Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №2

МОДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ С ПОЧТИ ПРЕДПИСАННЫМ МОДУЛЕМ

© Ю. С. БЕЛОВ

§1. Введение

Пусть Θ — внутренняя функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ (напомним, что *внутренней* в $\mathbb{C}^+$ называют функцию, аналитическую и ограниченную в $\mathbb{C}^+$, угловые граничные значения которой п.в. на $\mathbb{R}$ по модулю равны единице). Функция Θ порождает так называемое *модельное подпространство*

$$K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$$

пространства Харди $H^2 = H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \text{ при п.в. } \xi \in (-\infty, 0)\}$ (где $\hat{f}$ обозначает Фурье-образ функции f). Об этих подпространствах, играющих важную роль в анализе и его приложениях к математической физике, см., например, [Cima, N, NF], а также работы [Bl2, Bl3, BH, BBH, D, HM1, HM2, MNH], особенно близкие теме нашей статьи, посвященной модулям модельных функций (т.е. элементов множества K_Θ). Особое внимание мы будем уделять классическому случаю, когда $\Theta(z) = e^{i\sigma z}, \sigma > 0$, когда K_Θ превращается в $e^{i\sigma z/2} PW_{\sigma/2}$ (через PW_σ мы обозначаем пространство Пэли–Винера, состоящее из целых функции степени не выше σ и квадратично суммируемых на $\mathbb{R}$).

Естественная проблема конструктивного описания неотрицательных функций ω, совпадающих п.в. на $\mathbb{R}$ с модулем некоторой модельной функции (при заданной Θ), как показывает опыт, обычно не допускает удовлетворительного решения, см. [D, HM1]. Даже гораздо более простая, на первый взгляд, постановка, требующая по данной мажоранте $\omega : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ построить ненулевую функцию $f \in K_\Theta$, для которой

$$|f| \le \omega \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

требует довольно глубокой аналитической техники. Например, в классическом случае ($\Theta(z) = e^{i\sigma z}, \sigma > 0$) один из результатов — теорема Берлинга–Мальявена о мультипликаторе.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00313.

Определение 1.1. Будем называть неотрицательную функцию ω, заданную на $\mathbb{R}$, Θ-допустимой (и писать $\omega \in \mathrm{Adm}(\Theta)$), если существует ненулевая функция $f \in K_\Theta$, удовлетворяющая условию (1.1).

Необходимым условием Θ-допустимости служит сходимость логарифмического интеграла $\mathcal{L}(\omega)$

$$\mathcal{L}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \Omega\, d\mathbf{P}, \quad \Omega = -\log\omega,$$

где $d\mathbf{P}$ обозначает меру Пуассона на $\mathbb{R}$:

$$d\mathbf{P}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2};$$

мы предполагаем, что функция ω измерима (по Лебегу) и $0 \le \omega \le 1$ п.в. на $\mathbb{R}$, так что сходимость интеграла $\mathcal{L}(\omega)$ означает то же, что $\mathcal{L}(\omega) > -\infty$. Заметим, что это условие никогда (т.е. ни при какой Θ) не достаточно для Θ-допустимости (см. [BH]). Эти достаточные условия сильно зависят от структуры порождающей функции Θ; их исследованию посвящены уже цитированные работы [Bl2, Bl3, BH, BBH, HM1, HM2, MNH].

В настоящей статье мы рассматриваем подкласс класса Θ-допустимых функций, состоящий из так называемых *строго допустимых* функций.

Определение 1.2. Функцию ω мы называем строго допустимой (точнее, строго Θ-допустимой) и пишем $\omega \in \mathrm{sAdm}(\Theta)$, если найдутся функция $f \in K_\Theta$ и такие положительные константы C_1, C_2, что

$$C_1\omega \le |f| \le C_2\omega \quad \text{п.в. на } \mathbb{R} \tag{1.2}$$

(факт существования констант C_1, C_2, удовлетворяющих неравенству (1.2), мы будем записывать так: $|f| \asymp \omega$).

Нам понадобится еще одно обозначение:

$$\mathrm{sADM}(\Theta) = \{-\log\omega,\, \omega \in \mathrm{sAdm}(\Theta)\}.$$

Функция f из неравенства (1.2) вместо нереалистичной задачи построения модельной функции с предписанным модулем („$|f| = \omega$ п.в.“) решает ослабленную задачу поиска функции $f \in K_\Theta$ с *почти* предписанным модулем (т.е. такой, что функция $|f|$ всего лишь *сравнима* с ω на $\mathbb{R}$: $|f| \asymp \omega$).

Наш основной результат (теорема 2.4 в §2) описывает довольно широкое подмножество в $\mathrm{sAdm}(\Theta)$ для мероморфной внутренней функции Θ. Но мы начнем с обсуждения частного, более простого, случая этой теоремы, охватывающего классическую ситуацию $\Theta(x) = e^{i\sigma x}, \sigma > 0$ (теорема 2.6). Перед этим нам понадобятся некоторые вспомогательные построения.

