j+R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\Big)\Big)\,dz.$$

Слагаемые, содержащие $P_j\widetilde{T}_jP_j$, обратятся в ноль в силу (4.18). Имеем:

$$\begin{aligned}
G_{j,2} = &-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)^{-1}(\lambda_++\gamma)^2(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\lambda_++\gamma)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\lambda_++\gamma)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\lambda_++\gamma)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz\\
&-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)^{-1}P_jX_{j,1}^*X_{j,1}P_j\,dz-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}P_jX_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\,dz\\
&-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}R_{j,0}(z)P_j^{\perp}X_{j,1}^*X_{j,1}P_j\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)R_{j,0}(z)P_j^{\perp}X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\,dz.
\end{aligned}$$

Снова заметим, что оператор–функции $R_{j,0}(z)P_j^{\perp}$ и $\Omega_j(z)P_j^{\perp}$ голоморфны по z внутри контура Γ, а потому остаются лишь два интеграла:

$$G_{j,2} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)^{-1}(\lambda_++\gamma)^2(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}P_j\widetilde{T}_jP_j^{\perp}\Omega_j(z)P_j^{\perp}\widetilde{T}_jP_j(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(z-\lambda_+)^{-1}P_jX_{j,1}^*X_{j,1}P_j\,dz.$$

Используя представления (4.2) для $\Omega_j(z)P_j^{\perp}$ вместе с равенством (4.4), получаем

$$G_{j,2} = -P_j\,(\lambda_++\gamma)^{1/2}\,\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\,\widetilde{T}_j\,(\lambda_++\gamma)^{1/2}\,P_j + P_jX_{j,1}^*X_{j,1}P_j. \quad (4.19)$$

Замечание 4.4. *Из (4.19) следует, что* $G_{j,2} = P_j G_{j,2} P_j$.

Лемма 4.5. *Для коэффициента* $G_{j,2}$ *пороговой аппроксимации (3.56) справедливо следующее представление*

$$G_{j,2} = b_j(\boldsymbol{\theta}) P_j. \tag{4.20}$$

Здесь $b_j(\boldsymbol{\theta}) = \sum\limits_{k,l=1}^{d} b_{j,kl}\theta^k\theta^l$ *— положительно определенная квадратичная форма. Коэффициенты формы* b_j *вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned} b_{j,kl} = \Big(g_{kl}\frac{\varphi_j}{\omega}, \frac{\varphi_j}{\omega}\Big)_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{d} \operatorname{Re}\Big\{ \Big(g_{ln}(\mathrm{D}_n + \xi_j^n)\frac{\varphi_{j,k}}{\omega}, \frac{\varphi_j}{\omega}\Big)_{L_2(\Omega)} + \Big(g_{kn}(\mathrm{D}_n + \xi_j^n)\frac{\varphi_{j,l}}{\omega}, \frac{\varphi_j}{\omega}\Big)_{L_2(\Omega)} \\ + \Big(g_{ln}\frac{\varphi_{j,k}}{\omega}, (\mathrm{D}_n + \xi_j^n)\frac{\varphi_j}{\omega}\Big)_{L_2(\Omega)} + \Big(g_{kn}\frac{\varphi_{j,l}}{\omega}, (\mathrm{D}_n + \xi_j^n)\frac{\varphi_j}{\omega}\Big)_{L_2(\Omega)}\Big\}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

где функции $\varphi_{j,l}$ *являются единственными слабыми* $\mathbb{Z}^d$*–периодическими решениями задач* (2.35).

Доказательство. В силу тождества (2.59), замечания 4.4 и соотношения (4.19) справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G_{j,2} = \big(G_{j,2}\varphi_j, \varphi_j\big)_{L_2(\Omega)} P_j = -(\lambda_+ + \gamma)\big((A_{j,0} + \gamma I) R_j^{\perp}(\lambda_+)\widetilde{T}_j\varphi_j, \widetilde{T}_j\varphi_j\big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ + \big(X_{j,1}\varphi_j, X_{j,1}\varphi_j\big) P_j. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Из (4.8) и (4.22) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} G_{j,2} = -\Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^* X_{j,0}\varphi_j, X_{j,1}^* X_{j,0}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ - \Big(R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0} + \gamma I)^{1/2}\big(X_{j,0}(A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\big)^* X_{j,1}\varphi_j, X_{j,1}^* X_{j,0}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ - \Big((A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^* X_{j,0}\varphi_j, \big(X_{j,0}(A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\big)^* X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ - \Big((A_{j,0} + \gamma I) R_j^{\perp}(\lambda_+)\big(X_{j,0}(A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\big)^* X_{j,1}\varphi_j, \big(X_{j,0}(A_{j,0} + \gamma I)^{-1/2}\big)^* X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ + \Big(X_{j,1}\varphi_j, X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Используя полярное разложение (2.38) для оператора $R_j^{\perp}(\lambda_+)$, явные формулы (2.54), (2.55) для $X_{j,0}$ и $X_{j,1}$, а также тождество $h^* h = g$, преобразуем (4.23) к виду

$$\begin{aligned} G_{j,2} = -\Big(g\boldsymbol{\theta}\omega^{-1}\Big\{R_j^{\perp}(\lambda_+)\omega^{-1}\boldsymbol{\theta}^* g\big(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\big) \\ + |R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\operatorname{sgn} R_j^{\perp}(\lambda_+)\big(\boldsymbol{\theta}^* g\big(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\big)^*\Big\}\omega^{-1}\varphi_j, \big(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ - \Big(g\big(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}\Big\{R_j^{\perp}(\lambda_+)\omega^{-1}\boldsymbol{\theta}^* g\big(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\big) \\ + |R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\operatorname{sgn} R_j^{\perp}(\lambda_+)\big(\boldsymbol{\theta}^* g\big(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\big)\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\big)^*\Big\}\omega^{-1}\varphi_j, \boldsymbol{\theta}\omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \\ + \Big(g\boldsymbol{\theta}\omega^{-1}\varphi_j, \boldsymbol{\theta}\omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Из (4.11), (4.12) и (4.24) вытекает равенство

$$G_{j,2} = -\sum_{k,l=1}^{d} \theta^k\theta^l \sum_{n=1}^{d} \Bigg\{ \Big(g_{kn}\omega^{-1}\Big\{ R_j^{\perp}(\lambda_+)\omega^{-1}\sum_{p=1}^{d} g_{lp}\big(\mathrm{D}_p + \xi_j^p\big)$$

$$+ |R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\,\mathrm{sgn}\, R_j^{\perp}(\lambda_+)\sum_{p=1}^{d}\Big(g_{lp}\big(\mathrm{D}_p+\xi_j^p\big)\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\Big)^*\Big\}\omega^{-1}\varphi_j, \big(\mathrm{D}_n+\xi_j^n\big)\omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}$$

$$+ \Big(g_{kn}\big(\mathrm{D}_n+\xi_j^n\big)\omega^{-1}\Big\{R_j^{\perp}(\lambda_+)\omega^{-1}\sum_{p=1}^{d} g_{lp}\big(\mathrm{D}_p+\xi_j^p\big)$$

$$+ |R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\,\mathrm{sgn}\, R_j^{\perp}(\lambda_+)\sum_{p=1}^{d}\Big(g_{lp}\big(\mathrm{D}_p+\xi_j^p\big)\omega^{-1}|R_j^{\perp}(\lambda_+)|^{1/2}\Big)^*\Big\}\omega^{-1}\varphi_j, \omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}\Bigg\} P_j$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{d}\theta^k\theta^l\Big(g_{kl}\omega^{-1}\varphi_j, \omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} P_j \qquad (4.25)$$

Из (2.39), (4.25) и тех фактов, что $G_{j,2} = G_{j,2}^*$ и $\theta^k\theta^l = \theta^l\theta^k$, получаем искомые соотношения (4.20) и (4.21). □

Оператор $G_{j,3}$ вычисляется аналогично вычислению $G_{j,2}$. Соотношения (3.41) и (3.57) приводят нас к равенству

$$G_{j,3} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(z-\lambda_+)\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$$

$$- R_{j,0}(z)X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$$

$$- (A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Omega_j(z)\widetilde{T}_j\Omega_j(z)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}R_{j,0}(z)\Big)\, dz.$$

Подставляя в интеграл разложения (3.51) и (4.1), получаем

$$G_{j,3} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(z-\lambda_+)\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j$$

$$\times\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$$

$$-\Big(-\frac{1}{z-\lambda_+}P_j+R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\Big)X_{j,1}^*X_{j,1}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$$

$$\times\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}$$

$$-(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)\widetilde{T}_j$$

$$\times\Big(-\frac{\lambda_++\gamma}{z-\lambda_+}P_j+\Omega_j(z)P_j^{\perp}\Big)(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}X_{j,1}^*X_{j,1}\Big(-\frac{1}{z-\lambda_+}P_j+R_{j,0}(z)P_j^{\perp}\Big)\Big)\, dz.$$

