М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2019, том 64, выпуск 2, 283–307

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5243

Том 64 **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2019** **Выпуск 2**

 ПЛАТОНОВА М. В. [*], ***РЯДОВКИН К. С.*** [**]

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА $\mathbf{Z}^d$ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ[1)]

Рассматривается модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем на решетке $\mathbf{Z}^d$ с источниками ветвления, расположенными периодически на $\mathbf{Z}^d$. Исследуются спектральные свойства оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц в произвольной точке решетки. Для среднего числа частиц в фиксированной точке при $t \to \infty$ получен старший член асимптотики, а при выполнении дополнительного моментного условия получено асимптотическое разложение.

Ключевые слова и фразы: ветвящееся случайное блуждание, периодическое возмущение, эволюционное уравнение.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5243

1. Введение.

1.1. Случайное блуждание с ветвлением. Рассмотрим модель ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем на решетке $\mathbf{Z}^d$. Предположим, что частицы эволюционируют независимо друг от друга, а источники ветвления расположены периодически. Опишем нашу модель более подробно.

Пусть $g_1, \dots, g_d$ — набор линейно независимых (не обязательно ортогональных) векторов с целочисленными координатами. Будем называть

[*] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия; Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: mariyaplat@rambler.ru

[**] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: kryadovkin@gmail.com

[1)] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01136).

решеткой множество

$$\Gamma = \left\{ g \in \mathbf{Z}^d \colon g = \sum_{j=1}^{d} n_j g_j,\ n_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \dots, d \right\},$$

а множество $\{g_j\}_{j=1}^d$ будем называть базисом решетки Γ. Отметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Обозначим через $\|g\|$ евклидову норму вектора в $\mathbf{R}^d$. Предположим, что случайное блуждание частиц определяется матрицей переходных интенсивностей $A_0 = (a(v,u))_{v,u \in \mathbf{Z}^d}$, для элементов которой выполнены условия:

(i) $a(v,u) \geqslant 0$, $v \neq u$;

(ii) $a(v,v) < 0$;

(iii) $\sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a(v,u) = 0$;

(iv) $a(v,u) = a(u,v) = a(v+g, u+g) \ \ \forall\, g \in \Gamma$;

(v) $\sum_{g \in \Gamma} \|g\|^2 |a(v, u+g)| < \infty$, $u, v \in \mathbf{Z}^d$;

(vi) для любых $v, u \in \mathbf{Z}^d$ существует такой путь $v = u_0, u_1, \dots, u_m = u$, что $a(u_{i-1}, u_i) > 0$, $i = 1, \dots, m$.

Условие (iv) означает, что коэффициенты матрицы A_0 являются инвариантными относительно сдвига на любой вектор из Γ. Свойство (v) означает конечность дисперсии скачков случайного блуждания. Условие (vi) означает, что любая точка $u \in \mathbf{Z}^d$ достижима, т.е. соответствующее блуждание неприводимо (см. [4, § 6, гл. 3]). Существование данного марковского процесса обеспечивает теорема 2 [4, § 3, гл. 7].

Введем на $\mathbf{Z}^d$ отношение эквивалентности, а именно, точки $u, v \in \mathbf{Z}^d$ назовем эквивалентными, если $u - v \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство обозначим $\Omega = \mathbf{Z}^d/\Gamma$. Множество Ω будем называть фундаментальным множеством вершин. Его всегда можно отождествить с некоторым множеством $\{v_1, \dots, v_p\}$ попарно неэквивалентных элементов $\mathbf{Z}^d$. Конкретный выбор этого множества нам удобно сделать позднее (см. лемму 5). До леммы 5 рассуждения не зависят от этого выбора. Для фиксированного выбора $\Omega = \{v_1, \dots, v_p\}$ любая вершина $u \in \mathbf{Z}^d$ единственным образом представляется в виде

$$u = \omega_u + \gamma_u, \tag{1}$$

где $\omega_u \in \Omega$ и $\gamma_u \in \Gamma$. Определим еще проекторы $\pi_\Omega \colon \mathbf{Z}^d \to \Omega$ и $\pi_\Gamma \colon \mathbf{Z}^d \to \Gamma$ формулами

