Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 6 апреля 2026 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

# Линейная задача об устойчивости вращения двухфазной жидкой массы

И. В. Денисова

11 апреля 2026 г.

**Аннотация**

Доказано существование решения линеаризованной задачи о вращении вязкой двухфазной капли, состоящей из сжимаемой и несжимаемой жидкостей, при этом внутренней является несжимаемая жидкость. Она ограничена замкнутой неизвестной поверхностью, не пересекающейся с внешней свободной границей. Сжимаемая жидкость баротропна. На обеих границах действуют силы поверхностного натяжения. Предполагается, что угловая скорость мала, а форма капли близка к двухслойной фигуре равновесия.

Теорема о глобальной (по времени) разрешимости задачи получена в пространствах Соболева–Слободецкого.

Библиография: 18 наименований.

[0]Работа выполнена по теме государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ИПМаш РАН № 124040800009-8.

# 1 Введение

В полной постановке задача о неустановившемся движении в $\mathbb{R}^3$ двух разнородных жидкостей, разделённых замкнутой неизвестной поверхностью, была впервые рассмотрена в [1], где была получена её локальная (по времени) разрешимость в пространствах Соболева – Слободецкого.

Сформулируем эту задачу для конечного объёма жидкостей. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в ограниченной области $\Omega_0^+ \subset \mathbb{R}^3$ находится несжимаемая жидкость с динамической вязкостью $\mu^+$ и плотностью $\rho^+ > 0$, а в области $\Omega_0^-$, окружающей $\Omega_0^+$, находится сжимаемая жидкость с динамическими вязкостями $\mu^-$ и $\mu_1^-$,

$$\mu^\pm > 0, \qquad 2\mu^- + 3\mu_1^- \geqslant 0.$$

Допустим, что при $t > 0$ $\Omega_t \equiv \overline{\Omega_t^+} \cup \Omega_t^-$ ограничена свободной поверхностью $\Gamma_t^-$. Внутренняя область $\Omega_t^+$ отделена от $\Omega_t^-$ переменной замкнутой границей $\Gamma_t^+$, причём в начальный момент $\Gamma_0^\pm$ заданы и не пересекаются. Сжимаемая жидкость считается баротропной. На обеих границах действуют силы поверхностного натяжения. Эта двухфазная капля вращается вокруг вертикальной оси $x_3$ с угловой скоростью $\omega$.

При $t > 0$ необходимо найти поверхности $\Gamma_t^-$, $\Gamma_t^+$, векторное поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ обеих жидкостей, а также давление несжимаемой жидкости $p^+(x,t)$ в $\Omega_t^+$ и плотность $\rho(x,t) > 0$ в $\Omega_t^-$, удовлетворяющие задаче дифракции для системы Навье – Стокса

$$\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big) - \nabla\cdot\mathbb{T} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^+, \quad t>0,\\
&\rho\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big) - \nabla\cdot\mathbb{T} = 0, \quad \mathcal{D}_t\rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t^-, \quad t>0,\\
&\qquad \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0(x) \quad \text{в } \Omega_0^-\cup\Omega_0^+, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \quad \text{в } \Omega_0^-,\\
&\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}\big|_{\Gamma_t^-} = \sigma^- H^-\boldsymbol{n} \quad \text{на } \Gamma_t^-, \qquad\qquad (1.1)\\
&[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t^+} \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t^+,\\ x\in\Omega_t^+}} \boldsymbol{v}(x,t) - \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t^+,\\ x\in\Omega_t^-}} \boldsymbol{v}(x,t) = 0,\\
&[\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}]\big|_{\Gamma_t^+} = \sigma^+ H^+\boldsymbol{n} \text{ на } \Gamma_t^+,\\
&V_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{на } \Gamma_t = \Gamma_t^+\cup\Gamma_t^-.
\end{aligned}$$

Здесь тензор напряжений задаётся по-разному в двух областях:

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p) = \begin{cases} -p^+\mathbb{I} + \mu^+\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \Omega_t^+,\\ \big(-p^-(\rho) + \mu_1^-\nabla\cdot\boldsymbol{v}\big)\mathbb{I} + \mu^-\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) & \text{в } \Omega_t^-, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где $\big(\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\big)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ — удвоенный тензор скоростей деформации, $\mathbb{I}$ — единичная матрица; постоянная плотность $\rho^+ > 0$ в $\Omega_t^+$; давление сжимаемой жидкости заданно известной гладкой функцией плотности $p^-(\rho)$ в $\Omega_t^-$; $\boldsymbol{v}_0(x)$ и $\rho_0(x) > 0$ — начальные значения скорости и плотности жидкостей, $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к объединению $\Gamma_t$; $H^\pm(x,t)$ — удвоенные средние кривизны поверхностей $\Gamma_t^\pm$ (причем $H^+ < 0$ в точках выпуклости $\Gamma_t^+$ в сторону $\Omega_t^-$); $\sigma^-, \sigma^+ > 0$ — коэффициенты поверхностного натяжения на $\Gamma_t^-$ и $\Gamma_t^+$ соответственно; $V_{\boldsymbol{n}}$ — скорость эволюции поверхностей $\Gamma_t^-$ и $\Gamma_t^+$ в направлении $\boldsymbol{n}$. Предполагается, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение.

Мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, если они обозначены латинскими буквами, и от 1 до 2, если греческими. Векторы и векторные пространства помечаются жирным шрифтом. Запись $\nabla \cdot \mathbb{T}$ означает вектор с компонентами $(\nabla \cdot \mathbb{T})_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$, $j = 1, 2, 3$.

Кинематическое граничное условие $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = V_{\boldsymbol{n}}$ исключает перенос массы через границы жидкостей. Оно следует из предположения, что частицы жидкости не покидают границ $\Gamma_t^\pm$ с течением времени.

В ограниченной области локальную (по времени) разрешимость задачи (1.1) можно доказать, если учесть оценки для модельной задачи для сжимаемой жидкости в полупространстве [2].

Наша задача — это получить существование глобального решения линеаризации задачи (1.1). Доказательство разрешимости этой линейной задачи основано на экспоненциальном неравенстве для обобщённой энергии системы.

Существование решения линейной модельной задачи без вращения было доказано В. А. Солонниковым в [3]. Глобальная разрешимость нелинейной задачи без вращения была получена им в [4]. Там же была доказана устойчивость состояния покоя двухфазной жидкости в контейнере с начальной границей раздела сред близкой к шару. Аналогичный анализ был проведён для двухкомпонентной несжимаемой жидкости без вращения в [5] и с вращением в [6, 7], где было доказано существование глобального (по времени) решения нелинейной задачи при малых данных сначала в пространствах Соболева [6, 7], а затем и Гёльдера [8].

Наше исследование проводится в случае отсутствия силы тяжести, т. е. описанное двухфазное тело можно рассматривать, например, как планету с газовой атмосферой, вращающуюся в безвоздушном пространстве.

Предположим, что области $\Omega_0^+$, $\Omega_0$ мало отличаются от фигур равновесия $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}$, причём
$$|\Omega_0^+| = |\mathcal{F}^+|. \tag{1.3}$$
Введём обозначение $\mathcal{F}^- = \mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}^+}$. Существование фигур равновесия для вращающейся двухфазной жидкости было доказано в [9].

Естественно предположить сохранение массы жидкостей с течением времени. Тогда с учётом постоянной плотности несжимаемой жидкости и равенства (1.3) имеем:
$$m^+ \equiv \rho^+|\Omega_t^+| = \rho^+|\mathcal{F}^+|, \qquad m^- \equiv \rho_*^-|\Omega_0^-| = \int_{\Omega_t^-} \rho(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{1.4}$$
где $\rho_*^-$ — средняя плотность сжимаемой жидкости в начальный момент времени. Можно доказать, что решение задачи (1.1) также удовлетворяет и другим законам сохранения при $t > 0$:
$$\rho^+\int_{\Omega_t^+} x_j\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_t^-} \rho(x,t)x_j\,\mathrm{d}x = \rho^+\int_{\Omega_0^+} x_j\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0^-} \rho(x,0)x_j\,\mathrm{d}x \equiv 0,$$
$$j = 1,2,3, \ \text{(сохранение центра тяжести)},$$
$$\rho^+\int_{\Omega_t^+} \boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_t^-} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\,\mathrm{d}x = \rho^+\int_{\Omega_0^+} \boldsymbol{v}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0^-} \rho_0(x)\boldsymbol{v}_0(x)\,\mathrm{d}x \equiv 0$$
$$\text{(сохранение импульса)}, \tag{1.5}$$
$$\rho^+\int_{\Omega_t^+} \boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_t^-} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \rho^+\int_{\Omega_0^+} \boldsymbol{v}_0(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_0^-} \rho_0(x)\boldsymbol{v}_0(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x \equiv \beta\delta_i^3$$
$$\text{(сохранение углового момента)},$$
где $\boldsymbol{\eta}_i(x) = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{x}$, $i = 1,2,3$, $\beta$ — угловой момент вращающейся двухфазной жидкости, $\delta_i^k$ — символы Кронекера.

Введем поверхности $\mathcal{G}^+ = \partial\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{G}^- = \partial\mathcal{F}$ (см. рис. 1).

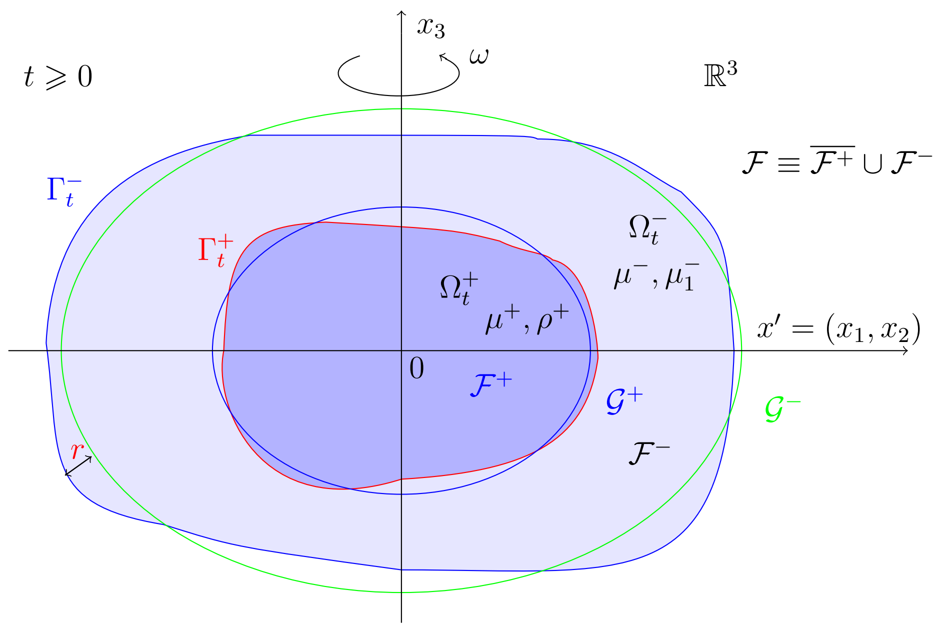


Рис. 1. Двухфазное тело.

Движение двухфазной жидкой массы, равномерно вращающейся вокруг оси $x_3$ с постоянной угловой скоростью $\omega$, описывается однородными стационарными уравнениями Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \rho^+(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P}) = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{V}} = 0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{F}^+, \\ \varrho(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathcal{V}} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P}) = 0, \qquad \nabla\cdot(\varrho\boldsymbol{\mathcal{V}}\ ) = 0 \quad \text{в} \ \ \mathcal{F}^- \end{aligned} \tag{1.6}$$

(здесь $\rho$ и $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ зависят только от $x$) и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P})\boldsymbol{n}\big|_{\mathcal{G}^-} - \sigma^-\mathcal{H}^-\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \\ &[\boldsymbol{\mathcal{V}}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \qquad [\mathbb{T}(\boldsymbol{\mathcal{V}},\mathcal{P})\boldsymbol{n}]\big|_{\mathcal{G}^+} - \sigma^+\mathcal{H}^+\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G}^+, \\ &\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{G} = \mathcal{G}^+\cup\mathcal{G}^-, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\mathbb{T}$ задаётся равенствами (1.2), а векторное поле скоростей — это

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(x) = \omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x} \equiv \omega(-x_2, x_1, 0),$$

$\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^+$ — удвоенные средние кривизны $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$, при этом градиент функции давления задаётся в областях $\mathcal{F}^{\pm}$ формулами:

$$\nabla\mathcal{P}^{+}(x)=\rho^{+}\omega^{2}x'\equiv\rho^{+}\frac{\omega^{2}}{2}\nabla|x'|^{2}\quad\text{в } \mathcal{F}^{+}, \tag{1.8}$$

$$\nabla\mathcal{P}^{-}(\varrho)=\varrho\omega^{2}x'\equiv\varrho(x)\frac{\omega^{2}}{2}\nabla|x'|^{2}\quad\text{в } \mathcal{F}^{-}. \tag{1.9}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_i$ – $i$-ый базисный вектор, $\varrho(x)$ — функция плотности сжимаемой жидкости в $\mathcal{F}^{-}$, $|x'|^2=x_1^2+x_2^2$. Последнее соотношение в (1.7) следует из граничного условия $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=V_{\boldsymbol{n}}$ в (1.1).