Так же как и при вычислении $G_{j,2}$, слагаемые в интеграле, содержащие $P_j\widetilde{T}_jP_j$, обратятся в ноль в силу (4.18). Используя представление (4.2) для $\Omega_j(z)P_j^{\perp}$ вместе с равенством (4.4), получаем

$$
\begin{aligned}
G_{j,3} = (\lambda_+ + \gamma)\, P_j\, \widetilde{T}_j\, (A_{j,0} + \gamma I) R_j^{\perp}(\lambda_+)\, \widetilde{T}_j R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0} + \gamma I)\widetilde{T}_j P_j \\
+ (\lambda_+ + \gamma)^{3/2}\, P_j\, \widetilde{T}_j (A_{j,0} + \gamma I) R_j^{\perp}(\lambda_+)\, \widetilde{T}_j P_j\, \widetilde{T}_j\, (A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+) \\
+ (\lambda_+ + \gamma)^{3/2}\, (A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+)\, \widetilde{T}_j P_j\, \widetilde{T}_j (A_{j,0} + \gamma I) R_j^{\perp}(\lambda_+)\, \widetilde{T}_j P_j \\
- (\lambda_+ + \gamma)^{1/2}\, P_j X_{j,1}^* X_{j,1} P_j\, \widetilde{T}_j (A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+) \\
- (\lambda_+ + \gamma)^{1/2}\, P_j X_{j,1}^* X_{j,1} (A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+)\, \widetilde{T}_j P_j \\
- (\lambda_+ + \gamma)^{1/2}\, P_j\, \widetilde{T}_j R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} X_{j,1}^* X_{j,1} P_j \\
- (\lambda_+ + \gamma)^{1/2}\, (A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} R_j^{\perp}(\lambda_+)\, \widetilde{T}_j P_j X_{j,1}^* X_{j,1} P_j. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Лемма 4.6. *Для коэффициента $G_{j,3}$ пороговой аппроксимации (3.56) справедливо представление*

$$
P_j G_{j,3} P_j = d_j(\boldsymbol{\theta}) P_j. \qquad (4.27)
$$

Здесь $d_j(\boldsymbol{\theta}) = \sum\limits_{l,k,p=1}^{d} d_{j,lkp} \theta^l \theta^k \theta^p$ — кубическая форма. Коэффициенты $d_{j,lkp}$ вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
d_{j,lkp} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{d} \operatorname{Re} \Big\{ \big(g_{pn} (\mathrm{D}_n + \xi_j^n) \omega^{-1} \varphi_{j,l}, \omega^{-1} \varphi_{j,k}\big)_{L_2(\Omega)} + \big(g_{pn} \omega^{-1} \varphi_{j,l}, (\mathrm{D}_n + \xi_j^n) \omega^{-1} \varphi_{j,k}\big)_{L_2(\Omega)} \\
+ \big(g_{ln} (\mathrm{D}_n + \xi_j^n) \omega^{-1} \varphi_{j,p}, \omega^{-1} \varphi_{j,k}\big)_{L_2(\Omega)} + \big(g_{ln} \omega^{-1} \varphi_{j,p}, (\mathrm{D}_n + \xi_j^n) \omega^{-1} \varphi_{j,k}\big)_{L_2(\Omega)} \\
+ \big(g_{kn} (\mathrm{D}_n + \xi_j^n) \omega^{-1} \varphi_{j,p}, \omega^{-1} \varphi_{j,l}\big)_{L_2(\Omega)} + \big(g_{kn} \omega^{-1} \varphi_{j,p}, (\mathrm{D}_n + \xi_j^n) \omega^{-1} \varphi_{j,l}\big)_{L_2(\Omega)} \Big\} \\
+ \frac{2}{3} \Big\{ \operatorname{Re} \Big(g_{kp} \omega^{-1} \varphi_{j,l}, \omega^{-1} \varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} + \operatorname{Re} \Big(g_{lp} \omega^{-1} \varphi_{j,k}, \omega^{-1} \varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} \\
+ \operatorname{Re} \Big(g_{kl} \omega^{-1} \varphi_{j,p}, \omega^{-1} \varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)} \Big\}, \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

где функции $\varphi_{j,l}$ — единственные слабые $\mathbb{Z}^d$–периодические решения задач (2.35).

Доказательство. В силу тождества (2.59) и соотношения (4.26) получаем

$$
\begin{aligned}
P_j G_{j,3} P_j = \big(G_{j,3} \varphi_j, \varphi_j\big)_{L_2(\Omega)} P_j \\
= (\lambda_+ + \gamma) \big((A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} \widetilde{T}_j R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0} + \gamma I) \widetilde{T}_j \varphi_j, R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} \widetilde{T}_j \varphi_j\big)_{L_2(\Omega)} P_j \\
- 2(\lambda_+ + \gamma)^{1/2} \operatorname{Re} \big(X_{j,1} R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0} + \gamma I)^{1/2} \widetilde{T}_j \varphi_j, X_{j,1} \varphi_j\big)_{L_2(\Omega)} P_j. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Из (4.8) и (4.29) и следует соотношение

$$P_jG_{j,3}P_j = \Big((A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j, R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j$$
$$+\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_jR_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)\big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j, R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j$$
$$+\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j,$$
$$R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j$$
$$+\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_jR_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)\big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j,$$
$$R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j$$
$$-2\,\mathrm{Re}\,\Big(X_{j,1}R_j^{\perp}(\lambda_+)X_{j,1}^*X_{j,0}\varphi_j, X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j$$
$$-2\,\mathrm{Re}\,\Big(X_{j,1}R_j^{\perp}(\lambda_+)(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\big(X_{j,0}(A_{j,0}+\gamma I)^{-1/2}\big)^*X_{j,1}\varphi_j, X_{j,1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j.$$

Применяя полярное разложение (2.38) для оператора $R_j^{\perp}(\lambda_+)$, пользуясь обозначением (2.39), определениями (2.54), (2.55), тождеством $h^*h=g$, а также соотношениями (4.11), (4.12), приходим к равенству

$$P_jG_{j,3}P_j = \sum_{l,k=1}^{d}\theta^l\theta^k\Big((A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\widetilde{T}_j(A_{j,0}+\gamma I)^{1/2}\varphi_{j,l},\varphi_{j,k}\Big)_{L_2(\Omega)}P_j$$
$$+2\,\mathrm{Re}\sum_{l,k,p=1}^{d}\theta^l\theta^k\theta^p\Big(g_{kp}\omega^{-1}\varphi_{j,l},\omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}P_j.$$

Вспоминая определение (3.4) и подставляя явные формулы (2.54), (2.55) для $X_{j,0}$, $X_{j,1}$, получаем

$$P_jG_{j,3}P_j = \sum_{l,k,p=1}^{d}\theta^l\theta^k\theta^p\Big\{\sum_{n=1}^{d}\Big(\big(g_{pn}(\mathrm{D}_n+\xi_j^n)\omega^{-1}\varphi_{j,l},\omega^{-1}\varphi_{j,k}\big)_{L_2(\Omega)}$$
$$+\big(g_{pn}\omega^{-1}\varphi_{j,l},(\mathrm{D}_n+\xi_j^n)\omega^{-1}\varphi_{j,k}\big)_{L_2(\Omega)}\Big)$$
$$+2\,\mathrm{Re}\,\Big(g_{kp}\omega^{-1}\varphi_{j,l},\omega^{-1}\varphi_j\Big)_{L_2(\Omega)}\Big\}P_j. \qquad (4.30)$$

Из (4.30) и того факта, что $\theta^l\theta^k\theta^p$ не зависит от перестановки индексов, следуют искомые соотношения (4.27) и (4.28). $\square$

§ 5. Аппроксимация оператор–функции $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$

5.1. **Выделение главной части аппроксимации.** Фиксируем число $\varkappa>0$ такое, что

$$\lambda_+-\varkappa^2-\lambda_->0.$$

Тогда при всех $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ определена резольвента $(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$.

Обозначим

$$\varrho := \min_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{T}^d\setminus\big(\bigcup_{j=1}^{m}\mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)\big)}\big(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+\big). \qquad (5.1)$$

Тогда $\varrho > 0$. Действительно, заметим, что $\mathbb{T}^d \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)\right)$ — компактное многообразие. Неотрицательная функция $E - \lambda_+$ непрерывна на $\mathbb{T}^d \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)\right)$, а значит достигает своего наименьшего значения. Это наименьшее значение не равно нулю, так как тогда бы точка, где достигается ноль, была бы точкой минимума зонной функции E, а они все исключены.

Обозначим

$$\widehat{C}_{18} := \frac{1}{\min\{\lambda_+ - \varkappa^2 - \lambda_-, \varrho\}}. \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)\right)$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2} \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} \right\| \leqslant C_{18}, \\ &C_{18} := \sqrt{\widehat{C}_{18} + \lambda_+ \widehat{C}_{18}^2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство. Для $u \in L_2(\Omega)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2} \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} u \right\|^2 \\ &\qquad = \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} u, \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} u \right) \\ &= \left(u, \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} u \right) + \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) \left\| \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} u \right\|^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Последнее равенство получено путем добавления и вычитания $\left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I$ у оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$. С учетом (5.1) и (5.2) при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)\right)$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| (\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - (\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2) I)^{-1} \right\| &= \frac{1}{\operatorname{dist}\left\{\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2, \sigma\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})\right)\right\}} \\ &\leqslant \frac{1}{\min\{\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2 - \lambda_-, \varrho + \varkappa^2\varepsilon^2\}} \leqslant \widehat{C}_{18}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из (5.4) и (5.5) получаем искомое неравенство (5.3). ☐

Обозначим

$$\widehat{C}_{19} := \frac{1}{\min\left\{\lambda_+ - \varkappa^2 - \lambda_-, \, 2d_0/3\right\}}.$$

Лемма 5.2. *Пусть* (λ_-, λ_+) *— внутренняя лакуна в спектре оператора* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющая условию* (2.22). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда при* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j = 1, \dots, m$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2} \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} F^{\perp}(\boldsymbol{\xi}) \right\| \leqslant C_{19}, \\ &C_{19} := \sqrt{\widehat{C}_{19} + \lambda_+ \widehat{C}_{19}^2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Доказательство. Напомним, что $F(\boldsymbol{\xi})$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ для промежутка $[\lambda_+, \lambda_+ + d_0/3]$ и выполнено первое соотношение в (2.27). Так как $F^{\perp}(\boldsymbol{\xi})$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ для $[0, \lambda_-] \cup [\lambda_+ + 2d_0/3, +\infty]$, то в силу спектральной теоремы резольвента допускает оценку

$$\left\| \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2\right) I\right)^{-1} F^{\perp}(\boldsymbol{\xi}) \right\| \leqslant \widehat{C}_{19}. \tag{5.7}$$

Из (5.4) и (5.7) следует искомая оценка (5.6). ☐

Лемма 5.3. *Пусть* (λ_-,λ_+) — *внутренняя лакуна в спектре оператора* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющая условию* (2.22). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда при* $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j=1,\dots,m$, *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\left\|\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}F(\boldsymbol{\xi})\right\|\leqslant\frac{1}{c_*|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2+\varkappa^2\varepsilon^2},\tag{5.8}$$

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}F(\boldsymbol{\xi})\right\|\leqslant\frac{C_{20}}{c_*|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2+\varkappa^2\varepsilon^2},\tag{5.9}$$

$$C_{20}:=\sqrt{\lambda_++d_0/3}.$$

Доказательство. Оператор $F(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j=1,\dots,m$, — это спектральный проектор на одномерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению $E(\boldsymbol{\xi})$ (см. замечание 2.9). Из данного наблюдения и первой оценки в (2.26) вытекают соотношения

$$\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+I\right)F(\boldsymbol{\xi})=([E(\boldsymbol{\xi})]-\lambda_+I)F(\boldsymbol{\xi})\geqslant c_*|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2F(\boldsymbol{\xi}).\tag{5.10}$$

Из (5.10) следует оценка (5.8). Перейдем к доказательству (5.9). Заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}F(\boldsymbol{\xi})\right\|\\&\qquad\leqslant\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}F(\boldsymbol{\xi})\right\|\left\|\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}F(\boldsymbol{\xi})\right\|.\end{aligned}\tag{5.11}$$

В силу спектральной теоремы

$$\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}F(\boldsymbol{\xi})\|\leqslant\sqrt{\lambda_++d_0/3}=C_{20},\quad\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j).\tag{5.12}$$

Из соотношений (5.8), (5.11) и (5.12) вытекает оценка (5.9). $\square$

Из лемм 5.1, 5.2 и 5.3 следует, что основной вклад в асимптотику оператор–функции $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}$ будет давать $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}F(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j=1,\dots,m$.

