



Об отношении L_2 -норм частных производных выпуклых функций

А. И. Назаров* А. Ю. Плахов**

7 мая 2026 г.

Аннотация

Рассмотрим выпуклую область $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ на плоскости с декартовыми координатами x и y . Нас интересует вопрос об оценке величины $M_\Omega := \sup_u (\|u_x\|_2 / \|u_y\|_2)$ в классе выпуклых вверх функций $u \in W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на границе Ω . В статье [Plakhov and Protasov. ЖМАА **543**, 128942 (2025)] было доказано, что $M_\Omega < \infty$, если и только если $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ и односторонние производные φ'_i , $i = 1, 2$ в точках a и b конечны. В настоящей заметке для случая, когда M_Ω конечна, устанавливается следующая оценка: $M_\Omega \leq a_0^{-1} m + k$, где

$$k = (\varphi_1(b) - \varphi_1(a)) / (b - a), \quad m = \max\{|\varphi'_i(x) - k|, i = 1, 2, x = a, b\},$$

а $a_0 \approx 0.83$ — корень функции Лежандра второго рода $Q_1(y) = \frac{y}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) - 1$ на интервале $(0, 1)$. В частном случае, когда $k = 0$, эта оценка является точной и достигается на ромбе $\Omega = \{(x, y) : m|x| + |y| \leq 1\}$.

Mathematics subject classifications: 26D10, 49K21, 52A15

Ключевые слова и фразы: Оценки L_2 -норм частных производных, выпуклые функции и поверхности, вариационное исчисление, уравнение Лежандра

*ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский госуниверситет

**ИППИ РАН им. А.А. Харкевича, Москва и Департамент математики, Университет Авейро (Португалия)

1 Постановка задачи. Формулировка результатов

Рассмотрим выпуклую ограниченную область Ω на плоскости \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами x и y . Нас интересует вопрос об оценке величин

$$M_\Omega := \sup_u \frac{\|u_x\|_2}{\|u_y\|_2} \quad \text{и} \quad m_\Omega := \inf_u \frac{\|u_x\|_2}{\|u_y\|_2}$$

в классе \mathcal{U}_Ω выпуклых вверх функций $u \in W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль (в смысле следа) на границе Ω . Здесь и ниже $(u_x, u_y) = \nabla u$ — градиент u ,

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega f^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Интуитивно эту задачу можно интерпретировать следующим образом. Пусть у нас имеется выпуклый холм, поверхность которого описывается графиком функции u . Будем считать, что площадь области Ω , служащей основанием холма, равна единице (это предположение не уменьшает общности). Мы хотим измерить среднеквадратичный уклон этого холма, то есть величину $\|\nabla u\|_2$. Однако мы ограничены в возможностях и можем проводить замеры (и соответственно вычислять уклон) в направлении с запада на восток или, скажем, с юга на север. Насколько сильно наш результат отличается от истинной величины $\|\nabla u\|_2$, или же насколько сильно могут отличаться замеры, сделанные в перпендикулярных направлениях?

Если направление оси x указывает с запада на восток, а направление оси y — с юга на север, то результатами наших измерений в этих направлениях будут величины $\|u_x\|_2$ и $\|u_y\|_2$. Не имея информации о холме и зная только форму его основания, мы можем гарантировать, что

$$(1 + M_\Omega^{-2}) \|u_x\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2 \leq (1 + m_\Omega^{-2}) \|u_x\|_2^2,$$

$$m_\Omega \|u_y\|_2 \leq \|u_x\|_2 \leq M_\Omega \|u_y\|_2,$$

и эти оценки не могут быть улучшены.

Константа M_Ω естественным образом возникает также в задаче о наименьшем сопротивлении. Именно, рассмотрим функционал

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x, y)) dx dy. \quad (1)$$

Он может интерпретироваться как аэродинамическое сопротивление выпуклого тела, ограниченного сверху графиком функции u , потоку частиц, падающему вертикально вниз. В классической задаче Ньютона [2, 1] предполагается, что частицы отражаются от тела абсолютно упруго, в этом случае соответствующая функция f имеет вид

$f(\xi_1, \xi_2) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$. В случае неупругих соударений функция f может принимать другой вид. Эта функция может не быть радиально симметричной, если, скажем, в задачу и соответственно в функционал F включена также и поперечная сила, действующая на тело.