Как показывают работы [HM1, HM2, Bl], достаточные условия допустимости часто выражаются не в терминах самой функции ω или Ω, а в терминах преобразования Гильберта $\widetilde{\Omega}$ функции Ω. Мы будем понимать преобразование Гильберта так:

$$h(\Omega)(x) = \widetilde{\Omega}(x) = \frac{1}{\pi}(v.p.)\int_{\mathbb{R}} \Omega(t)\Big(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1}\Big)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция $\widetilde{\Omega}$ определена п.в. на $\mathbb{R}$ для любой функции $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$ (или, что то же самое, для любой функции ω такой, что $\mathcal{L}(\omega) > -\infty$). Нам понадобится также следующий вариант преобразования Гильберта:

$$h_0(\Omega)(x) = \frac{1}{\pi}(v.p.)\int_{\mathbb{R}} \frac{\Omega(t)}{x-t}dt.$$

Если $\Omega \in L^1(\mathbb{R})$, то $\widetilde{\Omega} = h_0(\Omega) + \mathrm{const}$.

Один из наших основных результатов (теорема 2.6) состоит в ,,двустороннем" уточнении следующей теоремы Хавина и Машреги [HM2], относящейся к классу $\mathrm{Adm}(e^{i\sigma z})$ (а не к $\mathrm{sAdm}(e^{i\sigma x})$).

Теорема 1.3 (Хавин–Машреги). *Пусть* $\Theta(z) = e^{i\sigma z}$, $\sigma > 0$. *Тогда любая положительная функция* ω *такая, что*

$$\text{a)}\ \ \|\widetilde{\Omega}'\|_\infty < \frac{\sigma}{2}; \quad \text{b)}\ \ \mathcal{L}(\omega) > -\infty,$$

будет Θ*-допустимой.*

Наша теорема 2.6 показывает, что условия a) и b) обеспечивают не только включение $\omega \in \mathrm{Adm}(\Theta)$, но и включения $\omega \in \mathrm{sAdm}(\Theta)$. Строгая допустимость для классического случая рассматривалась в неопубликованной работе [BB], результаты которой содержали теорему 2.6 (при дополнительном предположении $\Omega(x) = o(x), |x| \to +\infty$). Доказательство теоремы 2.6 в работе [BB] использовало процедуру приближения субгармонической функции функциями вида $\log|g|$, где g — целая функция. Нам кажется, что наш путь построения функции, удовлетворяющей условию (1.2), короче. Более того, наш метод применим к существенно более широкому классу мероморфных функций Θ. Отметим, что в работе [BB] была доказана точность теоремы 2.6. Для любого $\sigma > 0$ там была построена функция Ω такая, что функции Ω и $\widetilde{\Omega}$ — липшицевы, $\sigma = \|\widetilde{\Omega}'\|_\infty$, но $\Omega \notin \mathrm{sADM}(e^{iaz})$ для любого числа $a \in (0, 2\|\widetilde{\Omega}\|_\infty)$ (отметим, что $\Omega \in \mathrm{ADM}(e^{iaz})$ для любого $a > 0$). Другое доказательство теоремы 2.6 следует из результатов работы [LS], посвященной весовым пространствам Пэли–Винера. Нам неизвестно, позволят ли методы статьи [LS] получить результаты для других мероморфных внутренних Θ, как в теореме 2.4.

§2. Основные результаты

Символ $|K_\Theta|$ будет обозначать множество всех функций вида $|f|$, где $f \in K_\Theta$. В работе [HM1] была доказана следующая теорема, описывающая элементы класса $|K_\Theta|$.

Теорема 2.1. *Пусть Θ — внутренняя функция, а неотрицательные функции m и $\omega = e^{-\Omega}$ таковы, что $\mathcal{L}(\omega) > -\infty$, $\mathcal{L}(m) > -\infty$ и $m\omega \in L^2(\mathbb{R})$. Включение $m\omega \in |K_\Theta|$ верно тогда и только тогда, когда существуют внутренняя функция I и целочисленная функция n такие, что*

$$\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega} = 2\widetilde{\log m} + 2\pi n + \arg I. \tag{2.1}$$

Таким образом, если мы решим уравнение (2.1) с „неизвестными“ m, n, I, и окажется, что $m \asymp 1$, то мы найдем функцию $f \in K_\Theta$ такую, что $|f| \asymp \omega$. Отметим, что $\inf m = 0$, если функция n непостоянна. Мы попытаемся решить уравнение (2.1) при $n = 0$. Положим $\Phi = \arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ и перепишем уравнение (2.1) следующим образом:

$$\Phi - \arg I = 2\widetilde{\log m}. \tag{2.2}$$

Если мы сумеем найти внутреннюю функцию I и ограниченную функцию m, отделенную от нуля, и окажется, что $\widetilde{\log m} = \Phi - \arg I$, то мы докажем строгую допустимость функции ω.

Для формулировки основного результата статьи нам понадобятся два определения.

Определение 2.2. Назовем разбиение вещественной прямой на интервалы $J_k = [d_k, d_{k+1}]$ ($\{d_k\}$ — строго возрастающая двусторонняя последовательность) регулярным, если выполнено условие

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{|k-l|>1} \frac{|J_l|^2}{\operatorname{dist}^2(J_k, J_l)} < +\infty.$$

(Через $|J_k|$ мы обозначаем длину интервала J_k, а через $\operatorname{dist}(J_k, J_l)$ — расстояние между интервалами J_k и J_l.) Если разбиение регулярно, то $\frac{|J_k|}{|J_{k+1}|} \asymp 1$.