Зафиксируем произвольную точку минимума и введем одномерный параметр t так же как в пункте 2.3. Для краткости обозначим:

$$\widehat{R}_j(t,\varepsilon):=\left(A_j(t)-\left(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2\right)I\right)^{-1}F_j(t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\tag{5.13}$$

$$\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon):=\left(t^2G_{j,2}P_j+\varkappa^2\varepsilon^2I\right)^{-1}P_j,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\tag{5.14}$$

Лемма 5.4. *Пусть* (λ_-,λ_+) — *внутренняя лакуна в спектре оператора* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющая условию* (2.22). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда справедливы оценки*

$$\left\|\widehat{R}_j(t,\varepsilon)\right\|\leqslant\frac{1}{c_*t^2+\varkappa^2\varepsilon^2},\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\tag{5.15}$$

$$\left\|\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\right\|\leqslant\frac{1}{2c_*t^2+\varkappa^2\varepsilon^2},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\tag{5.16}$$

Доказательство. Неравенство (5.15) следует из оценки (5.8). Второе соотношение вытекает из оценки (2.24), представления (4.20) и того факта, что P_j — ортогональный проектор. $\square$

5.2. **Новое резольвентное тождество.**

Лемма 5.5. *При* $0\leqslant t\leqslant t_0$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *для оператора* $\widehat{R}_j(t,\varepsilon)$ *справедливо представление*

$$\widehat{R}_j(t,\varepsilon)=F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)+\widehat{R}_j(t,\varepsilon)\Phi_j(t,\varepsilon),\tag{5.17}$$

где

$$\Phi_j(t,\varepsilon) := F_j(t) - P_j + \Big(t^2 G_{j,2} P_j - \big(A_j(t)F_j(t) - \lambda_+ F_j(t)\big)\Big)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon). \tag{5.18}$$

Доказательство. Так как $\widehat{R}_j(t,\varepsilon) = \widehat{R}_j(t,\varepsilon)F_j(t)$, то справедливо равенство

$$\widehat{R}_j(t,\varepsilon) = \widehat{R}_j(t,\varepsilon)F_j(t)(F_j(t) - P_j + P_j) = \widehat{R}_j(t,\varepsilon)(F_j(t) - P_j) + F_j(t)\widehat{R}_j(t,\varepsilon)P_j. \tag{5.19}$$

Рассмотрим разность $F_j(t)\widehat{R}_j(t,\varepsilon)P_j - F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)P_j$. В силу резольвентного тождества для ограниченных операторов имеем:

$$F_j(t)\widehat{R}_j(t,\varepsilon)P_j - F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)P_j = \widehat{R}_j(t,\varepsilon)\Big(t^2 G_{j,2}P_j - \big(A_j(t)F_j(t) - \lambda_+ F_j(t)\big)\Big)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon). \tag{5.20}$$

Из (5.19) и (5.20) следует искомое тождество (5.17). $\square$

Предложение 5.6. *При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ оператор $\Phi_j(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке*

$$\|\Phi_j(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{21} t, \tag{5.21}$$

$$C_{21} := \Big(C_{11} + \frac{d_0}{4c_*}C_{16}\Big)\frac{1}{2\pi} l_\Gamma.$$

Доказательство. В силу представлений (3.46) и (3.55), равенства (4.15), оценок (3.60), (3.62) для операторов $\widetilde{F}_{j,1}(t)$, $\widetilde{G}_{j,3}(t)$, неравенства (5.16), а также определения (5.18) оператора $\Phi_j(t,\varepsilon)$ получаем

$$\|\Phi_j(t,\varepsilon)\| \leqslant t\frac{1}{2\pi}C_{11} l_\Gamma + t^3 \frac{d_0}{4\pi} C_{16} l_\Gamma \frac{1}{2c_* t^2 + \varkappa^2\varepsilon^2} \leqslant t\Big(C_{11} + \frac{d_0}{4c_*}C_{16}\Big)\frac{1}{2\pi} l_\Gamma.$$

Отсюда следует искомая оценка (5.21). $\square$

Домножим обе части тождества (5.17) на $A_j(t)^{1/2}$. Определим оператор

$$\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon) := A_j(t)^{1/2}\widehat{R}_j(t,\varepsilon). \tag{5.22}$$

Из леммы 5.3, а именно, из неравенства (5.9) следует оценка для нормы оператора $\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)$.

Предложение 5.7. *При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ оператор $\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке*

$$\Big\|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\Big\| \leqslant \frac{C_{20}}{c_* t^2 + \varkappa^2\varepsilon^2}. \tag{5.23}$$

Так как оператор $A_j(t)^{1/2}$ коммутирует с $F_j(t)$, из (5.17) следует, что

$$\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon) = F_j(t)A_j(t)^{1/2}\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) + \widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\Phi_j(t,\varepsilon). \tag{5.24}$$

Проитерируем тождество (5.24):

$$\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon) = F_j(t)A_j(t)^{1/2}\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) + F_j(t)A_j(t)^{1/2}\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\Phi_j(t,\varepsilon) + \widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\Phi_j^2(t,\varepsilon). \tag{5.25}$$

Оценим последнее слагаемое в (5.25).

Предложение 5.8. *При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ оператор $\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\Phi_j^2(t,\varepsilon)$ удовлетворяет оценке*

$$\Big\|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\Phi_j^2(t,\varepsilon)\Big\| \leqslant C_{22}, \quad C_{22} := C_{20}C_{21}^2/c_*. \tag{5.26}$$

Доказательство. В силу неравенств (5.21) и (5.23) имеем:

$$\Big\|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\Phi_j^2(t,\varepsilon)\Big\| \leqslant \|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\|\|\Phi_j(t,\varepsilon)\|^2 \leqslant \frac{C_{21}^2 C_{20} t^2}{c_* t^2 + \varkappa^2\varepsilon^2} \leqslant C_{21}^2 C_{20}/c_*,$$

откуда и следует искомое неравенство. $\square$

Перейдем ко второму слагаемому в (5.25). В силу (5.18) и разложений (3.47), (3.56) для оператор–функции $\Phi_j(t,\varepsilon)$ справедливо представление

$$\Phi_j(t,\varepsilon) = \Phi_{j,0}(t,\varepsilon) + \Phi_{j,1}(t,\varepsilon). \tag{5.27}$$

Здесь

$$\Phi_{j,0}(t,\varepsilon) := tF_{j,1} - t^3 G_{j,3} P_j \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon), \tag{5.28}$$

$$\Phi_{j,1}(t,\varepsilon) := t^2 \widetilde{F}_{j,2}(t) - t^4 \widetilde{G}_{j,4}(t) \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon). \tag{5.29}$$

Предложение 5.9. *При* $0 \leqslant t \leqslant t_0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\Phi_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{23} t, \quad C_{23} := \frac{1}{2\pi} l_\Gamma \Big(C_{12} + \frac{d_0}{4c_*} C_{14} \Big), \tag{5.30}$$

$$\|\Phi_{j,1}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{24} t^2, \quad C_{24} := \frac{1}{2\pi} l_\Gamma \Big(C_{15} + \frac{d_0}{4c_*} C_{17} \Big). \tag{5.31}$$

Доказательство. Из определения (5.28) оператора $\Phi_{j,0}(t,\varepsilon)$, оценок (3.59), (3.61) (для нормы оператора $G_{j,3}$) и (5.16) вытекает цепочка неравенств:

$$\|\Phi_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant t\, \|F_{j,1}\| + t^3 \|G_{j,3}\| \|\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma \Big(C_{12} + \frac{d_0}{4c_*} C_{14} \Big) t.$$

Это доказывает оценку (5.30). Соотношения (3.60), (3.62) для операторов $\widetilde{F}_{j,2}(t)$, $\widetilde{G}_{j,4}(t)$, а также неравенство (5.16) и определение (5.29) влекут

$$\|\Phi_{j,1}(t,\varepsilon)\| \leqslant t^2 \|\widetilde{F}_{j,2}(t)\| + t^4 \|\widetilde{G}_{j,4}(t)\| \|\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} l_\Gamma \Big(C_{15} + \frac{d_0}{4c_*} C_{17} \Big) t^2.$$

Это доказывает оценку (5.31). ☐

Предложение 5.10. *При* $0 \leqslant t \leqslant t_0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|A_j(t)^{1/2} F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,1}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{25}, \quad C_{25} := \frac{C_{20} C_{24}}{2c_*}. \tag{5.32}$$

Доказательство. Из соотношений (5.12), (5.16) и (5.31) вытекает цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|A_j(t)^{1/2} F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,1}(t,\varepsilon)\| &\leqslant \|A_j(t)^{1/2} F_j(t)\| \|\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\| \|\Phi_{j,1}(t,\varepsilon)\| \\ &\leqslant C_{20} C_{24} (2c_* t^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} t^2 \leqslant C_{20} C_{24} / 2c_*. \end{aligned}$$

☐

Лемма 5.11. *При* $0 \leqslant t \leqslant t_0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \|A_j(t)^{1/2} F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2} \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{26}, \\ C_{26} := \frac{1}{4\pi c_*} l_\Gamma C_7 C_8 C_{23} \Big(C_5 C_9 + \gamma^{-1/2} t_0 C_{10} \Big). \end{gathered} \tag{5.33}$$

