Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 07.04.2025
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

О неравносильности двух определений единственности решений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*

Ю.А. Ильин†

1 Введение.

Статья посвящена одному из базовых понятий теории обыкновенных дифференциальных уравнений (далее коротко ОДУ) – понятию единственности решения задачи Коши. Проблема в том, что в существующей литературе отсутствует какое-то единое общепринятое определение единственности, и в разных учебниках мы нередко встречаем весьма различные формулировки. Очень часто отдельное определение вообще не дается, а нужное свойство описывается прямо в формулировке теоремы существования и единственности (теореме Пикара). При этом как правило предполагается, что некое условие, обеспечивающее единственность

*Текст доклада на семинаре кафедры Дифференциальных уравнений МГУ 28 марта 2025 г.

†СПбГУ

(например, условие Липшица), выполняется сразу во всей области определения дифференциального уравнения, и единственность носит, тем самым, глобальный характер: два решения, совпадающие в одной точке, будут совпадать во всех точках, где они оба определены. Такой подход оправдан и вполне разумен в тех случаях, когда авторы не планируют рассматривать в учебнике специальные вопросы, связанные с нарушением единственности (например, теорию особых решений) и занимаются главным образом теми задачами, в которых единственность заранее предполагается. Если же изучать вопросы нарушения единственности более подробно, то единственность удобнее трактовать как локальное свойство и формулировать для него отдельное определение. Именно такие формулировки мы и будем рассматривать. Как уже было сказано, в литературе встречаются разные варианты таких формулировок. Возникает естественный и важный вопрос: будут ли они друг другу эквивалентны? Будут ли они описывать одинаковые понятия или нет? Автору не удалось найти в литературе готового ответа на этот вопрос, что послужило поводом к самостоятельному исследованию. Ответ оказался неожиданно отрицательным: два самых популярных в курсах ОДУ определения локальной единственности, как оказалось, в общем случае не эквивалентны друг другу и допускают весьма различное поведение интегральных кривых. Цель статьи – построить такую систему ДУ, для которой бы выполнялось одно, и не выполнялось бы другое определения единственности.

В первом разделе мы приводим необходимые формулировки и комментарии, а построению соответствующего контрпримера посвящен второй раздел статьи.

2 Определения единственности.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (далее коротко СДУ)

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$, при этом $f \in C(G)$. Относительно G предполагается, что это область (связное и открытое множество), к которой, возможно, добавлены некоторые её граничные точки. Напомним, что *Задачей Коши* называется следующая задача

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Точка (t_0, x_0) называется *начальной точкой* для задачи Коши (2). Высказывания «*точка* (t_0, x_0) *есть точка единственности*» и «*задача Коши (2) имеет единственное решение*» мы используем как эквивалентные. Единственность трактуется как *локальное* свойство, т.е. достаточно чтобы оно выполнялась лишь в некоторой окрестности начальной точки. При этом *глобальная* единственность решения будет иметь место тогда и только тогда, когда каждая точка решения есть точка локальной единственности.

Все[1] определения локальной единственности, имеющиеся в современной литературе, сводятся фактически к следующим двум вариантам.

Определение 1. *Говорят, что задача Коши (2) имеет единственное решение, если для любых двух ее решений* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *можно указать такой промежуток* $\langle a,b\rangle \ni t_0,\ a<b$, *что* $\varphi \equiv \psi$ *на* $\langle a,b\rangle$.

Определение 2. *Говорят, что задача Коши (2) имеет единственное решение, если у нее существует такое решение* $\varphi(t)$, *определенное на некотором промежутке* $\langle a,b\rangle \ni t_0,\ a<b$, *что для любого другого её решения* $\psi(t)$, *определенного на* $\langle a_1,b_1\rangle \ni t_0$, *выполняется* $\varphi \equiv \psi$ *на* $\langle a,b\rangle \cap \langle a_1,b_1\rangle$.

Комментарии. **1**) Если начальная точка (t_0, x_0) является внутренней точкой G, то в качестве промежутка $\langle a,b\rangle$ естественно брать открытый интервал (a,b).

2) Если в качестве промежутка $\langle a,b\rangle$ брать полуинтервалы $(a,t_0]$ и $[t_0,b)$, то мы приходим к понятию *лево- и правосторонней* единственности соответственно.

3) Для начальной точки (t_0, x_0), лежащей на границе G, следует рассматривать соответствующую одностороннюю единственность.

Определения 1 и 2 носят локальный характер, в них не требуется, чтобы решения совпадали *во всех* точках, где они оба определены. Так в известном примере Пеано

$$\dot{x} = 3x^{2/3} \tag{3}$$

решениями будут параболы $x = (t-C)^3$, *особое* решение $x = 0$, а также бесконечное множество *склеенных* решений, составленных из дуг парабол и особого решения (см. Рис. 1). Точка $(0,0)$ (как и любая дру-

[1] Известные автору.