С другой стороны, если $|J_k| \asymp 1$, то разбиение регулярно. Как мы покажем ниже, существуют такие регулярные разбиения, что $\inf |J_k| = 0$ (см. следствие 5.4).

Определение 2.3. Назовем возрастающую функцию Φ регулярной, если существует такая последовательность чисел $\{d_k\}$, что $\Phi(d_k) = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, разбиение $J_k = [d_k, d_{k+1}]$ регулярно и $\sup_{|\Phi(x)-\Phi(y)|<1} \frac{\Phi'(x)}{\Phi'(y)} < +\infty$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат статьи.

Теорема 2.4. *Пусть мероморфная внутренняя функция* Θ *и неотрицательная функция* ω *таковы, что*

a) $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$;

b) $\widetilde{\Omega} \in C^2(\mathbb{R})$;

c) *функция* $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ *регулярна.*

Тогда $\Omega \in \mathrm{sADM}(\Theta)$.

Перед доказательством теоремы 2.4 мы выведем из нее два результата, относящиеся к классическому случаю.

Теорема 2.5. *Пусть мероморфная внутренняя функция* Θ *и положительная функция* $\omega = e^{-\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ *таковы, что*

a) $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$;

b) $\widetilde{\Omega} \in C^1(\mathbb{R})$;

c) $0 < \inf_{\mathbb{R}}((\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega})') \le \sup_{\mathbb{R}}((\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega})') < +\infty$.

Тогда $\Omega \in \mathrm{sADM}(\Theta)$.

Доказательство. Функция $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ возрастает. Существует такая последовательность $\{d_k\}$, что $(\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega})(d_k) = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, причем $d_{k+1} - d_k \asymp 1$. Следовательно, разбиение $\{J_k\}$, где $J_k = [d_k, d_{k+1}]$, регулярно, и функция $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ тоже регулярна. $\square$

Немедленным следствием теоремы 2.5 является теорема 2.6.

Теорема 2.6. *Пусть* $\Theta(z) = e^{i\sigma z}$. *Если функция* $\omega = e^{-\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ *такова, что*

a) $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$,

b) $\|\widetilde{\Omega}'\|_\infty < \frac{\sigma}{2}$,

то $\Omega \in \mathrm{sADM}(\Theta)$.

В некоторых частных случаях удается избавиться от преобразования Гильберта и получить достаточные условия строгой допустимости в терминах самой функции Ω. Например, как показано в работе [BB], если функция $\Omega \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbf{P})$ возрастает на луче $[A, +\infty)$ и убывает на луче $(-\infty, A]$, то $\Omega \in \mathrm{sADM}(e^{i\sigma z})$ для любого $\sigma > 0$. Из результатов работы [Bl1, теорема 9] следует, что если

$$\Omega \in L^1(\mathbf{P}), \quad \|\Omega'\|_\infty < +\infty \quad \text{и} \quad \Delta_2(\Omega) \in L^1(\mathbf{P}),$$

где

$$\Delta_2(\Omega)(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Omega(x+t) - 2\Omega(x) + \Omega(x-t)|,$$

то $\|\widetilde{\Omega}'\|_\infty < +\infty$. Это *дает строгую допустимость* функции ω для подпространств $K_{e^{i\sigma z}}$ с достаточно большим σ. Теорема 2.5 применима не только тогда, когда $(\arg\Theta)' \asymp 1$ (как в классическом случае). Например, если B — произведение Бляшке с нулями $z_k = x_k + iy_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\inf y_k = 0$, то мы можем надеяться исправить поведение функции $\arg\Theta$ при помощи функции $2\widetilde{\Omega}$. Например, сопоставляя один из результатов работы [Bl3] (следствие 6.1.) и теорему 2.5, можно получить следующий результат. Положим

$$A_B = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \log\Big(1 + \frac{1-y_k^2}{(x-x_k)^2 + y_k^2}\Big).$$

Следствие 2.7. *Пусть B — произведение Бляшке с нулями $z_k = x_k + iy_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если функция $\omega = e^{-\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ такова, что Ω принадлежит $L^1(\mathbf{P})$ и представима в виде $A_B + \Omega_1$, где функция $\widetilde{\Omega_1}$ липшицева с достаточно малой константой липшицевости, то $\Omega \in \mathrm{sADM}(B)$.*

§3. План доказательства теоремы 2.4: предварительные замечания

Для решения уравнения (2.1) мы его формально переписываем, используя преобразование Гильберта. Эта процедура подсказывает следующее определение функции m:

$$2\log m = \widetilde{\arg I} - \Phi,$$

где I — подходящая внутренняя функция, обеспечивающая ограниченность функции $\log m$. (Вообще говоря, наше определение функции $\log m$ не будет столь непосредственным, здесь мы только даем краткое представление об основной идее.) Скорость роста функции Φ (см. условие a) теоремы 2.4) подсказывает выбор внутренней функции I. Определим I как произведение Бляшке с нулями $z_k = x_k + iy_k$, где возрастающая последовательность x_k ведет себя так же, как и d_k, а числа d_k определены уравнением $\widetilde{\Phi}(d_k) = 2\pi k$. Нам необходимо уточнить свой выбор чисел x_k и y_k, чтобы сделать правую часть в (2.2) ограниченной на $\mathbb{R}$. Нам потребуется несколько предварительных замечаний (напомним, что $h(f)$ и $\widetilde{f}$ обозначают преобразование Гильберта с регуляризированным ядром Коши, а $h_0(f)$ обозначает обыкновенное преобразование Гильберта).

