Геометрия нодальных множеств собственных функций оператора Лапласа

В работах А.Логунова и Е.Малинниковой был разработан метод продолжения малости для решений эллиптических уравнений в частных производных второго порядка, и этот метод нашел применение для изучения нулевых множеств собственных функций оператора Лапласа на римановых многообразиях, для решения гипотез Надирашвили и Яу.

Гипотеза Надирашвили состоит в том, что нулевое множество непостоянной гармонической функции в $\mathbb{R}^3$ имеет бесконечную площадь. На вопрос Надирашвили удалось оветить положительно ([8]). Вопрос Надирашвили был мотивирован гипотезой Яу ([14]):

Пусть M есть компактное C^∞-гладкое риманово многообразие без границы, n - размерность M, Δ - оператор Лапласа Бельтрами на M. Рассмотрим последовательность собственных функций φ_{λ_k} оператора Δ. Функция φ_{λ_k} отвечает собственному числу λ_k. Гипотеза Яу состоит в том, что существуют положительные константы c, C такие, что выполнено

$$c\sqrt{\lambda}_k \leq H^{n-1}(\varphi_{\lambda_k}) \leq C\sqrt{\lambda}_k$$

для всех собственных функции φ_{λ_k}. Здесь H^{n-1} обозначает $(n-1)$ мерную меру Хаусдорфа.

Гипотеза Яу была доказана при условии, что метрика вещественно-аналитическая, в работах Доннелли, Фефферманa ([1, 2]). Случай C^∞ гладких метрик все еще не решен, а именно верхняя оценка в гипотезе Яу – открытый вопрос. Оценка снизу в гипотезе Яу следует из доказательства ([8]) гипотезы Надирашвили .

Оценка Хардта-Саймона

$$H^{n-1}(\varphi_\lambda) \leq C\lambda^{C\sqrt{\lambda}}$$

была улучшена ([7]) до полиномальной оценки

$$H^{n-1}(\varphi_\lambda) \leq C\lambda^{C_n}.$$

Здесь $C_n >> 1/2$ зависит только от размерности.

Список литературы

[1] H. Donnelly, C. Feffermann, Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds, Invent. Math., **93** (1988), 161–183.

[2] H. Donnelly, C. Feffermann, Nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on surfaces, J. Amer. Math. Soc., **3** (1990), 333–353.

[3] N. Garofalo, F.-H. Lin, Monotonicity properties of variational integrals, A_p-weights and unique continuation, Indiana Univ. Math. J., **35** (1986), 245–268.

[4] R. Hardt and L. Simon, Nodal sets for solutions of elliptic equations. J. Differential Geom. 30 (1989), no. 2, 505–522.

[5] Q. Han, F.-H. Lin, Nodal Sets of Solutions of Elliptic Differential Equations, book in preparation.

[6] Alexander Logunov, Eugenia Malinnikova, Nodal sets of Laplace eigenfunctions: estimates of the Hausdorff measure in dimension two and three, arXiv:1605.02595.

[7] Alexander Logunov, Nodal sets of Laplace eigenfunctions: polynomial upper estimates of the Hausdorff measure, arXiv:1605.02587.

[8] Alexander Logunov, Nodal sets of Laplace eigenfunctions: proof of Nadirashvili's conjecture and of the lower bound in Yau's conjecture, arXiv:1605.02589

[9] Alexander Logunov, Eugenia Malinnikova, Quantitaive propagation of smallness for solutions of second order elliptic equations, preprint, work in progress.

[10] F.-H. Lin, Nodal sets of solutions of elliptic and parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991), 287–308.

[11] D. Mangoubi, On the inner radius of a nodal domain, Canad. Math. Bull. 51 (2008), no. 2, 249–260.

[12] N. Nadirashvilli, Geometry of nodal sets and multiplicity of eigenvalues, Current Developments in Mathematics, 1997, 231–235.

[13] F. Nazarov, L. Polterovich, M. Sodin, Sign and area in nodal geometry of Laplace eigenfunctions, Amer. J. Math., **127** (2005), 879–910.

[14] S.-T. Yau, Problem section, Seminar on Differential Geometry, Annals of Mathematical Studies 102, Princeton, 1982, 669–706.

[15] T. Carleman, Extension d'un théorème de Liouville, Acta Math. 48 (1926), 363–366.

[16] A. Logunov, On the higher-dimensional harmonic analog of the Levinson loglog theorem, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014), 889–893.