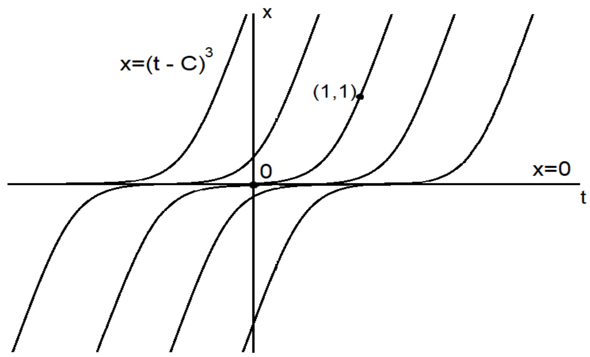

Рис. 1: Пример Пеано

гая точка решения $x = 0$) есть точка неединственности. Но точка $(1, 1)$ считается уже точкой единственности, хотя через нее и проходят два *глобально* различных решения: $\varphi(t) = t^3$ и $\psi(t)$, определяемое как $\psi(t) = t^3$ при $t \geqslant 0$ и $\psi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$.

Определение 1 дается в [1, с. 76, следствие 3] и [2, с. 86, §10]. Также мы его находим в [3, с. 66], но не в отдельном виде, а в качестве п.2 теоремы существования и единственности. Его достоинством является более простая формулировка, чем у определения 2. Оно нравится поклонникам языка ростков функций, так как означает, по сути, что задача Коши определяет единственный росток решений.

Определение 2 приводится в [4, с. 59, определение 2]. В [5–8] единственность трактуется как локальное свойство, но отдельного определения для него не дается. Утверждение о единственности включено в формулировку теоремы о существовании и единственности: говорится, что задача Коши имеет единственное решение, определенное на отрезке Пеано. Это не то же самое, что утверждается в определении 2, но достаточно близко к нему, если учесть, что любое решение внутренней задачи Коши может быть продолжено на отрезок Пеано (см. текст ниже и определение 2*). Примечательно, что Ф. Хартман в [8, Гл. 2, §3] перед описанием своего известного примера неединственности дает отдельное определение для неединственности: *задача Коши (2) на любом отрезке* $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ *имеет более одного решения*[2]. Это в точности отрицание определения 2. Отрицание определения 1 звучало бы так: *существуют*

[2]Хартман рассматривает одностороннюю единственность.

два таких решения задачи Коши (2), которые различаются на любом отрезке $[t_0, t_0+\varepsilon]$.

В [9–11] единственность также включается прямо в формулировку теоремы существования и единственности, но при этом она трактуется уже как глобальное свойство: если два решения совпадают в одной точке, то они совпадают везде, где они оба определены. Использование такого варианта определения мы уже прокомментировали во введении. В [12, с. 11] имеется отдельное определение для области единственности, но оно также носит глобальный характер.

Прежде чем перейти к сравнению определений 1 и 2, сделаем следующее замечание. Как известно специалистам, «хорошее» определение единственности должно решать две задачи: бороться не только с *реальным* нарушением единственности, как в примере Пеано (3), но и с *фиктивным*, порожденным формальным математическим определением функции. Дело в том, что если мы возьмем решение $\varphi(t)$, определенное на промежутке $\langle a, b\rangle$, и сузим его на меньший промежуток $\langle a_1, b_1\rangle \subset \langle a, b\rangle$, то формально говоря, мы получим уже *другое* решение, так как оно отличается от исходного промежутком определения. С такой точки зрения, задача Коши (2) всегда будет иметь бесконечно много различных решений, что неудобно. Разумеется, не хочется рассматривать суженные решения в качестве самостоятельных решений, но это требует строгого математического оформления. Проблема суженных решений решается в общем курсе ОДУ введением понятия продолжимости и доказательством теоремы о том, что в условиях теоремы Пеано любое решение может быть максимально продолжено. После чего договариваются в дальнейшем под решением понимать только максимально продолженные решения. Кстати, некоторые авторы предпочитают заводить разговор про единственность только после разговора о продолжимости, так как это несколько упрощает ситуацию. Однако приведенные выше определения 1 и 2 прекрасно справляются с задачей отсева суженных решений и без привлечения теорем о продолжимости!