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L^1(a,b)$, и $f \equiv 0$ вне $[a,b]$, причем $\int_{\mathbb{R}} f(s)ds = 0$. Тогда*

$$|h_0(f)(x)| \le \frac{1}{\pi}\frac{\int_a^b\int_a^t |f(s)|dsdt}{\mathrm{dist}^2(x,[a,b])}, \quad x \notin [a,b].$$

Доказательство. Пусть F — такая первообразная функции f, что $F(a)=0$. Тогда $F(b)=0$. Если $x\in[a,b]$, то

$$|h_0(f)(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_a^b\frac{f(t)}{x-t}dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_a^b F(t)\frac{dt}{(x-t)^2}\right|\le\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\int_a^b|F(t)|dt}{\operatorname{dist}^2(x,[a,b])}.\qquad\square$$

Лемма 3.2. *Пусть функция f такая же, как в лемме* 3.1. *Тогда*

$$|h_1(f)(x)|\le|h_0(f)(x)|+\int_a^b\frac{|\int_a^t f(s)ds|}{t^2+1}dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$|h(f)(x)-h_0(f)(x)|=\left|\int_a^b f(t)\frac{t}{t^2+1}dt\right|=\left|\int_a^b\int_a^t f(s)ds\Big(\frac{t}{t^2+1}\Big)'dt\right|,$$

а $\left|\left(\frac{t}{t^2+1}\right)'\right|\le\frac{1}{t^2+1}$. $\square$

Здесь (и далее) мы определим I как мероморфное произведение Бляшке с нулями $z_k=x_k+iy_k,(x_k\in\mathbb{R},y_k>0,k\in\mathbb{Z})$, где последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ возрастает. Известно, что (см. [HM2, с. 1259])

$$(\arg I)'(x)=\sum_k\frac{2y_k}{(x-x_k)^2+y_k^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

С произведением Бляшке I при условии

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{y_k+y_k^2}{x_k^2}<+\infty$$

мы свяжем положительную функцию R_I на $\mathbb{R}$, заданную формулой

$$R_I(x)=\sum_k\log\Big(1+\frac{y_k^2}{(x-x_k)^2}\Big),\quad x\in\mathbb{R}.\tag{3.1}$$

Лемма 3.3. *Функция R_I суммируема по мере Пуассона (т.е. $R_I\in L^1(\mathbf{P})$) и*

$$-h(R_I)=\arg I-2\pi n_I+\mathrm{const},\tag{3.2}$$

где n_I — считающая функция последовательности x_k, т.е. $n_I(t)=\operatorname{card}\{k:0\le x_k<t\}$ *при* $t\ge0$, $n_I(t)=-\operatorname{card}\{k:t<x_k<0\}$ *при* $t<0$.

Доказательство. Из неравенства $\log\big(1+\frac{y_k^2}{(x-x_k)^2}\big)\le\frac{y_k^2}{(x-x_k)^2}$ и из сходимости ряда $\sum_k\frac{y_k^2}{x_k^2}$ следует сходимость ряда (3.1) для $x\ne x_k$. Чтобы доказать включение $R_I \in L^1(\mathbf{P})$, заметим, что

$$\pi \int_{\mathbb{R}} \log((x-X)^2+Y^2))d\mathbf{P}(x) = \pi \log(X^2+(1+Y)^2), \quad Y \geq 0. \tag{3.3}$$

Действительно, пусть $Z := X - iY$. Согласно теореме о вычетах,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log((x-X)^2+Y^2)}{1+x^2}dx &= 2\Re \int_{\mathbb{R}} \frac{\log(x-Z)}{1+x^2}dx \\ &= 2\Re\Big[2\pi \cdot i \operatorname{res}_i \Big(\frac{\log(z-Z)}{1+z^2}\Big)\Big] \\ &= 2\Re[\pi i \log((z-i)/i)] = 2\pi \log|X+i(Y+1)| \\ &= \pi \log(X^2+(1+Y)^2).\end{aligned}$$

Устремив Y к 0, мы увидим, что этот результат верен также и для $Y = 0$. Из (3.3) при $X = x_k$, $Y = y_k$ или 0 следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \log \frac{(x-x_k)^2+y_k^2}{(x-x_k)^2} d\mathbf{P}(x) = \log \frac{x_k^2+(1+y_k)^2}{x_k^2+1} \leq \frac{2y_k+y_k^2}{x_k^2+1}.$$

Из сходимости ряда $\sum_k \frac{y_k+y_k^2}{x_k^2}$ заключаем, что $R_I \in L^1(\mathbf{P})$.