Предположим, что $\varrho$ зависит только от $|x'|$ и что угловой момент двухфазной капли совпадает с угловым моментом фигуры равновесия, который выражается формулой

$$\beta=\omega\Big(\rho^{+}\int_{\mathcal{F}^{+}}|x'|^{2}\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{F}^{-}}\varrho(|x'|)|x'|^{2}\,\mathrm{d}x\Big).$$

Будем считать его параметром задачи, при этом угловая скорость $\omega$ будет зависимой величиной.

Равенства (1.8), (1.9) эквивалентны следующим:

$$\nabla\mathcal{P}^{+}(x)=\rho^{+}\nabla\Big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}\Big),\qquad\nabla\mathcal{P}^{-}(\varrho)={\mathcal{P}^{-}}'(\varrho)\nabla\Big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}\Big).$$

Введем $\mathcal{Q}(\varrho)$ такую, что

$$\nabla\mathcal{Q}(\varrho)\equiv\frac{{\mathcal{P}^{-}}'(\varrho)\nabla\varrho}{\varrho}=\nabla\Big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}\Big). \tag{1.10}$$

Функция $\mathcal{Q}(\varrho)=\int_{\varrho_1}^{\varrho}\frac{{\mathcal{P}^{-}}'(s)}{s}\,\mathrm{d}s$, $\varrho_1\geqslant 0$. Поскольку $\mathcal{Q}'(\varrho)=\frac{{\mathcal{P}^{-}}'(\varrho)}{\varrho}>0$, то существует обратная функция $\mathcal{Q}^{-1}$. И из (1.10) следует, что

$$\varrho(|x'|)=\mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}+C^{-}\Big)\ \text{в } \mathcal{F}^{-} \tag{1.11}$$

с произвольной константой $C^{-}$.

Подставляя $\boldsymbol{\mathcal{V}}, \mathcal{P}$ и $\varrho$ в граничные условия в (1.7), получаем уравнения для поверхности $\mathcal{G}^{-}$ области $\mathcal{F}$ и границы раздела $\mathcal{G}^{+}$ между жидкостями

$$\begin{aligned}&\sigma^{-}\mathcal{H}^{-}(x)+\mathcal{P}^{-}\Big(\mathcal{Q}^{-1}\big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}+C^{-}\big)\Big)=0,\quad x\in\mathcal{G}^{-},\\&\sigma^{+}\mathcal{H}^{+}(x)+\rho^{+}\Big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}+c^{+}\Big)-\mathcal{P}^{-}\Big(\mathcal{Q}^{-1}\big(\frac{\omega^{2}}{2}|x'|^{2}+C^{-}\big)\Big)=0,\quad x\in\mathcal{G}^{+}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Зададим массу сжимаемой жидкости $m^-$. Тогда, учитывая (1.11), имеем:

$$m^- = \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(x')\,\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathcal{F}^-} \mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + C^-\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

Таким образом, мы получили уравнение для определения константы $C^-$.

Заданный угловой момент $\beta$ определяет угловую скорость $\omega$:

$$\beta \equiv \int_{\cup\mathcal{F}^\pm} \varrho(x')\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\boldsymbol{\eta}_3\,\mathrm{d}x = \omega\rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} |x'|^2\,\mathrm{d}x + \omega \int_{\mathcal{F}^-} \mathcal{Q}^{-1}\Big(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + C^-\Big)|x'|^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.14}$$

Будем считать, что формы фигур $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}$ близки к шарам $B_{R_0^\pm} \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leqslant R_0^\pm\}$ радиусов $R_0^\pm$ ($R_0^+ < R_0^-$) таким, что $|B_{R_0^+}| = |\Omega_0^+|$ и $|B_{R_0^-}| = |\Omega_0^+| + |\Omega_0^-|$, а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ мала, а плотность $\varrho(x')$ совпадает с $\rho^+ > 0$ для несжимаемой жидкости и мало отличается от средней плотности $\rho^- > 0$ в $\Omega_0^-$ для сжимаемой жидкости. Кроме того, пусть $|\mathcal{F}^+| = |B_{R_0^+}| \equiv \frac{4}{3}\pi {R_0^+}^3$.

В покое вложенные шарообразные жидкости с равномерным распределением плотностей будут иметь кусочно-постоянное давление:

$$\begin{aligned} p(\rho^+) &= \frac{2\sigma^+}{R_0^+} + \frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{в } B_{R_0^+}, \\ p(\rho^-) &\equiv \mathcal{P}^-(\rho_*^-) = \frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{в } B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $\rho^- \equiv \rho_*^-$ — средняя плотность в кольце $B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+}$. Таким образом, $\rho^+ c^+ \equiv p_0^+$ в (1.12) можно найти из первого соотношения в (1.15): $p_0^+ = p(\rho^+)$.

Пусть $S_1$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $\xi = \frac{x}{|x|} \in S_1$. Предположим, что $\mathcal{G}^\pm$ задаются вращательно симметричными функциями $R^\pm(\xi)$ на $S_1$, т. е. $R^\pm(\xi)$ зависят только от $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и $\xi_3$.

Обозначим через $C^s$, $s \notin \mathbb{Z}$, $s > 0$, гёльдеровское пространство функций $f$ на сфере $S_1$ с нормой

$$|f|_{C^s(S_1)} \equiv \max_{k=\{1,\dots,N\}} \Big( \sum_{|\boldsymbol{j}|<s} \sup_{\xi\in\zeta_k} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f(\xi)| + \sum_{|\boldsymbol{j}|=[s]} \sup_{\xi,\bar\xi\in\zeta_k} |\xi - \bar\xi|^{-(s-[s])} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f(\xi) - \mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f(\bar\xi)| \Big),$$

где $\mathcal{D}^{\boldsymbol{j}} f$ — это $|\boldsymbol{j}|$-ая производная от $f$, вычисленная в локальных координатах на подобласти $\zeta_k$ единичной сферы $S_1$, $\bigcup_{k=1}^N \zeta_k = S_1$. Под $\tilde{C}^s(S_1)$

мы подразумеваем подпространство $C^s(S_1)$, состоящее из вращательно-симметричных функций, которые чётны относительно $\xi_3$.

Приведём теорему [9] о существовании поверхностей $\mathcal{G}^-$, $\mathcal{G}^+$, удовлетворяющих уравнениям (1.12) и близких к вложенным шарам.

**Теорема 1.1.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{P}^-(\varrho) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}_+)$ — *положительная возрастающая функция такая, что для неё выполняется второе равенство в* (1.15). *Здесь* $\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$. *Предположим также, что данные задачи* (1.6), (1.7) *подчиняются условию*

$$\frac{2\sigma^-({R_0^-}^3 - {R_0^+}^3)}{3\rho_*^- {R_0^-}^4} - {\mathcal{P}^-}'(\rho_*^-) \neq 0.$$

*Тогда для произвольного* $\beta$, *удовлетворяющего оценке*

$$|\beta| < \varepsilon$$

*при достаточно малом* $\varepsilon$, *существует единственное решение* $(R^\pm, \omega, C^-) \in \tilde{C}^{2+\alpha}(S_1) \times \tilde{C}^{2+\alpha}(S_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *системы* (1.12)–(1.14) *и выполняется неравенство*

$$\sum_{\pm} |R^\pm - R_0^\pm|_{C^{2+\alpha}(S_1)} + |\mathcal{Q}^{-1}(C^-) - \rho_*^-| + |\omega| < c|\beta|.$$

Так как найденные фигуры $\mathcal{F}^\pm$ осесимметричны и имеют симметрию относительно плоскости $x_3 = 0$, то

$$\rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} x_i \, \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(|x'|) x_i \, \mathrm{d}x = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.16}$$

$$\rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} x_3 x_j \, \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(|x'|) x_3 x_j \, \mathrm{d}x = 0, \quad j = 1, 2.$$

Условие (1.16) соответствует первому соотношению в (1.5), которое означает, что барицентр жидкостей все время совпадает с началом координат. Предполагая совпадение импульсов и угловых моментов фигур равновесия и двухслойной капли в начальный момент $t = 0$, из (1.5) мы выводим эти равенства и во все моменты $t > 0$. Они принимают вид:

$$\rho^+ \int_{\Omega_t^+} \boldsymbol{v}(x,t) \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_t^-} \rho(x,t) \boldsymbol{v}(x,t) \, \mathrm{d}x = \rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} \boldsymbol{\mathcal{V}}(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(|x'|) \boldsymbol{\mathcal{V}}(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\rho^+ \int\limits_{\Omega_t^+} \boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_t^-} \rho(x,t)\boldsymbol{v}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.17}$$

$$= \rho^+ \int\limits_{\mathcal{F}^+} \boldsymbol{\mathcal{V}}(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{F}^-} \varrho(|x'|)\boldsymbol{\mathcal{V}}(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x = \delta_i^3\beta, \quad i=1,2,3.$$

Рассмотрим задачу для возмущений скорости, давления и плотности сжимаемой жидкости

$$\boldsymbol{v}_r(x,t) = \boldsymbol{v}(x,t) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(x), \quad p_r(x,t) = p(x,t) - \mathcal{P}(x), \quad \rho_r(x,t) = \rho(x,t) - \varrho(|x'|),$$

записанную в системе координат, вращающейся вокруг оси $x_3$ с угловой скоростью $\omega$.

Введем новые координаты $\{y_i\}$ и новые неизвестные функции $(\tilde{\boldsymbol{v}},\ \tilde{p})$ по формулам

$$x = \mathcal{Z}(\omega t)y,$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\boldsymbol{v}_r(\mathcal{Z}(\omega t)y,t), \quad \tilde{p}(y,t) = p_r(\mathcal{Z}(\omega t)y,t), \quad \tilde{\rho}(y,t) = \rho_r(\mathcal{Z}(\omega t)y,t),$$

где

$$\mathcal{Z}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{Z}^{-1}(\omega t)(\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla_x)\boldsymbol{v}_r = \omega\big(\boldsymbol{\eta}_3(x)\cdot\nabla_x\big)\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \omega\big(\mathcal{Z}\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot Z^{-T}\nabla_y\big)\tilde{\boldsymbol{v}}$$

$$= \omega\big(\boldsymbol{\eta}_3(y)\cdot\nabla_y\big)\tilde{\boldsymbol{v}}(y,t) = \omega\big(y_2\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial y_2}\big)$$

и $\mathcal{D}_t\boldsymbol{v}_r|_{x=\mathcal{Z}y} = \mathcal{D}_t\boldsymbol{v}_r(\mathcal{Z}y,t) - (\boldsymbol{\mathcal{V}}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_r$. Подставляя эти формулы в (1.1), учитывая (1.6) и действуя оператором $\mathcal{Z}^{-1}$, приходим к задаче для возмущений скорости $\tilde{\boldsymbol{v}}$, давления $\tilde{p}$ и плотности $\tilde{\rho}$:

$$\begin{gathered}
\rho^+\big(\mathcal{D}_t\tilde{\boldsymbol{v}} + (\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{v}} + 2\omega(e_3\times\tilde{\boldsymbol{v}})\big) - \mu^+\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} + \nabla\tilde{p} = 0,\\
\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \qquad \text{в } \tilde{\Omega}_t^+ \equiv \tilde{\Omega}_t^+, \qquad t>0,\\
\rho(\mathcal{Z}y,t)\big(\mathcal{D}_t\tilde{\boldsymbol{v}} + (\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{v}} + 2\omega(e_3\times\tilde{\boldsymbol{v}})\big) - \mu^-\nabla^2\tilde{\boldsymbol{v}} - \mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}) + P'(\rho)\nabla\rho(\mathcal{Z}y,t)\\
- P'(\varrho)\nabla\varrho(\mathcal{Z}y') = 0, \qquad \mathcal{D}_t\tilde{\rho} + \nabla\cdot\big(\rho(\mathcal{Z}y,t)\tilde{\boldsymbol{v}}\big) = 0 \quad \text{в } \tilde{\Omega}_t^-,\ t>0,\\
\tilde{\boldsymbol{v}}(y,0) = \boldsymbol{v}_0(y) - \boldsymbol{\mathcal{V}}(y) \equiv \tilde{\boldsymbol{v}}_0(y), \quad y\in\cup\tilde{\Omega}_0^{\pm} \equiv \tilde{\Omega}_0^-\cup\tilde{\Omega}_0^+,\\
\tilde{\rho}(y,0) = \rho_0(y) - \varrho(y') \equiv \tilde{\rho}_0(y) \quad \text{в } \tilde{\Omega}_0^-,\\
\mathbb{T}(\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{p})\tilde{\boldsymbol{n}}\big|_{\tilde{\Gamma}_t^-} = \big(\sigma^-H^-(y,t) + \mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)\big)\tilde{\boldsymbol{n}}, \quad y\in\tilde{\Gamma}_t^-, \quad [\tilde{\boldsymbol{v}}]\big|_{\tilde{\Gamma}_t^+} = 0,\\
[\mathbb{T}(\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{p})\tilde{\boldsymbol{n}}]\big|_{\tilde{\Gamma}_t^+} = \Big(\sigma^+H^+(y,t) + \rho^+\frac{\omega^2}{2}|y'|^2 + p_0^+ - \mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)\Big)\tilde{\boldsymbol{n}}, \quad y\in\tilde{\Gamma}_t^+,\\
\tilde{V}_{\tilde{\boldsymbol{n}}} = \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} \quad \text{на } \tilde{\Gamma}_t \equiv \tilde{\Gamma}_t^-\cup\tilde{\Gamma}_t^+,
\end{gathered} \tag{1.18}$$