Если ограничиться случаем, когда начальная точка является внутренней точкой множества G (что фактически всегда предполагается в курсах ДУ), то определение 2 допускает эквивалентную переформулировку. В самом деле, как хорошо известно из общего курса ОДУ, любое решение внутренней задачи Коши может быть продолжено на отрезок

Пеано из теоремы существования Пеано[3]. Поэтому не умаляя общности можно считать, что для всех решений задачи Коши существует такой общий отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$, на котором они все одновременно будут определены. При таком условии, определение 2, как несложно видеть, допускает следующий равносильный вариант

Определение 2*. *Говорят, что задача Коши (2) имеет единственное решение, если существует такой промежуток* (t_0-h, t_0+h), $h > 0$, *что любые два решения задачи Коши (2) на нем совпадают..*

Такой вариант, по сути, мы находим в [13], но сформулированный на языке интегральных кривых.

В этом варианте лучше видна разница между 1-м и 2-м определениями:

$$\textbf{Опр. 1} \quad \forall\varphi\, \forall\psi\;\; \exists(a,b) : \varphi \equiv \psi \text{ на } (a,b).$$

$$\textbf{Опр. 2*} \quad \exists(a,b) : \forall\varphi\, \forall\psi\;\; \varphi \equiv \psi \text{ на } (a,b).$$

Видно, что кванторы $\forall$ и $\exists$ переставлены местами, что, вообще говоря, дает разные высказывания.

Очевидно, что из Опр. 2* следует Опр. 1.

В случае, когда (1) есть скалярное ДУ ($x \in \mathbb{R}^1$) и точка (t_0, x_0) является внутренней для G, несложно доказать обратное: что из Опр. 1 следует Опр. 2*. Тем самым справедлива

Теорема 1. *Если* $n = 1$ *и начальная точка* (t_0, x_0) *— внутренняя для области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *то определения 1 и 2* эквивалентны.*

Доказательство этого утверждения уже довольно давно автор предлагает своим студентам в качестве задачи. Для специалистов оно совсем несложно. В самом деле, как показал еще Пеано (см. [6, с. 56] или [8, с. 38]), в рассматриваемом случае у любой задачи Коши (2) существуют два таких решения φ_* и φ^*, называемые *нижним* и *верхним*, что для всех решений (2) имеют место неравенства

$$\varphi_*(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi^*(t), \; \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Если выполнено Опр. 1, то $\exists(a,b)$, на котором $\varphi_* \equiv \varphi^*$, а тогда на нем совпадают и все другие решения. Теорема доказана.

В работе [14] (посвященной совсем другой задаче) неожиданно выяснилось, что если начальную точку брать на границе области G, то

[3] Аналогичное утверждение для начальной точки, лежащей на границе G, неверно [14]!

утверждение о существовании нижнего и верхнего решений перестает быть верным, и приведенное доказательство не просто перестает работать, а определения 1 и 2 действительно перестают быть равносильными, и могут описывать разное поведение решений.

В качестве примера рассмотрим все то же уравнение Пеано (3) с начальным условием $x(0) = 0$, но ограничим его на множество $G = \{(t,x)|\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant t^3/2\}$ (см. Рис.2). Верхняя граница G проведена

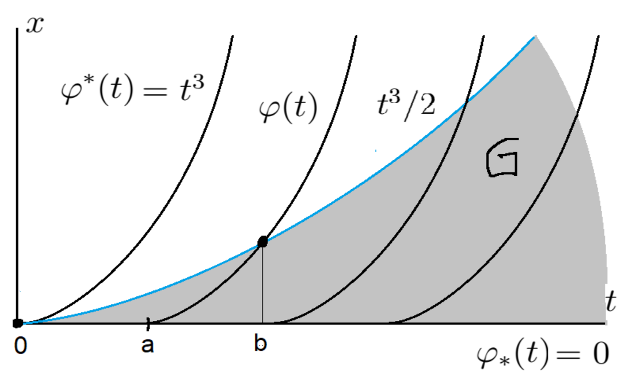

Рис. 2: Пример неравносильности Опр. 1 и 2*.

так, чтобы отсечь верхнее решение $\varphi^*(t) = t^3$. Это как раз то решение, которое отличается от решения $x = 0$ в любой окрестности 0. Все остальные решения имеют вид

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0,\ t \in [0,a) \\ (t-a)^3, t \in [a,b], \end{cases}$$

где $b = a\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-1)^{-1}$ – точка выхода решения на ∂G. Видно, что для любых двух решений найдется промежуток, на котором они оба равны 0, т.е. совпадают, но общего промежутка, на котором совпадали бы все решения – нет. Таким образом, выполнено опр. 1 и не выполнено опр. 2. Следовательно, для скалярного ДУ, у которого начальная точка лежит на границе области определения, возникает проблема выбора *правильного* определения единственности.