$$\pi_\Omega u = w_u, \qquad \pi_\Gamma u = \gamma_u. \tag{2}$$

В качестве примера можно рассмотреть решетку Γ на $\mathbf{Z}^2$, порожденную векторами $g_1 = (2,0)$ и $g_2 = (0,2)$. В этом случае фундаментальное множество вершин состоит из четырех точек, которые мы можем выбрать следующим образом: $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (1,0)$, $v_3 = (0,1)$, $v_4 = (1,1)$. В общем случае число вершин p фундаментального множества Ω можно определить следующим образом. Введем множество

$$\mathscr{C} = \left\{ x \in \mathbf{R}^d \colon x = \sum_{j=1}^{d} x_j g_j,\, 0 \leqslant x_j < 1 \right\},$$

тогда p — это число точек в множестве $\mathbf{Z}^d \cap \mathscr{C}$.

Источник ветвления в вершине $v \in \mathbf{Z}^d$ описывается последовательностью коэффициентов $b_k(v)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющих условиям

$$b_1(v) \leqslant 0, \qquad b_k(v) \geqslant 0 \quad \text{при } k \neq 1, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(v) = 0.$$

Данная последовательность коэффициентов однозначно определяется своей производящей функцией

$$B(v,s) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(v) s^k, \tag{3}$$

т.е. размножение и гибель частиц в источнике ветвления в вершине $v \in \mathbf{Z}^d$ задается процессом Бьеноме–Гальтона–Ватсона, где $b_k(v)$ — интенсивность деления частицы на k потомков.

Далее мы предполагаем, что для любой $v \in \mathbf{Z}^d$ выполнено

$$\beta(v) = B'(v,1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k(v) < \infty,$$

т.е. число потомков в каждом источнике имеет конечный первый момент. Кроме того, мы предполагаем, что функции $b_k(v)$ и соответственно функция $B(v,s)$ являются Γ-периодическими по аргументу v, т.е. $B(v+g,\cdot\,) = B(v,\cdot\,)$ для любого вектора $g \in \Gamma$. Соответственно на всем $\mathbf{Z}^d$ у нас имеется p различных типов источников. Если мы отождествляем Ω с множеством $\{v_1,\dots,v_p\}$, то соответствующие коэффициенты $b_k(v_j)$ будем обозначать b_{jk}, а интенсивность источника $\beta(v_j)$ будем обозначать β_j. Отметим, что случай отсутствия источника в вершине v_j соответствует $b_{jk} = 0$ для любого k, и, значит, $B(v_j,s) \equiv 0$.

Таким образом, каждая частица, находящаяся в момент времени t в некоторой точке $v = v_j + \gamma_v$, $\gamma_v \in \Gamma$, независимо от остальных частиц в системе может за время $[t, t+h)$ перейти с вероятностью $p(h,v,u) = a(v,u)h + o(h)$ в точку $u \neq v$, или произвести $k \neq 1$ потомков, находящихся в точке v, с вероятностью $p_k(h,v) = b_{jk}h + o(h)$ (при $k = 0$ считаем, что число потомков равно 0, т.е. частица погибает), или сохраниться (т.е. никаких изменений не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{u \neq v} a(v,u)h - \sum_{k \neq 1} b_{jk} h + o(h).$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ в системе находится одна частица в точке $v \in \mathbf{Z}^d$. Через $M(v,u,t)$ обозначим среднее число частиц, находящихся в точке $u \in \mathbf{Z}^d$ в момент времени t. Мы исследуем поведение функции $M(v,u,t)$ при фиксированных v, u и $t \to \infty$. Будет показано, что эта задача сводится к изучению спектра оператора

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + Q,$$

где $\mathscr{A}_0$ — это генератор случайного блуждания (оператор, определяемый матрицей A_0)

$$\mathscr{A}_0 f(v) = \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a(v,u) f(u),$$

а оператор Q — оператор поточечного умножения на функцию, периодическую относительно решетки Γ,

$$(Qf)(v) = Q(v)f(v), \quad Q(v) = Q(v+g) \quad \forall\, g \in \Gamma,$$
$$Q(v_j) = \beta_j, \qquad v_j \in \Omega.$$

Оператор Q описывает механизм ветвления в источниках.

