Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 23.12.2025
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

# Задача Неймана для квазилинейных уравнений с критическим ростом правой части в липшицевых областях на многообразии*

Д. В. Быстров**

23 декабря 2025 г.

## 1 Введение

Пусть $(M, g)$ – замкнутое $n$-мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие, $\Omega \subset M$ – область на $M$ со строго липшицевой границей.

В настоящей работе изучается вопрос о существовании решения с наименьшей энергией задачи Неймана

$$-\Delta_p u + u^{p-1} = u^{p^*-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega. \tag{1}$$

Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|Du|^{p-2} Du\right)$ – оператор $p$-Лапласа, $1 < p < n$ и $p^* = \frac{np}{n-p}$ – критический показатель вложения пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Функционал энергии для задачи (1) имеет вид

$$\mathbf{E}_\Omega[u] := \frac{\|u\|_{W_p^1(\Omega)}}{\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)}} = \frac{\left(\int\limits_\Omega |Du|^p + \int\limits_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_\Omega |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}}, \qquad u \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}. \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН) и Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

**Санкт-Петербургский госуниверситет и ПОМИ РАН.

Препринт представлен к публикации Назаровым А. И.

Несложно видеть, что критические точки функционала (2) являются (после подходящей перенормировки) слабыми решениями задачи (1). В частности, решением с наименьшей энергией называется функция, на которой достигается инфимум

$$\lambda(p,\Omega) := \inf_{v\in W_p^1(\Omega)\setminus\{0\}} \mathbf{E}_\Omega[u]. \tag{3}$$

Поскольку вложение $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$ некомпактно, то вопрос о достижимости инфимума $\lambda(p,\Omega)$ нетривиален.

Хорошо известно, что если $\Omega$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то инфимум на финитных функциях

$$\inf_{v\in \mathring{W}_p^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}}{\|u\|^p_{L_{p^*}(\Omega)}}$$

не достигается, не зависит от $\Omega$ и равен $\frac{1}{K(n,p)}$, где

$$K(n,p) = \sup_{v\in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\|v\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)}}{\|\nabla v\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}} = \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} k(n,p), \tag{4}$$

а

$$k(n,p) = \sup_{v\in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}|v(r)|^{p^*}dr\right)^{\frac{1}{p^*}}}{\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}|v'(r)|^{p}dr\right)^{\frac{1}{p}}} = n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \mathcal{B}\left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'}+1\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{5}$$

– точная константа в неравенстве Блисса [Bl]. Здесь и далее $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $p' = \frac{p}{p-1}$ – сопряженный к $p$ показатель, а $\mathcal{B}$ – бета-функция Эйлера. Отметим, что супремум в (4) достигается только на **нефинитных** радиально симметричных функциях

$$w_\varepsilon(|x|) \equiv w_\varepsilon(r) := \left(\varepsilon + r^{p'}\right)^{1-\frac{n}{p}}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

и на функциях, получаемых из них сдвигами и гомотетиями.

**Замечание 1.1.** *Очевидно, что $u(x) \equiv 1$ является решением задачи (1), однако, как показано в [НЩ, Предложение 3.1], если область достаточно велика, то константа не является решением с наименьшей энергией.*

*Решения с наименьшей энергией задачи (1) при $p = 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ изучались в [AM] и [Wan]. Было показано, что такое решение существует в любой области с границей класса $\mathcal{C}^2$.*

*Результат [AM] и [Wan] был обобщен в работе [ДН], где было получено, что решение с наименьшей энергией задачи (1) для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ существует при $1 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$. В этой же работе было показано, что условие на гладкость границы является существенным: если $\Omega$ – многогранник в $\mathbb{R}^n$ и $1 < p < n$, то в растянутой области*

$$\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$$

*при достаточно больших $R > 0$ решения с наименьшей энергией задачи (1) не существует.*

*Более того, в работе [ДН] также рассматривался случай, когда $\Omega$ само является многообразием без края, то есть $\Omega = M$. Было получено, что если $n \geq 5$ и на $\Omega$ есть точка с положительной скалярной кривизной, то решение с наименьшей энергией задачи (1) существует при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$.*

*Стоит также отметить, что если $n \geq 2$, $1 < p < n$ и $\Omega \subset M$ – произвольная область со строго липшицевой границей, то решение с наименьшей энергией в $\Omega_R$ всегда существует для достаточно малого $R > 0$ (ср. [НЩ, Теорема 1.1]).*

В настоящей работе мы будем изучать существование решения с наименьшей энергией задачи (1) в области $\Omega$ без условия гладкости $\partial\Omega$, но накладывая условие локальной выпуклости (см. определение 1.1).

Сформулируем основной результат статьи.

**Теорема 1.1.** *Пусть $n \geq 5$. Пусть $\Omega$ – локально выпуклая область на сфере $\mathbb{S}^n_R$. Тогда существует $\beta = \beta(\Omega) > 0$, такое что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.*

Следующая теорема показывает, что результат теоремы 1.1 является точным. Пусть $\Omega = \mathbb{S}^n_{R,+}$ – полусфера радиуса $R$.

**Теорема 1.2.** *Пусть $n \geq 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}^n_{R,+})$ не достигается.*

Введём некоторые обозначения.

Для $y \in M$ и $r > 0$ будем обозначать геодезические шары и сферы как

$$B_r(y) := \{x \in M : \mathrm{dist}_g(x, y) < r\},$$

$$S_r(y) := \{x \in M : \mathrm{dist}_g(x, y) = r\}.$$

Для евклидовых шаров в пространстве размерности $n$ будем использовать обозначение $\mathbb{B}^n_r(y)$ и будем опускать в обозначениях $y$, если $y = 0$, и $r$, если $r = 1$.

Мы всегда считаем, что радиус $r$ достаточно мал, так что экспоненциальное отображение $\exp_y : \mathbb{B}^n_r \subset T_yM \to B_r(y)$ является диффеоморфизмом. Для $x \in B_r(y)$ обозначим прообраз $x_y = \exp_y^{-1}(x) \in T_yM$ и введём нормальные координаты как декартовы координаты $x_y$ в $T_yM$.