Вместо доказательства равенства (3.2) докажем, что

$$-h(R_I) + 2\pi n_I = \arg I + c. \tag{3.4}$$

Для этого мы проверим, что

a) левую часть в (3.4) можно сделать непрерывной, определив должным образом ее значения в точках x_k;

b) вне точек x_k левая часть дифференцируема, и ее производная совпадает с $(\arg I)'$, из чего следуют равенства (3.4) и (3.2).

a) Ряд, определяющий функцию R_I, сходится в $L^1(\mathbf{P})$, следовательно,

$$h(R_I)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\Big(\log \frac{(x-x_k)^2+y_k^2}{(x-x_k)^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что последний ряд сходится равномерно на любом компактном интервале, отделенном от точек x_k. Зафиксируем $l \in \mathbb{Z}$. На интервале (x_{l-1}, x_{l+1}) имеем

$$-h(R_I) = h(\log(x-x_l)^2) + r_l, \tag{3.5}$$

где функция r_l непрерывна на (x_{l-1}, x_{l+1}). Заметим, что

$$h(2\log|x-x_l|) = 2\arg(t-x_l) + \mathrm{const}, \quad t \neq x_l \tag{3.6}$$

($\arg u := 0$ для $u > 0$, $\arg u := \pi$ для $u < 0$). Из (3.5), (3.6) вытекает, что функция $-h(R_I)(t)$ имеет разрыв первого рода (скачок вниз), когда

t проходит через x_l, в то время как функция $2\pi n_I$ имеет скачок вверх (скачок равен $+2\pi$). Следовательно, левый и правый пределы функции $-h(R_I)+2\pi n_I$ совпадают в точке x_l.

b) Результатом формального дифференцирования ряда, определяющего $h(R_I)$, служит ряд, равномерно сходящийся на любом компактном интервале, свободном от точек x_k, что следует непосредственно из сходимости ряда, определяющего R_I в $L^1(\mathbf{P})$. Следовательно, почленное дифференцирование на интервале (x_l, x_{l+1}), уничтожающее функцию n_I на (x_l, x_{l+1}), влечет следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
(-h(R_I)+2\pi n_I)'(x) &= \sum_k -\big(h_0(\log((x-x_k)^2+y_k^2)) - h_0(\log(x-x_k)^2)\big)' \\
&= \sum_k -h_0([\log((x-x_k)^2+y_k^2)]') = -\sum_k h\Big(\frac{2(x-x_k)^2}{(x-x_k^2)+y_k^2}\Big) \\
&= \sum_k \frac{2y_k}{(x-x_k)^2+y_k^2} = (\arg I)'(x), \quad t \neq x_k, \quad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что функция $h_0(\log(x-x_k)^2)$ кусочно-постоянна и $h_0\big(\frac{x}{1+x^2}\big) = -\frac{1}{1+x^2}$. □

§4. Доказательство теоремы 2.4

Из условий теоремы следует, что функция $\Phi = \arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ строго возрастает на вещественной оси. Пусть последовательность d_k такова, что $\Phi(d_k) = 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Положим $J_k = [d_k, d_{k+1}]$. Пусть $a_k = \frac{1}{|J_k|}\int_{J_k}\Phi \in (2\pi k, 2\pi(k+1))$, где $a_k = 2\pi(k+q_k)$, $q_k\in(0,1)$. Теперь положим $x_k = d_{k+1} - q_k|J_k|$, так что x_k — внутренняя точка интервала J_k. Пусть n_I — считающая функция последовательности $\{x_k\}$, а I — произведение Бляшке с нулями $x_k + iy_k$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $d_0 < 0 < x_0 < d_1$ (следовательно, $n_I(d_k) = k$). Положим

$$\Psi = \Phi - 2\pi n_I.$$

Ясно, что

$$|\Psi| \le 2\pi, \qquad \int_{J_k}\Psi = 0 \quad \text{для любого} \ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
\int_{J_k}\Psi &= |J_k|a_k - 2\pi\int_{J_k} n_I|J_k|a_k - 2\pi k|J_k| + 2\pi(d_{k+1}-x_k) \\
&= 2\pi|J_k|q_k - 2\pi d_{k+1} + 2\pi x_k = 0.
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\Psi(d_k)=0$. Пусть

$$2\log m = R_I - \widetilde{\Psi}. \tag{4.1}$$

Когда мы докажем ограниченность функции $\log m$, включение $\widetilde{\Psi}\in L^1(\mathbf{P})$ будет следовать из (4.1), так как $R_I\in L^1(\mathbf{P})$ (см. лемму 3.3). Тогда мы сможем применить оператор h к обеим частям (4.1) и получить

$$\widetilde{2\log m} = \widetilde{R_I} + \Psi + \mathrm{const} = -\arg I + 2\pi n_I + \Phi - 2\pi n_I + \mathrm{const},$$

согласно лемме 3.3. Следовательно, в силу равенства $\Phi = \arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ получим

$$\widetilde{2\log m} + \arg I = \arg\Theta + 2\widetilde{\Omega} + \mathrm{const},$$

а поскольку функция m ограничена и отделена от нуля, мы получим строгую допустимость функции ω (см. §2).

Нам осталось доказать, что функция $\log m$ ограничена. Зафиксируем $k\in\mathbb{Z}$ и положим

$$J = J_{k-1}\cup J_k\cup J_{k+1}.$$

Положим также

$$R_I^s(t) = \log\frac{1+(t-x_s)^2}{(t-x_s)^2},\quad \Psi_s = \Psi\cdot\chi_{J_s},\quad t\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{Z}.$$

Теперь формула (4.1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}2\log m = {}&\sum_{|s-k|>1} R_I^s - \sum_{|s-k|>1} h(\Psi_s)\\ &+\Big\{[R_I^{k-1}+R_I^k+R_I^{k+1}] - h[\Psi_{k-1}+\Psi_k+\Psi_{k+1}]\Big\} = V_1 - V_2 + V_3.\end{aligned}$$

