

**Цикл работ К.А. Изъюрова
“Эволюции Шрамма-Левнера (SLE)
и корреляции в критической модели Изинга”.**

Цикл работ К.А. Изъюрова [1]–[5], представленный на премию Санкт-Петербургского Математического Общества “Молодому математику”, принадлежит к бурно развивавшейся последнее десятилетие теории конформной инвариантности в двухмерных моделях статистической физике – новой области математики, дополняющей популярную среди физиков конформную теорию поля. Работы К.А. Изъюрова используют два разных подхода к описанию конформно инвариантных пределов критических двумерных решеточных моделей, таких, например, как перколяция или модель Изинга. Первый, более традиционный, имеет дело с числовыми объектами: например, вероятностью пробоя в данном четырехстороннике для перколяции, или корреляционными функциями в модели Изинга, в то время как второй, предложенный немного более десяти лет назад О. Шраммом, посвящен геометрическому описанию предела дискретных интерфейсов, разделяющих различные кластеры или спины в дискретной модели. Такие случайные конформно инвариантные кривые получили название SLE_κ и активно изучались в последнее время в работах ряда известных математиков (G. Lawler, S. Rohde, O. Schramm, S. Sheffield, W. Werner и другие). Изначальный подход О. Шрамма существенно опирался на односвязность рассматриваемой области, и построение «правильного» обобщения в многосвязном случае не закончено до сих пор.

В совместной с К. Кютола работе [1] был предложен универсальный способ изучения кривых (вычисления сноса диффузии, являющейся функциональным параметром уравнения Левнера) типа SLE_4 в многосвязных областях, возникающих при рассмотрении “линий уровня” свободного гауссовского поля со смешанными краевыми условиями. Однако, задача построения “правильных” модификаций SLE_κ (которые являлись бы естественными кандидатами на роль пределов интерфейсов соответствующих решеточных моделей в многосвязных областях) для значений κ отличных от 2, 4, 8, оставалась нерешенной, поскольку в общей ситуации не известны мартингальные наблюдаемые, отвечающие таким кривым.

В совместной с Д.С. Челкаком работе [2] это препятствие было преодолено для случая $\kappa = 3$, отвечающего критической (спиновой) модели Изинга. Именно, было построено спинорное обобщение уже известной конструкции дискретно голоморфных наблюдаемых в критической модели Изинга, являющихся мартингалами для *интерфейсов*, соединяющих точки на разных компонентах границы, и проанализирована сходимость этих дискретных мартингалов к решениям аналогичной непрерывной краевой задачи с граничными условиями типа Римана. Не менее (а может быть и более) важно то, что предложенная конструкция дала ключ к строгому доказательству сходимости n -точечных спиновых корреляций в ограниченной области к конформно ковариантным пределам: для этого необходимо интерпретировать соответствующие точки как микроскопические компоненты границы и рассматривать голоморфные функции, имеющие там ветвления типа квадратного корня.

При помощи аналога ветвящихся наблюдаемых из [2], в совместной с К. Онглером и Д.С. Челкаком работе [3] было дано полное доказательство существования и конформной ковариантности пределов магнетизации и многоточечных спиновых корреляций к конформно-ковариантным пределам, а также новая интерпретация возникающего показателя ковариантности $\frac{1}{8}$ с точки зрения граничных задач для голоморфных спиноров с краевыми условиями типа Римана. Тем самым, было подтверждено одно из самых известных предсказаний о предельных корреляционных функциях критической модели Изинга.

К работам [1]–[3] примыкают две более ранние работы К.А.Изыурова [4] (в соавторстве с А.Ю. Алексеевым и А.Г. Быцко) и [5] (в соавторстве с Д.Б. Беляевым). Первая из них имеет “физический” характер и посвящена изучению мартингалов наблюдаемых для SLE-кривых, связанных с граничной WZW-моделью (моделью конформной теории поля, обладающей нетривиальной локальной калибровочной симметрией). Вторая посвящена доказательству некоторых формул факторизации для многоточечных наблюдаемых, возникающих в модели перколяции, и основана на изучении различных версий кривых SLE_6 , являющихся пределами перколяционных интерфейсов. Хотя эти работы формально и не имеют прямого отношения к циклу [1]–[3], их объединяет общая тематика изучения вариантов SLE-кривых в различных постановках, связанных с (предположительно) конформно-инвариантными решеточными моделями – бурно развивающаяся, красивая и технически непростая область исследований, в которой переплетаются классический комплексный анализ, теория вероятностей и современная математическая физика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Izyurov, K. Kytölä, Hadamard’s formula and couplings of SLEs with free field. *Probab. Theory Related Fields* 155(1–2), 35–69, 2013.
- [2] D. Chelkak and K. Izyurov, Holomorphic spinor observables in the critical Ising model, *Comm. Math. Phys.*, to appear. [arXiv:1105.5709v3](https://arxiv.org/abs/1105.5709v3)
- [3] D. Chelkak, C. Hongler, and K. Izyurov, Conformal invariance of spin correlations in the planar Ising model. [arXiv:1202.2838v2](https://arxiv.org/abs/1202.2838v2)
- [4] A. Alekseev, A. Bytsko, K. Izyurov, On SLE martingales in boundary WZW models. *Lett. Math. Phys.* 97(3):243–261, 2011.
- [5] D. Beliaev, K. Izyurov, A proof of factorization formula for critical percolation. *Comm. Math. Phys.* 310(3): 611–623, 2012.