**Определение 1.1.** *Будем говорить, что $\Omega$ локально выпукло, если для любой точки $y \in \partial\Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\mathbb{V}_\delta(y) := \exp_y^{-1}\left(B_\delta(y) \cap \Omega\right) \subset T_yM$$

*выпукло.*

В дальнейшем мы всегда считаем, что $\Omega$ локально выпукло. Также мы везде будем считать, что $\partial\Omega \neq \emptyset$, поскольку, как замечено выше, случай $\partial\Omega = \emptyset$ уже был рассмотрен в работе [ДН].

Через $\mathrm{Vol}_g$ или просто $|\cdot|_n$ будем обозначать меру объёма на $(M, g)$. Известно (см., например, [Dr]), что, при интегрировании функции в малой окрестности точки $y \in M$, форма объема имеет вид

$$d\mathrm{Vol}_g = \left(1 - \frac{1}{6}(\mathrm{Ric}_y)_{ij} x^i x^j + o(|x|^2)\right) dx, \tag{7}$$

где $\mathrm{Ric}_y$ – тензор Риччи в точке $y$.

Запись $o_\rho(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $\rho \to 0$. Все положительные константы, значение которых для нас несущественно, обозначаются буквой $C$. Зависимость этих констант от параметров отмечается в скобках.

Опишем структуру данной статьи. В разделе 2 выводятся некоторые свойства локально выпуклых областей на многообразии. В разделе 3 выводится достаточное условие достижимости инфимума в (3). В разделе 4 доказывается основной результат – теорему 1.1, а также сформулировано её обобщение на случай более общего многообразия $M$. В разделе 5 доказывается теорема 1.2, а также точность результата из [ДН, Теорема 4.1].

# 2 Локально выпуклые области

**Определение 2.1.** *Телесным углом $\Omega$ в точке $y \in \overline{\Omega}$ будем называть величину*

$$\alpha(y) := \lim_{r\to 0} \frac{|S_r(y) \cap \Omega|_{n-1}}{r^{n-1}}. \tag{8}$$

Очевидно, что для $y \in \Omega$ имеем $\alpha(y) = \omega_{n-1}$. Покажем, что предел (8) определён и для любой точки $y \in \partial\Omega$. Из формулы (7) видно, что

$$\alpha(y) = \lim_{r\to 0} \frac{|\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \mathbb{V}_\delta(y)|_{n-1}}{r^{n-1}} = \lim_{r\to 0} |\mathbb{S}^{n-1} \cap \tfrac{1}{r}\mathbb{V}_\delta(y)|_{n-1}. \tag{9}$$

Касательный конус к множеству $\mathbb{V}_\delta(y)$ в начале координат существует в силу выпуклости этого множества и может быть определён как

$$\mathbb{K}(y) := \bigcup_{r>0} \tfrac{1}{r}\mathbb{V}_\delta(y).$$

Поэтому, пользуясь непрерывностью снизу меры Лебега, получаем, что предел в (9) достигается и

$$\alpha(y) = |\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)|_{n-1}. \tag{10}$$

Несложно видеть, что для локально выпуклых $\Omega$ и $y \in \partial\Omega$ имеем $\alpha(y) \le \frac{\omega_{n-1}}{2}$. А если $y \in \partial\Omega$ и $y$ – точка гладкости $\partial\Omega$, то $\alpha(y) = \frac{\omega_{n-1}}{2}$.

Определим теперь следующую величину:

$$\alpha_\Omega := \inf_{y\in\partial\Omega} \alpha(y). \tag{11}$$

В [RV, Lemma 6.1] показано, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая область, то инфимум в (11) достигается. Для удобства читателя мы приведём другое наглядное доказательство и обобщим его на случай локально выпуклой области на многообразии.

Легко видеть, что достижимость $\alpha_\Omega$ вытекает из следующей леммы.

**Лемма 2.1.** *Функция $\alpha : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу, т.е. для любого $y \in \partial\Omega$*

$$\alpha(y) \le \liminf_{x\to y,\ x\in\partial\Omega} \alpha(x). \tag{12}$$

*Доказательство.* Докажем сначала для случая, когда $\Omega$ – область в $\mathbb{R}^n$. Мы утверждаем, что

$$\alpha(y) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y-q)dS_q = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q, \tag{13}$$

где

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \end{cases}$$

– фундаментальное решение оператора $-\Delta$. Действительно,

$$0 = \int\limits_{\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \Delta_q \mathcal{E}(y-q)dq = \int\limits_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y-q)dS_q +$$
$$+ \int\limits_{\Omega \cap \mathbb{S}_\varepsilon(y)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y-q)dS_q = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q + \frac{|\Omega \cap \mathbb{S}_\varepsilon(y)|_{n-1}}{|\mathbb{S}_\varepsilon(y)|_{n-1}}.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{(q-y,\vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q$ сходится в смысле главного значения к $\alpha(y)$. Но он сходится и в обычном смысле по теореме о монотонной сходимости ввиду неотрицательности интегранта:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)}(q) dS_q = \alpha(y),$$

где $\chi_S$ обозначает характеристическую функцию множества $S$.

Теперь полунепрерывность снизу для $\alpha$ следует из леммы Фату:

$$\alpha(y) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q \leq \liminf_{x \to y} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(q-x, \vec{n}_q)}{|q-x|^n} dS_q = \liminf_{x \to y} \alpha(x).$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда $\Omega$ не обязательно плоское. Фиксируем $y \in \partial\Omega$. Пусть $x \in B_r(y) \cap \partial\Omega$. Через $\widetilde{\alpha}(x)$ обозначим телесный угол в точке $x_y$ на $\partial\mathbb{V}_r(y) \subset T_y M$. Из доказанного выше следует, что

$$\widetilde{\alpha}(0) \leq \liminf_{x \to 0,\ x \in \mathbb{V}_r(y)} \widetilde{\alpha}(x).$$

По формуле 10 имеем $\widetilde{\alpha}(0) = \alpha(y)$, поэтому нам достаточно показать, что если $x$ и $y$ близки, то телесный угол $\alpha(x)$ для $\Omega$ мало отличается от телесного угла $\widetilde{\alpha}(x_y)$ для $\mathbb{V}_r(y)$.