Поставим вопрос о том, является ли функция $u \equiv 0$ локальным минимумом этого функционала в определенном выше классе \mathcal{U}_Ω . Ответ на этот вопрос дается следующим утверждением, являющимся некоторой модификацией теоремы 2 в статье [3].

Предположим, что функция f дважды дифференцируема, и приведем матрицу Гессе $f''(0, 0)$ к главным осям:

$$f''(0, 0) = \text{diag}(\lambda_x, \lambda_y).$$

Пусть собственные значения λ_x и λ_y отличны от нуля, и $\lambda_x \leq \lambda_y$.

Теорема 1. (а) Если $\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{M_\Omega^2} > 0$, то функционал (1) имеет локальный минимум в $u \equiv 0$.

(б) Если $\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{M_\Omega^2} < 0$, то в $u \equiv 0$ нет локального минимума.

Из пункта (а) теоремы 1, в частности, следует, что функция $u \equiv 0$ дает функционалу (1) локальный минимум, если матрица $f''(0, 0)$ положительно определена, и локальный максимум, если она отрицательно определена. В частности, в ньютоновском случае $f(\xi_1, \xi_2) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$ форма является отрицательно определенной, а значит, $u \equiv 0$ дает локальный максимум.

В статье [3] установлены условия, при которых величины m_Ω и M_Ω отличны, соответственно, от нуля и от бесконечности. Область Ω может быть задана соотношениями $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, где $a < b$ и $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ есть функции, выпуклые соответственно вниз и вверх, причем $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Следующее утверждение является небольшой модификацией теоремы 1 в статье [3].

Теорема 2. (а) $M_\Omega < \infty$, если и только если $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ и односторонние производные φ'_i , $i = 1, 2$ в точках a и b конечны.

(б) $m_\Omega > 0$, если и только если значения $|\varphi'_i|$, $i = 1, 2$ больше некоторой положительной константы.

Ясно, что условия (а) и (б) в этой теореме эквивалентны с точностью до переобозначения осей.

В пункте (а) теоремы 2 установлены необходимые и достаточные условия, при которых $M_\Omega < +\infty$. Оказывается, эти условия связаны с локальным устройством области Ω вблизи ограничивающих ее вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$, а именно,

¹Разумеется, если $M_\Omega = +\infty$, мы полагаем $\lambda_2/M_\Omega^2 = 0$.

со значениями $\varphi_i(x)$, $\varphi'_i(x)$, $x = a, b$, $i = 1, 2$. Представляет интерес задача о нахождении зависимости между совокупностью этих значений и величиной M_Ω . Данная заметка посвящена установлению такой зависимости. Именно, выполнена следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2(a), то есть $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, и все односторонние производные $\varphi'_i(x)$, $x = a, b$, $i = 1, 2$ конечны. Предположим еще, что $\varphi_1(a) = \varphi_1(b)$, и обозначим

$$m = \max\{|\varphi'_i(x)|, i = 1, 2, x = a, b\}.$$

Тогда $M_\Omega \leq a_0^{-1} m$, где величина $a_0^{-1} \approx 1.2$ определяется ниже в тексте (см. (8)). Более того, для ромба $\Omega = \{(x, y) : m|x| + |y| \leq 1\}$ это неравенство обращается в равенство.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2(a), но $\varphi_1(a) \neq \varphi_1(b)$. Обозначим

$$k = \frac{\varphi_1(b) - \varphi_1(a)}{b - a} = \frac{\varphi_2(b) - \varphi_2(a)}{b - a}, \quad m = \max\{|\varphi'_i(x) - k|, i = 1, 2, x = a, b\}.$$

Тогда $M_\Omega \leq a_0^{-1} m + k$.

Мы предполагаем, что, в отличие от теоремы 3, результат, полученный в следствии 1, может быть улучшен.

Гипотеза 1. При любом k справедливо неравенство

$$M_\Omega \leq \sqrt{a_0^{-2} m^2 + k^2},$$

и для некоторой области Ω это неравенство обращается в равенство.

В заключение поставим следующую задачу: найти

$$\inf_{\Omega} \frac{M_\Omega}{m_\Omega} = \sup_{u \in \mathcal{U}_\Omega} \frac{\|u_x\|_2}{\|u_y\|_2} \cdot \sup_{u \in \mathcal{U}_\Omega} \frac{\|u_y\|_2}{\|u_x\|_2}.$$

Другими словами, речь идет о задаче минимакса: найти область Ω , в которой отношение $\frac{\|u_x\|_2}{\|u_y\|_2}$ изменяется меньше всего. Наша гипотеза заключается в следующем.