Доказательство. В силу разложения (3.46) справедливо равенство

$$A_j(t)^{1/2} F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2} P_j \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,0}(t,\varepsilon) = t A_j(t)^{1/2} \widetilde{F}_{j,1}(t) \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,0}(t,\varepsilon). \tag{5.34}$$

Из соотношений (5.16) и (5.30) следует неравенство

$$\|t \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Phi_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{C_{23}}{2c_*}.$$

Отсюда, а также из (3.63) и (5.34) вытекает искомая оценка (5.33). ☐

Лемма 5.12. *При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|A_j(t)^{1/2}F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}(P_j + tF_{j,1})\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant C_{27}, \tag{5.35}$$
$$C_{27} := \frac{1}{4\pi c_*} l_\Gamma C_7 C_8 \Big(C_5^2 C_8 C_9 + \gamma^{-1/2} C_{10} + t_0 \gamma^{-1/2} C_5 C_8 C_{10} \Big).$$

Доказательство. В силу разложения (3.47) справедливо равенство

$$A_j(t)^{1/2}F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}(P_j + tF_{j,1})\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) = t^2 A_j(t)^{1/2}\widetilde{F}_{j,2}(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon). \tag{5.36}$$

Из (5.16) следует неравенство

$$\|t^2 \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{1}{2c_*}. \tag{5.37}$$

В силу (3.64), (5.36) и (5.37) справедлива оценка (5.35). $\square$

Введем операторы

$$R(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) := (\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - (\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$$
$$\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) := \big(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^2 G_{j,2} + \varkappa^2\varepsilon^2 I\big)^{-1} P_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad j = 1,\dots,m, \tag{5.38}$$
$$S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) := |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j| F_{j,1}\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad j = 1,\dots,m, \tag{5.39}$$
$$S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) := -|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^3 \widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) G_{j,3} \widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon), \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \quad j = 1,\dots,m. \tag{5.40}$$

Из соотношений (2.35) (а именно, условия $(\varphi_{j,l},\varphi_j)_{L_2(\Omega)} = 0$), (2.53), (4.7), (4.20), (4.27), (5.38), (5.39) и (5.40) вытекает, что

$$\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) = \frac{1}{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2} P_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \tag{5.41}$$
$$S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) = \sum_{l=1}^{d} [\varphi_{j,l}] \frac{(\xi^l - \xi_j^l)}{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2} (\cdot,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}, \tag{5.42}$$
$$S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) = -\frac{d_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)}{\big(b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2\big)^2} P_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}. \tag{5.43}$$

В итоге получаем следующую теорему.

Теорема 5.13. *Предположим, что правый край лакуны (λ_-,λ_+) регулярен, т.е. выполнено условие 2.6. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\Big\| \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2} \Big(R(\boldsymbol{\xi},\varepsilon) - \widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) \\ - \Big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) + \big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\big)^* + S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon) \Big) \Big) \Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{28}, \\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j), \quad j = 1,\dots,m,\end{gathered} \tag{5.44}$$

где $C_{28} = C_{19} + C_{22} + C_{25} + C_{26} + C_{27}$.

Доказательство. Отметим, что в прежних обозначениях оценка (5.44) равносильна неравенству

$$\begin{gathered}\Big\| A_j(t)^{1/2} \Big((A_j(t) - (\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1} \\ - \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) - t\big(F_{j,1}\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) + \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)F_{j,1}\big) + t^3 \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) G_{j,3} \widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) \Big) \Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{28}, \\ 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.\end{gathered} \tag{5.45}$$

Из тождества (5.25) и предложения 5.8 следует, что

$$\left\|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\Phi_j(t,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{22},$$
$$0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Представляя оператор–функцию $\Phi_j(t,\varepsilon)$ в виде суммы (5.27) и пользуясь оценкой (5.32) из предложения 5.10, приходим к соотношению

$$\left\|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}F_j(t)\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\Phi_{j,0}(t,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{22}+C_{25},$$
$$0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Отсюда и из лемм 5.11 и 5.12 вытекает оценка

$$\left\|\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}(P_j+tF_{j,1})\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon) - A_j(t)^{1/2}\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)\Phi_{j,0}(t,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant C_{22}+C_{25}+C_{26}+C_{27}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{5.46}$$

Заметим, что из леммы 5.2 и определения (5.22) оператора $\widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)$ следует оценка

$$\left\|A_j(t)^{1/2}(A_j(t)-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1} - \widehat{\mathcal{U}}_j(t,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{19}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{5.47}$$

Из оценок (5.46), (5.47) и определения (5.28) оператора $\Phi_{j,0}(t,\varepsilon)$ получаем неравенство (5.45). $\square$

Обозначим

$$C_{29} := \frac{1}{2c_* t_0}\big(t_0^{-1}\sqrt{\lambda_+} + \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\big),$$
$$C_{30} := \frac{1}{2c_*}\big(t_0^{-1}C_4 + \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}C_3\big),$$
$$C_{31} := \frac{1}{2c_*}\big(t_0^{-1}\sqrt{\lambda_+} + \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\big)C_3,$$
$$C_{32} := \frac{d_0 l_\Gamma}{16\pi c_*^2}\big(t_0^{-1}\sqrt{\lambda_+} + \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\omega_0^{-1}\big)C_{14}.$$

Лемма 5.14. *При $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega} \setminus \mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$ справедливы оценки*

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{29}, \quad j=1,\dots,m, \tag{5.48}$$
$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{30}, \quad j=1,\dots,m, \tag{5.49}$$
$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\big)^*\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{31}, \quad j=1,\dots,m, \tag{5.50}$$
$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{32}, \quad j=1,\dots,m. \tag{5.51}$$

Доказательство. Для функции $v \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ в силу соотношений (2.7), (2.51), (2.52) и (2.54) имеем:

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}v\right\|_{L_2(\Omega)} = \left\|\mathcal{X}_j(\boldsymbol{\eta})v\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \left\|X_{j,0}v\right\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|\omega_0^{-1}\|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из представлений (5.41), (5.42) и (5.43) для функции $f \in L_2(\Omega)$ следует, что

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)f\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\Big(\left\|X_{j,0}\varphi_j\right\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|\omega_0^{-1}\Big)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.52}$$

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)f\right\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\sum_{l=1}^d\Big(\left\|X_{j,0}\varphi_{j,l}\right\|_{L_2(\Omega)}+\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|\omega_0^{-1}\|\varphi_{j,l}\|_{L_2(\Omega)}\Big)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5.53)$$

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon))^*f\right\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant \frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\Big(\left\|X_{j,0}\varphi_j\right\|_{L_2(\Omega)}+\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|\omega_0^{-1}\Big)\sum_{l=1}^d\|\varphi_{j,l}\|_{L_2(\Omega)}\|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5.54)$$

$$\left\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)f\right\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant \frac{|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|}{(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2)^2}\Big(\left\|X_{j,0}\varphi_j\right\|_{L_2(\Omega)}+\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|\omega_0^{-1}\Big)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5.55)$$

Пользуясь оценкой (2.24) и условием нормировки функции φ_j, получаем соотношения

$$\left\|X_{j,0}\varphi_j\right\|^2_{L_2(\Omega)}=\big(A_{j,0}\varphi_j,\varphi_j\big)=\lambda_+, \quad (5.56)$$
$$\frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^\alpha}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\leqslant (2c_*)^{-1}t_0^{-2+\alpha},\quad \alpha\in(-\infty,2],\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j). \quad (5.57)$$

Из соотношений (5.52), (5.56) и (5.57) следует (5.48). В силу (2.40), (2.41), (5.53), (5.54) и (5.57) получаем (5.49) и (5.50). Из оценки (3.61) (для нормы оператора $G_{j,3}$) и тождества (4.27) получаем, что

$$|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|\leqslant\frac{d_0 l_\Gamma}{4\pi}C_{14}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^3. \quad (5.58)$$

Отсюда, а также из (5.55) и соотношений (5.56), (5.57) вытекает неравенство (5.51). $\square$

Теорема 5.13 дает аппроксимацию оператор–функции $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$ в окрестности одной точки минимума зонной функции E. Применяя данную теорему и леммы 5.1, 5.14, мы получаем аппроксимацию оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$ при всех $\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}$.

Теорема 5.15. *Предположим, что правый край лакуны (λ_-,λ_+) регулярен, т.е. выполнено условие 2.6. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\Big\|\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})^{1/2}\Big(R(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)-\sum_{j=1}^m\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)$$
$$-\sum_{j=1}^m\Big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)+\big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\big)^*+S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big)\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_{33}^+,\quad \boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega},$$

где

$$C_{33}^+:=\max\big\{C_{18},C_{28}\big\}+m(C_{29}+C_{30}+C_{31}+C_{32}). \quad (5.59)$$

Замечание 5.16. *Индекс “+” в константе C_{33}^+ соответствует тому факту, что все константы C_k, $k=1,\dots,32$ и m на самом деле зависят от правого края внутренней спектральной лакуны. Можно доказать аналогичную теорему для левого края спектральной лакуны (точки λ_-) с константой C_{33}^-.*

5.3. **Переход к операторам, действующим в $L_2(\mathbb{R}^d)$.** Введем обозначения

$$\psi_j(\boldsymbol{x}) := e^{i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\varphi_j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1,\dots,m, \tag{5.60}$$

$$\psi_{j,l}(\boldsymbol{x}) := e^{i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\varphi_{j,l}(\boldsymbol{x}), \quad j = 1,\dots,m, \quad l = 1,\dots,d. \tag{5.61}$$

Заметим, что

$$\|\psi_j\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\varphi_j\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \|\psi_{j,l}\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\varphi_{j,l}\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{5.62}$$

Определим оператор

$$\Pi_j := \Phi^*[\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}+\boldsymbol{\xi}_j}]\Phi. \tag{5.63}$$

Пусть $b_j(\mathbf{D})$ — это дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$b_j(\mathbf{D}) := \sum_{k,l=1}^d b_{j,kl}\,\mathrm{D}_k\,\mathrm{D}_l, \tag{5.64}$$

где коэффициенты $b_{j,kl}$, $j = 1,\dots,m$, $k,l = 1,\dots,d$, определены в (4.21).