Пользуясь, например, [БЗ94, 12.6.1], можно разложить компоненты метрического тензора в нормальных координатах следующим образом:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2). \tag{14}$$

Поэтому, для всех $x \in B_r(y)$ и всех $\xi, \eta \in T_x M$ имеем в нормальных координатах

$$(1 - Cr^2)\xi^i \eta^i \leq g_{ij}\xi^i \eta^j \leq (1 + Cr^2)\xi^i \eta^i.$$

Отсюда получаем, что отношение телесного угла касательного конуса $\mathbb{K}(x)$ и касательного конуса в $x_y$ для $\mathbb{V}_r(y)$ равно $1 + O(r^2)$, значит, $\widetilde{\alpha}(x) = (1 + O(r^2)) \cdot \alpha(x)$.

Возьмем $x_k \in \partial\Omega$, $x_k \to y$. С какого-то момента $x_k$ лежат в $B_r(y)$, поэтому можно определить $(x_k)_y$ и $(x_k)_y \to 0$. Имеем

$$\alpha(y) = \widetilde{\alpha}(0) \le \liminf_{k\to\infty} \widetilde{\alpha}((x_k)_y) = (1 + O(r^2)) \liminf_{k\to\infty} \alpha(x_k).$$

Ввиду того, что $r$ можно взять сколь угодно малым, получаем (12). $\square$

# 3 Достаточное условие достижимости инфимума в (3)

Ключевой в этом разделе является теорема 3.1, которая даёт достаточное условие достижимости инфимума в (3). Для её доказательства сначала введём некоторые обозначения.

Пусть $\mathbb{G}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, представляющей собой объединение двух многообразий $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$, где $\Gamma_0$ имеет положительную $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа. Изопериметрическая константа $\mathbb{G}$ относительно $\Gamma_1$ (см. [PT]) определяется как

$$Q(\Gamma_1, \mathbb{G}) = \sup_{\mathbb{E}} \frac{|\mathbb{E}|^{1-1/n}}{P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E})},$$

где супремум берётся по всем измеримым подмножествам $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$, для которых $\partial\mathbb{E} \cap \Gamma_0$ не содержит множеств положительной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, а $P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E})$ обозначает периметр $\mathbb{E}$ относительно $\mathbb{G}$ (см. [FR], [PT])

$$P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E}) = \sup\left\{ \left| \int_{\mathbb{E}} \operatorname{div} \psi \, dx \right| : \psi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{G})]^n, |\psi| \le 1 \right\}.$$

В дальнейшем всегда для $\mathbb{V}_\rho(y)$ будем считать, что $\Gamma_0 = \partial\mathbb{V}_\rho(y) \cap \mathbb{S}_\rho^{n-1}$ и $\Gamma_1 = \partial\mathbb{V}_\rho(y) \setminus \mathbb{S}_\rho^{n-1}$

Для измеримой функции $u$, определенной в $\mathbb{G}$, определим функцию распределения

$$\mu(t) = \left| \{x \in \mathbb{G} : |u(x)| > t\} \right|_n, \qquad t \ge 0,$$

и монотонную перестановку

$$u^*(s) = \inf\{t \ge 0 : \mu(t) < s\}.$$

Пусть $(r, \nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ – сферические координаты в $\mathbb{R}^n$, $\nu_i \in [0, \pi]$ для $1 \le i \le n-2$ и $\nu_{n-1} \in [0, 2\pi]$. Следуя [LPT], для угла $\beta \in [0, 2\pi]$ и радиуса $R > 0$ определим сектор

$$\Sigma(\beta, R) = \{x \in \mathbb{B}_R^n : \nu_i \in [0, \pi], \nu_{n-1} \in [0, \beta]\}.$$

Через $\mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})$ обозначим сектор $\Sigma(\beta, R)$, имеющий ту же меру, что и $\mathbb{G}$. А для функции $u$ определим $\beta$-симметризацию как

$$\mathcal{C}_\beta u(x) := u^*\left(\tfrac{\beta}{n}|x|^n\right), \qquad x \in \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G}).$$

В работе [LPT] было доказано, что

$$\|u\|_{q,\mathbb{G}} = \|\mathcal{C}_\beta u\|_{q,\mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})} \qquad \forall q \ge 1,$$

а также следующее утверждение ([LPT, Proposition 1.2]):

**Предложение 3.1.** *Пусть $\beta$ определено из равенства $Q(\Gamma_1, \mathbb{G}) = \left(\beta^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}}\right)^{-1}$ и $p \geq 1$. Тогда*

$$\|Du\|_{p,\mathbb{G}} \geq \|D\mathcal{C}_\beta u\|_{p,\mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})}$$

*для всех $u \in W^1_p(\mathbb{G})$ таких, что $u\,|_{\Gamma_0} = 0$.*

Важным понятием в изучении изопериметрических неравенств является изопериметрический профиль

$$I_{\mathbb{G}}(\nu) := \inf\{P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E}) : \mathbb{E} \subset \mathbb{G},\ |\mathbb{E}|_n = \nu\}.$$

В работе [LP] было показано, что изопериметрический профиль выпуклого конуса $\mathbb{K}$ с телесным углом $\alpha_{\mathbb{K}}$ имеет вид

$$I_{\mathbb{K}}(\nu) = \alpha_{\mathbb{K}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

В статье [RV] изучались свойства $I_{\mathbb{G}}$ для случая, когда $\mathbb{G}$ – произвольная выпуклая область. В частности, был получен следующий результат ([RV, Theorem 6.6]).

**Предложение 3.2.** *Если $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая область, то*

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{I_{\mathbb{G}}(\nu)}{\alpha_{\mathbb{G}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}} = 1$$

Теперь мы готовы доказать основное утверждение этого параграфа.

**Теорема 3.1.** *Пусть инфимум в (3) удовлетворяет условию*

$$\lambda(p, \Omega) < \frac{(\alpha_\Omega/\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{K(n,p)}. \tag{15}$$

*Тогда этот инфимум достигается.*

*Доказательство.* Рассмотрим нормированную в $L_{p^*}(\Omega)$ минимизирующую последовательность $\{v_k\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W^1_p(\Omega)$.

Не умаляя общности можно также считать, что $|v_k|^{p^*} \rightharpoonup \mu$ и $|Dv_k|^p \rightharpoonup \widetilde{\mu}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$. Согласно теореме Лионса ([Ls, ч. 1][1]; см. также [LPT, лемма 2.2]), имеем

$$\mu = |v|^{p^*} + \sum_j c_j \delta(x - x_j), \quad \widetilde{\mu} \geq |Dv|^p + \lambda^p(p,\Omega) \sum_j c_j^{p/p^*} \delta(x - x_j),$$

где $\{x_j\}$ – не более чем счетный набор точек в $\overline{\Omega}$, $c_j$ – положительные константы.