где $\tilde{\Omega}_t^{\pm} = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\Omega_t^{\pm}$, $\tilde{\Gamma}_t^{\pm} = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t)\Gamma_t^{\pm}$, $\tilde{\boldsymbol{n}}$ — внешняя нормаль к $\tilde{\Gamma}_t$, $\boldsymbol{n} = \mathcal{Z}\tilde{\boldsymbol{n}}$, $y' = (y_1, y_2, 0)$, $p_0^-$, $p_0^+$ — константы на $\tilde{\Gamma}_t^-$ и $\tilde{\Gamma}_t^+$ соответственно.

Заметим, что кинематическое граничное условие в (1.1)

$$V_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},$$

где $V_{\boldsymbol{n}}$ — нормальная скорость $\Gamma_t$, инвариантно относительно нашего преобразования. Действительно, пусть $x(t)$ — точка $\Gamma_t$. Имеем $V_{\boldsymbol{n}} = \mathcal{D}_t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}$, и поскольку $\mathcal{D}_t\boldsymbol{x} = \omega\mathcal{D}_\theta\big|_{\theta=\omega t}\mathcal{Z}\boldsymbol{y} + \mathcal{Z}\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}$, $\mathcal{Z}^T = \mathcal{Z}^{-1}$, то $\mathcal{D}_t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} = \omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y})\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} + \mathcal{D}_t\boldsymbol{y}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}$. С другой стороны, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} + \omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y})\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}$. Следовательно, $\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}$, что означает $\tilde{V}_{\tilde{\boldsymbol{n}}} = \tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}$.

Соотношения (1.4), (1.5), (1.17) переходят в

$$|\tilde{\Omega}_t^+| = |\mathcal{F}^+|, \qquad \int_{\tilde{\Omega}_t^-}\rho(y,t)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{F}^-}\varrho(|y'|)\,\mathrm{d}y \equiv \rho_*^-|\Omega_0^-|, \tag{1.19}$$

$$\rho^+\int_{\tilde\Omega_t^+} y_j\,\mathrm{d}y+\int_{\tilde\Omega_t^-}\rho(y,t)y_j\,\mathrm{d}y=0,\quad j=1,2,3,\quad (\text{сохранение барицентра}),$$

$$\rho^+\int_{\tilde\Omega_t^+}\tilde{\boldsymbol v}(y,t)\,\mathrm{d}y+\int_{\tilde\Omega_t^-}\rho(y,t)\tilde{\boldsymbol v}(y,t)\,\mathrm{d}y=0\quad(\text{сохранение импульса}),$$

$$\begin{aligned}\rho^+\int_{\tilde\Omega_t^+}&\tilde{\boldsymbol v}(y,t)\cdot\boldsymbol\eta_i(y)\,\mathrm{d}y+\int_{\tilde\Omega_t^-}\rho(y,t)\tilde{\boldsymbol v}(y,t)\cdot\boldsymbol\eta_i(y)\,\mathrm{d}y\\&+\omega\rho^+\int_{\tilde\Omega_t^+}\boldsymbol\eta_3\cdot\boldsymbol\eta_i(y)\,\mathrm{d}y+\omega\int_{\tilde\Omega_t^-}\rho(y,t)\boldsymbol\eta_3\cdot\boldsymbol\eta_i(y)\,\mathrm{d}y\\&=\omega\rho^+\int_{\mathcal F^+}\boldsymbol\eta_3\cdot\boldsymbol\eta_i(y)\,\mathrm{d}y+\omega\int_{\mathcal F^-}\varrho(|y'|)\boldsymbol\eta_3\cdot\boldsymbol\eta_i(y)\,\mathrm{d}y=\beta\delta_i^3\\&\qquad(\text{сохранение углового момента}),\end{aligned}\tag{1.20}$$

где $\boldsymbol\eta_i(y)=\boldsymbol e_i\times\boldsymbol y$, $i=1,2,3$.

Предположим, что поверхности $\tilde\Gamma_t^\pm$ могут быть заданы соотношениями

$$\tilde\Gamma_t^\pm=\{y=z+\boldsymbol N(z)r(z,t),\quad z\in\mathcal G^\pm\},$$

и отобразим $\tilde\Omega_t^\pm$ на $\mathcal F^\pm$ с помощью преобразования Ханзавы, обратное которому есть

$$y=z+\boldsymbol N^*(z)r^*(z,t)\equiv e_r(z,t),\tag{1.21}$$

где $\boldsymbol N^*$ и $r^*$ являются продолжениями $\boldsymbol N$ и $r$ с $\cup\mathcal G^\pm$ в $\mathcal F$ соответственно.

Ввиду соотношений (1.12) граничные условия

$$\mathbb T(\tilde{\boldsymbol v},\tilde p)\tilde{\boldsymbol n}\big|_{\tilde\Gamma_t^-}=\big(\sigma^-H^-(y,t)+\mathcal P^-(\varrho(y'))\big)\tilde{\boldsymbol n},\quad y\in\tilde\Gamma_t^-,$$

$$[\mathbb T(\tilde{\boldsymbol v},\tilde p)\tilde{\boldsymbol n}]\big|_{\tilde\Gamma_t^+}=\Big(\sigma^+H^+(y,t)+\rho^+\frac{\omega^2}{2}|y'|^2+p_0^+-\mathcal P^-(\varrho(y'))\Big)\tilde{\boldsymbol n},\quad y\in\tilde\Gamma_t^+,$$

в (1.18) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned}-\tilde p\tilde{\boldsymbol n}+\mu^-\mathbb T'(\tilde{\boldsymbol v})\tilde{\boldsymbol n}\big|_{\tilde\Gamma_t^-}&=\Big\{\sigma^-\big(H^-(y,t)-\mathcal H^-(z)\big)+\mathcal P^-\big(\varrho(y')\big)\\&\qquad-\mathcal P^-\big(\varrho(z')\big)\Big\}\tilde{\boldsymbol n},\quad y\in\tilde\Gamma_t^-,\ z\in\mathcal G^-,\\ [-\tilde p\tilde{\boldsymbol n}+\mu^\pm\mathbb T'(\tilde{\boldsymbol v})\tilde{\boldsymbol n}]|_{\tilde\Gamma_t^+}&=\Big\{\sigma^+\big(H^+(y,t)-\mathcal H^+(z)\big)+\rho^+\frac{\omega^2}{2}\big(|y'|^2-|z'|^2\big)\\&\qquad-\mathcal P^-\big(\varrho(y')\big)+\mathcal P^-\big(\varrho(z')\big)\Big\}\tilde{\boldsymbol n},\quad y\in\tilde\Gamma_t^+,\ z\in\mathcal G^+.\end{aligned}\tag{1.22}$$

Нашей следующей целью является линеаризация задачи (1.18). Для этого нам нужно вычислить вариацию по $r$ выражений $H(y,t)-\mathcal{H}(z)$, $\mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)-\mathcal{P}^-\big(\varrho(z')\big)$ и $|y'|^2-|z'|^2$, где $y$ связано с $z$ соотношением (1.21).

Вычислим первую вариацию функционала $\mathcal{R}[r]$ по $r$ по формуле

$$\delta_0\mathcal{R}[r]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{R}[sr]\big|_{s=0}.$$

Ясно, что

$$\delta_0\big(|y'|^2-|z'|^2\big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(|\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{N}'sr|^2-|\boldsymbol{z}'|^2\big)\big|_{s=0}=2\boldsymbol{z}'\cdot\boldsymbol{N}'r,\qquad \boldsymbol{N}'=(N_1,N_2,0),$$

$$\delta_0\Big(\mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)-\mathcal{P}^-\big(\varrho(z')\big)\Big)=\mathcal{P}^{-'}\big(\varrho(z')\big)\nabla\varrho(z')\cdot\boldsymbol{N}'r=\varrho(z')\omega^2\boldsymbol{z}'\cdot\boldsymbol{N}'r,$$

и, согласно [10],

$$\delta_0\big(H^\pm(y,t)-\mathcal{H}^\pm(z)\big)=\Delta^\pm r(z,t)+\big(\mathcal{H}^{\pm^2}(z)-2\mathcal{K}^\pm(z)\big)r(z,t),$$

где $\Delta^\pm$ — это операторы Лапласа – Бельтрами на $\mathcal{G}^\pm$ соответственно, $\mathcal{K}^\pm$ — гауссовы кривизны поверхностей $\mathcal{G}^\pm$.

При обратном преобразовании Ханзавы (1.21) кинематическое условие для $V_{\boldsymbol{n}}\equiv\mathcal{D}_t\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{n}|_{\mathcal{G}}$ принимает вид

$$\mathcal{D}_t r\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}=\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{1.23}$$

Итак, применяя преобразование (1.21) и используя приведенные выше соотношения, в частности, (1.23), получаем линейную задачу относительно $(\boldsymbol{w},\theta^\pm,r)$, соответствующую (1.18), (1.22):

$$\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^+\nabla^2\boldsymbol{w}+\nabla\theta^+=\rho^+\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{w}=h^+\qquad \text{в } \mathcal{F}^+,\quad t>0,\\
&\varrho(z')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^-\nabla^2\boldsymbol{w}-\mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w})+p_1\nabla\theta^-=\varrho(z')\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad\mathcal{D}_t\theta^-+\nabla\cdot\big(\varrho(z')\boldsymbol{w}\big)=h^-\quad \text{в } \mathcal{F}^-,\quad t>0,\\
&\boldsymbol{w}(z,0)=\boldsymbol{v}_0(z)-\boldsymbol{\mathcal{V}}(z)\equiv\boldsymbol{w}_0(z),\quad z\in\mathcal{F}\equiv\mathcal{F}^-\cup\mathcal{F}^+,\\
&\qquad\qquad\theta^-(z,0)=\theta_0^-(z),\quad z\in\mathcal{F}^-,\\
&-p_1\theta^-+\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-r=\boldsymbol{d}^-\quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad -\theta^++p_1\theta^-+[\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+r=\boldsymbol{d}^+\quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_t r=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\quad \text{на } \mathcal{G}\equiv\mathcal{G}^-\cup\mathcal{G}^+,\qquad r\big|_{t=0}=r_0\quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned}\tag{1.24}$$

где $p_1 = \mathcal{P}^{-\prime}(\rho_*^-) > 0$, $\rho_*^-$ — средняя плотность сжимаемой жидкости в кольце $B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+}$, $\mathbb{T}'(\boldsymbol{u}) = \mathbb{T}(\boldsymbol{u}, 0)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0^- r &= -\sigma^- \Delta^- r - b^-(z) r, \quad z \in \mathcal{G}^-,\\ \mathcal{B}_0^+ r &= -\sigma^+ \Delta^+ r - b^+(z) r, \quad z \in \mathcal{G}^+\end{aligned} \tag{1.25}$$

с $b^-(z) = \sigma^-(\mathcal{H}^{-2} - 2\mathcal{K}^-) + \varrho(z')\omega^2 \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{z}'$, $b^+(z) = \sigma^+(\mathcal{H}^{+2} - 2\mathcal{K}^+) + (\rho^+ - \varrho(z'))\omega^2 \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{z}'$, $\boldsymbol{z}' = (z_1, z_2, 0)$.