Оценим V_1:

$$\begin{aligned}0<\sum_{|s-k|>1} R_I^s &= \sum_{|k-s|>1}\log\Big(1+\frac{y_s^2}{(x-x_s)^2}\Big)\\ &\le \sum_{|k-s|>1}\frac{y_s^2}{(x-x_s)^2} \le \sum_{|k-s|>1}\frac{|J_s|^2}{\operatorname{dist}^2(J_k,J_s)}.\end{aligned}$$

Разбиение J_k регулярно, следовательно, последняя сумма ограничена равномерно по k. Теперь оценим V_2. Отметим, что $\int_{J_s}\Psi_s = 0$. Значит, $\int_{J_s}\int_{J_s}|\Psi(s)|\,ds\,dt \le 2\pi|J_s|^2$. Следовательно, используя леммы 3.1 и 3.2, мы можем оценить величину $|h(\Psi)|$:

$$|h(\Psi_s)(x)| \le C_1\frac{|J_s|^2}{\operatorname{dist}^2(J_k,J_s)} + C_2\int_{J_s}\frac{dt}{t^2+1}.$$

Суммируя эти неравенства по всем s, для которых $|s-k|>1$, и используя регулярность разбиения J_k, легко видеть, что величина V_2 равномерно ограничена.

Теперь приступим к наиболее деликатной части оценок, а именно к оценке функции V_3. Пусть

$$\Upsilon = \Psi_{k-1} + \Psi_k + \Psi_{k+1} + 2\pi(\chi_{(x_{k-1},d_{k+2})} + \chi_{(x_k,d_{k+2})} + \chi_{(x_{k+1},d_{k+2})}).$$

Таким образом,

$$V_3 = R_I^{k-1} + R_I^k + R_I^{k+1} + 2\pi h(\chi_{(x_{k-1},d_{k+2})} + \chi_{(x_k,d_{k+2})} + \chi_{(x_{k+1},d_{k+2})}) - h(\Upsilon).$$

Далее покажем, что функция $h(\Upsilon)$ ограничена. Отметим, что сама функция Υ непрерывна и дифференцируема на интервале (d_{k-1}, d_{k+2}). Подчеркнем также, что $\|\Upsilon\|_\infty \le 6\pi$ и $|\Upsilon'(x)| \le \frac{C}{|J_k|}, (x \in J)$, где константа C не зависит от k, поскольку $\frac{1}{|J_k|} = \Upsilon'(\xi) = \Phi'(\xi)$ для некоторого $\xi \in J_k$. Положим $m_k = \min\{|J_{k-1}|, |J_k|, |J_{k+1}|\}, M_k = \max\{|J_{k-1}|, |J_k|, |J_{k+1}|\}$. Разбиение J_k регулярно, следовательно, $M_k \asymp m_k$. Далее,

$$\begin{aligned} h_0(\Upsilon)(x) &= (v.p.)\int_J \frac{\Upsilon(t)}{x-t}dt \\ &= (v.p.)\int_{|x-t|\le m_k} \frac{\Upsilon(t)-\Upsilon(x)}{x-t}dt + \int_{|x-t|>m_k, x\in J} \frac{\Upsilon(t)}{x-t}dt. \end{aligned}$$

Модуль первого интеграла не превышает $\frac{2Cm_k}{|J_k|}$, а модуль второго не превышает $\|\Upsilon\|_\infty \cdot 2\log\frac{2M_k}{m_k}$. Легко проверить, что

$$|h(\Upsilon)(x) - h_0(\Upsilon)(x)| \le \|\Upsilon\|_\infty \cdot \int_J \frac{|t|}{t^2+1}dt.$$

(Ограниченность последнего интеграла следует из регулярности системы J_k.) Следовательно, функция $h(\Upsilon)$ ограничена на J_k константой, не зависящей от k. Теперь нам осталось только оценить величину

$$R_I^{k-1} + R_I^k + R_I^{k+1} + 2\pi h(\chi_{(x_{k-1},d_{k+2})} + \chi_{(x_k,d_{k+2})} + \chi_{(x_{k+1},d_{k+2})}).$$

Мы можем использовать оператор h_0 вместо h в последнем выражении (так как их разность ограничена), так что это выражение превращается в

$$\begin{aligned} &\Big[\sum_{|s-k|\le 1} \log((x-x_s)^2 + y_s^2)\Big] - 6\log|x-d_{k+2}| \\ &\quad = \sum_{|s-k|\le 1}\Big[\log((x-x_s)^2+y_s^2) - 2\log|x-d_{k+2}|\Big]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Рассмотрим величину $-6\log|x-d_{k+2}|$ как сумму трех равных слагаемых $-2\log|x-d_{k+2}|$ и распределим их таким образом, чтобы уравновесить каждое из слагаемых $\log((x-x_s)^2+y_s^2)$. Заметим, что при $s=k-1,k,k+1$

$$\frac{|J_s|^2}{2M_k^2}\le\frac{(x-x_s)^2+y_s^2}{(x-d_{k+2})^2}\le\frac{4M_k^2+|J_s|^2}{|J_s|^2}.$$

Следовательно, каждое слагаемое последней суммы в (4.2) ограничено, и теорема доказана. □

§5. Условие регулярности: примеры применения теоремы 2.4

Этот параграф посвящен обсуждению условия регулярности и примерам применения теоремы 2.4. Прежде всего отметим, что условие регулярности функции не накладывает никаких ограничений на ее рост (в том смысле, что регулярная функция может расти сколь угодно быстро). С другой стороны, условие регулярности разбиения J_k запрещает медленный рост функции (регулярная функция не может расти медленнее, чем $\log^2|x|$ в бесконечности). Напомним, что условие регулярности строго возрастающей функции f состоит из двух частей:

a) регулярность разбиения $J_k=[f^{-1}(2\pi k),f^{-1}(2\pi(k+1))]$;

b) $\sup_{|f(x)-f(y)|<1}\left|\frac{f'(x)}{f'(y)}\right|$ для достаточно больших x и y.