Поскольку $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность, дословно повторяя доказательство [LPT, теорема 2.2], получим альтернативу: либо функция $v$ реализует минимум в соответствующей задаче (при этом множество $\{x_j\}$ пусто), либо $v = 0$ (при этом набор $\{x_j\}$ состоит из одной точки $x_0$ и $c_0 = 1$).

Покажем, что в условиях нашей теоремы второй случай невозможен. Для этого мы модифицируем схему доказательства [LPT, следствие 2.1]. Предположим, что

$$|v_k|^{p^*} \rightharpoonup \delta(x - x_0), \quad |Dv_k|^p \rightharpoonup \lambda^p(p,\Omega)\delta(x - x_0).$$

[1] В [Ls] рассматривались области в $\mathbb{R}^n$, но рассуждения проходят и для многообразия.

Домножим $v_k$ на гладкую срезку:

$$v_k^\rho(x) := v_k(x)\varphi(\tfrac{1}{\rho}\mathrm{dist}_g(x,x_0)) \quad x\in\Omega,\ \rho>0,$$

где

$$0\le\varphi(r)\le 1;\quad \varphi(r)=1 \text{ при } r\le\frac{1}{2};\quad \varphi(r)=0 \text{ при } r\ge 1. \tag{16}$$

Тогда для любого $\rho>0$ имеем

$$\lim_k\int\limits_\Omega |v_k^\rho|^{p^*}=1 \quad \text{и} \quad \lim_k\int\limits_\Omega |Dv_k^\rho|^p=\lambda^p(p,\Omega).$$

Для каждого $\rho>0$ подберём $k=k(\rho)$ так, что при $\rho\to 0$

$$\int\limits_\Omega |v_{k(\rho)}^\rho|^{p^*}=1+o_\rho(1) \quad \text{и} \quad \int\limits_\Omega |Dv_{k(\rho)}^\rho|^p=\lambda^p(p,\Omega)(1+o_\rho(1)). \tag{17}$$

Пусть $\varepsilon>0$. Существует $\rho_0>0$ такое, что для любого $\rho<\rho_0$

$$\lambda(p,\Omega)\ge(1-\varepsilon)\frac{\left(\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\Omega}|Dv_{k(\rho)}^\rho|^p\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_{B_\rho(x_0)\cap\Omega}|v_{k(\rho)}^\rho|^{p^*}\right)^{1/p^*}}\ge(1-\varepsilon)^2\times$$

$$\times\frac{\left(\int\limits_{\mathbb{V}_\rho(x_0)}|Dv_{k(\rho)}^\rho(\exp_y(x))|^p dx\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_{\mathbb{V}_\rho(x_0)}|v_{k(\rho)}^\rho(\exp_y(x))|^{p^*} dx\right)^{1/p^*}}\ge(1-\varepsilon)^2\inf_{\substack{v\in W_p^1(\mathbb{V}_\rho(x_0))\\ v|_{\Gamma_0}=0,\,v\not\equiv 0}}\frac{\|Dv\|_{p,\mathbb{V}_\rho(x_0)}}{\|v\|_{p^*,\mathbb{V}_\rho(x_0)}} \tag{18}$$

(здесь использованы формулы (17) и (7)). Более того, инфимум в правой части (18) можно брать по гладким ненулевым функциям на $\mathbb{V}_\rho(x_0)$, которые обращаются в ноль на $\Gamma_0$.

Если $x_0\notin\partial\Omega$, то $\mathbb{V}_\rho(x_0)=\mathbb{B}_\rho^n(x_0)$ и можно сделать стандартную симметризацию Шварца, получая

$$\lambda(p,\Omega)\ge(1-\varepsilon)^2\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}\inf_{v\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\setminus\{0\}}\frac{\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}|v'(r)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}|v(r)|^{p^*} dr\right)^{\frac{1}{p^*}}}=$$

$$=(1-\varepsilon)^2\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}}k(n,p)^{-1}=\frac{(1-\varepsilon)^2}{K(n,p)},$$

что при достаточно малом $\varepsilon$ противоречит (15), поскольку $\alpha_\Omega<\omega_{n-1}$.

Пусть теперь $x_0\in\partial\Omega$. Используя лемму 2.1, можно выбрать $\rho_1<\rho_0$ и область $\mathbb{U}$ так, что $\mathbb{V}_{\rho_1}(x_0)\subset\mathbb{U}\subset\mathbb{V}_{\rho_0}(x_0)$ и телесный угол любого касательного конуса в точках $\partial\mathbb{U}$ был не меньше $\alpha(x_0)-\varepsilon$. Более того, в силу предложения 3.2, можно выбрать $\nu_0$ такое, что

$$I_{\mathbb{U}}(\nu)\ge(\alpha(x_0)-2\varepsilon)^{\frac{1}{n}}n^{\frac{n-1}{n}}\nu^{\frac{n-1}{n}} \qquad \forall\nu<\nu_0.$$

Если $\rho < \rho_1$ настолько мало, что $|\mathbb{V}_\rho(x_0)|_n < \nu_0$, то

$$Q(\Gamma_1, \mathbb{V}_\rho(x_0))^{-1} \geq \inf_{\mathbb{E}\subset\mathbb{V}_\rho(x_0)} \frac{P_{\mathbb{U}}(\mathbb{E})}{|\mathbb{E}|^{1-1/n}} \geq \inf_{\mathbb{E}\subset\mathbb{V}_\rho(x_0)} \frac{I_{\mathbb{U}}(|\mathbb{E}|)}{|\mathbb{E}|^{1-1/n}} \geq (\alpha_\Omega - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}}.$$

Пользуясь предложением 3.1, мы можем утверждать, что существует $\beta \geq \alpha(x_0) - 2\varepsilon$ такое, что для всех $u \in V_p^1(\mathbb{V}_\rho(x_0))$

$$\|Du\|_{p,\mathbb{V}_\rho(x_0)} \geq \|D\mathcal{C}_\beta u\|_{p,\mathcal{C}_\beta(\mathbb{V}_\rho(x_0))}.$$