Гипотеза 2. Справедливо соотношение

$$\inf_{\Omega} \frac{M_\Omega}{m_\Omega} = a_0^{-2} \approx 1.44,$$

причем наименьшее значение достигается на ромбах $\Omega = \{(x, y) : a|x| + b|y| \leq 1\}$, $a > 0$, $b > 0$.

2 Доказательства

Доказательство теоремы 3. Поскольку константа M_Ω не меняется при гомотетиях, мы можем считать, что

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_1(2) = \varphi_2(2) = 0$. Обозначим

$$I_x = \int_0^1 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u_x^2 dy, \quad I_y = \int_0^1 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u_y^2 dy.$$

Из симметрии очевидно, что если $I_x \leq M^2 \cdot I_y$ с константой M , не зависящей от u , то $M_\Omega \leq M$.

Пусть $(x, y) \in \Omega$ и $0 \leq x \leq 1$. Проведем касательную плоскость к графику функции u в точке (x, y) . Поскольку u выпукла вверх, эта плоскость лежит выше графика, поэтому при всех $(\hat{x}, \hat{y}) \in \bar{\Omega}$

$$u(\hat{x}, \hat{y}) \leq u(x, y) + (\hat{x} - x) \cdot u_x(x, y) + (\hat{y} - y) \cdot u_y(x, y).$$

Если $u_x(x, y) \geq 0$, то, выбрав $\hat{x} = \hat{y} = 0$, получим

$$u_x(x, y) \leq \frac{1}{x} (u(x, y) - y u_y(x, y)).$$

Если же $u_x(x, y) \leq 0$, то, выбрав $\hat{x} = 2, \hat{y} = 0$, получим

$$-u_x(x, y) \leq \frac{1}{2-x} (u(x, y) - y u_y(x, y)).$$

Поскольку $x \leq 1$, в обоих случаях имеем неравенство

$$|u_x(x, y)| \leq \frac{1}{x} (u(x, y) - y u_y(x, y)).$$

Таким образом,

$$I_x = \int_0^1 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u_x^2 dy \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (u - y u_y)^2 dy.$$

Интегрирование по частям во внутреннем интеграле дает

$$I_x \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (2u^2 + y^2 u_y^2) dy. \quad (2)$$

Зафиксируем $0 < x \leq 1$. Обозначим $\varkappa = \varkappa(x) = -\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ и предположим, что для некоторого $a = a(x) > 0$ и для всех функций v , непрерывно дифференцируемых на $[-\varkappa a, a]$ и удовлетворяющих условию $v(-\varkappa a) = v(a) = 0$, справедливо неравенство

$$\int_{-\varkappa a}^a (2v^2(y) + y^2 v'^2(y)) dy \leq \int_{-\varkappa a}^a v'^2(y) dy \quad (3)$$

(здесь мы временно отказываемся от условия выпуклости вверх!). Тогда с помощью аппроксимации это неравенство переносится на функции из $\mathring{W}_2^1(-\varkappa a, a)$, и в силу однородности имеем

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (2u^2 + y^2 u_y^2) dy \leq \left(\frac{\varphi_2(x)}{a}\right)^2 \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u_y^2 dy, \quad (4)$$

откуда очевидно, что при заданном \varkappa величину a следует выбирать наибольшей из возможных.

Предположим, что $0 < \varkappa \leq 1$ (противоположное неравенство рассматривается аналогично). Тогда из условия $\varphi_2'(0) \leq m$ следует $\frac{\varphi_2(x)}{x} \leq m$, и неравенство (2) можно продолжить:

$$I_x \leq \int_0^1 \left(\frac{\varphi_2(x)}{a(x)x}\right)^2 \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u_y^2 dy dx \leq \frac{m^2}{\left(\min_{0 < \varkappa \leq 1} a\right)^2} \cdot I_y. \quad (5)$$

Перепишем неравенство (3) так:

$$\int_{-\varkappa a}^a ((1 - y^2) v'^2 - 2v^2) dy \geq 0, \quad v(-\varkappa a) = v(a) = 0. \quad (6)$$

Оно означает, что функция $v \equiv 0$ служит минимумом функционала в (6). Заметим, что при $a > 1$ условие Лежандра (см., напр., [4, § 85]) не выполняется вдоль функции $v \equiv 0$, и потому функционал в (6) не может быть неотрицательным. Поэтому можно считать $a \leq 1$.