Разумеется, случай граничной начальной точки, да еще и для скалярного ДУ не представляет ни большого теоретического, ни практического интереса. Если бы равносильность опр.1 и 2 нарушалась только для такого случая, то на это можно было бы не обращать особого внимания. Значительно более важным для общей теории ОДУ является вопрос: будут ли определения 1 и 2 продолжать оставаться равносильными для внутренней начальной точки при переходе к многомерным системам ДУ? Как уже было сказано, в существующей литературе готового ответа на него найти не удалось. Ответ, в итоге, оказался отрицательным. Автор сумел построить такую систему (1) второго порядка, с правой частью определенной и непрерывной на $G = \mathbb{R}^3$, для которой в точке $(0,0,0)$ выполняется 1ое, и не выполняется 2ое определения единственности. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы

Теорема 2. *При $n \geqslant 2$ определения 1 и 2 не эквивалентны как для граничных, так и для внутренних начальных точек.*

Построение указанной системы будет изложено в следующем разделе, а перед этим сделаем некоторые общие замечания. Из теоремы 2 следует, что надо делать выбор между определениями 1 и 2 (или 2*). По мнению автора, правильный выбор – это определение 2. В пользу этого можно привести следующие доводы.

1. Любой коэффициентный признак единственности (такой как дифференцируемость, условие Липшица, критерий Осгуда и т. п.) влечет ровно то поведение решений, которое описывается в определении 2*: действительно будет существовать общий отрезок, на котором все решения совпадают.

2. Определение 2 лучше согласуется с физическим принципом детерминированности, математической калькой которого и является понятие единственности в теории ОДУ. Принцип гласит, что знание закона движения (т. е. дифференциального уравнения) и начального положения точки (начального условия) однозначно определяет положение точки в последующие моменты времени. В построенном примере, для точки $(0,0,0)$ выполняется определение 1, но решения целиком заполняют некоторый конус. Ни о какой детерминированности процесса говорить не приходиться[4].

3. И наконец, третий довод, который для многих специалистов мо-

[4]В принципе, это видно и в примере на Рис.2. Решения, проходящие через $(0,0)$, целиком заполняют множество G, что никак не согласуется с идеей единственности. Тем не менее, мой бывший соавтор по [14] в своем недавно вышедшем пособии по ДУ по непонятным причинам настаивает именно на определении 1 и, оказавшись его заложником, называет точку $(0,0)$ в этом примере – точкой единственности!?

жет иметь решающее значение. В теории ОДУ распространено важное убеждение, что непрерывная зависимость решений от начальных данных эквивалентна свойству единственности решений. Иными словами, что предположение о единственности решений влечет их непрерывную зависимость от начальных данных (см. такое доказательство в [15, §19], говорится об этом и в [1]). Если мы хотим сохранить эту эквивалентность, то следует брать именно Определение 2. Из Определения 1 непрерывная зависимость следовать не будет, что сразу видно из построенного примера. Впрочем то, что все утверждения теоремы об интегральной непрерывности – и о продолжимости, и о близости соседних решений с близкими начальными данными – не следуют из Определения 1, видно уже на Рис.2. Решение $x = 0$ определено на $[0, +\infty)$, но какой бы компакт $[0, T]$ и $\varepsilon > 0$ мы бы ни взяли, та же самая задача Коши имеет решения, которые не продолжимы на $[0, T]$ и не являются $\varepsilon-$ близкими к $x = 0$ на нем.

Открытый вопрос: Поскольку все известные коэффициентные критерии единственности дают единственность в смысле Опр. 2*, то возникает вопрос, какому же условию должна удовлетворять функция $f(t, x)$, чтобы была единственность в смысле Опр. 1, но не было бы единственности в смысле Опр. 2?

3 Построение примера.

В этом разделе мы построим такую систему ДУ

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \dot{y} = g(t, x, y), \tag{4}$$

с правой частью непрерывной на всем $\mathbb{R}^3$, что для точки $(0, 0, 0)$ при $t \geqslant 0$ будет выполняться Определение 1, и не будет выполняться Определение 2. Мы не приводим явных аналитических выражений для f и g, хотя теоретически это и возможно сделать. Пример строится геометрически, но построение интегральных кривых носит конструктивный характер. Излагается конкретный алгоритм, по которому каждой точке из $\mathbb{R}^3$ будет сопоставляться одна и только одна прямая поля направлений. Тем самым, с формальной точки зрения, функции f и g будут определены. При желании, любой читатель, обладающий достаточным терпением и временем, может, следуя этому алгоритму, вычислить явные значения f и g для любой конкретной точки.