Напомним определение пространств Соболева–Слободецкого, которые мы используем в настоящей статье. Изотропное пространство $W_2^l(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, есть пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\boldsymbol{j}| \leqslant l} \|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u\|^2_\Omega \equiv \sum_{0 \leqslant |\boldsymbol{j}| \leqslant l} \int_\Omega |\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u(x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

если $l = [l]$, т. е. $l$ — целое число, и

$$\|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} = \|u\|^2_{W_2^{[l]}(\Omega)} + \sum_{|\boldsymbol{j}| = [l]} \int_\Omega \int_\Omega |\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u(x) - \mathcal{D}_y^{\boldsymbol{j}} u(y)|^2 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{n+2\lambda}},$$

если $l = [l] + \lambda$, $\lambda \in (0,1)$. Как обычно, $\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{j}} u$ обозначает (обобщенную) частную производную $\frac{\partial^{|\boldsymbol{j}|} u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$, где $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots j_n)$ и $|\boldsymbol{j}| = j_1 + \ldots + j_n$.

Введем анизотропные пространства

$$W_2^{l,0}(Q_T) = L_2\big((0,T), W_2^l(\Omega)\big),\ W_2^{0,l/2}(Q_T) = W_2^{l/2}\big((0,T), L_2(\Omega)\big),\ Q_T = \Omega \times (0,T);$$

квадраты норм в этих пространствах совпадают соответственно с

$$\|u\|^2_{W_2^{l,0}(Q_T)} = \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^l(\Omega)} \,\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad \|u\|^2_{W_2^{0,l/2}(Q_T)} = \int_\Omega \|u(x,\cdot)\|^2_{W_2^{l/2}(0,T)} \,\mathrm{d}x.$$

Пространство $W_2^{l,l/2}(Q_T) \equiv W_2^{l,0}(Q_T) \cap W_2^{0,l/2}(Q_T)$ снабжено нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T)} \equiv \|u\|_{W_2^{l,0}(Q_T)} + \|u\|_{W_2^{0,l/2}(Q_T)}.$$

Кроме того, мы введём также норму

$$|u|_{Q_T}^{(s+l,l/2)} \equiv \|u\|_{W_2^{s+l,0}(Q_T)} + \|u\|_{W_2^{l/2}\left(0,T; W_2^s(\Omega)\right)}, \quad s > 0.$$

Пространства функций, заданных на гладких поверхностях, в частности, на $\mathcal{G}^\pm$ и на $G_T^\pm = \mathcal{G}^\pm \times (0,T)$, $T \leqslant \infty$, вводятся стандартным образом с помощью локальных карт и разбиения единицы.

Наконец положим

$$\|u\|^2_{W_2^l(\cup \mathcal{F}^\pm)} \equiv \|u\|^2_{W_2^l(\mathcal{F}^+)} + \|u\|^2_{W_2^l(\mathcal{F}^-)}, \quad \|u\|_\Omega \equiv \|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

# 2 Линейная задача

Анализ нестационарной задачи со свободными границами для уравнений Навье – Стокса (1.18) с начальными данными, близкими к режиму вращения двухфазной капли как твердого тела (см. рис. 2), основан на её линеаризации (1.24).

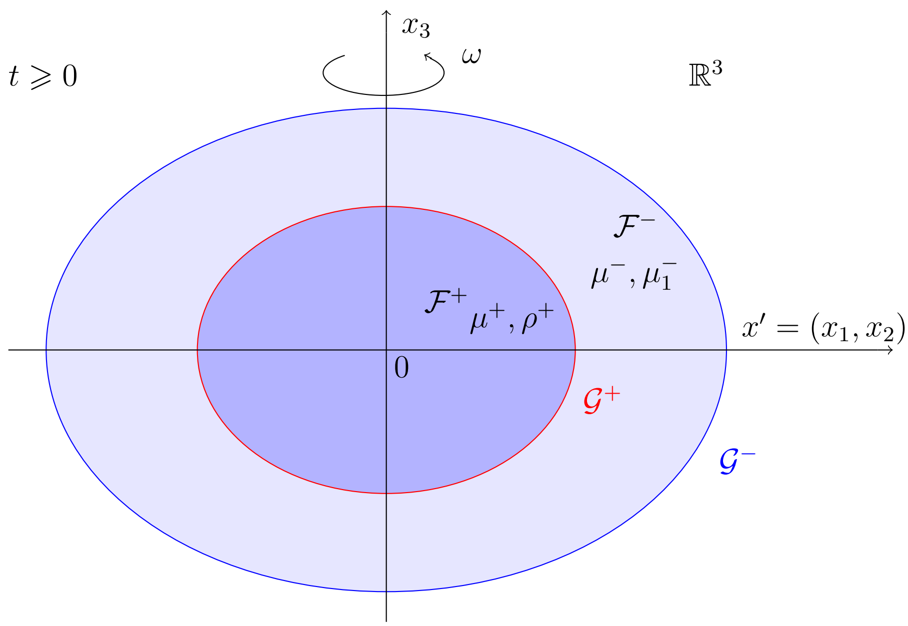


Рис. 2. Фигуры равновесия для двухфазной жидкости.

Исследуются следующие две начально-краевые задачи для уравнений Стокса в заданной двухфазной области, разделенной осесимметричной поверхностью вращения $\mathcal{G}^+$ и ограниченной осесимметричной поверхностью $\mathcal{G}^-$, относительно неизвестного векторного поля скорости $\boldsymbol{w}$, функции отклонения давления $\theta^+$ от стационарного и отклонения плотности сжимаемой жидкости $\theta^-$ от равновесной функции $\varrho(|x'|)$:

$$\begin{aligned}
&\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^+\nabla^2\boldsymbol{w}+\nabla\theta^+=\rho^+\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{w}=h^+\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{F}\quad \text{в } \mathcal{F}^+,\ \ t>0,\\
&\varrho(x')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^-\nabla^2\boldsymbol{w}-\mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w})+p_1\nabla\theta^-=\varrho(x')\boldsymbol{f},\\
&\qquad\qquad \mathcal{D}_t\theta^-+\nabla\cdot\big(\varrho(x')\boldsymbol{w}\big)=h^-\quad \text{в } \mathcal{F}^-,\quad t>0,\\
&\boldsymbol{w}\big|_{t=0}=\boldsymbol{w}_0\quad \text{в } \mathcal{F},\qquad \theta^-\big|_{t=0}=\theta_0^-\quad \text{в } \mathcal{F}^-,\\
&-p_1\theta^-\boldsymbol{N}+\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-r=\boldsymbol{d}\quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad (-\theta^++p_1\theta^-)\boldsymbol{N}+[\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+r=\boldsymbol{d}\quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_tr-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}=g\quad \text{на } \ \mathcal{G}\equiv\mathcal{G}^-\cup\mathcal{G}^+,\qquad r\big|_{t=0}=r_0\quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned}\tag{2.1}$$

и

$$\begin{aligned}
&\rho^+(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w}))-\bar{\mu}\nabla^2\boldsymbol{w}+\nabla\theta^+=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{w}=0\quad \text{в } \mathcal{F}^+,\ \ t>0,\\
&\varrho(x')\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}+2\omega(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\big)-\mu^-\nabla^2\boldsymbol{w}-\mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w})+p_1\nabla\theta^-=0,\\
&\qquad\qquad \mathcal{D}_t\theta^-+\nabla\cdot\big(\varrho(x')\boldsymbol{w}\big)=0\quad \text{в } \mathcal{F}^-,\quad t>0,\\
&\boldsymbol{w}\big|_{t=0}=\boldsymbol{w}_0\quad \text{в } \mathcal{F},\qquad \theta^-\big|_{t=0}=\theta_0^-\quad \text{в } \mathcal{F}^-,\\
&-p_1\theta^-\boldsymbol{N}+\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-r=0\quad \text{на } \mathcal{G}^-,\\
&[\boldsymbol{w}]\big|_{\mathcal{G}^+}=0,\quad (-\theta^++p_1\theta^-)\boldsymbol{N}+[\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}+\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+r=0\quad \text{на } \mathcal{G}^+,\\
&\mathcal{D}_tr-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}=0\quad \text{на } \mathcal{G},\qquad r\big|_{t=0}=r_0\quad \text{на } \mathcal{G},
\end{aligned}\tag{2.2}$$

где $\omega$ — угловая скорость вращения, $r(x,t)$ — неизвестная функция, определяющая поверхности $\Gamma_t^\pm$, $\mathbb{T}'(\boldsymbol{u})\equiv\mathbb{T}(\boldsymbol{u},0)$, $\boldsymbol{N}$ — внешняя единичная нормаль к $\mathcal{G}^-\cup\mathcal{G}^+$, $\boldsymbol{f},f,\boldsymbol{d},g$, $\boldsymbol{w}_0,r_0$ — заданные функции, выражения $\mathcal{B}_0^\pm r$ определяются формулами (1.25).

Предположим, что области $\mathcal{F}^\pm$ симметричны относительно $x_1,x_2,x_3$ и что исходные данные удовлетворяют, в соответствии с линеаризацией предположений (1.19), (1.20), условиям ортогональности

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{G}^+}r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G}=0,\quad \int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G}-\int_{\mathcal{G}^+}\varrho(x')r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\int_{\mathcal{F}^-}\theta_0^-\,\mathrm{d}x=0,\\
&\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r_0(x)x_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\int_{\mathcal{G}^+}\big(\rho^+-\varrho(x')\big)r_0(x)x_j\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\int_{\mathcal{F}^-}\theta_0^-x_j\,\mathrm{d}x=0,\ \ j=1,2,3,
\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$
\begin{gathered}
\rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} \boldsymbol{w}_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(x')\boldsymbol{w}_0(x)\,\mathrm{d}x = 0,\\
\rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} \boldsymbol{w}_0(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(x')\boldsymbol{w}_0(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(x)\,\mathrm{d}x + \omega\Big(\int_{\mathcal{F}^-} \theta_0^-\boldsymbol{\eta}_3(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(x)\,\mathrm{d}x\\
+ \int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r_0(x)\boldsymbol{\eta}_3(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+} \big(\rho^+ - \varrho(x')\big)r_0(x)\boldsymbol{\eta}_3(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_j(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big) = 0.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Введем обозначения: $Q_T^\pm = \mathcal{F}^\pm \times (0,T)$, $G_T^\pm = \mathcal{G}^\pm \times (0,T)$, $D_T = Q_T^+ \cup Q_T^-$, $Q_T = Q_T^+ \cup \overline{Q_T^-}$, $G_T = G_T^+ \cup G_T^-$.

Рассмотрим однородную задачу (2.2).

**Предложение 2.1.** *Решение задачи* (2.2) –(2.4) *удовлетворяет условиям* (2.3), (2.4) *для всех* $t > 0$.

*Доказательство.* Ввиду граничных условий в (2.2) имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{G}^+} r(x,t)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}^+} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{F}^+} \nabla\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x = 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{G}} \varrho(x')r(x,t)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}} \varrho(x')\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int_{\mathcal{F}^-} \nabla\cdot\big(\varrho(x')\boldsymbol{w}\big)\mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{F}^-} \theta^-(x,t)\,\mathrm{d}x,
\end{gathered}
$$

откуда следует, что

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\mathcal{G}^+} r(x,t)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = \int\limits_{\mathcal{G}^+} r_0(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0,\\
\int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varrho(x')r\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r_0\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varrho(x')r_0\,\mathrm{d}\mathcal{G} = -\int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta^-\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta_0^-\,\mathrm{d}x.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Значит,

$$
\int\limits_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r(x,t)\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int\limits_{\mathcal{G}^+} \varrho(x')r(x,t)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{F}^-} \theta^-(x,t)\,\mathrm{d}x = 0.
$$

А это вместе с первым равенством в (2.5) есть закон сохранения масс при $t > 0$.