Пусть $d_j(\mathbf{D})$ — это дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$d_j(\mathbf{D}) := \sum_{k,l,p=1}^d d_{j,klp}\,\mathrm{D}_k\,\mathrm{D}_l\,\mathrm{D}_p, \tag{5.65}$$

где коэффициенты $d_{j,klp}$, $j = 1,\dots,m$, $k,l,p = 1,\dots,d$, определены в (4.28). Обозначим

$$S_j^{(1)}(\varepsilon) := \sum_{l=1}^d [\psi_{j,l}]\,\mathrm{D}_l(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}\Pi_j[\overline{\psi_j}], \quad j = 1,\dots,m, \tag{5.66}$$

$$S_j^{(3)}(\varepsilon) := -[\psi_j](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}d_j(\mathbf{D})(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}\Pi_j[\overline{\psi_j}], \quad j = 1,\dots,m. \tag{5.67}$$

Лемма 5.17. *Пусть $\mathcal{U}$ — преобразование Гельфанда, определенное в пункте* 2.2. Справедливо соотношение

$$\mathcal{U}^{-1}\Big[\widehat{R}_{j,0}(\cdot - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big]\mathcal{U} = [\psi_j](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}\Pi_j[\overline{\psi_j}]. \tag{5.68}$$

Доказательство. Для $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ вычислим квадратичную форму оператора в левой части (5.68), пользуясь определением (2.14), предложением 2.15, унитарностью оператора $\mathcal{U}$, равенством (5.38), а также условием нормировки $\|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$:

$$\begin{aligned}
\Big(\mathcal{U}^{-1}\Big[\widehat{R}_{j,0}(\cdot - \boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big]\mathcal{U}f, f\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \left(\left[\frac{1}{b_j(\cdot - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2}P_j\right][P_j]\mathcal{U}f, [P_j]\mathcal{U}f\right)_{\mathcal{K}} \\
&= \int_\Omega d\boldsymbol{x}\int_{\widetilde{\Omega}} d\boldsymbol{\xi}\, \frac{1}{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2}\varphi_j(\boldsymbol{x})\Phi\big([\overline{\varphi_j}]f\big)(\boldsymbol{\xi})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})\Phi\big([\overline{\varphi_j}]f\big)(\boldsymbol{\xi})} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{\xi}\, \frac{\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})}{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2}\Phi\big([\overline{\varphi_j}]f\big)(\boldsymbol{\xi})\overline{\Phi\big([\overline{\varphi_j}]f\big)(\boldsymbol{\xi})} \\
&= \left([\varphi_j]\Phi^*\left[\frac{\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}(\cdot)}{b_j(\cdot - \boldsymbol{\xi}_j) + \varkappa^2\varepsilon^2}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}]f, f\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Примем во внимание также тождество

$$\Phi^*[\vartheta(\cdot - \boldsymbol{\xi}_j)]\Phi = [e^{i\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}]\Phi^*[\vartheta]\Phi[e^{-i\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}], \quad \vartheta \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{5.70}$$

Из (5.60), (5.63), (5.69) и (5.70) следует искомое равенство (5.68). $\square$

Лемма 5.18. *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{U}^{-1}\Big[S_j^{(1)}(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big]\mathcal{U}=S_j^{(1)}(\varepsilon). \tag{5.71}$$

Доказательство. Для $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ вычислим квадратичную форму оператора в левой части (5.71), пользуясь унитарностью оператора $\mathcal{U}$ и соотношениями (2.19), (2.20) и (5.42):

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{U}^{-1}\Big[S_j^{(1)}(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big]\mathcal{U}f,f\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}&=\Big(\Big[S_j^{(1)}(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big]\mathcal{U}f,\mathcal{U}f\Big)_{\mathcal{K}}\\&=\sum_{l=1}^{d}\int_{\Omega}d\boldsymbol{x}\int_{\widetilde{\Omega}}d\boldsymbol{\xi}\;\varphi_{j,l}(\boldsymbol{x})\frac{(\xi^l-\xi_j^l)}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\Phi\big([\overline{\varphi_j}]f\big)(\boldsymbol{\xi})\overline{(\mathcal{U}f)(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})}\\&=\sum_{l=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{\xi}\;\frac{(\xi^l-\xi_j^l)\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\Phi\big([\overline{\varphi_j}]f\big)(\boldsymbol{\xi})\overline{\Phi\big([\overline{\varphi_{j,l}}]f\big)(\boldsymbol{\xi})}.\end{aligned} \tag{5.72}$$

Здесь было учтено, что функции $\varphi_j,\varphi_{j,l}\in L_\infty(\Omega)$ (см. замечания 2.10, 2.11). В силу равенств (5.60), (5.61), (5.70) и (5.72) получаем искомое тождество (5.71). $\square$

Лемма 5.19. *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{U}^{-1}[S_j^{(3)}(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)]\mathcal{U}=S_j^{(3)}(\varepsilon). \tag{5.73}$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 5.17 для $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$ вычислим квадратичную форму оператора в левой части (5.73), пользуясь предложением 2.15, унитарностью оператора $\mathcal{U}$, условием нормировки $\|\varphi_j\|_{L_{2,}(\Omega)}=1$, соотношением (2.14) и равенством (5.43):

$$\Big(\mathcal{U}^{-1}[S_j^{(3)}(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)]\mathcal{U}f,f\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\Bigg([\varphi_j]\Phi^*\Bigg[-\frac{d_j(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j)\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}(\cdot)}{\big(b_j(\cdot-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2\big)^2}\Bigg]\Phi[\overline{\varphi_j}]f,f\Bigg)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \tag{5.74}$$

В силу (5.70) и (5.74) получаем искомое равенство (5.73). $\square$

Из теоремы 5.15 и лемм 5.17, 5.18 и 5.19 вытекает следующий результат.

Теорема 5.20. *Предполагается, что правый край лакуны (λ_-,λ_+) регулярен, т.е. выполнено условие 2.6. Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{A}^{1/2}\Big((\mathcal{A}-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}\\&-\sum_{j=1}^{m}[\psi_j](b_j(\mathbf{D})+\varkappa^2\varepsilon^2I)^{-1}\Pi_j[\overline{\psi_j}]-\sum_{j=1}^{m}\Big(S_j^{(1)}(\varepsilon)+\Big(S_j^{(1)}(\varepsilon)\Big)^*+S_j^{(3)}(\varepsilon)\Big)\Big)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{33}^+,\end{aligned}$$

где константа C_{33}^+ определена в (5.59).

§ 6. Усреднение резольвенты на краю лакуны в энергетической норме

6.1. Аппроксимация оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\bigl(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I\bigr)^{-1}$. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, порожденный квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^2 \left\langle \widetilde{g}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \nabla (\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^{-1} u(\boldsymbol{x}), \nabla (\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^{-1} u(\boldsymbol{x}) \right\rangle d\boldsymbol{x}, \quad \bigl(\omega^\varepsilon\bigr)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{6.1}$$

Как и прежде, мы предполагаем, что $\widetilde{g}$ — симметричная матрица-функция с вещественными элементами, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Формально можно записать

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g = \omega^2 \widetilde{g}. \tag{6.2}$$

В исходных терминах оператор (6.2) можно записать в виде (1.9), где $V = \omega^{-1}(\operatorname{div} \widetilde{g} \nabla \omega)$. Область определения формы (6.1)

$$\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d) := \Bigl\{ u \in L_2(\mathbb{R}^d) : \bigl(\omega^\varepsilon\bigr)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d) \Bigr\} \tag{6.3}$$

назовем *энергетическим пространством*; это гильбертово пространство относительно нормы $\|u\|_{\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)} := \bigl\| \bigl(\omega^\varepsilon\bigr)^{-1} u \bigr\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$.

Пусть λ_+ — правый край лакуны (λ_-, λ_+), удовлетворяющей условию (2.22), в спектре оператора $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$, порожденного формой (2.8). Мы считаем, что λ_+ — регулярный край, то есть выполнено условие 2.6. Зафиксируем число $\varkappa > 0$ такое, что $\lambda_+ - \varkappa^2 > \lambda_-$. Тогда для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ точка $\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2$ заведомо принадлежит лакуне $(\varepsilon^{-2}\lambda_-, \varepsilon^{-2}\lambda_+)$, если $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Наша цель — найти аппроксимацию резольвенты

$$R(\varepsilon) = \bigl(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I\bigr)^{-1}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

по операторной норме из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в “энергетическое” пространство $\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ при малых значениях ε.

Заметим, что

$$R(\varepsilon) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{A} - (\lambda_+ - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1} T_\varepsilon, \tag{6.4}$$

где T_ε, $\varepsilon > 0$, — семейство $L_2(\mathbb{R}^d)$–унитарных операторов $T_\varepsilon : u(\boldsymbol{x}) \mapsto \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \boldsymbol{x})$.