В работах [1], [9]–[11] рассматривались модели с конечным числом источников ветвления одного типа, при этом интенсивность ветвления характеризовалась положительным числом β. В этом случае оператор Q является конечномерным. Спектр оператора $\mathscr{A}_0$ сосредоточен на отрицательной полуоси. Конечномерное возмущение Q может привести к появлению конечного числа положительных собственных значений, при этом их число с учетом кратностей не может быть больше числа источников. Для такой модели ветвящегося случайного блуждания были найдены условия экспоненциального роста среднего числа частиц в произвольной точке решетки. А именно, было показано, что существует критическое значение β_c, такое, что при $\beta > \beta_c$ в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, появляется положительное собственное значение. Также было показано, что при $d = 1$ или $d = 2$ критическое значение β_c равно нулю, а при $d \geqslant 3$ критическое значение β_c строго больше нуля.

Далее, в работе авторов [6] была рассмотрена модель ветвящегося однородного случайного блуждания с периодическим расположением источников одного типа. Для однородного блуждания коэффициенты матрицы переходных интенсивностей удовлетворяют условию

$a(v,u) = a(0, v-u)$. Это условие является частным случаем условия (iv). Заметим, что в этом случае в спектре оператора $\mathscr{A}$ нет собственных значений конечной кратности. Для такой модели в [6] было получено асимптотическое поведение среднего числа частиц.

1.2. Основные результаты. Нетрудно показать, что определенный выше оператор $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + Q$ является ограниченным, самосопряженным, периодическим оператором из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ в $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$. Для изучения его спектра можно воспользоваться разложением в прямой интеграл операторов (см. [20, гл. XIII.16] и [12, гл. 4]). А именно, в теореме 2 будет показано, что оператор $\mathscr{A}$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов из $\mathbf{C}^p$ в $\mathbf{C}^p$.

Для получения асимптотического поведения средних численностей частиц в произвольной точке решетки нам понадобится исследовать правый край спектра оператора $\mathscr{A}$. В теореме 3 мы покажем, что правый край спектра оператора $\mathscr{A}$ совпадает со старшим собственным значением матрицы

$$A(0) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}(0) + \beta_1 & \widetilde{a}_{12}(0) & \cdots & \widetilde{a}_{1p}(0) \\ \widetilde{a}_{21}(0) & \widetilde{a}_{22}(0) + \beta_2 & \cdots & \widetilde{a}_{2p}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{p1}(0) & \widetilde{a}_{p2}(0) & \cdots & \widetilde{a}_{pp}(0) + \beta_p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где коэффициенты матрицы $\widetilde{a}_{jk}(0)$ выражаются через коэффициенты матрицы переходных интенсивностей

$$\widetilde{a}_{jk}(0) = \sum_{g\in\Gamma} a(v_j + g, v_k).$$

Далее, в предложении 1 мы приведем два достаточных условия существования положительного собственного значения матрицы $A(0)$, а в теореме 4 получим асимптотическое поведение старшего собственного значения матрицы $A(0)$ при убывании константы связи при потенциале к нулю, а также при неограниченном возрастании константы связи при потенциале.

Напомним, что через $M(v,u,t)$ обозначено среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в момент t в точке u, если в нулевой момент времени в точке v была одна частица. В разделе 4 (теорема 5) будет получен старший член асимптотики для функции $M(v,u,t)$ при $t \to \infty$

$$M(v,u,t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \frac{(2\pi)^{d/2} \psi_1(\omega_v, 0)\psi_1(\omega_u, 0)}{|\widetilde{\mathscr{C}}| \sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} (1 + O(t^{-1})), \tag{5}$$

где $\lambda_1(0)$ — старшее собственное значение матрицы $A(0)$, а $\psi_1(\,\cdot\,,0)$ — отвечающая ему собственная функция. При выполнении дополнительного моментного условия для функции $M(v,u,t)$ будет получено асимптотическое разложение при $t\to\infty$ (теорема 6)

$$M(v,u,t) \sim e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v,u) t^{-k}, \tag{6}$$

где коэффициенты $c_k(v,u)$ могут быть вычислены явно.