Теперь проинтегрируем первое уравнение в (2.2) по $\mathcal{F}^- \cup \overline{\mathcal{F}^+} = \mathcal{F}$. С учетом (2.8) получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\,\mathrm{d}x + 2\omega\Big(\boldsymbol{e}_3\times\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x\Big) + \int_{\mathcal{G}^-}\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\,\mathrm{d}x + 2\omega\Big(\boldsymbol{e}_3\times\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x\Big) + \int_{\mathcal{G}^-}r\mathcal{B}_0^-(N_i)\boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}r\mathcal{B}_0^+(N_i)\boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x + 2\omega\Big(\boldsymbol{e}_3\times\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x\Big)$$
$$-\,\omega^2\Big(\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-}\theta^-\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}x\Big) = 0, \tag{2.6}$$

где $\bar{\rho}(x)$ — функция, равная $\rho^+$ в $\mathcal{F}^+$ и $\varrho(|x'|)$ в $\mathcal{F}^-$. Так как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-}\theta^-\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}x\Big) = \int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}(x)\boldsymbol{w}(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

то уравнение (2.6) вместе с начальными условиями (2.3), (2.4) можно рассматривать как однородную задачу Коши для соотношений

$$y_\alpha(t) = \int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r(x,t)x_\alpha\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}r(x,t)x_\alpha\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-}\theta^- x_\alpha\,\mathrm{d}x, \quad \alpha = 1,2,$$

и $y_3'(t) = \int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}w_3\,\mathrm{d}x$. Из единственности тривиального решения следует, что $y_\alpha(t) = 0$, $\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}w_3(x,t)\,\mathrm{d}x = 0$, что подразумевает $\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}w_\alpha\,\mathrm{d}x = y_\alpha'(t) = 0$, $\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}w_3\,\mathrm{d}x = y_3'(t) = 0$ и $y_3(t) = y_3(0) = 0$.

Умножим первое уравнение в (2.2) на $\boldsymbol{\eta}_j(x)$ и проинтегрируем, тогда получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}(x)\boldsymbol{w}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_3(x)\,\mathrm{d}x + 2\omega\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}(x)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}x$$
$$\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\eta}_3(x)\,\mathrm{d}x + \omega\Big(\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r|\boldsymbol{\eta}_3(x)|^2\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}r|\boldsymbol{\eta}_3|^2\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$
$$+ \int_{\mathcal{F}^-}\theta^-|\boldsymbol{\eta}_3(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)\Big) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_\alpha(x)\,\mathrm{d}x - 2\omega\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}w_\alpha(x,t)x_3\,\mathrm{d}x$$
$$-\,\omega^2\Big(\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_\alpha(x)\cdot\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{\eta}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-}\theta^-\boldsymbol{\eta}_\alpha(x)\cdot\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}x\Big) = 0,$$

$\alpha = 1, 2$, что можно записать следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_1(x)\,\mathrm{d}x + \omega\big(\int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_1(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+} [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_1\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$

$$+ \int_{\mathcal{F}^-} \theta^-\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_1(x)\,\mathrm{d}x\big)\Big) - \omega\Big(\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$+ \omega\big(\int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_2(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+} [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_2\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-} \theta^-\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_2(x)\,\mathrm{d}x\big)\Big) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_2(x)\,\mathrm{d}x + \omega\big(\int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_2(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+} [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_2\,\mathrm{d}\mathcal{G}$$

$$+ \int_{\mathcal{F}^-} \theta^-\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_2(x)\,\mathrm{d}x\big)\Big) + \omega\Big(\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}(x,t)\cdot\boldsymbol{\eta}_1(x)\,\mathrm{d}x$$

$$+ \omega\big(\int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_1(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+} [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_1\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-} \theta^-\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_1(x)\,\mathrm{d}x\big)\Big) = 0,$$

поскольку

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_\alpha(x)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+} [\bar{\rho}]\big|_{\mathcal{G}^+} r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_\alpha\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-} \theta^-\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_\alpha(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$

$$+ \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\big(w_\alpha x_3 + x_\alpha w_3\big)\,\mathrm{d}x = 0$$

и это соотношение просто можно умножить на $\omega$ и добавить в предыдущие равенства. Следовательно, соотношения (2.4) справедливы для всех положительных $t$, и предложение доказано. □

В силу закона сохранения импульса справедливо следующее утверждение.

**Следствие 2.1.** *Имеет место разложение:*

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^\perp + \sum_{i=1}^{3} d_i(r)\boldsymbol{\eta}_i,$$

*где* $\boldsymbol{w}^\perp$ *— векторное поле, ортогональное всем векторам жесткого движения* $\boldsymbol{\eta}$, *т. е.*

$$\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}\boldsymbol{w}^\perp\cdot\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \boldsymbol{\eta}(x) = \boldsymbol{e}_i \quad \textit{или} \quad \boldsymbol{\eta}(x) = \boldsymbol{\eta}_i(x), \quad i = 1, 2, 3,$$

*и*

$$d_i(r) = -\frac{\omega}{S_i}\Big(\int_{\mathcal{G}^-} \varrho(x')r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\bar\rho]\big|_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-}\theta^-\boldsymbol{\eta}_3\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}x\Big), \tag{2.7}$$

*причём* $S_i = \int_{\mathcal{F}}\bar\rho|\boldsymbol{\eta}_i|^2\,\mathrm{d}x$.

**Предложение 2.2.** *Имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{G}^-}\mathcal{B}_0^-(r)\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\eta}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}\mathcal{B}_0^+(r)\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\eta}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G} \\ &= -\omega^2\Big(\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(y')r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}\big(\rho^+ - \varrho(y')\big)r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{F}^-}\theta^-(y)\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}(y)\,\mathrm{d}y\Big),\end{aligned} \tag{2.8}$$

*где* $\boldsymbol{\eta}$ *— это произвольный вектор жёсткого перемещения.*

*Доказательство.* Пусть $\Omega_\varepsilon^\pm$ — ограниченные области с границами $\Gamma_\varepsilon^\pm$, а $\boldsymbol{n}_\varepsilon$ — внешняя нормаль к $\cup\Gamma_\varepsilon^\pm$. Равенства

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_\varepsilon^+}\Big(\sigma H_\varepsilon(x) + \rho^+\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + p_0^+\Big)\boldsymbol{n}_\varepsilon(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = \rho^+\omega^2\int_{\Omega_\varepsilon^+}\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon,\\ &\int_{\Gamma_\varepsilon^-}\Big(\sigma H_\varepsilon(x) + \mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\Big)\boldsymbol{n}_\varepsilon(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = \omega^2\int_{\Omega_\varepsilon^-}\rho_\varepsilon(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.9}$$

$i = 1, 2, 3$, следуют из

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^\pm} H_\varepsilon(x)\boldsymbol{n}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon^\pm}\Delta_{\Gamma_\varepsilon}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = 0,$$

что является следствием известной формулы Вейерштрасса

$$H_\varepsilon(x)\boldsymbol{n}_\varepsilon = \Delta_{\Gamma_\varepsilon}\boldsymbol{x},$$

и из соотношений

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^\pm}\boldsymbol{n}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon^\pm}\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^+}|x'|^2\boldsymbol{n}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon^+}\nabla\cdot\big(|x'|^2\boldsymbol{\eta}_i\big)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\Omega_\varepsilon^+}\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^-} \mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\boldsymbol{n}_\varepsilon\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon^-}\nabla\cdot\Big(\mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\boldsymbol{\eta}_i\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\Omega_\varepsilon^-}\nabla\mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\cdot\boldsymbol{\eta}_i\,\mathrm{d}x = \omega^2\int_{\Omega_\varepsilon^-}\rho_\varepsilon(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть теперь $\Gamma_\varepsilon^\pm$ означают поверхности, заданные формулами $x = y+\varepsilon r\boldsymbol{N}$, $y\in\mathcal{G}^\pm$, а $\Omega_\varepsilon^+$, $\Omega_\varepsilon^-$ — это области, ограниченные поверхностями $\Gamma_\varepsilon^+$, $\Gamma_\varepsilon^+\cup\Gamma_\varepsilon^-$, близкие к $\mathcal{F}^\pm$, соответственно; $\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega_\varepsilon^+}\cup\Omega_\varepsilon^-$. Наконец, обозначим через $\boldsymbol{N}^*$ и $r^*$ продолжения $\boldsymbol{N}$ и $r$ в $\mathcal{F}$. Кроме того, положим $\rho_\varepsilon(x) = \varrho(x')+\varepsilon\theta^-(x)$, $x\in\Omega_\varepsilon^-$.

Обобщим (2.9) на $\cup\Gamma_\varepsilon^\pm$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\varepsilon^-}\Big(\sigma^- H_\varepsilon^-(x)+\mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\Big)\boldsymbol{n}_\varepsilon^-(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon\\
&+\int_{\Gamma_\varepsilon^+}\Big(\sigma^+ H_\varepsilon^+(x)+\rho^+\frac{\omega^2}{2}|x'|^2+p_0^+-\mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\Big)\boldsymbol{n}_\varepsilon^+(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}\Gamma_\varepsilon\\
&=\omega^2\Big(\int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_\varepsilon^+}\big(\rho^+-\rho_\varepsilon(x)\big)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&=\omega^2\Big(\int_{\Omega_\varepsilon^-}\rho_\varepsilon(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_\varepsilon^+}\rho^+\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x\Big)=\omega^2\int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon^\pm(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

где $\rho_\varepsilon^\pm(x)$ равно $\rho^+$ в $\Omega_\varepsilon^+$ и $\rho_\varepsilon(x)$ в $\Omega_\varepsilon^-$.

Используя уравнения (1.12) для $\mathcal{G}^\pm$, получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1}\Big\{\int_{\mathcal{G}^-}\Big(\sigma^-\big(H_\varepsilon^-(x)-\mathcal{H}^-(y)\big)+\mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)\\
&\qquad\qquad -\mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)\Big)\boldsymbol{n}_\varepsilon(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\big|_{x=y+\varepsilon r\boldsymbol{N}}|\widehat{\mathbb{L}}_\varepsilon^T(y)\boldsymbol{N}(y)|\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\quad+\int_{\mathcal{G}^+}\Big(\sigma^+\big(H_\varepsilon^+(x)-\mathcal{H}^+(y)\big)+\rho^+\frac{\omega^2}{2}\big(|x'|^2-|y'|^2\big)\\
&\qquad\qquad -\mathcal{P}^-\big(\rho_\varepsilon(x)\big)+\mathcal{P}^-\big(\varrho(y')\big)\Big)\boldsymbol{n}_\varepsilon(x)\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\big|_{x=y+\varepsilon r\boldsymbol{N}}|\widehat{\mathbb{L}}_\varepsilon^T(y)\boldsymbol{N}(y)|\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big\}\\
&=\varepsilon^{-1}\omega^2\Big\{\Big(\int_{\Omega_\varepsilon^-}\rho_\varepsilon(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{F}^-}\varrho(y')\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\Big)\\
&\qquad\qquad +\rho^+\Big(\int_{\Omega_\varepsilon^+}\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\Big)\Big\},
\end{aligned}\tag{2.10}$$

где $\mathbb{L}_\varepsilon$ — матрица Якоби (обратимого) преобразования

$$x = y+\varepsilon r^*\boldsymbol{N}^*:\quad \mathcal{F}\ \to\ \Omega_\varepsilon,$$

$\widehat{\mathbb{L}}_\varepsilon$ — это матрица алгебраических дополнений $\mathbb{L}_\varepsilon$.