Предложение 1. *Неравенство (6) выполнено тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение Эйлера*

$$((1 - y^2) v')' + 2v = 0 \quad (7)$$

имеет знакопостоянное решение на интервале $(-\varkappa a, a)$.

Этот результат вариационного исчисления хорошо известен, мы кратко наметим его доказательство, отсылая читателя к классическому учебнику [4, § 86].

Если любое нетривиальное решение уравнения (7) меняет знак на $(-\varkappa a, a)$, то функционал (6) не удовлетворяет условию Якоби и потому не может быть неотрицательным. С другой стороны, если при $a = a_*$ знакопостоянное решение на $(-\varkappa a, a)$ существует, то при $a < a_*$ функционал (6) удовлетворяет усиленному условию Якоби, и потому неравенство (3) выполнено. Предельный переход показывает, что это неравенство выполнено и при $a = a_*$.

Уравнение (7) — это уравнение Лежандра, и его общее решение (с точностью до числового множителя) есть $Q_1(y) + \alpha y$, где

$$Q_1(y) \equiv \frac{y}{2} \log \left(\frac{1+y}{1-y} \right) - 1$$

— функция Лежандра второго рода. Отсюда и из Предложения 1 видно, что для заданного \varkappa наибольшее возможное значение a удовлетворяет условию: $-\varkappa a$ и a — два соседних нуля некоторого решения v уравнения (7). При этом минимум таких a достигается при $\alpha = 0$, что соответствует $\varkappa = 1$.

Таким образом, неравенство (5) принимает вид

$$I_x \leq m^2 a_0^{-2} I_y, \quad (8)$$

где $a_0 \approx 0.8335565596$ — единственный корень функции $Q_1(y)$ на интервале $(0, 1)$.

Осталось заметить, что если при $0 \leq x \leq 1$

$$\varphi_1(x) = -mx, \quad \varphi_2(x) = mx, \quad u(x, y) = -x Q_1\left(\frac{a_0 y}{mx}\right), \quad (9)$$

то все неравенства обращаются в равенства. Поскольку функция u в (9) выпукла вверх, отсюда видно, что при фиксированном m оценка (8) является точной в рассматриваемом классе областей. \square

Доказательство следствия 1. Рассмотрим область $\tilde{\Omega}$ — образ Ω при линейном отображении $(x, y) \mapsto (x, y - kx)$, то есть $\tilde{\Omega} = \{(x, y - kx) : (x, y) \in \Omega\}$. Нетрудно проверить, что эта область удовлетворяет условию теоремы 3, а поскольку функция $\tilde{u}(x, y) = u(x, y + kx)$ принадлежит классу $\mathcal{U}_{\tilde{\Omega}}$, то $\frac{\|\tilde{u}_x\|_2}{\|\tilde{u}_y\|_2} \leq a_0^{-1} m$.

Учитывая, что $u_x = \tilde{u}_x - k\tilde{u}_y$, $u_y = \tilde{u}_y$ и якобиан отображения $(x, y) \mapsto (x, y - kx)$ равен единице, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\|u_x\|_2^2}{\|u_y\|_2^2} &= \frac{\int_{\Omega} u_x^2 dx dy}{\int_{\Omega} u_y^2 dx dy} = \frac{\int_{\tilde{\Omega}} (\tilde{u}_x - k\tilde{u}_y)^2 dx dy}{\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}_y^2 dx dy} = \\ &= \frac{\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}_x^2 dx dy}{\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}_y^2 dx dy} - 2k \frac{\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}_x \tilde{u}_y dx dy}{\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}_y^2 dx dy} + k^2 \leq \\ &\leq a_0^{-2} m^2 + 2k a_0^{-1} m + k^2 = (a_0^{-1} m + k)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Благодарности. Работа А.Ю. Плахова была поддержана CIDMA (Center for R&D in Mathematics and Applications) через фонд FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia) посредством грантов UID/4106/2025 и UID/PRR/4106/2025.

Список литературы

- [1] G. Buttazzo, B. Kawohl. *On Newton's problem of minimal resistance*. Math. Intell. **15**, 7–12 (1993).
- [2] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. (London: Streater) 1687.
- [3] A. Plakhov, V. Protasov. *Local minima in Newton's aerodynamic problem and inequalities between norms of partial derivatives*. J. Math. Anal. Appl. **543**, 128942 (2025).
- [4] В. И. Смирнов. *Курс высшей математики*. т. 4, изд. 2, М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.