Проведя $\beta$-симметризацию, можно продолжить неравенство (18), как и в случае $x_0 \notin \partial\Omega$:

$$\lambda(p,\Omega) \geq (1-\varepsilon)^2 \beta^{\frac{1}{n}} \inf_{v\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}|v'(r)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}|v(r)|^{p^*} dr\right)^{\frac{1}{p^*}}} =$$

$$= (1-\varepsilon)^2 k(n,p)^{-1} \beta^{\frac{1}{n}} \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{(\alpha(x_0) - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} K(n,p)},$$

что при достаточно малом $\varepsilon$ противоречит условию теоремы. □

# 4 Теорема существования решения и некоторые обобщения

**Доказательство Теоремы 1.1.** Пусть $y \in \partial\Omega$ такая, что $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Введём функцию

$$u_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(r) := \varphi(\tfrac{r}{\rho}) w_\varepsilon(r), \tag{19}$$

где $r := \mathrm{dist}_g(x,y)$, $w_\varepsilon$ определена в (6), а $\varphi$ определена в (16).

Определим «разницу» между касательным конусом $\mathbb{K}(y)$ и областью $\Omega$:

$$\Gamma_\rho = \left(\mathbb{K}(y) \cap \mathbb{B}_\rho^n\right) \setminus \mathbb{V}_\rho(y).$$

Для краткости обозначим $\mathbf{g} = \sqrt{|\det\{g_{ij}\}|}$. Формула (7) означает, что

$$\mathbf{g}(x) = 1 - \frac{1}{6}(\mathrm{Ric}_y)_{ij} x^i x^j + o(|x|^2) \qquad \text{при } x \to 0. \tag{20}$$

Тогда для функции $f$ с носителем в $B_\rho(y) \cap \Omega$ справедлива формула

$$\int\limits_\Omega f\, d\mathrm{Vol}_g = I_1(f) - I_2(f) := \int\limits_{\exp_y(\mathbb{K}(y)\cap\mathbb{B}_\rho^n)} f\, d\mathrm{Vol}_g - \int\limits_{\Gamma_\rho} \mathbf{g}(x)\, f(x) dx.$$

Если функция $f$ радиальна, то интеграл $I_1(f)$ пропорционален $\alpha_\Omega$, поскольку кривизна Риччи на сфере сферически симметрична. Возьмём в качестве $f$ функции $u_\varepsilon^p$, $u_\varepsilon^{p^*}$, $|\nabla u_\varepsilon|^p$ и воспользуемся полученными в [ДН, §2] оценками[2];

$$I_1(|\nabla u_\varepsilon|^p) \leq \begin{cases} E_1\varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - E_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1))\varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1\varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C\ln\varepsilon^{-1} + C\rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+2}{3}; \end{cases} \tag{21}$$

$$I_1(|u_\varepsilon|^{p^*}) \geq D_1\varepsilon^{-\frac{n}{p}} - D_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1))\varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} - C\rho^{-\frac{n}{p-1}}, \tag{22}$$

$$I_1(|u_\varepsilon|^p) \leq \begin{cases} C\varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}, & \text{если } 1 < p < \sqrt{n}; \\ C(1 + |\ln\rho| + \ln\varepsilon^{-1}), & \text{если } p = \sqrt{n}; \\ C, & \text{если } p > \sqrt{n}; \end{cases} \tag{23}$$

где $\mathcal{R}_g = n(n-1)R^{-2}$ – скалярная кривизна сферы и

$$E_1 = \frac{\alpha_\Omega}{p'}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \mathcal{B}\left(\frac{n}{p'}+1, \frac{n}{p}-1\right), \tag{24}$$

$$E_2 = \frac{\alpha_\Omega}{6np'}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \mathcal{B}\left(\frac{n+2}{p'}+1, \frac{n+2}{p}-3\right), \tag{25}$$

$$D_1 = \frac{\alpha_\Omega}{p'}\mathcal{B}\left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p}\right), \tag{26}$$

$$D_2 = \frac{\alpha_\Omega}{6np'}\mathcal{B}\left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p}-2\right). \tag{27}$$

Из этих оценок аналогично доказательству [ДН, Теорема 4.1] получаем для $2 < p < \frac{n+2}{3}$

$$\frac{\|u_\varepsilon\|^p_{W_p^1(\Omega)}}{\|u_\varepsilon\|^p_{p^*,\Omega}} \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \times \Bigg[1 - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} + \frac{p}{p^*}\frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}} + \\ + \left(\frac{p}{p^*}\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1}\right)(\mathcal{R}_g + o_\rho(1))\varepsilon^{\frac{2}{p'}} + o(\varepsilon^{\frac{2}{p'}})\Bigg]. \tag{28}$$

Покажем, что

$$\frac{p}{p^*}\frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \leq C(\rho)\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}.$$

Прямым вычислением получаем

$$\frac{p}{p^*}\frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} = A\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\mathbf{g}(x)}{(\varepsilon+|x|^{p'})^n}dx,$$

$$\frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} = \frac{A}{p-1}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\mathbf{g}(x)|x|^{p'}}{(\varepsilon+|x|^{p'})^n}dx,$$

[2] Все коэффициенты в формулах (24)–(27) отличаются от полученных в [ДН] множителем $\frac{\alpha_\Omega}{\omega_{n-1}}$.

где $A = \frac{p(n-p)}{\alpha(y)n(p-1)\mathcal{B}\left(\frac{n}{p'},\frac{n}{p}\right)} > 0$.

