ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 422, № 1, с. 1–2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

МНОЖЕСТВА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ

© 2008 г. С. Ю. Пилюгин, С. Б. Тихомиров

Представлено академиком Д.В. Аносовым 27.03.2008 г.

Поступило 29.04.2008 г.

Пусть M – гладкое замкнутое многообразие с римановой метрикой dist. Рассмотрим пространство касательных векторных полей на M класса C^1 с C^1-топологией; обозначим через $\phi(t, x)$ такую траекторию поля X, что $\phi(0, x) = x$.

Фиксируем число $d > 0$ и назовем d-псевдотраекторией потока ϕ (и поля X) такое отображение $g: R \to M$, что для любого $\tau \in R$ выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(\phi(t, g(\tau)), g(t+\tau)) < d, \quad |t| \le 1.$$

Задача об отслеживании псевдотраекторий связана со следующим вопросом: при каких условиях для любой псевдотраектории поля X можно найти близкую к ней траекторию? Изучение этой задачи было начато Д.В. Аносовым [1] и Р. Боуэном [2]; современное состояние теории отслеживания в значительной степени отражено в монографиях [3, 4].

Отметим, что основное отличие задачи об отслеживании для потоков от аналогичной задачи для дискретных динамических систем, порождаемых диффеоморфизмами, состоит в необходимости репараметризации отслеживающих траекторий.

Цель данной заметки – описать структуру C^1-внутренностей множеств векторных полей, обладающих теми или иными свойствами отслеживания псевдотраекторий.

Назовем репараметризацией такой монотонно возрастающий гомеоморфизм h прямой R, что $h(0) = 0$.

Пусть $a > 0$; обозначим через $\operatorname{Rep}(a)$ множество таких репараметризаций h, что

$$\left|\frac{h(t_1) - h(t_2)}{t_1 - t_2} - 1\right| < a$$

при любых различных $t_1, t_2 \in R$.

Санкт-Петербургский государственный университет

Определим основные изучаемые далее свойства отслеживания.

Будем говорить, что поле X обладает стандартным свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $d > 0$, обладающее следующим свойством: для любой d-псевдотраектории g поля X существуют такие точка $p \in M$ и репараметризация $h \in \operatorname{Rep}(\varepsilon)$, что

$$\operatorname{dist}(\phi(h(t), p), g(t)) < \varepsilon, \quad t \in R. \tag{1}$$

Обозначим через RegSh множество полей, обладающих стандартным свойством отслеживания.

Будем говорить, что поле X обладает липшицевым свойством отслеживания, если найдутся числа d_0, $L > 0$, обладающие следующим свойством: для любой d-псевдотраектории g поля X с $d \le d_0$ существуют такие точка $p \in M$ и репараметризация $h \in \operatorname{Rep}(Ld)$, что выполнены неравенства (1) с $\varepsilon = Ld$. Обозначим через LipSh множество полей, обладающих липшицевым свойством отслеживания.

Будем говорить, что поле X обладает ориентированным свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $d > 0$, обладающее следующим свойством: для любой d-псевдотраектории g поля X существуют такие точка $p \in M$ и репараметризация h, что выполнены неравенства (1) (таким образом, мы не требуем, чтобы репараметризация h была близка к тождественному отображению). Обозначим через OrientSh множество полей, обладающих ориентированным свойством отслеживания.

Будем говорить, наконец, что поле X обладает орбитальным свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $d > 0$, обладающее следующим свойством: для любой d-псевдотраектории g поля X существует такая точка $p \in M$, что

$$\operatorname{dist}_H\{\operatorname{Cl}\{\phi(t, p)\colon t \in R\}, \operatorname{Cl}\{g(t)\colon t \in R\}\} < \varepsilon,$$

где $\operatorname{Cl}A$ – замыкание множества A, а dist_H – расстояние по Хаусдорфу.

Обозначим через OrbitSh множество полей, обладающих орбитальным свойством отслеживания.

Ясно, что верны включения

$$\mathrm{LipSh} \subset \mathrm{RegSh} \subset \mathrm{OrientSh} \subset \mathrm{OrbitSh}.$$

Введем следующие обозначения: будем обозначать через $\mathcal{S}$ множество структурно устойчивых векторных полей и через $\mathcal{N}$ множество векторных полей, не имеющих точек покоя. Если $\mathbf{P}$ – некоторое множество векторных полей, символ $\mathrm{Int}^1(\mathbf{P})$ обозначает внутренность множества $\mathbf{P}$ в C^1-топологии.

В работе [5] показано, что $\mathcal{S} \in \mathrm{LipSh}$.

Определим, наконец, важный для дальнейшего класс полей. Будем говорить, что поле X принадлежит классу $\mathbf{B}$, если у него есть такие гиперболические точки покоя p и q (не обязательно различные), что:

1) у матрицы Якоби $DX(p)$ есть пара комплексно сопряженных собственных чисел $a_1 \pm b_1 i$ с $a_1 < 0$ кратности 1, и если $c_1 + d_1 i$ – отличное от $a_1 \pm b_1 i$ собственное число с $c_1 < 0$, то $c_1 < a_1$;

2) у матрицы Якоби $DX(q)$ есть пара комплексно сопряженных собственных чисел $a_1 \pm b_2 i$ с $a_2 > 0$ кратности 1, и если $c_2 \pm d_2 i$ – отличное от $a_2 \pm b_2 i$ собственное число с $c_2 > 0$, то $c_2 > a_2$;

3) существует траектория нетрансверсального пересечения неустойчивого многообразия $W^u(p)$ и устойчивого многообразия $W^s(q)$.

Теорема 1. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrbitSh}) \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$.

Эта теорема обобщает результат недавней статьи [6], в которой доказано включение $\mathrm{Int}^1(\mathrm{RegSh}) \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{S}$. Для дискретных динамических систем, порождаемых диффео-морфизмами, аналог теоремы 1 получен в статье [7].

Теорема 2. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh} \backslash \mathbf{B}) \subset \mathcal{S}$.

Теорема 3. $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) \subset S$.

Из упомянутого выше результата статьи [5] и из теоремы 3 следует равенство

$$\mathrm{Int}^1(\mathrm{LipSh}) = \mathcal{S}.$$

Теорема 4. *Если* $\dim M \le 3$ *то* $\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrientSh}) \subset \subset \mathcal{S}$.

Таким образом, если $\dim M \le 3$, то

$$\mathrm{Int}^1(\mathrm{OrietnSh}) = \mathcal{S}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1970. Т. 2. С. 39–45.
2. *Bowen R.* // Lect. Notes Math. 1975. V. 470.
3. *Pilyugin S.Yu.* // Lect. Notes Math. 1999. V. 1706.
4. *Palmer K.* Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Acad. Publ., 2000. 299 p.
5. *Pilyugin S.Yu.* // J. Different. Equats. 1997. V. 140. P. 238–265.
6. *Lee K., Sakai K.* // J. Different. Equats. 2007. V. 232. P. 303–313.
7. *Pilyugin S.Yu., Rodionova A.A., Sakai K.* // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2003. V. 9. P. 287–308.