Первая вариация от (2.10) приводит к

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{G}^-}\mathcal{B}_0^-(r)\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\int_{\mathcal{G}^+}\mathcal{B}_0^+(r)\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\omega^2\Big(\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-}\rho_\varepsilon(x)\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x\pm\int\limits_{\Omega_\varepsilon^-}\varrho(x')\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\mathcal{F}^-}\varrho(y')\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\Big)\\
&\quad-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\omega^2\rho^+\Big(\int_{\Omega_\varepsilon^+}\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\Big)\\
&=-\omega^2\Big(\int_{\mathcal{G}^-}\varrho(y')r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}-\int_{\mathcal{G}^+}\varrho(y')r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\rho^+\int_{\mathcal{G}^+}r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\qquad\qquad+\int_{\mathcal{F}^-}\theta^-(y)\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\Big)\\
&=-\omega^2\Big(\int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(y')r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\int\limits_{\mathcal{G}^+}\big(\rho^+-\varrho(y')\big)r\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{G}+\int\limits_{\mathcal{F}^-}\theta^-(y)\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{\eta}_i(y)\,\mathrm{d}y\Big).
\end{aligned}$$

То же самое верно и для $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{e}_i$ вместо $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\eta}_i$. Предложение 2.2 доказано. $\square$

**Теорема 2.1** (Локальная разрешимость линейной задачи)**.** *Пусть* $\mathcal{G}\in W_2^{2+l}$ *и* $r_0\in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ *с* $l\in(1/2,1)$. *Для произвольных* $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_T)$ *и* $h^+\in W_2^{1+l,0}(Q_T^+)$ *такого, что* $\mathcal{D}_t h^+=\nabla\cdot\boldsymbol{H}+h_1$, *где* $\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{W}_2^{0,l/2}(Q_T^+)$, $h_1\in W_2^{0,l/2}(Q_T^+)$, *а также* $h^-\in W_2^{1+l,0}(Q_T^-)\cap W_2^{l/2}\big((0,T);W_2^1(\mathcal{F}^-)\big)$, $\boldsymbol{w}_0\in\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}_\tau+d\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{d}_\tau\in\boldsymbol{W}_2^{l+\frac12,\frac{l}{2}+\frac14}(G_T)$, $d\in W_2^{l+\frac12,0}(G_T)\cap W_2^{l/2}\big((0,T);W_2^{1/2}(\mathcal{G})\big)$, $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{d}_\tau=0$, *и* $g\in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)$ *при* $T<\infty$, *удовлетворяющих условиям согласования*

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{w}_0=h^+|_{t=0}\quad\text{в }\mathcal{F}^+,\quad [\boldsymbol{w}_0]|_{\mathcal{G}^+}=0,\\
&[\mu^\pm\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+}=\boldsymbol{d}_\tau|_{t=0},\quad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-}=\boldsymbol{d}_\tau|_{t=0},\ \Pi_{\mathcal{G}}\boldsymbol{g}\equiv\boldsymbol{g}-\boldsymbol{N}(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{N}),
\end{aligned}$$

*задача* (2.1) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{w},\theta^\pm,r)$ *на любом конечном промежутке времени* $(0,T]$ *такое, что* $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_T)$, $\theta\in W_2^{l,\frac{l}{2}}(D_T)$, $\nabla\theta\in\boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(D_T)$, $\mathcal{D}_t\theta^-\in W_2^{1+l,0}(Q_T^-)$, $\mathcal{D}_t\theta^-\in W_2^{l/2}\big((0,T);W_2^1(\mathcal{F}^-)\big)$, $r(\cdot,t)\in$

$W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ *для любого* $t \in (0,T]$, *и для этого решения верно неравенство*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}^{2+l,1+l/2}(D_T)} + |\theta|_{D_T}^{(1+l,l/2)} + |\mathcal{D}_t\theta^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)} \\
&\qquad + \|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \\
&\quad \leqslant c(T)\Big(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_T)} + \|h^+\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^+)} + \|\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{W}_2^{0,l/2}(Q_T^+)} \\
&\qquad\quad + \|h_1\|_{W_2^{0,l/2}(Q_T^+)} + |h^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)} + \\
&\qquad\quad + \|\boldsymbol{d}_\tau\|_{\boldsymbol{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + |d|_{G_T}^{(l+1/2,l/2)} + \|g\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \\
&\qquad\quad + \|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\Big), \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

*где* $c(T)$ *— неубывающая функция от* $T$.

**Замечание 2.1.** *Из теоремы о следах для* $\rho \in W_2^{1,1}(G_T)$ *следует оценка*

$$\|\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2}(\mathcal{G})} \leqslant c\Big\{\|\rho\|_{W_2^{1,0}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t\rho\|_{G_T}\Big\},\ t \in [0,T],$$

*которая влечет неравенство*

$$\|r(\cdot,t)\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} \leqslant c\Big\{\|r\|_{W_2^{5/2+l,0}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,0}(G_T)}\Big\}.$$

*А это означает, что* $\Gamma_t^\pm \in W_2^{2+l}$ *для всех* $t \in [0,T]$.

*Доказательство.* Пусть $r_1$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}
&r_1(y,0) = r_0(y), \\
&\mathcal{D}_t r_1(y,0) = g(y,0) + \boldsymbol{w}_0(y)\cdot\boldsymbol{N}(y) \equiv r_0'(y)
\end{aligned}$$

и оценкам

$$\begin{aligned}
|r_1|_{G_T}^{(\frac{5}{2}+l,\frac{l}{2})} + \|\mathcal{D}_t r_1\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_T)} &\leqslant c\big\{\|r_1\|_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_T)} + \|\mathcal{D}_t r_1\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_T)}\big\} \\
&\leqslant c\big\{\|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})} + \|r_0'\|_{W_2^{l+1/2}(\mathcal{G})}\big\}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Такая $r_1$ существует в силу предложения 4.1 из [11] и эквивалентных нормировок пространств Соболева–Слободецкого.

Мы можем записать

$$\mathcal{B}_0^{\pm} r(y,t) = \mathcal{B}_0^{\pm} r_1(y,t) + \int_0^t \mathcal{B}_0^{\pm} \mathcal{D}_t\big(r(y,\tau) - r_1(y,\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \mathcal{B}_0^{\pm} r_1(y,t) + \int_0^t \mathcal{B}_0^{\pm}\Big(g(y,\tau) + \boldsymbol{w}(y,\tau)\cdot\boldsymbol{N}(y) - \mathcal{D}_t r_1(y,\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Следовательно, граничные условия в системе (2.1) можно преобразовать к виду:

$$\mu^- \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} = \boldsymbol{d}_\tau, \quad [\boldsymbol{w}]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = \boldsymbol{d}_\tau,$$
$$- p_1\theta^- + \boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} - \sigma^-\boldsymbol{N}\cdot\Delta^-\int_0^t \boldsymbol{w}|_{\mathcal{G}^-}\,\mathrm{d}\tau = d' + \sigma^-\int_0^t B'\,\mathrm{d}\tau \tag{2.13}$$
$$+ \sigma^-\nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}\cdot\int_0^t \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\tau - \sigma^-\omega^2\rho^-\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{y}'\int_0^t \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau + 2\sigma^-\int_0^t \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{w} : \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau \text{ на } \mathcal{G}^-,$$
$$- \theta^+ + p_1\theta^- + [\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{w})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} - \sigma^+\boldsymbol{N}\cdot\Delta^+\int_0^t \boldsymbol{w}|_{\mathcal{G}^+}\,\mathrm{d}\tau = d' + \sigma^+\int_0^t B'\,\mathrm{d}\tau$$
$$+ \sigma^+\nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}\cdot\int_0^t \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\tau - \sigma^+\omega^2[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{y}'\int_0^t \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau + 2\sigma^+\int_0^t \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{w} : \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau \text{ на } \mathcal{G}^+,$$

где $d' = d - \sigma\mathcal{B}_0^{\pm} r_1$, $B' = \mathcal{B}_0^{\pm}(\mathcal{D}_t r_1 - g)$, $\nabla_{\mathcal{G}}$ — поверхностный градиент на $\mathcal{G}$; $\mathbb{S}:\mathbb{T} \equiv S_{ij}T_{ij}$. В (2.13) мы использовали, что

$$\Delta^{\pm}\boldsymbol{N} = \nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}^{\pm} - (\mathcal{H}^{\pm^2} - 2\mathcal{K}^{\pm})\boldsymbol{N}$$

(лемма 10.7 в [12]). Такие задачи исследовались в [3, 4], где, в частности, была доказана разрешимость (2.1), (2.13) без членов $2\omega(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{w})$ и

$$\sigma^{\pm}\nabla_{\mathcal{G}}\mathcal{H}\cdot\int_0^t \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\tau - \sigma^{\pm}\omega^2[\bar\rho]|_{\mathcal{G}^{\pm}}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{y}'\int_0^t \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^{\pm}}\,\mathrm{d}\tau + 2\sigma^{\pm}\int_0^t \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{w}(y,t) : \nabla_{\mathcal{G}}\boldsymbol{N}(y)|_{\mathcal{G}^{\pm}}\,\mathrm{d}\tau$$

и установлена оценка решения:

$$\|\boldsymbol{w}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(D_T)} + |\theta|_{D_T}^{(1+l,l/2)} + |\mathcal{D}_t\theta^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)}$$
$$\leqslant c(T)\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_T)} + \|h^+\|_{W_2^{1+l,0}(Q_T^+)} + \|\boldsymbol{H}\|_{\boldsymbol{W}_2^{0,l/2}(Q_T^+)} + \|h_1\|_{\boldsymbol{W}_2^{0,l/2}(Q_T^+)}$$
$$+ |h^-|_{Q_T^-}^{(1+l,l/2)} + \|\boldsymbol{d}_\tau\|_{\boldsymbol{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + |d'|_{G_T}^{(l+1/2,l/2)}$$
$$+ \|B'\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)} + \|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^{\pm})} + \|\theta_0^-\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)}\Big\}. \tag{2.14}$$

Кроме того, в [3, 4] была рассмотрена область, ограниченная твёрдой границей, на которой ставилось условие прилипания. Вблизи внешней свободной границы следует применять оценки, полученные в [2] для одной сжимаемой жидкости конечного объема. Неравенство (2.14) вместе с (2.12) влечет оценку (2.11), поскольку дополнительные члены имеют меньший порядок и не оказывают существенного влияния на конечный результат. □

Теперь рассмотрим однородную задачу (2.2) с $\boldsymbol{w}_0$, $\theta_0^-$ и $r_0$, удовлетворяющими условиям ортогональности (2.3), (2.4). Сначала получим $L_2$-оценки функций $\boldsymbol{w}$, $\theta^-$ и $r$ с экспоненциальным весом.

**Предложение 2.3.** *Предположим, что $\rho^+ > \varrho(x')$ на $\mathcal{G}^+$, и что форма*

$$\mathcal{R}_0(r) = \int_{\mathcal{G}} r\mathcal{B}_0^{\pm} r \,\mathrm{d}\mathcal{G} \tag{2.15}$$

*положительно определена, т. е.*

$$c^{-1}\|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \leqslant \mathcal{R}_0(r) \leqslant c\|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \tag{2.16}$$

*для произвольного $r(x)$, удовлетворяющего* (2.3). *Тогда при достаточно малой угловой скорости $\omega$ решение* (2.2) – (2.4) *удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} &\|e^{\alpha_1 t}\boldsymbol{w}(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{F}} + \|e^{\alpha_1 t}\theta^-(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|e^{\alpha_1 t} r(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})} \\ &\qquad \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{w}_0\|^2_{\mathcal{F}} + \|\theta_0^-\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|r_0\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})}\big\}, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

*где $\alpha_1$, $c > 0$ не зависят от $t$.*

*Доказательство.* Заметим, что энергетическое неравенство для двухфазной жидкости без учёта вращения и поверхностного натяжения было получено в [13]. Аналогичное неравенство для вращающейся двухслойной несжимаемой жидкости доказано в [6]. Здесь мы, как и в предыдущих работах, используем метод введения обобщённой энергии Падулы–Солонникова [14, 15].

Чтобы доказать (2.17), умножим первые две строки задачи (2.2) на $\boldsymbol{w}$, проинтегрируем по частям и сложим. Далее используя граничные условия и самосопряженность операторов $\mathcal{B}_0^{\pm}(r)$, получаем энергетические соотношения

$$
\begin{aligned}
0 =& \int_{\mathcal{F}} \big(\overline{\rho}\mathcal{D}_t \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{w},\theta^{\pm})\cdot\boldsymbol{w}\big)\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{F}}\overline{\rho}|\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1}{\varrho(x')}\theta^{-2}\,\mathrm{d}x\Big) + \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}|\mathbb{S}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}x + \mu_1\int_{\mathcal{F}^-}|\nabla\cdot\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1\theta^-}{\varrho(x')}\nabla\varrho\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{G}^-}\mathbb{T}(\boldsymbol{w},\theta^{\pm})\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int_{\mathcal{G}^+}[\mathbb{T}(\boldsymbol{w},\theta^{\pm})\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{F}}\overline{\rho}|\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1}{\varrho(x')}\theta^{-2}\,\mathrm{d}x\Big) + \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}|\mathbb{S}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}x + \mu_1\int_{\mathcal{F}^-}|\nabla\cdot\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x\\
&+\int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1\theta^-}{\varrho(x')}\nabla\varrho\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}^+}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^-}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{\mathcal{F}}\overline{\rho}|\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1}{\varrho(x)}\theta^{-2}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}^+}r\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^-}r\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big)\\
&+\int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1\theta^-}{\varrho(x')}\nabla\varrho\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}|\mathbb{S}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}x + \mu_1\int_{\mathcal{F}^-}|\nabla\cdot\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Проделаем то же самое, но с вектором $\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{W}_2^1(\mathcal{F})$ таким, что

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{W} = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{F}^+, \quad \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^+} = \rho^+ r,
$$