Обозначим $\gamma_\rho = \mathbb{S}^{n-1}\bigcap \frac{1}{\rho}\overline{\Gamma_\rho}$. Поскольку $\mathbb{V}_\rho(y)$ выпукло, в сферических координатах имеем для некоторого $r(\omega) \geq 0$

$$\Gamma_\rho = \{(r,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \gamma_\rho : r(\omega) < r < \rho\},$$

поэтому

$$\frac{p}{p^*}\frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} =$$

$$= A\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}\int\limits_{\gamma_\rho}\int\limits_{r(\omega)}^{\rho} r\mathbf{g}(r\omega)\left(\frac{\varepsilon r^{n-2}}{(\varepsilon+r^{p'})^n} - \frac{1}{p-1}\frac{r^{p'+n-2}}{(\varepsilon+r^{p'})^n}\right)drdS_\omega.$$

Из равенства

$$\frac{r^{p'+n-2}}{(\varepsilon+r^{p'})^n} = (p-1)\frac{\varepsilon r^{n-2}}{(\varepsilon+r^{p'})^n} - \frac{p-1}{n-1}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^{p'})^{n-1}}\right)$$

заключаем для $\widetilde{A} = \frac{A}{n-1}$, что

$$\frac{p}{p^*}\frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} = \widetilde{A}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}\int\limits_{\gamma_\rho}\int\limits_{r(\omega)}^{\rho} r\mathbf{g}(r\omega)\frac{d}{dr}\left(\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^{p'})^{n-1}}\right)drdS_\omega =$$

$$= \frac{\widetilde{A}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}\rho^n}{(\varepsilon+\rho^{p'})^{n-1}}\int\limits_{\gamma_\rho}\mathbf{g}(\rho\omega)dS_\omega - \widetilde{A}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}\int\limits_{\gamma_\rho}\mathbf{g}(r(\omega)\omega)\frac{r(\omega)^n}{(\varepsilon+r(\omega)^{p'})^{n-1}}dS_\omega -$$

$$- \widetilde{A}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}\int\limits_{\gamma_\rho}\int\limits_{r(\omega)}^{\rho}\frac{d}{dr}(r\mathbf{g}(r\omega))\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^{p'})^{n-1}}drdS_\omega. \quad (29)$$

Заметим, что раз есть разложение (20) и $r \in (r(\omega),\rho)$, то при малых $\rho$

$$\frac{d}{dr}(r\mathbf{g}(r\omega)) = \mathbf{g}(r\omega) + r\frac{d}{dr}\mathbf{g}(r\omega) = 1 + o(\rho) > 0.$$

Поэтому все слагаемые в (29), кроме первого, неположительны, и

$$\frac{p}{p^*}\frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \leq \frac{\widetilde{A}\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}\rho^n}{(\varepsilon+\rho^{p'})^{n-1}}\int\limits_{\gamma_\rho}\mathbf{g}(\rho\omega)dS_\omega \leq C(\rho)\varepsilon^{\frac{n}{p}-1}.$$

Поскольку при $2 < p < \frac{n+2}{3}$ имеем $\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} = o(\varepsilon^{\frac{2}{p'}})$, из (28) получаем

$$\frac{\|u_\varepsilon\|^p_{W_p^1(\Omega)}}{\|u_\varepsilon\|^p_{p^*,\Omega}} \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \times \left[1 + \left(\frac{p}{p^*}\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1}\right)(\mathcal{R}_g + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1))\varepsilon^{\frac{2}{p'}}\right].$$

В [ДН] показано, что $\frac{p}{p^*}\frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} < 0$. Поэтому, выбрав достаточно малые $\rho$ и $\varepsilon$, имеем

$$\frac{\|u_\varepsilon\|^p_{W^1_p(\Omega)}}{\|u_\varepsilon\|^p_{p^*,\Omega}} < \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} = \frac{\alpha_\Omega^{\frac{p}{n}}}{K^p(n,p)},$$

что даёт (15). Аналогично неравенство (15) верно для $p = \frac{n+2}{3}$, а из соображений непрерывности – и при $p < \frac{n+2}{3} + \beta$ для некоторого $\beta > 0$.

Применение теоремы 3.1 завершает доказательство. □

Сформулируем теперь аналогичную теорему для многообразия $M$ общего вида.

**Теорема 4.1.** *Пусть $n \geq 5$. Пусть $\Omega \subset M$ – локально выпуклая область, а точка $y \in \partial\Omega$ такова, что $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Предположим, что тензор Риччи в точке $y$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}\cap\mathbb{K}(y)} Ric_y(\omega,\omega)dS_\omega > 0. \tag{30}$$

*Тогда существует $\beta > 0$, такое что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1.1 без существенных изменений, поскольку все предварительные результаты из разделов 2 и 3 доказаны для произвольного $M$.

**Следствие 4.1.** *Пусть $n \geq 5$ и для любой точки $x \in M$ выполнено*

$$Ric_x \geq 0, \qquad Ric_x \neq 0.$$

*Пусть $\Omega \subset M$ – локально выпуклая область. Тогда существует $\beta > 0$, такое что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.*

*Доказательство.* Действительно, пусть $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Из условия $\mathrm{Ric}_y \neq 0$ получаем, что ядро $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ric}_y)$ имеет размерность не больше $n-1$. Отсюда легко выводим (30). □

**Следствие 4.2.** *Пусть $n \geq 5$, $M$ является границей некоторой выпуклой области в $\mathbb{R}^{n+1}$, и в каждой точке $M$ хотя бы одна секционная кривизна строго положительна. Пусть $\Omega \subset M$ – локально выпуклая область. Тогда существует $\beta > 0$, такое что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.*

# 5 Теорема несуществования

В этом разделе для упрощения обозначений будем писать $B_\rho$ вместо $B_\rho(x_0)$, если $x_0$ – северный полюс сферы $\mathbb{S}^n_R$. Также положим $r = \mathrm{dist}_g(x,x_0)$.

**Лемма 5.1.** $\lambda(p,\mathbb{S}^n_R) = 2^{\frac{1}{n}}\lambda(p,\mathbb{S}^n_{R,+})$. *Более того, инфимумы $\lambda(p,\mathbb{S}^n_R)$ и $\lambda(p,\mathbb{S}^n_{R,+})$ достигаются или не достигаются одновременно.*

*Доказательство.* В [БЗ80, Гл. 2. §3.2] показано, что на сфере «сферическая шапочка» $B_\rho(y)$ является множеством с минимальным периметром при заданном объеме. Отсюда следует (см. [Kaw, ч.II]; см. также [PS, Приложение C]), что при сферической симметризации функционал энергии (2) не возрастает.

Поэтому, если $\{v_k\}$ – минимизирующая последовательность для $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$, то все $v_k$ можно считать «радиальными» (зависящими только от расстояния до заданной точки $y$).

С другой стороны, в [БЗ80, Гл. 3. §7.1] показано, что на полусфере также есть относительное изопериметрическое неравенство, которое достигается на половинках «сферических шапочек» $B_\rho(y) \cap \mathbb{S}^n_{R,+}$, где $y \in \partial\mathbb{S}^n_{R,+}$. Аналогично получаем, что если $\{v_k\}$ – минимизирующая последовательность для $\lambda(p, \mathbb{S}^n_{R,+})$, то все $v_k$ можно считать «радиальными».