Как показывает следующее утверждение, иногда условие b) следует из условия a).

Лемма 5.1. *Если функция $f\in C^2(\mathbb{R})$ меняет выпуклость лишь конечное число раз, то условие* b) *следует из условия* a).

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что функция f выпукла вниз (т.е. что $f''\ge 0$). Пусть $x\in J_k$. Оценим величину $f'(x)$:

$$f'(y)\le f'(x)\le f'(z),$$

для любых $y\in J_{k-1}$, $z\in J_{k+1}$. Выберем точки y, z таким образом, что

$$f'(y)(d_k-d_{k-1})=f'(y)|J_{k-1}|=2\pi,$$
$$f'(z)(d_{k+2}-d_{k+1})=f'(z)|J_{k+1}|=2\pi.$$

Поскольку разбиение J_k регулярно, то $|J_k|\asymp|J_{k-1}|\asymp|J_{k+1}|$. Следовательно, если $x\in J_k$, то $f'(x)\asymp\frac{2\pi}{|J_k|}$. Значит, условие b) выполнено. □

Например, если Θ — произведение Бляшке с нулями iy_k, $y_k>0$, то функция $\arg\Theta$ меняет выпуклость один раз. Действительно,

$$(\arg\Theta)''(x)=-2x\sum_k\frac{y_k}{(x^2+y_k^2)^2}.$$

В теореме 2.4 требуется регулярность функции $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$. Как мы покажем ниже, для многих регулярных функций $\arg\Theta$ существует достаточно широкий класс функций $\widetilde{\Omega}$ таких, что функция $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ тоже регулярна.

Лемма 5.2. *Пусть регулярная функция f такова, что $f(0) = 0$ и*

$$\sup_{1/2\le|x/y|\le 2} \max\left(\frac{f(x)}{f(y)}; \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(y)}\right) < +\infty,$$

а гладкая функция g такова, что $g(0) = 0$ и $|g'| \le qf'$ для некоторого числа $q \in (0,1)$. Тогда функция $f + g$ тоже регулярна.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|g| \le q|f|$. Следовательно, функция $f + g$ возрастает, причем $f + g \asymp f$. Пусть последовательность d_k такова, что $f(d_k) = 2\pi k$, а последовательность d'_k такова, что $f(d'_k)+g(d'_k) = 2\pi k$. Далее,

$$2\pi k = f(d'_k) + g(d'_k) = Cf(d'_k),$$

где число C ограничено снизу и сверху константами, зависящими только от функции g. Из свойств функции f получаем, что $d'_k \asymp d_k$. Далее, для некоторых точек $x \in J_k = [d_k, d_{k+1}]$

$$f'(x)(d_{k+1} - d_k) = 2\pi,$$

с другой стороны, для некоторой точки $y \in J'_k = [d'_k, d'_{k+1}]$

$$(f'(y) + g'(y))(d'_{k+1} - d'_k) = 2\pi = Cf'(y)(d'_{k+1} - d'_k).$$

Следовательно, $|J_k| = d_{k+1} - d_k \asymp |J'_k| = d'_{k+1} - d'_k$ и

$$\operatorname{dist}(J_k, J_l) \asymp \operatorname{dist}(J'_k, J'_l).$$

Значит, разбиение J'_k тоже регулярно, а вместе с ним и функция $f+g$. $\square$

Пользуясь леммой 5.2, мы можем дать несколько примеров применения теоремы 2.4.

Следствие 5.3. *Пусть функции Θ и ω таковы, что $\arg\Theta+2\widetilde{\Omega} \asymp (1+|x|)^{\beta}$, $(\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega})' \asymp (1 + |x|)^{\beta-1}$ $(1 \le \beta < 2)$. Тогда $\Omega \in \mathrm{sADM}(\Theta)$.*

Доказательство. Построим разбиение $J_k = [d_k, d_{k+1}]$. Нетрудно видеть, что $|d_k| \asymp (1 + |k|)^{\frac{1}{\beta}}$, $|J_k| \asymp (1 + |k|)^{\frac{1}{\beta}-1}$. Тогда функция $\arg\Theta + 2\widetilde{\Omega}$ регулярна. Действительно, пусть $s = (1/\beta) - 1 \in (-1/2, 0)$. Мы знаем, что для

$k \neq 0$ верно $|J_k| \asymp |k|^s \leq 1$, $|d_k| \asymp |k|^{s+1}$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $0 \in J_0$. Пусть $k > 0$. Тогда

$$\sum_{|l-k|>1} \frac{|J_l|^2}{\operatorname{dist}^2(J_k, J_l)} = \sum_{l \leq 0} + \sum_{0<l<k/2} + \sum_{k/2 \leq l < k-1} + \sum_{l > k+1} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{5.1}$$