Для классического процесса Гальтона–Ватсона с непрерывным временем используется следующая классификация: процесс называется надкритическим, если среднее число потомков одной частицы больше единицы, критическим, если среднее число потомков одной частицы равно единицы, и докритическим, если среднее число потомков одной частицы меньше единицы (см. [7]).

В нашей модели ветвящегося случайного блуждания можно провести аналогичную классификацию, но параметр будет более сложным. А именно, ответ дается в терминах старшего собственного значения матрицы $A(0)$, определенной формулой (4). Из формулы (5) видно, что в нашем случае процесс является надкритическим, если собственное значение $\lambda_1(0)$ больше нуля, критическим, если собственное значение $\lambda_1(0)$ равно нулю, и докритическим, если собственное значение $\lambda_1(0)$ меньше нуля.

Структура работы следующая. В разделе 2 содержится вывод основного уравнения (9), описывающего эволюцию среднего числа частиц, находящихся в фиксированной точке $u\in\mathbf{Z}^d$. Третий раздел работы посвящен исследованию спектра оператора $\mathscr{A}$. В разделе 4 с использованием результатов спектрального анализа будут получены старший член асимптотики (5) и при дополнительном предположении асимптотическое разложение (6).

2. Вывод основного уравнения. Обозначим через $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом комплексных функций $f\colon \mathbf{Z}^d\to\mathbf{C}$ с нормой

$$\|f\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)} = \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |f(v)|^2 < \infty.$$

Через $\xi_v(t)$, $t>0$, обозначим случайное блуждание с непрерывным временем и матрицей переходных интенсивностей A_0, выходящее в момент времени $t=0$ из точки $v\in\mathbf{Z}^d$. Для $f\in\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ положим

$$P_0^t f(v) = \mathbf{E} f(\xi_v(t)).$$

Так как $\xi_v(t)$ — марковский процесс, то P_0^t является полугруппой. Вычислим генератор полугруппы. Имеем при $t\to 0$

$$P_0^t f(v) = f(v)(1+a(v,v)t) + t\sum_{u\neq v} a(v,u) f(u) + o(t),$$

следовательно, генератор $\mathscr{A}_0\colon \ell^2(\mathbf{Z}^d)\to\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ полугруппы P_0^t имеет вид

$$\mathscr{A}_0 f(v)=\sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a(v,u)f(u). \tag{7}$$

Далее, рассмотрим соответствующее ветвящееся случайное блуждание с источниками ветвления, расположенными периодически на $\mathbf{Z}^d$. А именно, будем считать, что источник типа j располагается в точках $v_j+\Gamma$, т.е. в точках решетки $\mathbf{Z}^d$, которые получаются сдвигом вершины v_j на вектор решетки $g\in\Gamma$. Ветвление в точке v_j определяется производящей функцией $B(v_j,s)$, определенной (3).

Пусть $N_v(t)$ — общее число частиц в момент времени t, при условии, что в начальный момент времени $t=0$ была одна частица в точке v. Через $\xi_v^{(k)}(t)$ обозначим k-й процесс. Положим

$$P^t f(v)=\mathbf{E}\biggl(\sum_{k=1}^{N_v(t)} f(\xi_v^{(k)}(t))\biggr).$$

Вычислим генератор полугруппы P^t. Если $v=v_j+g$, где $g\in\Gamma$, то при $t\to 0$ имеем

$$P^t f(v)=f(v)(1+a(v,v)t+b_{j1}t)+t\sum_{u\neq v}a(v,u)f(u)+tf(v)\sum_{k\neq 1}kb_{jk}+o(t),$$

следовательно, генератор $\mathscr{A}\colon \ell^2(\mathbf{Z}^d)\to\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ полугруппы P^t имеет вид

$$\mathscr{A} f(v)=\sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a(v,u)f(u)+(Qf)(v),$$

где $Q\colon \ell^2(\mathbf{Z}^d)\to\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ — оператор поточечного умножения на функцию, периодическую относительно решетки Γ,

$$\begin{aligned}(Qf)(v)&=Q(v)f(v), \quad Q(v)=Q(v+g)\quad \forall\, g\in\Gamma,\\ Q(v_j)&=\beta_j, \qquad v_j\in\Omega.\end{aligned} \tag{8}$$