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{W} = -\theta^- \quad \text{в} \quad \mathcal{F}^-, \quad -\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^+} = \varrho(x')r, \quad \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = \varrho(x')r,
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{W}\|_{\boldsymbol{W}_2^1(\mathcal{F}^+)} \leqslant c\|r\|_{W_2^{1/2}(\mathcal{G}^+)},\\
&\quad\|\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\|_{\mathcal{F}^+} \leqslant c\|\mathcal{D}_t r\|_{\mathcal{G}^+} \leqslant c\|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\|_{\mathcal{G}^+},\\
&\|\boldsymbol{W}\|_{W_2^1(\mathcal{F}^-)} \leqslant c\big(\|r\|_{W_2^{1/2}(\cup\mathcal{G}^\pm)} + \|\theta^-\|_{\mathcal{F}^-}\big),\\
&\quad\|\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\|_{\mathcal{F}^-} \leqslant c\big(\|\mathcal{D}_t r\|_{\mathcal{G}} + \|\mathcal{D}_t\theta^-\|_{\mathcal{F}^-}\big) \leqslant c\big(\|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{N}\|_{\mathcal{G}} + \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^1(\mathcal{F}^-)}\big).
\end{aligned}
$$

(Так как в силу (2.5) $\int_{\mathcal{G}^+} r\,\mathrm{d}\mathcal{G} = 0$ и $-\int_{\mathcal{F}^-}\theta^-\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r\,\mathrm{d}\mathcal{G} - \int_{\mathcal{G}^+}\varrho(x')r\,\mathrm{d}\mathcal{G}$, то такой вектор $\boldsymbol{W}$ существует. Действительно, $\boldsymbol{W}$ можно найти в виде $\boldsymbol{W} = \nabla\Phi$, где $\Phi$ — это решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в двух ограниченных областях. Оценки решений хорошо известны. В них мы использовали уравнения из (2.2).) Тогда получим

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}} \overline{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{F}} \overline{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x + 2\omega\int_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad + \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}):\mathbb{S}(\boldsymbol{W})\,\mathrm{d}x + \mu_1\int_{\mathcal{F}^-}\nabla\cdot\boldsymbol{w}\nabla\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{F}^-}p_1\theta^-\nabla\cdot\mathbf{W}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad + \int_{\mathcal{G}^-}\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}[\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+}\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{F}} \overline{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{F}} \overline{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x + 2\omega\int_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad + \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}):\mathbb{S}(\boldsymbol{W})\,\mathrm{d}x + \mu_1\int_{\mathcal{F}^-}\nabla\cdot\boldsymbol{w}\nabla\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-}p_1\theta^{-2}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad + \int_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^+}\big(\rho^+ - \varrho(x')\big)r\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Теперь оценим обобщенную энергию. Умножим (2.19) на малую $\gamma > 0$ и прибавим к (2.18), что дает

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_1(t) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}|\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1}{\varrho(x')}\theta^{-2}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{G}^+}r\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int_{\mathcal{G}^-}r\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\\
&\qquad + 2\gamma\int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x\Big),\\
\mathcal{E}_1 &= \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}|\mathbb{S}(\boldsymbol{w})|^2\,\mathrm{d}x + \mu_1\int_{\mathcal{F}^-}|\nabla\cdot\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}^-}\frac{p_1\theta^-}{\varrho(x')}\nabla\varrho\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x + \gamma\Big(\int_{\mathcal{F}^-}p_1\theta^{-2}\\
&\quad - \int_{\mathcal{F}}\bar{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x + 2\omega\int_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{F}}\frac{\bar{\mu}}{2}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}):\mathbb{S}(\boldsymbol{W})\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \mu_1\int\limits_{\mathcal{F}^-}\nabla\cdot\boldsymbol{w}\nabla\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathcal{G}^-}\varrho(x')r\mathcal{B}_0^-(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G} + \int\limits_{\mathcal{G}^+}\big(\rho^+ - \varrho(x')\big)r\mathcal{B}_0^+(r)\,\mathrm{d}\mathcal{G}\Big).
\end{aligned}$$

В силу (2.16) имеем

$$c_3\big\{\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathcal{F}} + \|\theta^-\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})}\big\} \leqslant \mathcal{E} \leqslant c_4\big\{\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathcal{F}} + \|\theta^-\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|r\|^2_{W_2^1(\mathcal{G})}\big\}.$$

Ввиду следствия 2.1,

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{\perp} + \sum_{i=1}^{3} d_i(r)\boldsymbol{\eta}_i(x) \equiv \boldsymbol{w}^{\perp} + \boldsymbol{w}'$$

и, значит,

$$\|\sqrt{\bar\rho}\boldsymbol{w}\|^2_{\mathcal{F}} = \|\sqrt{\bar\rho}\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}} + \|\sqrt{\bar\rho}\boldsymbol{w}'\|^2_{\mathcal{F}},$$

где $\|\sqrt{\bar\rho}\boldsymbol{w}'\|^2_{\mathcal{F}} = \sum_{k,j=1}^{3} d_k d_j S_{kj} = \sum_{j=1}^{3} S_j d_j^2$, $S_{kj} = \int_{\mathcal{F}} \bar\rho \boldsymbol{\eta}_k \cdot \boldsymbol{\eta}_j \,\mathrm{d}x$, $S_j \equiv S_{jj}$, и $d_j$, $j = 1, 2, 3$, определяются (2.7). Легко видеть, что $\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{w}'\|^2_{\mathcal{F}}$ является положительной квадратичной формой относительно $r$. Следовательно,

$$c_5\big\{\|\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}} + \|\theta^-\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|r\|^2_{W^1_2(\mathcal{G})}\big\} \leqslant \mathcal{E} \leqslant c_6\big\{\|\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}} + \|\theta^-\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|r\|^2_{W^1_2(\mathcal{G})}\big\}.$$

Далее применим неравенство Корна, справедливое для функций, ортогональных всем векторам жесткого перемещения [16],

$$c_7\|\nabla\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}} \leqslant c_8\|\sqrt{\bar\mu}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}^{\perp})\|^2_{\mathcal{F}} = c_8\|\sqrt{\bar\mu}\mathbb{S}(\boldsymbol{w})\|^2_{\mathcal{F}}.$$

Тогда мы можем использовать неравенство Пуанкаре

$$c_9\|\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}} \leqslant c_{10}\|\bar\rho\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}} \leqslant c_{11}\|\bar\rho\nabla\boldsymbol{w}^{\perp}\|^2_{\mathcal{F}}$$

поскольку

$$0 = \int_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{F}} \bar\rho\boldsymbol{w}^{\perp}\,\mathrm{d}x$$

из-за (2.4) и (1.16).

Оценим второстепенные члены в $\mathcal{E}_1$ по неравенству Гельдера,. Так

$$\Big|\int_{\mathcal{F}^-} \frac{p_1\theta^-}{\varrho(x')}\nabla\varrho\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \varepsilon\int_{\mathcal{F}^-} p_1{\theta^-}^2\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon)\int_{\mathcal{F}^-}\Big(\frac{\nabla\mathcal{P}^-}{\varrho^2(x')}\Big)^2|\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}x,$$

где $\varepsilon$ — малое число, $\nabla\mathcal{P}^- = \varrho\nabla\varrho = \varrho\omega^2 x'$ согласно (1.9). Следовательно, для достаточно малых $\gamma$ и $\omega$ и в силу предположений имеем

$$\mathcal{E}_1 \geqslant 2\alpha_1\mathcal{E}$$

с некоторым $\alpha_1 > 0$. Значит,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + 2\alpha_1\mathcal{E}(t) \leqslant 0$$

что влечет

$$\mathcal{E} \leqslant e^{-2\alpha_1 t}\mathcal{E}(0)$$

и неравенство (2.17). $\square$

**Замечание 2.2.** *Вопрос положительной определённости квадратичной формы $R_0(r)$, к сожалению, не такой простой. Мы только начали численный расчёт фигур равновесия* [17]. *Следующий этап работы — это посчитать их устойчивость. Заметим, что при отсутствии вращения предельной границей раздела жидкостей является сфера. Вторая вариация функционала энергии для неё есть*

$$\mathcal{R}_0(r) = \int_{S_{R_0}} \Big(|\nabla_S r|^2 - \frac{2r^2}{R_0^2}\Big)\,\mathrm{d}x,$$

*где $\nabla_S$ — поверхностный градиент на сфере. Сфера устойчива. Оценка* (2.16) *для неё получена в работе В.А.Солонникова* [18]. *Грубо говоря, по непрерывности устойчивость должна сохраняться и при малых угловых скоростях. В этом случае фигуры равновесия близки к вложенным сплюснутым сфероидам.*

Сформулируем теперь главный результат данной работы.

**Теорема 2.2** (Глобальная разрешимость линейной однородной задачи)**.** *Пусть $\rho^+ > \varrho(x')$ на $\mathcal{G}^+$. Если оценка* (2.16) *верна для функционала $R_0(r)$, определенного равенством* (2.15), *то при малом угловом моменте $\beta$ задача* (2.2) *с начальными данными $\boldsymbol{w}_0 \in W_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)$, $\theta_0^- \in W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)$, $r_0 \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$, $l \in (1/2, 1)$, удовлетворяющими условиям согласования*

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{w}_0 = 0 \quad \text{в } \mathcal{F}^+, \quad \mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}|_{\mathcal{G}^-} = 0 \\ &[\boldsymbol{w}_0]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\mu^\pm\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{N}]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

*и ортогональности* (2.3), (2.4), *имеет единственное решение $(\boldsymbol{w}, \theta^\pm, r)$ такое, что $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_\infty)$, $\theta^\pm \in W_2^{1+l,0}(D_\infty)$, $\theta^\pm \in W_2^{l/2}\big((0,\infty); W_2^1(\cup\mathcal{F}^\pm)\big)$, $\mathcal{D}_t\theta^- \in W_2^{1+l,0}(Q_\infty^-)$, $\mathcal{D}_t\theta^- \in W_2^{l/2}\big((0,\infty); W_2^1(\mathcal{F}^-)\big)$, $r(\cdot,t) \in W_2^{2+l}(\mathcal{G})$ для любого $t \in (0,\infty)$. Это решение подчиняется неравенству*

$$\begin{aligned} \|\mathrm{e}^{\alpha t}\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_\infty)} &+ \big|\mathrm{e}^{\alpha t}\theta\big|_{D_\infty}^{(1+l,l/2)} + \big|\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t\theta^-\big|_{Q_\infty^-}^{(1+l,l/2)} \\ &+ \|\mathrm{e}^{\alpha t}r\|^2_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} + \|\mathrm{e}^{\alpha t}\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} \\ &\leqslant c\big\{\|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup\mathcal{F}^\pm)} + \|\theta_0^-\|_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\big\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

*с некоторыми постоянными $\alpha > 0$ и $c > 0$.*

Напомним, что угловой момент и угловая скорость связаны простой формулой $\beta = \omega\Big(\int_{\mathcal{F}^+} \rho^+|y'|^2\,\mathrm{d}y + \int_{\mathcal{F}^-} \varrho(|y'|)|y'|^2\,\mathrm{d}y\Big)$.

Для получения экспоненциальных оценок решения в нормах более высокого порядка, чем в (2.17), мы используем локальную по времени оценку.

**Предложение 2.4.** *Пусть* $T > 2$. *Решение задачи* (2.2)–(2.4) *подчиняется неравенству*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(D_{t_0-1,t_0})} + |\theta|^{(1+l,l/2)}_{D_{t_0-1,t_0}} + |\mathcal{D}_t\theta^-|^{(1+l,l/2)}_{Q^-_{t_0-1,t_0}} \\
&\quad + \|r\|_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_{t_0-1,t_0})} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_{t_0-1,t_0})} \\
&\qquad \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{w}\|_{Q_{t_0-2,t_0}} + \|\theta^-\|_{Q^-_{t_0-2,t_0}} + \|r\|_{G_{t_0-2,t_0}}\big\},
\end{aligned} \tag{2.22}$$

*где* $2 < t_0 \leqslant T$, $D_{t_1,t_2} = \cup\mathcal{F}^\pm \times (t_1,t_2)$, $Q_{t_1,t_2} = \mathcal{F} \times (t_1,t_2)$, $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}^+} \cup \mathcal{F}^-$, $Q^-_{t_1,t_2} = \mathcal{F}^- \times (t_1,t_2)$, $G_{t_1,t_2} = \mathcal{G} \times (t_1,t_2)$.