Во-первых, отметим, что $S_1 \leq \operatorname{const} \sum_{l \leq 0} (d_l)^{-2}$. Последняя сумма ограничена равномерно по k. Во-вторых, заметим, что если $l > k > 0$, то $\operatorname{dist}(J_l, J_k) \geq \operatorname{const} |J_l| \cdot |l - (k+1)|$. Следовательно,

$$S_4 \leq \operatorname{const} \sum_{l > k+1} \frac{1}{|l-(k+1)|^2}.$$

Подчеркнем, что для $0 \leq l < k-1$ мы получаем оценку

$$\operatorname{dist}(J_k, J_l) = \sum_{n=l+1}^{k-1} |J_n| \asymp \sum_{n=l+1}^{k-1} |n|^s \asymp |k|^{s+1} - |l|^{s+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \operatorname{const} \sum_{0<l<k/2} \left(\frac{|k|^s}{|k|^{s+1} - |l|^{s+1}} \right)^2 \\ &\leq \operatorname{const} \sum_{0<l<k/2} \frac{1}{|k|^{2(s+1)}} \leq \operatorname{const} |k|^{-2s-1} \leq \operatorname{const}, \\ S_3 &\leq \operatorname{const} \sum_{k/2 \leq l < k-1} \left(\frac{|k|^s}{|k|^{s+1} - |l|^{s+1}} \right)^2 \leq \operatorname{const} \sum_{l<k-1} \frac{1}{(k-l)^2}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Итак, мы оценили значения величин S_1, S_2, S_3 и S_4 в правой части (5.1). Для $k < 0$ доказательство аналогично. □

Предыдущее предположение дает строгую допустимость для некоторых конкретных мажорант. Примером может служить

Следствие 5.4. *Пусть B_α — произведение Бляшке с нулями $z_k = \operatorname{sgn}(k)|k|^\alpha + i$, $k \in \mathbb{Z}$, $1/2 < \alpha < 1$. Если функция $\omega = e^{-\Omega} \in L^2(\mathbb{R})$ такова, что*

a) $\Omega \in L^1(\mathbf{P})$;

b) $|\widetilde{\Omega}'(x)| < C|x|^{1/\alpha - 1}$ *для некоторого* $C < \frac{\pi}{\alpha}$,

тогда $\Omega \in \operatorname{sADM}(B_\alpha)$.

Доказательство следует непосредственно из следствия 5.3 и оценки $(\arg B_\alpha)'(x) = \frac{2\pi}{\alpha}|x|^{1/\alpha-1} + O(1)$ (см. [HM2, с. 1298]). □

Я благодарен В. П. Хавину за руководство работой и полезные советы при ее подготовке к печати и А. Д. Баранову — в результате нашего обсуждения первоначального варианта теоремы 2.4 удалось избавиться от лишних условий, налагаемых на функцию ω.

Список литературы

[BB] Baranov A. D., Borichev A. A., *Entire functions of exponential type with prescribed modulus on the real axis* (не опубл.).

[Bl1] Белов Ю. С., Хавин В. П., *К теореме И. И. Привалова о преобразовании Гильберта липшицевых функций*, Мат. Физ. Анал. Геом. **11** (2004), №4, 380–407.

[Bl2] Белов Ю. С., *Критерии допустимости мажорант для модельных подпространств с быстро растущим аргументом порождающей внутренней функции*, Зап. науч. семин. ПОМИ **345** (2007), 55–84.

[Bl3] Белов Ю. С., *Необходимые условия допустимости для некоторых модельных подпространств*, Алгебра и анализ (принято к печати).

[BH] Баранов А. Д., Хавин В. П., *Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций*, Функц. анал. и его прил. **40** (2006), №4, 3–21.

[BBH] Baranov A. D., Borichev A. A., Havin V. P., *Majorants of meromorphic functions with fixed poles*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 1595–1628.

[Cima] Cima J. A., Ross W. T., *The backward shift on the Hardy space*, Math. Surveys Monogr., vol. 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[D] Дьяконов К. М., *Модули и аргументы аналитических функций из подпространств в H^p, инвариантных для оператора обратного сдвига*, Сиб. мат. ж. **31** (1990), №6, 64–79.

[dB] de Branges L., *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1968.

[HM1] Havin V. P., Mashreghi J., *Admissible majorants for model subspaces of H^2*. I. *Slow winding of the generating inner function*, Canad. J. Math. **55** (2003), 1231–1263.

[HM2] Havin V. P., Mashreghi J., *Admissible majorants for model subspaces of H^2*. II. *Fast winding of the generating inner function*, Canad. J. Math. **55** (2003), 1264–1301.

[LS] Lyubarskii Yu. I., Seip K., *Weighted Paley–Wiener spaces*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 4, 979–1006.

[MNH] Машреги Дж., Назаров Ф. Л., Хавин В. П., *Теорема Берлинга–Мальявена о мультипликаторе: седьмое доказательство*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 3–68.

[N] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980; Пер. на англ. яз., *Treatise on the shift operator. Spectral function theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 273, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[NF] Sz.-Nagy B., Foiaş C., *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, Amer. Elsevier Publ. Co., Inc., New York; Akad. Kiadó, Budapest, 1970.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия

Поступило 20 декабря 2007 г.