Определим *сглаживающие операторы*

$$\Pi_{j,\varepsilon} := \Phi^* \mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}(\widetilde{\Omega} + \boldsymbol{\xi}_j)} \Phi, \quad j = 1 \dots, m.$$

Рассмотрим оператор

$$\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) := \sum_{j=1}^m [\psi_j^\varepsilon] \bigl(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I\bigr)^{-1} \Pi_{j,\varepsilon} [\overline{\psi_j^\varepsilon}], \tag{6.5}$$

где $b_j(\mathbf{D})$, $j = 1, \dots, m$, — дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, определенный в (5.64). Имеем:

$$\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) := \varepsilon^2 T_\varepsilon^* \sum_{j=1}^m [\psi_j] (b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1} \Pi_j [\overline{\psi_j}] T_\varepsilon. \tag{6.6}$$

Определим так называемый *корректор*

$$\widetilde{K}(\varepsilon) := \sum_{j=1}^m \widetilde{K}_j(\varepsilon), \tag{6.7}$$

где

$$\widetilde{K}_j(\varepsilon) := \widetilde{K}_j^{(1)}(\varepsilon) + \bigl(\widetilde{K}_j^{(1)}(\varepsilon)\bigr)^* + \widetilde{K}_j^{(3)}(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \tag{6.8}$$

$$\widetilde{K}_j^{(1)}(\varepsilon) := \sum_{l=1}^{d} [\psi_{j,l}^\varepsilon]\, \mathrm{D}_l (b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1} \Pi_{j,\varepsilon} [\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad j = 1, \dots, m, \tag{6.9}$$

$$\widetilde{K}_j^{(3)}(\varepsilon) := -[\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1} d_j(\mathbf{D}) (b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1} \Pi_{j,\varepsilon} [\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad j = 1, \dots, m. \tag{6.10}$$

Здесь $d_j(\mathbf{D})$ — дифференциальный оператор третьего порядка, определенный в (5.65). Легко убедиться, что операторы (5.66) и (6.9), (5.67) и (6.10) связаны соотношениями

$$\widetilde{K}_j^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon T_\varepsilon^* S_j^{(1)}(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad j = 1, \dots, m,$$
$$\widetilde{K}_j^{(3)}(\varepsilon) = \varepsilon T_\varepsilon^* S_j^{(3)}(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad j = 1, \dots, m,$$

что, с учетом (6.7) и (6.8), влечет

$$\widetilde{K}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^{m} T_\varepsilon^* \Bigl(S_j^{(1)}(\varepsilon) + \Bigl(S_j^{(1)}(\varepsilon) \Bigr)^* + S_j^{(3)}(\varepsilon) \Bigr) T_\varepsilon. \tag{6.11}$$

Из тождества (1.14), теоремы 5.20 и соотношений (6.4), (6.6), (6.11) вытекает

Теорема 6.1. *Предположим, что правый край лакуны* (λ_-, λ_+) *регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда справедлива оценка*

$$\Bigl\| \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \Bigl(R(\varepsilon) - \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \varepsilon \widetilde{K}(\varepsilon) \Bigr) \Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{33}^+ \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{6.12}$$

6.2. **Аппроксимация резольвенты** $\bigl(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2) I\bigr)^{-1}$ **по** $(L_2 \to \mathcal{H}_\varepsilon^1)$**–норме.** Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Применим теорему 6.1 к вопросу об аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в "энергетическом" пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} = \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)\mathbf{F}, \tag{6.13}$$
$$\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)} = \widetilde{K}(\varepsilon)\mathbf{F}.$$

Из оценки (6.12) вытекает, что

$$\bigl\| \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \bigl(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} - \varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)} \bigr) \bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{33}^+ \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Отсюда с учетом соотношений

$$\bigl\| \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \bigl(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} - \varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)} \bigr) \bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \bigl\| (g^\varepsilon)^{1/2} \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1} \bigl(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} - \varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)} \bigr) \bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$$
$$\geqslant \omega_0^2 c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \bigl| \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1} \bigl(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} - \varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)} \bigr) \bigr|^2 \, d\boldsymbol{x}$$

следует оценка

$$\bigl\| \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1} \bigl(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} - \varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)} \bigr) \bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \omega_0^{-1} c_0^{-1/2} C_{33}^+ \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{6.14}$$

В [18], [19] показано, что выполнены оценки

$$\bigl\| R(\varepsilon) - R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) \bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{34} \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$
$$\bigl\| R(\varepsilon) - R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \varepsilon K(\varepsilon) \bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{35} \varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

где

$$R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) := \sum_{j=1}^{m} [\psi_j^\varepsilon]\big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I\big)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon > 0,$$

аналогично, оператор $K(\varepsilon)$ отличается от оператора $\widetilde{K}(\varepsilon)$ отсутствием сглаживающих операторов $\Pi_{j,\varepsilon}$. Однако в процитированных работах не следили за явными выражениями для констант C_{34} и C_{35}. Поэтому в Приложении (см. теорему 7.9) мы получаем оценку

$$\Big\| R(\varepsilon) - \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \varepsilon \widetilde{K}(\varepsilon) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{36}^{+}\varepsilon^2.$$

Учитывая, что $0 < \varepsilon \leqslant 1$, приходим к более грубой оценке

$$\Big\| R(\varepsilon) - \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \varepsilon \widetilde{K}(\varepsilon) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{36}^{+}\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)} - \varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{36}^{+}\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.15}$$

Из (6.14) и (6.15) вытекает основной результат (теорема 6.2).

Сформулируем основной результат для случая регулярного правого края внутренней спектральной лакуны.

Теорема 6.2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- *Оператор $\mathcal{A}$ отвечает форме (2.8), где $\widetilde{g}$ — симметричная матрица-функция, которая удовлетворяет условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7).*
- *Оператору $\mathcal{A}$ соответствует оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ в $L_2(\Omega)$, порожденный формой (2.15), его последовательные собственные значения (зонные функции) обозначим через $E_k(\boldsymbol{\xi})$, $k \in \mathbb{N}$.*
- *Правый край лакуны (λ_-, λ_+) в спектре оператора $\mathcal{A}$ регулярен, т.е. выполнено условие 2.6, в частности, зонная функция E_{s_+} имеет конечное число точек минимума $\boldsymbol{\xi}_j = \boldsymbol{\xi}_j^{(+)}$ на торе $\mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m$, $m = m_+$; константа $\varkappa > 0$ выбрана таким образом, что $\lambda_+ - \varkappa^2 \in (\lambda_-, \lambda_+)$.*
- *Функция $\varphi_j(\boldsymbol{x}) = \varphi_j^{(+)}(\boldsymbol{x})$ — периодическое решение уравнения $(2.32)_+$, нормированное в $L_2(\Omega)$, а функция ψ_j определена в (5.60), $j = 1, \dots, m$.*
- *Функция $\varphi_{j,l}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{j,l}^{(+)}(\boldsymbol{x})$ — это единственное слабое $\mathbb{Z}^d$-периодическое решение задачи $(2.35)_+$, а функции $\psi_{j,l}$ определена в (5.61), $j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, d$.*
- *Самосопряженный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ порожден формой (6.1);* положим $R_+(\varepsilon) := R(\varepsilon) = (\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1}$.
- Коэффициенты квадратичной формы b_j и кубической формы d_j определены в (4.21) и в (4.28), соответственно.
- Оператор $\widetilde{R}_+^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) = \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)$ определен в (6.5), а корректор $\widetilde{K}_+(\varepsilon) = \widetilde{K}(\varepsilon)$ определен в (6.7)—(6.10).
- Через $\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}^d)$ обозначается "энергетическое" пространство (6.3).

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\Big\| R_+(\varepsilon) - \widetilde{R}_+^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \varepsilon \widetilde{K}_+(\varepsilon) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to \mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{37}^{+}\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

$$C_{37}^{+} := \omega_0^{-1}\sqrt{(C_{36}^{+})^2 + c_0^{-1}(C_{33}^{+})^2}.$$

Аналогично для левого края можно доказать следующий результат.

Теорема 6.3. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный формой (6.1), где $\widetilde{g}$ — симметричная матрица–функция, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7).*
- *Предполагается, что левый край лакуны (λ_-,λ_+) в спектре оператора $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1$ регулярен, т.е. выполнено условие 2.7, а константа $\varkappa>0$ выбрана таким образом, что $\lambda_-+\varkappa^2\in(\lambda_-,\lambda_+)$.*
- *Функция $\varphi_j(\boldsymbol{x}) = \varphi_j^{(-)}(\boldsymbol{x})$ — периодическое решение уравнения $(2.32)_-$, нормированное в $L_2(\Omega)$, а функция ψ_j определена в (5.60), $j=1,\dots,m$, $m=m_-$.*
- *Функция $\varphi_{j,l}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{j,l}^{(-)}(\boldsymbol{x})$ — это единственное слабое $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение задачи $(2.35)_-$, а функции $\psi_{j,l}$ определена в (5.61), $j=1,\dots,m$, $l=1,\dots,d$.*
- *Положим $R_-(\varepsilon) := (\mathcal{A}_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\lambda_-+\varkappa^2)I)^{-1}$.*
- *Коэффициенты квадратичной формы b_j и кубической формы d_j определены в (4.21) и в (4.28), соответственно.*
- *Пусть $\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}_-(\varepsilon)=\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)$ — резольвента эффективного оператора, определенная в (6.5), а корректор $\widetilde{K}_-(\varepsilon)=\widetilde{K}(\varepsilon)$ определен в (6.7)–(6.10).*
- *Через $\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ обозначается "энергетическое" пространство (6.3).*

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка

$$\left\|R_-(\varepsilon)+\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}_-(\varepsilon)+\varepsilon\widetilde{K}_-(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{37}^-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,$$
$$C_{37}^- := \omega_0^{-1}\sqrt{(C_{36}^-)^2+c_0^{-1}(C_{33}^-)^2}.$$

6.3. **Устранение сглаживающих операторов $\Pi_{j,\varepsilon}$ в старшем слагаемом при $d\leqslant 3$.** Положим

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(0)} := R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{6.16}$$

Заметим, что

$$R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* \sum_{j=1}^m [\psi_j]\big(b_j(\mathbf{D})+\varkappa^2\varepsilon^2 I\big)^{-1}[\overline{\psi_j}]T_\varepsilon. \tag{6.17}$$

При $d\leqslant 3$ определим постоянные

$$C_{38} := \frac{1}{2c_* t_0^2}\sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|^2_{L_\infty(\Omega)},$$
$$C_{39} := \frac{1}{2c_*}\sum_{j=1}^m \Big(\mathfrak{C}(\Omega)(t_0^{-2}+1)\sqrt{\lambda_+}\|\varphi_j\|_{L_\infty(\Omega)} + t_0^{-1}\omega_0^{-1}\|\varphi_j\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|g\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}\Big).$$

Здесь $\mathfrak{C}(\Omega)$ — константа вложения $H^2(\Omega)\hookrightarrow L_\infty(\Omega)$.