*Доказательство.* Зафиксируем $t_0 \in (2,T)$ и умножим (2.2) на срезающую функцию $\zeta_\lambda(t)$, гладкую, монотонную, равную нулю при $t \leqslant t_0 - 2 + \lambda/2$ и единице при $t \geqslant t_0 - 2 + \lambda$, где $\lambda \in (0,1]$, и такую, что для её производных $\dot\zeta_\lambda(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\zeta_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$ и $\ddot\zeta_\lambda(t)$ выполняются неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big|\dot\zeta_\lambda(t)\big| \leqslant c\lambda^{-1}, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |\ddot\zeta_\lambda(t)| \leqslant c\lambda^{-2}.$$

Тогда для $\boldsymbol{w}_\lambda = \boldsymbol{w}\zeta_\lambda$, $\theta^\pm_\lambda = \theta^\pm\zeta_\lambda$, $r_\lambda = r\zeta_\lambda$, получаем систему

$$\begin{gathered}
\rho^+\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}_\lambda + 2\omega\nabla\cdot(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{w}_\lambda)\big) - \mu^+\nabla^2\boldsymbol{w}_\lambda + \nabla\theta^+_\lambda = \rho^+\boldsymbol{w}\dot\zeta_\lambda, \\
\nabla\cdot\boldsymbol{w}_\lambda = 0 \ \text{ в } \mathcal{F}^+, \ t > 0, \\
\varrho(x)\big(\mathcal{D}_t\boldsymbol{w}_\lambda + 2\omega\nabla\cdot(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{w}_\lambda)\big) - \mu^-\nabla^2\boldsymbol{w}_\lambda - \mu_1^-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{w}_\lambda) + p_1\nabla\theta^-_\lambda = \varrho(x)\boldsymbol{w}\dot\zeta_\lambda, \\
\mathcal{D}_t\theta^-_\lambda + \nabla\cdot\big(\varrho(x)\boldsymbol{w}_\lambda\big) = \theta^-\dot\zeta_\lambda \ \text{ в } \mathcal{F}^-, \ t > 0, \\
\boldsymbol{w}_\lambda(y,0) = 0 \ \text{ в } \mathcal{F}, \quad \theta^-_\lambda(y,0) = 0 \ \text{ в } \mathcal{F}^-, \quad r_\lambda(y,0) = 0 \ \text{ на } \mathcal{G}, \\
[\boldsymbol{w}_\lambda]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\mu^\pm\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_\lambda)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \\
-\theta^+_\lambda + p_1\theta^-_\lambda + [\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{w}_\lambda)\boldsymbol{N}]\big|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r_\lambda|_{\mathcal{G}^+} = 0, \\
\mu^-\Pi_{\mathcal{G}}\mathbb{S}(\boldsymbol{w}_\lambda)\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} = 0, \qquad -p_1\theta^-_\lambda + \boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}'(\boldsymbol{w}_\lambda)\boldsymbol{N}\big|_{\mathcal{G}^-} + \mathcal{B}_0^- r_\lambda|_{\mathcal{G}^-} = 0, \\
\mathcal{D}_t r_\lambda - \boldsymbol{w}_\lambda\cdot\boldsymbol{N} = r\dot\zeta_\lambda(t) \ \text{ на } \mathcal{G}.
\end{gathered} \tag{2.23}$$

По теореме 2.1, примененной к системе (2.23), (2.3), (2.4), справедлива оценка (2.11) для $\boldsymbol{w}_\lambda$, $\theta^\pm_\lambda$, $r_\lambda$, откуда следует, что

$$
\begin{aligned}
\Psi(\lambda) \equiv {} & \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_{t_1+\lambda,t_0})} + |\theta|^{(1+l,l/2)}_{D_{t_1+\lambda,t_0}} + |\mathcal{D}_t\theta^-|^{(1+l,l/2)}_{Q^-_{t_1+\lambda,t_0}} \\
& + \|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{t_1+\lambda,t_0})} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda,t_0})} \\
\leqslant {} & c\lambda^{-2}\Big\{\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_{t_1+\lambda/2,t_0})} + |\theta^-|^{(1+l,l/2)}_{Q^-_{t_1+\lambda/2,t_0}} \\
& + \|r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})}\Big\},
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

где $t_1 = t_0 - 2$.

Теперь учтём интерполяционные неравенства

$$
\begin{aligned}
& \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(D_{t_1+\lambda/2,t_0})} \leqslant \varkappa^2 \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-l}\|\boldsymbol{w}\|_{Q_{t_1+\lambda/2,t_0}}, \\
& \|\theta^-\|_{W_2^{1+l,0}(Q^-_{t_1+\lambda/2,t_0})} \leqslant \varkappa^2\|\mathcal{D}_t\theta^-\|_{W_2^{1+l,0}(Q^-_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-1-l}\|\theta^-\|_{Q^-_{t_1+\lambda/2,t_0}}, \\
& \|\theta^-\|_{W_2^{l/2}\left((t_1+\lambda/2,t_0);W_2^1(\mathcal{F}^-)\right)} \leqslant \varkappa^2\|\mathcal{D}_t\theta^-\|_{W_2^{l/2}\left((t_1+\lambda/2,t_0);W_2^1(\mathcal{F}^-)\right)} \\
& \qquad\qquad + c\varkappa^{-1-l}\|\theta^-\|_{Q^-_{t_1+\lambda/2,t_0}}, \\
& \|r\|_{W_2^{3/2+l,0}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})} \leqslant \varkappa^2\|r\|_{W_2^{5/2+l,0}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-3-2l}\|r\|_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}}, \\
& \|r\|_{W_2^{0,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})} \leqslant \varkappa^2\|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{0,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-3/2-l}\|r\|_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}}
\end{aligned}
$$

с $\varkappa > 0$, что приводит к оценке

$$\Psi(\lambda) \leqslant c_1\varkappa^2\lambda^{-2}\Psi(\lambda/2) + c_2\varkappa^{-m}\lambda^{-2}K.$$

Здесь $\Psi(\lambda)$ обозначает левую часть в (2.24), $K = \|\boldsymbol{w}\|_{Q_{t_1,t_0}} + \|\theta^-\|_{Q^-_{t_1,t_0}} + \|r\|_{G_{t_1,t_0}}$, $m = 3+2l$. Задавая $\varkappa = \delta\lambda \leqslant 1$, получаем

$$\lambda^{m+2}\Psi(\lambda) \leqslant c_1\delta^2 2^{m+2}(\lambda/2)^{m+2}\Psi(\lambda/2) + c_2\delta^{-m}K.$$

Если $c_1\delta^2 2^{m+2} < 1/2$, то отсюда следует оценка

$$\Psi(\lambda) \leqslant c_3(\delta)\lambda^{-m-2}(K + 2^{-1}K + 2^{-2}K + \ldots) \leqslant \frac{c_3\lambda^{-m-2}}{1-1/2}K \leqslant 2c_3\lambda^{-m-2}K.$$

При $\lambda = 1$ это неравенство эквивалентно (2.22). $\square$

*теоремы 2.2.* По теореме 2.1 и предложению 2.4 имеем

$$
\begin{aligned}
e^{2\alpha(T-j)}\Big\{\|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_{T-j-1,T-j})} &+ |\theta|^{(1+l,l/2)}_{D_{T-j-1,T-j}} + |\mathcal{D}_t\theta^-|^{(1+l,l/2)}_{Q^-_{T-j-1,T-j}} \\
&+ \|r\|^2_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{T-j-1,T-j})} + \|\mathcal{D}_t r\|^2_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{T-j-1,T-j})}\Big\} \\
\leqslant ce^{2\alpha(T-j)}&\Big\{\|\boldsymbol{w}\|^2_{Q_{T-j-2,T-j}} + \|\theta^-\|^2_{Q^-_{T-j-2,T-j}} + \|r\|^2_{G_{T-j-2,T-j}}\Big\}, \quad (2.25)
\end{aligned}
$$

$j = 0, 1, ..., [T] - 2$. Просуммировав (2.25) от $j = 0$ до $j = [T]-2$, мы получаем неравенство, из которого вытекает, что

$$
Y^2_{T-[T]+1,T}(e^{\alpha t}\boldsymbol{w}, e^{\alpha t}\theta, e^{\alpha t}r) \leqslant c\int_{T-[T]}^{T} e^{2\alpha t}\Big(\|\boldsymbol{w}(\cdot,t)\|^2_\Omega + \|\theta^-\|^2_{\mathcal{F}^-} + \|r(\cdot,t)\|^2_{\mathcal{G}}\Big)\,\mathrm{d}t, \quad (2.26)
$$

где

$$
\begin{aligned}
Y_{t_1,t_2}(\boldsymbol{u}, q, \rho) = &\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(D_{t_1,t_2})} + |q|^{(1+l,l/2)}_{D_{t_1,t_2}} + |\mathcal{D}_t q^-|^{(1+l,l/2)}_{Q^-_{t_1,t_2}} \\
&+ \|\rho\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{t_1,t_2})} + \|\mathcal{D}_t\rho\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{t_1,t_2})}.
\end{aligned}
$$

В силу (2.20) выполнены условия согласования для теоремы 2.1, поэтому мы снова можем воспользоваться ею, теперь на промежутке $(0,2)$. Добавляя оценку

$$
Y^2_{0,2}(\boldsymbol{w}, \theta, r) \leqslant c\Big\{\|\boldsymbol{w}_0\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\mathcal{F})} + \|\theta_0^-\|^2_{W_2^{1+l}(\mathcal{F}^-)} + \|r_0\|^2_{W_2^{2+l}(\mathcal{G})}\Big\}
$$

к (2.26), используя (2.17) и выбирая $\alpha < \alpha_1$, мы приходим к неравенству, эквивалентному (2.21). □

# Список литературы


[1] I. V. Denisova, Evolution of compressible and incompressible fluids separated by a closed interface, *Interfaces Free Bound.* **2**:3 (2000), 283–312.

[2] V. A. Solonnikov, A. Tani, Free boundary problem for a viscous compressible flow with surface tension, *Constantin Carathéodory: An International Tribute*, World Scientific (1991), 1270–1303.

[3] V. A. Solonnikov, On the model problem arising in the study of motion of viscous compressible and incompressible fluids with a free interface, *Алгебра и анализ*, **30**:2 (2018), 274–317.

[4] V. A. Solonnikov, $L_2$-theory for two viscous fluids of different types: compressible and incompressible, *Алгебра и анализ*, **32**:1 (2020), 121–186.

[5] И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Движение капли в несжимаемой жидкости*, Лань, Санкт-Петербург, 2020, 296 с. (ISBN 978-5-8114-4896-8. Текст : электронный, Лань, электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/142329) .

[6] I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, Rotation Problem for a Two-Phase Drop, *J. Math. Fluid Mech.* **24**:2 (2022), 40.

[7] I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, Stability of the Rotation of a Two-Phase Drop with Self-Gravity, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **508** (2021), 89–123; англ. пер.: Stability of the Rotation of a Two-Component Drop with Self-Gravity, *J. of Mathematical Sciences*, **283**:5 (2024), 1–25.

[8] I. V. Denisova, V. A. Solonnikov, Hölder Space Theory for the Rotation Problem of Two-Phase Drop, *Mathematics* (2022), 10(24), 4799; https://doi.org/10.3390/math10244799 .

[9] И. В. Денисова, Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухфазной жидкости, *Алгебра и анализ*, **36**:3 (2024), 62–80.

[10] В. Бляшке, *Элементарная дифференциальная геометрия*, ОНТИ, М.-Л., 1935. пер. с нем.: Blaschke, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, I. Springer, Berlin, 1924.

[11] V. A. Solonnikov, On the linear problem arising in the study of a free boundary problem for the Navier–Stokes equations, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2010), 235–269; англ. пер.: St. Petersburg Math. J. **22**:6 (2011), 1023–1049.

[12] Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, Мир, М., 1989, 240с.; пер. с англ.: E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation. *Monographs in Mathematics*, **80**,

Edited by A. Borel, J. Moser, S.-T. Yau, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1984).

[13] I. V. Denisova, On energy inequality for the problem on the evolution of two fluids of different types without surface tension, *J. Math. Fluid Mech.* (Springer), **17**:1 (2015), 183–198.

[14] M. Padula, On the exponential stability of the rest state of a viscous compressible fluid, *J. Math. Fluid Mech.*, **1** (1999), 62–77.

[15] M. Padula, V. A. Solonnikov, On the local solvability of free boundary problem for the Navier – Stokes equations, *Проблемы мат. анализа*, **50** (2010), 87–112; англ. пер.: *J. Math. Sci.*, **170**:4 (2010), 522–553.

[16] V. A. Solonnikov, On non-stationary motion of an isolated mass of a viscous incompressible fluid, *Изв. АН СССР. Сер. матем.,* **51**:5 (1987), 1065–1087; англ. пер.: *Math. USSR-Izv.*, **31**:2, (1988), 381–405.

[17] И.В. Денисова, О.В. Мотыгин, Анализ фигур равновесия вращающейся массы сжимаемых и несжимаемых жидкостей. *Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды — 2025»*, 29 сентября— 3 октября 2025 г. – Казань: Казанский ун-т, 2025, С. 166–171.

[18] В. А. Солонников, О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **152** (1986), 137–157.