Прямой подсчёт показывает, что для «радиальной» функции $v$ справедливо соотношение

$$\mathbf{E}_{\mathbb{S}^n_R}[v] = 2^{\frac{1}{n}}\mathbf{E}_{\mathbb{S}^n_{R,+}}[v],$$

что и доказывает лемму. □

Мы докажем аналог теоремы 1.2 для сферы.

**Теорема 5.1.** *Пусть $n \geq 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$ не достигается.*

Нам понадобится следующий результат ([ДН, Теорема 3.2]).

**Предложение 5.1.** *Пусть $\Omega = B_\Theta \subset \mathbb{S}^n_R$ – «сферическая шапочка». Для любого $\beta > 0$ существует $\Theta_* > 0$, такое, что инфимум*

$$\inf_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(B_{\Theta_*})} \frac{\|Du\|_{p,B_{\Theta_*}}}{\|u\|_{p^*,B_{\Theta_*}}} \tag{31}$$

*не достигается при $p \geq \frac{n+2}{3} + \beta$.*

**Следствие 5.1.** *Для $p > \frac{n+2}{3}$ существует $\Theta_* > 0$, такое что*

$$\inf_{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B_{\Theta_*})} \frac{\|Du\|_{p,B_{\Theta_*}}}{\|u\|_{p^*,B_{\Theta_*}}} \geq \frac{1}{K(n,p)}. \tag{32}$$

*Доказательство.* Из [ДН, Предложение 1.1] следует, что если неравенство (32) не выполнено, то инфимум достигается, что противоречит предложению 5.1. □

***Доказательство теоремы 5.1.*** Способ доказательства аналогичен доказательству [ДН, Теорема 7.2].

Предположим, что значения $R$, при которых инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$ достигается, образуют неограниченную последовательность. Обозначим последовательность минимизирующих функций через $\{u_R\}$.

Поскольку $\mathbf{E}_{\mathbb{S}^n_R}[u_R] = \mathbf{E}_{\mathbb{S}^n_R}[|u_R|]$, можно считать, что $u_R \geq 0$. Расписывая необходимое условие для минимума функционала энергии, получим, что $u_R$ является слабым суперрешением уравнения $-\Delta_p u + u^{p-1} = 0$, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{S}^n_R} |Du_R|^{p-2}\langle Du_R, Dh\rangle + \int\limits_{\mathbb{S}^n_R} u_R^{p-1} h \geq 0 \qquad \forall h \in W^1_p(\mathbb{S}^n_R) : h \geq 0. \tag{33}$$

Значит, воспользовавшись неравенством Гарнака (см. [Tr, Theorem 1.2]), можем утверждать, что $u_R > 0$ на $\mathbb{S}^n_R$.

Рассмотрим в $\mathbb{S}^n$ функции

$$v_R(x) := C(R)u_R(Rx),$$

где $C(R)$ подбирается так, чтобы $\|v_R\|_{p^*,\mathbb{S}^n} = 1$. Тогда $v_R$ удовлетворяет интегральному тождеству (здесь и далее $\lambda_R := \lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$)

$$\int\limits_{\mathbb{S}^n} |Dv_R|^{p-2}\langle Dv_R, Dh\rangle + R^p \int\limits_{\mathbb{S}^n} v_R^{p-1}h = \lambda_R^p \int\limits_{\mathbb{S}^n} v_R^{p^*-1}h \qquad \forall h \in W^1_p(\mathbb{S}^n). \tag{34}$$

В частности, подставив $h = v_R$ в (34), получим

$$\|Dv_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} + R^p\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} = \lambda_R^p. \tag{35}$$

Для функций $w_\varepsilon(r)$, определённых в (6), имеет место следующее равенство (см., например, оценки, полученные в [ДН, §2]).

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int\limits_{\mathbb{S}^n_R} |Dw_\varepsilon|^p + \int\limits_{\mathbb{S}^n_R} |w_\varepsilon|^p}{\|w_\varepsilon\|^p_{p^*,\mathbb{S}^n_R}} = \frac{1}{K(n,p)^p}.$$

Поэтому

$$\lambda_R^p \le \frac{1}{K(n,p)^p}. \tag{36}$$

Из (35) сразу следует, что $\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n} \to 0$.

Действуя как в теореме 2.2 [LPT], получаем (возможно, переходя к подпоследовательности), что для некоторого $x_0 \in \mathbb{S}^n$ имеет место сходимость $|v_R|^{p^*} \rightharpoonup \delta(x - x_0)$ в пространстве мер на $\mathbb{S}^n$. Не умаляя общности, можем считать $x_0$ северным полюсом сферы. Тогда

$$\forall \rho > 0 \quad \|v_R\|_{p^*,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho} \to 0. \tag{37}$$

Поскольку сферическая симметризация не увеличивает значение функционала энергии, мы можем считать, что $v_R$ – убывающие функции одной переменной $r$. Поэтому из (37) для любого $\rho > 0$ следует

$$\sup_{\mathbb{S}^n\setminus B_\rho} v_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{38}$$

Положим теперь $\varphi_1(r) := \varphi(\frac{r}{2\rho})$, где $\varphi$ определено в (16). Из следствия 5.1 вытекает, что для достаточно малого $\rho > 0$

$$\|\varphi_1 v_R\|_{p^*,\mathbb{S}^n} \le K(n,p)\|D(\varphi_1 v_R)\|_{p,\mathbb{S}^n}.$$

Отсюда, используя оценку

$$|D(fg)|^p \le |fDg|^p + C(|Dfg|^p + |Dfg|\cdot|fDg|^{p-1}) \tag{39}$$

и условие $\|v_R\|_{p^*,\mathbb{S}^n} = 1$, получаем

$$\|v_R\|^{p^*}_{p^*,\mathbb{S}^n\cap B_\rho} \le \|v_R\|^p_{p^*,\mathbb{S}^n\cap B_\rho} \le$$
$$\le K(n,p)^p\|Dv_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} + C\left[\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} + \|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}\|Dv_R\|^{p-1}_{p,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho}\right].$$

Выражая $\|Dv_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n}$ из (35), с учётом (36) выводим

$$R^p K(n,p)^p \|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} \le 1 - \|v_R\|^{p^*}_{p^*,\mathbb{S}^n\cap B_\rho} + C\left[\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} + \|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}\|Dv_R\|^{p-1}_{p,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho}\right],$$