Лемма 6.4. *В условиях теоремы 6.1 и при условии $d\leqslant 3$ выполнена оценка*

$$\left\|R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)-\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{40}\varepsilon,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,$$
$$C_{40} := \omega_0^{-1}\sqrt{C_{38}^2+c_0^{-1}C_{39}^2}.$$

Доказательство. В силу унитарности оператора T_ε, а также равенств (6.6), (6.17) справедливо тождество

$$\left\|R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)-\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^2\left\|\sum_{j=1}^m[\psi_j]\big(b_j(\mathbf{D})+\varkappa^2\varepsilon^2 I\big)^{-1}\big(I-\Pi_j\big)[\overline{\psi_j}]\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Оценим норму, стоящую в правой части. Так как мы считаем, что точки минимума $\boldsymbol{\xi}_j$ со своими окрестностями $\mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j = 1, \dots, m$, лежат строго внутри области $\widetilde{\Omega}$ (см. пункт 2.2), то выполнено $\mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(0) \subset \widetilde{\Omega} + \boldsymbol{\xi}_j$. Тогда для $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ имеем:

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} \psi_j \big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 \varepsilon^2 I\big)^{-1} (I - \Pi_j) \overline{\psi_j} f \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|_{L_\infty(\Omega)} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d \setminus (\widetilde{\Omega} + \boldsymbol{\xi}_j)} d\boldsymbol{\xi} \Big| \frac{1}{b_j(\boldsymbol{\xi}) + \varkappa^2 \varepsilon^2} \Phi\big([\overline{\psi_j}] f\big)(\boldsymbol{\xi}) \Big|^2 \bigg)^{1/2} \leqslant C_{38} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Здесь были использованы соотношения (2.21), (2.24) и (5.62). Отсюда получаем неравенство

$$\Big\| R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{38} \varepsilon. \tag{6.18}$$

Также рассмотрим разность

$$\Big\| \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \big(R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)\big) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$= \varepsilon \Big\| \mathcal{A}^{1/2} \sum_{j=1}^{m} [\psi_j] \big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 \varepsilon^2 I\big)^{-1} (I - \Pi_j) [\overline{\psi_j}] \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.19}$$

Для $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ выполнены соотношения

$$\Big\| \mathcal{A}^{1/2} \sum_{j=1}^{m} \psi_j \big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 \varepsilon^2 I\big)^{-1} (I - \Pi_j) \overline{\psi_j} f \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big\| h \mathbf{D} \omega^{-1} \psi_j \big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 \varepsilon^2 I\big)^{-1} (I - \Pi_j) \overline{\psi_j} f \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.20}$$

Обозначим

$$\mathbf{f}_j := \big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 \varepsilon^2 I\big)^{-1} (I - \Pi_j) \overline{\psi_j} f \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Из (6.20) и очевидного равенства

$$\mathbf{D} uv = \big(\mathbf{D} u\big) v + u \big(\mathbf{D} v\big), \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^d), \tag{6.21}$$

вытекает, что

$$\Big\| \mathcal{A}^{1/2} \sum_{j=1}^{m} \psi_j \big(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 \varepsilon^2 I\big)^{-1} (I - \Pi_j) \overline{\psi_j} f \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \Big(\big\| h \big(\mathbf{D} \omega^{-1} \psi_j\big) \mathbf{f}_j \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \big\| h \omega^{-1} \psi_j \mathbf{D} \mathbf{f}_j \big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \Big). \tag{6.22}$$

Заметим, что

$$\|\mathbf{f}_j\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus (\widetilde{\Omega} + \boldsymbol{\xi}_j)} d\boldsymbol{\xi} \frac{\big(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2\big)^2}{\big(b_j(\boldsymbol{\xi}) + \varkappa^2 \varepsilon^2\big)^2} \big| \Phi\big([\overline{\psi_j}] f\big)(\boldsymbol{\xi}) \big|^2$$
$$\leqslant (2c_*)^{-2} (t_0^{-2} + 1)^2 \|\psi_j\|^2_{L_\infty(\Omega)} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.23}$$

$$\left\|\mathbf{D}\mathbf{f}_j\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus(\widetilde{\Omega}+\boldsymbol{\xi}_j)} d\boldsymbol{\xi}\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{\left(b_j(\boldsymbol{\xi})+\varkappa^2\varepsilon^2\right)^2}\left|\Phi\left([\overline{\psi_j}]f\right)(\boldsymbol{\xi})\right|^2 \leqslant (2c_*t_0)^{-2}\|\psi_j\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.24}$$

Последние неравенства в (6.23) и (6.24) справедливы в силу соотношения (2.21).

Оценим каждое из слагаемых в (6.22) по отдельности. В силу (6.23) и непрерывности вложения $H^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, при $d\leqslant 3$ для первого слагаемого выполнена оценка

$$\left\|h\left(\mathbf{D}\omega^{-1}\psi_j\right)\mathbf{f}_j\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|h(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}\frac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\omega(\boldsymbol{x})}\right)\mathbf{f}_j(\boldsymbol{x})\right|^2 d\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\int\limits_{\Omega+\boldsymbol{n}}\left|h(\boldsymbol{x})\mathbf{D}\frac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\omega(\boldsymbol{x})}\right|^2|\mathbf{f}_j(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}$$

$$\leqslant \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\|\mathbf{f}_j\|^2_{L_\infty(\Omega+\boldsymbol{n})}\int\limits_{\Omega+\boldsymbol{n}}\left|h(\boldsymbol{x})\mathbf{D}\frac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\omega(\boldsymbol{x})}\right|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant \mathfrak{C}(\Omega)^2\left\|h\mathbf{D}\omega^{-1}\psi_j\right\|^2_{L_2(\Omega)}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\|\mathbf{f}_j\|^2_{H^2(\Omega+\boldsymbol{n})}$$

$$= \mathfrak{C}(\Omega)^2\left\|h\mathbf{D}\omega^{-1}\psi_j\right\|^2_{L_2(\Omega)}\|\mathbf{f}_j\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

В силу (5.60) и (6.21)

$$\left\|h\mathbf{D}\omega^{-1}\psi_j\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \left\|h(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j)\omega^{-1}\varphi_j\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \left\|X_{j,0}\varphi_j\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \lambda_+.$$

Отсюда и из (5.62), а также из оценки (6.23) для H^2–нормы функции $\mathbf{f}_j$ следует, что

$$\left\|h\left(\mathbf{D}\omega^{-1}\psi_j\right)\mathbf{f}_j\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (2c_*)^{-2}(t_0^{-2}+1)^2\mathfrak{C}(\Omega)^2\lambda_+\|\varphi_j\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.25}$$

Из (6.24) вытекает оценка для второго слагаемого в (6.22):

$$\left\|h\omega^{-1}\psi_j\mathbf{D}\mathbf{f}_j\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|h(\boldsymbol{x})\frac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\omega(\boldsymbol{x})}\left(\mathbf{D}\mathbf{f}_j(\boldsymbol{x})\right)\right|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant \omega_0^{-2}\|\psi_j\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|g\|_{L_\infty(\Omega)}\|\mathbf{D}\mathbf{f}_j\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leqslant (2c_*t_0)^{-2}\omega_0^{-2}\|g\|_{L_\infty(\Omega)}\|\psi_j\|^4_{L_\infty(\Omega)}\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.26}$$

Из (6.19), (6.22), (6.25) и (6.26) следует оценка

$$\left\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\left(R^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)-\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{39}\varepsilon. \tag{6.27}$$

В силу (6.13), (6.16) и (6.18) получаем, что

$$\left\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(0)}-\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{38}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

А из (6.13), (6.16), (6.27) и вычислений, аналогичных получению оценки (6.14), вытекает, что

$$\left\|\mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}\left(\mathbf{u}_\varepsilon^{(0)}-\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_0^{-1/2}\omega_0^{-1}C_{39}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Последние два неравенства влекут соотношение

$$\left\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(0)}-\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(0)}\right\|_{\mathcal{H}^1_\varepsilon(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{40}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и следует искомая оценка. □

Замечание 6.5. *Нетрудно показать, что при любой размерности пространства d в операторах $\widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)$, $\widetilde{K}(\varepsilon)$ можно заменить сглаживающие операторы $\Pi_{j,\varepsilon}$, $j=1,\dots,m$, на один сглаживающий оператор $\Pi_\varepsilon = \Phi^*\mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}\Phi$ с погрешностью $O(\varepsilon)$.*

§ 7. Приложение

Мы используем обозначения из пункта 6.1. Наша задача в этом пункте — получить аппроксимацию резольвенты $R(\varepsilon)$ по операторной норме из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с корректором $\widetilde{K}(\varepsilon)$.

7.1. **Выделение главной части аппроксимации.** Из доказательств леммы 5.1 (см. оценку (5.5)) и леммы 5.2 (см. неравенство (5.7)) извлекаем следующие утверждения.

Лемма 7.1. *При* $\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m \mathbb{B}^{\circ}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j) \right)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left\| \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2 \varepsilon^2 \right) I \right)^{-1} \right\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_{18}.$$

Лемма 7.2. *Пусть* (λ_-, λ_+) *— внутренняя лакуна в спектре оператора* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющая условию* (2.22). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда при* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}^{\circ}_{\delta}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j = 1, \dots, m$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left\| \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}) - \left(\lambda_+ - \varkappa^2 \varepsilon^2 \right) I \right)^{-1} F^{\perp}(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_{19}. \tag{7.1}$$

Зафиксируем произвольную точку минимума зонной функции E и введем одномерный параметр t так же как в пункте 2.3. В целях целостности повествования, процитируем лемму 5.4.

Лемма 7.3. *Пусть* (λ_-, λ_+) *— внутренняя лакуна в спектре оператора* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющая условию* (2.22). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.6. *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{R}_j(t, \varepsilon) \right\| \leqslant \frac{1}{c_* t^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{7.2}$$

$$\left\| \widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon) \right\| \leqslant \frac{1}{2c_* t^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{7.3}$$

Здесь оператор–функции $\widehat{R}_j(t, \varepsilon)$ *и* $\widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon)$ *определены в* (5.13) *и* (5.14), *соответственно.*

Выполняется тождество

$$\widehat{R}_j(t, \varepsilon) = F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon) + F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon) \Phi_j(t, \varepsilon) + \widehat{R}_j(t, \varepsilon) \Phi_j^2(t, \varepsilon), \tag{7.4}$$

где оператор $\Phi_j(t, \varepsilon)$ определен в (5.18). Отметим, что для оператора $\Phi_j(t, \varepsilon)$ справедливо представление

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \Phi_{j,0}(t, \varepsilon) + \Phi_{j,1}(t, \varepsilon).$$

Операторы $\Phi_{j,0}(t, \varepsilon)$ и $\Phi_{j,1}(t, \varepsilon)$ определены в (5.28), (5.29), соответственно. Соотношение (7.4) получается итерированием равенства (5.17).