Основные построения будут происходить для $t \geqslant 0$. За основу мы возьмем модификацию примера Пеано (3):

$$\dot{x} = (3/2)\, x^{1/3}, \tag{5}$$

который рассматривается в 1ой координатной четверти. Решениями будут полукубические параболы $x = (t - C)^{3/2}$, особое решение $x = 0$, а также всевозможные склееные из них решения. Рассмотрим криволинейный сектор $S = \{(t, x)|\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant t^{3/2}\}$, выделенный серым цветом на Рис. 3, с изображенными в нем интегральными кривыми. Реализуем в

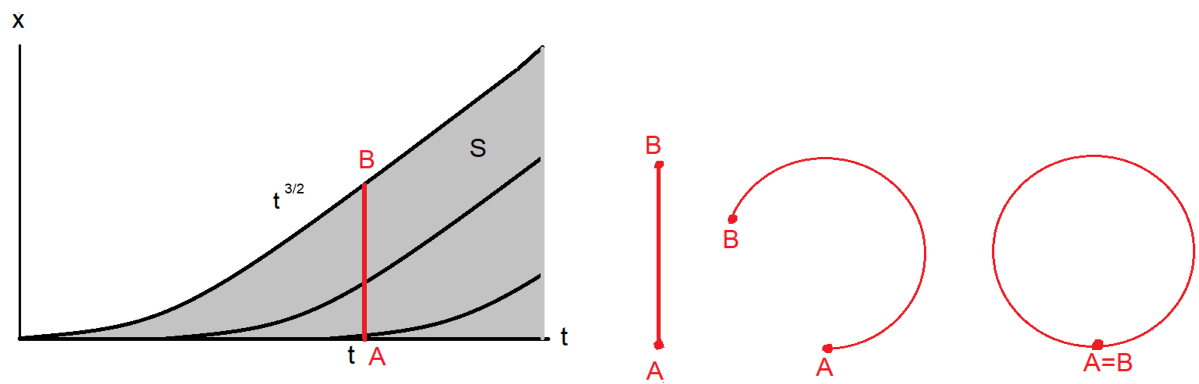

Рис. 3: Сектор S и склеивание отрезка в окружность.

нем ту же идею, что и на Рис. 2, т.е. «удалим» верхнее решение решение $\varphi^*(t) = t^{3/2}$ (что, в итоге, и привело к тому, что перестало выполняться определение 2, при сохранившимся выполнении определения 1). Но теперь мы не «отрежем» его, а склеим с решением $x = 0$ в $\mathbb{R}^3$, отождествляя точки A и B каждого вертикального отрезка AB сектора S и превращая отрезок в окружность (см. Рис.3). В результате сектор S превратиться в круговой криволинейный конус K_1, касающийся оси Ot (см. Рис.4). Интегральные кривые, заполнявшие сектор S, перейдут в кривые, заполняющие конус K_1 (синие линии на Рис.4), которые мы будем рассматривать как интегральные кривые конструируемой системы (4). Интегральная кривая $x = 0, y = 0$ принадлежит K_1. Конус заостряется в точке O, так как отношение $|AB|/t = t^{3/2}/t \to 0$ при $t \to +0$. Поэтому $f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) = 0$, и любая интегральная кривая на конусе есть решение задачи Коши с начальной точкой $(0, 0, 0)$. При этом

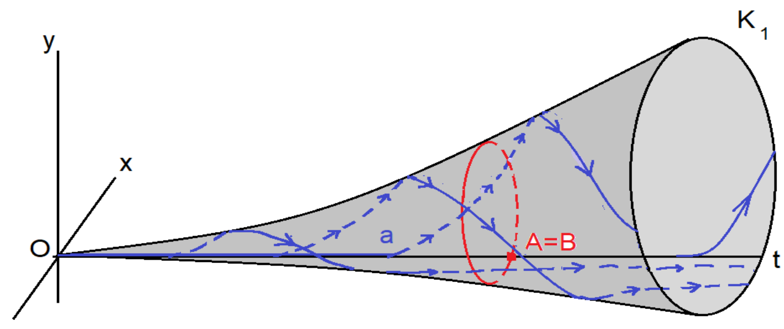

Рис. 4: Конус K_1 и интегральные кривые на нем.

каждое решение будет тождественно совпадать с решением $x=0, y=0$ (осью Ot) на некотором отрезке $[0,b]$, где $b>0$ и зависит от решения, но не будет существовать общего отрезка, на котором бы все решения совпадали с нулевым решением. Таким образом, на конусе K_1 выполняется Опр. 1, и не выполняется Опр. 2.

Очевидно, что в любой точке конуса K_1 касательная прямая к нарисованным кривым может быть, при желании, найдена в явном виде, и она будет непрерывно зависеть от точки. Тем самым мы определили функции f и g на конусе K_1, и эти функции будут непрерывными на нем.

Распространим теперь наш пример на все полупространство $t \geqslant 0$, рассмотрев отдельно внутренность и внешность конуса K_1.