откуда, поделив на $\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n}$, имеем

$$R^p K(n,p)^p \le \frac{\|v_R\|^{p^*}_{p^*,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho}}{\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n}} + C\left(\frac{\|Dv_R\|_{p,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho}}{\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}}\right)^{p-1} + C. \tag{40}$$

В силу (38)

$$\frac{\|v_R\|^{p^*}_{p^*,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho}}{\|v_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n}} \le \sup_{\mathbb{S}^n\setminus B_\rho} v_R^{p^*-p} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{41}$$

Положим $\eta(x) := \eta(r) := 1 - \varphi(\frac{r}{\rho})$. Для оценки второго слагаемого в правой части (40) подставим $h = \eta^p v_R$ в (34). Получим

$$\lambda^p_R \int\limits_{\mathbb{S}^n} \eta^p v_R^{p^*} = \int\limits_{\mathbb{S}^n} \eta^p |Dv_R|^p + p\int\limits_{\mathbb{S}^n} \eta^{p-1} v_R |Dv_R|^{p-2}\langle D\eta, Dv_R\rangle + R^p \int\limits_{\mathbb{S}^n} \eta^p v_R^p \ge$$

$$\ge \int\limits_{\mathbb{S}^n} \eta^p |Dv_R|^p + p\int\limits_{\mathbb{S}^n} \eta^{p-1} v_R |Dv_R|^{p-2}\langle D\eta, Dv_R\rangle. \tag{42}$$

С учётом (36) имеем

$$\|\eta Dv_R\|^p_{p,\mathbb{S}^n} \le C\left(\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}\|\eta Dv_R\|^{p-1}_{p,\mathbb{S}^n} + \|v_R\|^{p^*}_{p^*,\mathbb{S}^n\setminus B_{\rho/2}}\right),$$

откуда ввиду (41)

$$\left(\frac{\|\eta Dv_R\|_{p,\mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}}\right)^p \le C\left(\frac{\|\eta Dv_R\|_{p,\mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}}\right)^{p-1} + o(1), \quad R\to\infty,$$

и, следовательно,

$$\frac{\|Dv_R\|_{p,\mathbb{S}^n\setminus B_\rho}}{\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}} \le \frac{\|\eta Dv_R\|_{p,\mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}} \le C.$$

Поэтому из (40) получаем неравенство

$$R^p K(n,p)^p \le C,$$

которое приводит к противоречию при больших $R$. □

**Замечание 5.1.** *В [Aub, Теорема 8] показано, что для $n \ge 2$ на сфере $\mathbb{S}^n$ при $1 < p < 2$ выполнено так называемое неравенство Соболева с точной константой*

$$\|v\|^p_{p^*,\mathbb{S}^n} \le K^p(n,p)\|Dv\|^p_{p,\mathbb{S}^n} + C(p)\|v\|^p_{p,\mathbb{S}^n}, \quad v \in W^1_p(\mathbb{S}^n), \tag{43}$$

*с некоторым $C(p) > 0$. При $n \ge 3$ и $p = 2$ этот результат верен для произвольного многообразия без края (см. [HV]). Как было замечено в [ДН], из (43) следует, что при больших $R$ инфимум $\lambda(p,\mathbb{S}^n_R)$ не достигается.*

*Таким образом, ограничение $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ с $\beta = \beta(M) > 0$ из [ДН, Теорема 4.1] точно с обеих сторон.*

**Замечание 5.2.** *Объединяя результат теоремы 5.1 и замечание 5.1, получаем, что для* $n \in \{2, 3, 4\}$ *и* $1 < p < n$ *инфимум* $\lambda(p, \mathbb{S}^n_R)$ *не достигается, если* $R$ *достаточно велико.*

**Доказательство Теоремы 1.2.** Непосредственно вытекает из теоремы 5.1 и леммы 5.1. □

**Замечание 5.3.** *Как и для теоремы 5.1, ограничение* $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ *с* $\beta = \beta(\Omega) > 0$ *для теоремы 1.1 точно с обеих сторон.*

Я благодарен А. И. Назарову за постановку задачи и внимание к работе, а также С. В. Иванову за полезные советы.

# Список литературы


[AM] Adimurthi, G. Mancini, *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*, Nonlinear Analysis, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni (1991), 9–25.

[Aub] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 573–598.

[Bl] G.A. Bliss, *An integral inequality*, J. London Math. Soc. **5** (1930), 40–46.

[БЗ80] Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер, *Геометрические неравенства*, Ленинград : Наука. Ленингр. отд-ние, 1980. 288 с.

[БЗ94] Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию*, СПб.: Наука, 1994. 318 с.

[ДН] А.В. Демьянов, А.И. Назаров, *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем*, Алгебра и Анализ **17** (2005), no. 5, 105—140.

[Dr] O. Druet, *Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 217–242.

[FR] W.H. Fleming, R. Rishel, *An integral formula for total gradient variation.* Arch. Math **11**, (1960) 218–222.

[HV] E. Hebey, M. Vaugon, *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), no. 1, 57-–93.

[Kaw] B. Kawohl, *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE.*, Springer Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[ЛУ] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-ое изд., Наука, М., 1973.

[Ls] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case.* 1, 2, Riv. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 45–121, 145–201.

[LP] P.-L. Lions, F. Pacella, *Isoperimetric Inequalities for Convex Cones*, Proc. Am. Math. Soc. **109** (1990), no. 2, 477–485.

[LPT] P.-L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, *Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), no. 2, 301–324.

[НЩ] А.И. Назаров, А.П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева*, Нелин. задачи и теория функций (ПМА. Вып.**27**). Новосиб., Т. Рожковская (2004), 109–136.

[PT] F. Pacella, M. Tricarico, *Symmetrization for a Class of Elliptic Equations with Mixed Boundary Conditions*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **XXXIV** (1985-86), 75–94.

[PS] Г. Полиа, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1962.

[RV] M. Ritoré, E. Vernadakis, *Isoperimetric inequalities in Euclidean convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 7, 4983–5014.

[Tr] N.S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 721–747.

[Wan] X.J. Wang, *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, J. Diff. Eqs. **93** (1991), no. 2, 283–310.