Лемма 7.4. *Справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{R}_j(t, \varepsilon) \Phi_j^2(t, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant C_{41}, \quad C_{41} := C_{21}^2 / c_*, \tag{7.5}$$

$$\left\| t^2 \widetilde{F}_{j,2}(t) \widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant C_{42}, \quad C_{42} := \frac{1}{4\pi c_*} C_{15} l_\Gamma, \tag{7.6}$$

$$\left\| F_j(t) \widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon) \Phi_{j,1}(t, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant C_{43}, \quad C_{43} := \frac{C_{24}}{2c_*}, \tag{7.7}$$

$$\left\| t \widetilde{F}_{j,1}(t) \widehat{R}_{j,0}(t, \varepsilon) \Phi_{j,0}(t, \varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant C_{44}, \quad C_{44} := \frac{1}{4\pi c_*} C_{11} C_{23} l_\Gamma, \tag{7.8}$$

Доказательство. Первое неравенство в лемме следует из (5.21) и (7.2). Соотношение (7.6) вытекает из равномерной оценки (3.60) для нормы оператора $\widetilde{F}_{j,2}(t)$ и неравенства (7.3). Далее, из того факта, что $F_j(t)$ — ортогональный проектор, а $\Phi_{j,1}(t,\varepsilon)$ и $\widehat{R}_{j,0}(t,\varepsilon)$ удовлетворяют оценкам (5.31) и (7.3), получаем (7.7). Последнее соотношение верно в силу оценки (3.60) для нормы оператора $\widetilde{F}_{j,1}(t)$ и неравенств (5.30), (7.3). $\square$

Вводя операторы $\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)$, $S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)$ и $S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)$ (см. (5.38), (5.39) и (5.40), соответственно), получаем теорему.

Теорема 7.5. *Предполагается, что правый край лакуны (λ_-,λ_+) регулярен, т.е. выполнено условие 2.6. Тогда при $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $j=1,\dots,m$, и $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\Big\|(\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})-(\lambda_+-\varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}-\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\\ -\Big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)+\big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\big)^*+S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_{45},$$

где $C_{45}:=\widehat{C}_{19}+C_{41}+C_{42}+C_{43}+C_{44}$.

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 5.13 с точностью до замены тождества (5.25) на (7.4), и замены оценок (5.6), (5.26), (5.32), (5.33), (5.35) на (7.1), (7.5)—(7.8). $\square$

Положим

$$C_{46}:=\frac{1}{2c_*t_0^2},\qquad C_{47}:=\frac{1}{2c_*t_0}C_3,\qquad C_{48}:=\frac{d_0 l_\Gamma}{16\pi c_*^2 t_0}C_{14}.$$

Лемма 7.6. *При $\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}\setminus\mathbb{B}_{t_0}(\boldsymbol{\xi}_j)$ справедливы оценки*

$$\Big\|\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)f\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_{46},\quad j=1,\dots,m,$$
$$\Big\|S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_{47},\quad j=1,\dots,m,$$
$$\Big\|S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_{48},\quad j=1,\dots,m.$$

Доказательство. Из представлений (5.41), (5.42) и (5.43) для функции $f\in L_2(\Omega)$ следует, что

$$\Big\|\widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)\Big\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\Big\|S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)f\Big\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\sum_{l=1}^{d}\frac{|\xi^l-\xi_j^l|}{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2}\|\varphi_{j,l}\|_{L_2(\Omega)}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\Big\|S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j,\varepsilon)f\Big\|_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|}{\big(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+\varkappa^2\varepsilon^2\big)^2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из оценок (2.40), (5.57) и (5.58) вытекает утверждение леммы. $\square$

Из теоремы 7.5 и лемм 7.1, 7.6 получаем теорему.

Теорема 7.7. *Предполагается, что правый край лакуны (λ_-, λ_+) регулярен, т.е. выполнено условие 2.6. При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\Big\| R(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{R}_{j,0}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j, \varepsilon)$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \Big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j, \varepsilon) + \big(S_j^{(1)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j, \varepsilon)\big)^* + S_j^{(3)}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j, \varepsilon) \Big) \Big\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant C_{36}^+, \quad \boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega},$$

где $C_{36}^+ := \max\{\widehat{C}_{18}, C_{45}\} + m(C_{46} + 2C_{47} + C_{48})$.

Замечание 7.8. *Через индекс "+" в константе C_{36}^+ мы обращаем внимание на то, что все константы, входящие в определение C_{36}^+, зависят от точки λ_+ (правого края внутренней спектральной лакуны). Аналогичный результат можно получить и для левого края (точки λ_-), соответствующую константу будем обозначать через C_{36}^-.*

Применяя леммы 5.17, 5.18 и 5.19 и учитывая соотношения (6.4), (6.6) и (6.11), получаем результат для случая регулярного правого края внутренней спектральной лакуны.

Теорема 7.9. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- *Оператор $\mathcal{A}$ отвечает форме (2.8), где $\widetilde{g}$ — симметричная матрица–функция, которая удовлетворяет условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7).*
- *Оператору $\mathcal{A}$ соответствует оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi})$ в $L_2(\Omega)$, порожденный формой (2.15), его последовательные собственные значения (зонные функции) обозначим через $E_k(\boldsymbol{\xi})$, $k \in \mathbb{N}$.*
- *Правый край лакуны (λ_-, λ_+) в спектре оператора $\mathcal{A}$ регулярен, т.е. выполнено условие 2.6, в частности, зонная функция E_{s_+} имеет конечное число точек минимума $\boldsymbol{\xi}_j = \boldsymbol{\xi}_j^{(+)}$ на торе $\mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m$, $m = m_+$; константа $\varkappa > 0$ выбрана таким образом, что $\lambda_+ - \varkappa^2 \in (\lambda_-, \lambda_+)$.*
- *Функция $\varphi_j(\boldsymbol{x}) = \varphi_j^{(+)}(\boldsymbol{x})$ — периодическое решение уравнения $(2.32)_+$, нормированное в $L_2(\Omega)$, а функция ψ_j определена в (5.60), $j = 1, \dots, m$.*
- *Функция $\varphi_{j,l}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{j,l}^{(+)}(\boldsymbol{x})$ — это единственное слабое $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение задачи $(2.35)_+$, а функции $\psi_{j,l}$ определена в (5.61), $j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, d$.*
- *Самосопряженный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ порожден формой (6.1);* положим $R_+(\varepsilon) := R(\varepsilon) = (\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1}$.
- Коэффициенты квадратичной формы b_j и кубической формы d_j определены в (4.21) и в (4.28), соответственно.
- Оператор $\widetilde{R}_+^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) = \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)$ определен в (6.5), а корректор $\widetilde{K}_+(\varepsilon) = \widetilde{K}(\varepsilon)$ определен в (6.7)—(6.10).

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\Big\| R_+(\varepsilon) - \widetilde{R}_+^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) - \varepsilon \widetilde{K}_+(\varepsilon) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{36}^+ \varepsilon^2.$$

Аналогично для левого края можно доказать следующий результат.

Теорема 7.10. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный формой (6.1), где $\widetilde{g}$ — симметричная матрица–функция, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7).*
- *Предполагается, что левый край лакуны (λ_-, λ_+) в спектре оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ регулярен, т.е. выполнено условие 2.7, а константа $\varkappa > 0$ выбрана таким образом, что $\lambda_- + \varkappa^2 \in (\lambda_-, \lambda_+)$.*

- *Функция* $\varphi_j(\boldsymbol{x}) = \varphi_j^{(-)}(\boldsymbol{x})$ *— периодическое решение уравнения* (2.32)$_-$, *нормированное в* $L_2(\Omega)$, *а функция* ψ_j *определена в* (5.60), $j = 1, \dots, m$, $m = m_-$.
- *Функция* $\varphi_{j,l}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{j,l}^{(-)}(\boldsymbol{x})$ *— это единственное слабое* $\mathbb{Z}^d$*–периодическое решение задачи* (2.35)$_-$, *а функции* $\psi_{j,l}$ *определена в* (5.61), $j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, d$.
- *Положим* $R_-(\varepsilon) := (\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_- + \varkappa^2)I)^{-1}$.
- *Коэффициенты квадратичной формы* b_j *и кубической формы* d_j *определены в* (4.21) *и в* (4.28), *соответственно.*
- *Пусть* $\widetilde{R}_-^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) = \widetilde{R}^{\mathrm{hom}}(\varepsilon)$ *— резольвента эффективного оператора, определенная в* (6.5), *а корректор* $\widetilde{K}_-(\varepsilon) = \widetilde{K}(\varepsilon)$ *определен в* (6.7)*–*(6.10).

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\left\| R_-(\varepsilon) + \widetilde{R}_-^{\mathrm{hom}}(\varepsilon) + \varepsilon \widetilde{K}_-(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{36}^- \varepsilon^2.$$

Литература

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.

[3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[4] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, In: Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А. *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[8] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[9] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, p. 201–233.

[10] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.

[11] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[12] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[13] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), № 4, 515–524.

[14] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), № 2, 224–237.

[15] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи матем. наук. **71** (2016), № 3, 27–122.

[16] Бирман М. Ш., *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 4, 61–71.

[17] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы математического анализа **41** (2009), 127–141.

[18] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*, Записки научных семинаров ПОМИ **318** (2004), 60–74.

[19] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы математического анализа **59** (2011), 177–193.

[20] Мишулович А. А., Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме*, Записки научных семинаров ПОМИ **519** (2022), 114–151.

[21] Akhmatova A. R., Aksenova E. S., Sloushch V. A., Suslina T. A., *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap*, Complex Variables and Elliptic Equations **67** (2022), no. 3, 523–555.

[22] Мишулович А. А., *Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю лакуны: операторные оценки при учете корректора*, Записки научных семинаров ПОМИ **516** (2022), 135–176.

[23] Birman M. Sh., *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*, In: Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8. Adv. Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin, (1995), 334–352.

[24] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шрёдингера. II. Нерегулярные возмущения*, Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 6, 62–89.

[25] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3—122.

[26] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[27] Dorodnyi M. A, *High-energy homogenization of a multidimensional nonstationary Schrödinger equation*, Russian Journal of Mathematical Physics **30** (2023), no. 4, 480—500.

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Email address: `st062829@student.spbu.ru`