Внутренность конуса K_1 заполним конусами K_λ, касающимися друг друга по нулевому решению $x=0, y=0$, и получающимися из конуса K_1 сжатием в поперечном направлении в λ раз, где $\lambda \in (0,1)$, так, как показано на Рис.5 (центр сжатия – точка на оси Ot). Интегральные кривые на конусе K_λ будут получаться из интегральных кривых на K_1 с помощью указанного преобразования. В итоге, на каждом конусе K_λ поведение интегральных кривых будет таким же, как и на исходном конусе K_1: каждое решение будет тождественно совпадать с нулевым на некотором – своем для каждого решения – отрезке $[0,b]$. Все конусы соприкасаются друг с другом только по нулевому решению. Поэтому любые два решения на любых конусах будут совпадать на некотором отрезке $[0,\tilde{b}]$,

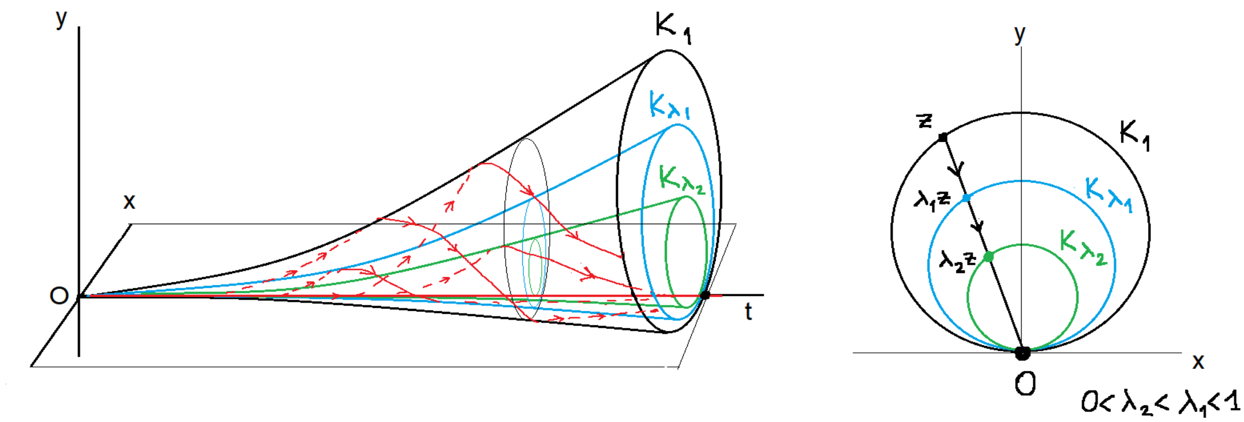

Рис. 5: Конусы K_λ.

и на нем же совпадать с $x = 0, y = 0$. Однако общего отрезка, на котором бы совпадали все решения, очевидно, нет. Таким образом, внутри конуса K_1 выполняется Опр. 1, и не выполняется Опр. 2. Понятно, что поле направлений на K_1 непрерывно зависит от точки, а сжатие $K_1 \mapsto K_\lambda$ непрерывно по λ, поэтому построенное поле направлений будет непрерывно зависеть от точки внутри конуса K_1. Внутренность конуса K_1 будет *воронкой неединственности* для начальной точки $(0,0,0)$ в нашем примере.

Теперь достроим нашу систему на внешности к K_1 так, чтобы там уже не было решений рассматриваемой задачи Коши, и при этом поле направлений по-прежнему непрерывно зависело бы от точки. Для этого рассмотрим «возмущение» уравнения (5)

$$\dot{x} = (3/2)(x^{1/3} + \alpha^{1/3}), \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

(при $\alpha = 0$ получим исходное уравнение (1), давшее интегральные кривые на конусе K_1). У (6) есть единственное стационарное решение $x = -\alpha$. Это автономное скалярное уравнение, и как хорошо известно (см.[15, §4]), у него точки неединственности могут располагаться только на стационарных решениях. В нашем случае точек неединственности нет, так как правая часть уравнения (6) непрерывно дифференцируема при $x = -\alpha$. Кроме того, все решения (6) продолжимы на $(-\infty, +\infty)$, так как правая часть – почти линейная функция. Обозначим через $\varphi(t, \alpha)$ решение уравнения (6) с начальным условием $\varphi(0, \alpha) = 0$ (см. Рис.6).

На Рис.6 все решения асимптотически приближаются при $t \to -\infty$ к

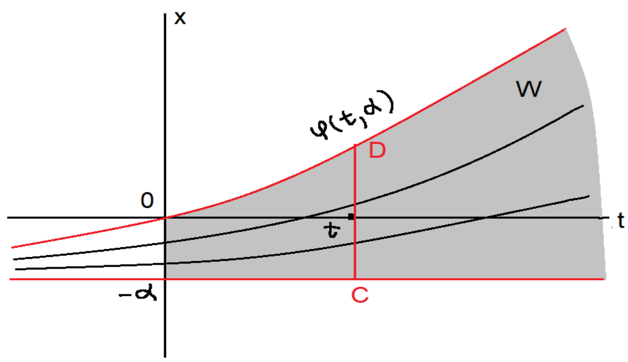

Рис. 6: Решения уравнения (6).

стационарному решению $x = -\alpha$, так как точек неединственности нет. Рассмотрим множество $W = \{(t,x) | \, t \geqslant 0, \ -\alpha \leqslant x \leqslant \varphi(t,\alpha)\}$. Поскольку правая часть уравнения (6) строго больше правой части уравнения (5), а решения этих уравнений $\varphi(t,\alpha)$ и $t^{3/2}$ удовлетворяют одинаковому начальному условию $x(0) = 0$, то по теореме сравнения (см.[8]), при $t > 0$ имеем

$$\varphi(t,\alpha) > t^{3/2}. \tag{7}$$

Склеим теперь друг с другом решения $x = -\alpha$ и $x = \varphi(t,\alpha)$ точно также, как для уравнения (5) мы склеивали $x = 0$ и $x = t^{3/2}$. Отрезок CD станет окружностью, а множество W – криволинейным цилиндром C_α. При этом мы хотим, чтобы интегральная прямая $x = -\alpha$ по-прежнему оставалась бы интегральной прямой, принадлежащей C_α. Покажем, что можно выбрать такое положение $x = 0, y = -\beta < 0$ этой прямой в $\mathbb{R}^3$, что C_α будет окружать конус K_1 при любом $\alpha > 0$ (см. Рис.7).

Рассмотрим отрезки AB и CD на Рис. 3 и 6 в одной и той же точке $t > 0$. Оценим разность $|CD| - |AB| = \varphi(t,\alpha) - t^{3/2} \overset{\text{def}}{=} \psi(t)$. Имеем $\dot{\psi}(t) = (3/2)(\varphi^{1/3} + \alpha^{1/3}) - (3/2)t^{1/2}$. Из (7) следует, что $\varphi^{1/3}(t,\alpha) > t^{1/2}$. Поэтому $\dot{\psi}(t) > (3/2)\alpha^{1/3}$, откуда $\psi(t) > (3/2)\alpha^{1/3}t + \psi(0) = (3/2)\alpha^{1/3}t + \alpha$. Таким образом,

$$|CD| > |AB| + (3/2)\alpha^{1/3}t + \alpha \tag{8}$$

при всех $t > 0$. Величины $|AB|$ и $|CD|$ – это длины окружностей, получающихся при сечении C_α и K_1 плоскостью, перпендикулярной оси

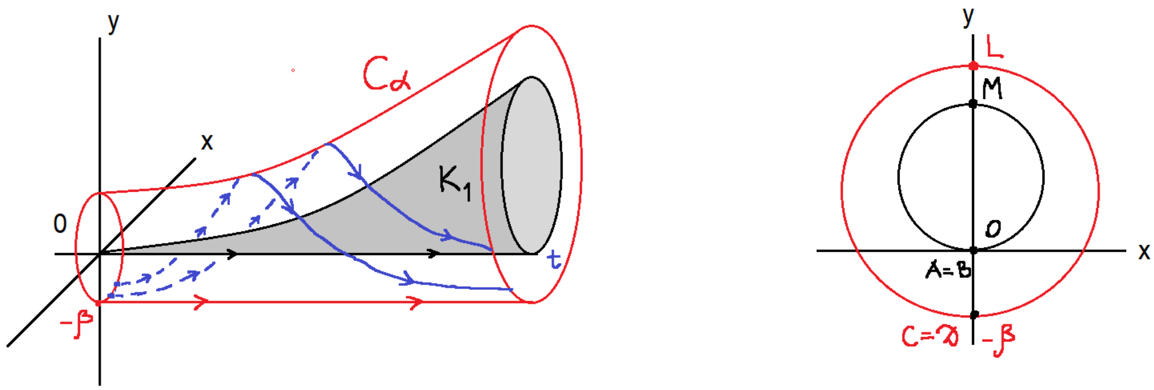

Рис. 7: Построение цилиндров C_α .

Ot . Их диаметрами будут $|AM| = |AB|/\pi$ и $|CL| = |CD|/\pi$. Мы хотим найти такое положение точки C (т. е. значение $-\beta$) на Рис.7, чтобы при всех $t > 0$ точка L лежала бы выше точки M . Для этого должно выполняться $|AL| > |AM|$ или же $|CL| - \beta > |AM|$. Домножим это неравенство на π, и перепишем в виде $|CD| - |AB| > \beta\pi$. Покажем, что при $\beta = \alpha/\pi$ это неравенство выполняется. Действительно, применяя (8), получаем $|CD| - |AB| > (3/2)\alpha^{1/3}t + \alpha > \alpha = \beta\pi, \ \forall t > 0$.

Таким образом, если поместить склееную точку $C = D$ в точку $-\beta$ оси Oy , где $\beta = \alpha/\pi$, то ордината точки L будет больше ординаты точки M на Рис.7, что и обеспечит нужное положение цилиндра C_α . Также легко видеть, что если $\alpha_2 > \alpha_1$, то цилиндр C_{α_2} будет окружать цилиндр C_{α_1} . Решения $x = 0, y = -\beta$ будут семейством стационарных решений конструируемой системы (4).

Таким образом, дополнение к конусу K_1 мы заполнили расширяющимися цилиндрическими поверхностями C_α , где $\alpha > 0$, на которых, во-1х, уже нет решений, проходящих через точку $(0, 0, 0)$, а во-2х, все точки есть точки единственности. Ясно, что и интегральные кривые уравнения (6), и расположение цилиндров C_α в пространстве, непрерывно зависят от α . Таким образом построенное поле направлений будет непрерывно зависеть от точки. В принципе, на этом построение примера можно считать законченным, ибо мы построили систему, у которой при $t \geqslant 0$ для начальной точки $(0, 0, 0)$ выполняется Опр. 1, и не выполняется Опр. 2.

При желании, эту систему можно легко доопределить на левое полупространство $t<0$ так, что там все точки будут точками единственности. Тривиальное решение можно так и оставить решением. А на цилиндрах C_α, поскольку их диаметр стремится к 0 при $t\to-\infty$, придется отказаться от стационарного решения $x=0, y=-\beta$ и менять положение точки C в зависимости от $t<0$, т.е. считать β гладкой функцией от t, такой, что $\beta(t)\downarrow 0$ при $t\to-\infty$ с нужной скоростью.

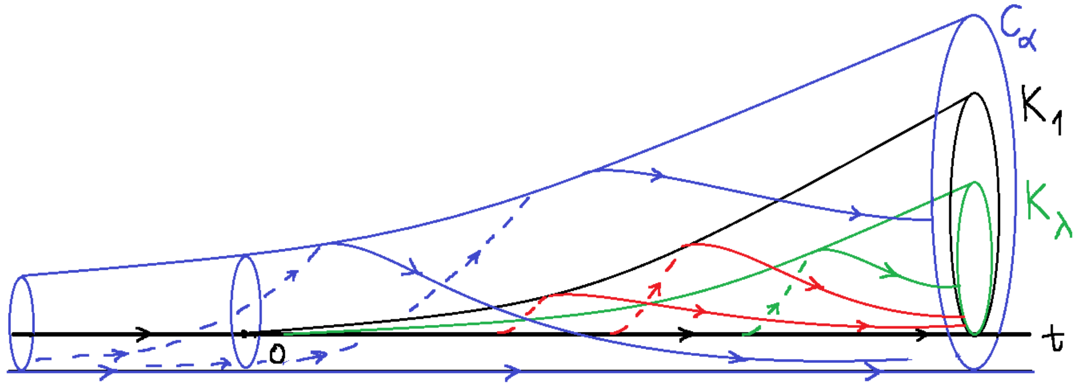

Рис. 8: Контрпример.

Литература.

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд // М.: Наука. — 1984. — 272 с. **2.** Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин // Минск.: «Наука и техника». — 1972. — 664 с. **3.** Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк // М.: Наука. — 1980. — 352 с. **4.** Боровских, А.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.В. Боровских, А.И. Перов, // М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2004. — 540 с. **5.** Сансоне, Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1 / Дж. Сансоне // М.: ИЛ — 1953. — 347 с. **6.** Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон // М.: ИЛ. — 1958. — 475 с. **7.** Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов // М.: ФМЛ. — 1959. — 469 с. **8.** Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман // М.: Мир. — 1970. — 720 с. **9.** Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения /

Л.С. Понтрягин // М., Наука. — 1982. — 332 с. **10.** Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов // М.: УРСС. — 2007. — 240 с. **11.** Карташев, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский // М.: Наука. —1979. — 288 с. **12.** Бибиков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков // М.: Высш. шк. — 1991. — 303 с. **13.** Бибиков, Ю.Н. Общий курс обыкновенные дифференциальные уравнения / Ю.Н. Бибиков // С.-Пб.: Изд-во СПбГУ. — 2005. — 276 с. **14.** Басов, В.В. О задаче Коши, поставленной на границе области определения обыкновенного дифференциального уравнения / В.В. Басов, Ю.А. Ильин // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2020. — Т. 7 (65). — Вып. 4. — С. 636–648. **15.** Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский, // М.: Наука. — 1970. — 279 с.