Как и выше, $M(v,u,t)$ обозначает среднее число частиц в момент времени t в точке u, если в начальный момент времени $t=0$ у нас была одна частица, которая находилась в точке v. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция $M(v,u,t)$, как функция аргументов v и t, является единственным решением задачи Коши*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial t}(v,u,t)=(\mathscr{A}_0 M)(v,u,t)+Q(v)M(v,u,t),\\ M(v,u,0)=\delta_u(v),\end{cases} \tag{9}$$

где $\delta_u(\,\cdot\,)$ — индикаторная функция одноточечного множества $\{u\}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что

$$M(v,u,t) = (P^t\delta_u)(v),$$

а оператор $\mathscr{A}$ является генератором полугруппы P^t.

3. Спектральный анализ оператора $\mathscr{A}$. Обозначим $G = (\mathbf{Z}^d, \mathscr{E})$ граф с множеством вершин $\mathbf{Z}^d$ и множеством ребер

$$\mathscr{E} = \{(v,u)\colon a(v,u) > 0,\ v,u \in \mathbf{Z}^d\}. \tag{10}$$

Заметим, что условие (vi) равносильно условию связности графа G.

Оператор $\mathscr{A}_0$ является линейным самосопряженным ограниченным оператором из пространства $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ в пространство $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$. Отметим, что если существует только конечное число коэффициентов $a(v,\cdot\,)$, отличных от нуля при каждом $v \in \mathbf{Z}^d$, то оператор $\mathscr{A}_0$ является дискретным оператором Лапласа. Для такого оператора известно, что он неположителен (см., например, [19]). Ниже приведено аналогичное доказательство для случая бесконечного числа ненулевых коэффициентов $a(v,\cdot\,)$.

Лемма 1. *Если коэффициенты оператора* $\mathscr{A}_0$, *определенного формулой* (7), *удовлетворяют условиям* (i)–(iii), *то* $\mathscr{A}_0$ — *неположительный.*

Доказательство. Перенумеруем произвольным образом все вершины графа G, определенного (10). Введем пространство функций на ребрах $\ell^2(\mathscr{E}, A_0)$ со следующей нормой:

$$\|h\|^2_{\mathscr{E}} = \sum_{(v_j,v_k)\in\mathscr{E}} |h(v_j,v_k)|^2 a(v_j,v_k).$$

Определим оператор $d\colon \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathscr{E}, A_0)$, полагая

$$(df)(v_j,v_k) = \begin{cases} f(v_j) - f(v_k), & j \geqslant k,\\ f(v_k) - f(v_j), & j \leqslant k. \end{cases}$$

Сопряженным к нему является оператор $d^*\colon \ell^2(\mathscr{E}, A_0) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$, где

$$(d^*h)(v_j) = \sum_{k<j} h(v_j,v_k)a(v_j,v_k) - \sum_{k>j} h(v_j,v_k)a(v_j,v_k).$$

Тогда выполнено равенство $\mathscr{A}_0 = -d^*d$. Следовательно оператор $\mathscr{A}_0$ неположителен. Лемма 1 доказана.

Для исследования спектра оператора $\mathscr{A}$, определенного формулой (8), мы разложим его в прямой интеграл операторов в слоях. Напомним, что через Ω обозначено фундаментальное множество вершин $\Omega = \mathbf{Z}^d/\Gamma$, которое мы будем отождествлять с некоторым множеством $\{v_1, \ldots, v_p\}$. Обозначим через $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbf{R}^d$. Будем говорить, что базис $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ двойственен к $\{g_j\}_{j=1}^d$, если $\langle \widetilde{g}_i, g_j\rangle = 2\pi\delta_{ij}$. Определим множество $\widetilde{\mathscr{C}}$ как

$$\widetilde{\mathscr{C}} = \left\{\theta \in \mathbf{R}^d \colon \theta = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \widetilde{g}_j,\ 0 \leqslant \theta_j < 1,\ j = 1, \dots, d\right\}. \tag{11}$$

Далее нам понадобится понятие прямого интеграла гильбертовых пространств. Прямой интеграл $\mathscr{H}$ гильбертовых пространств $\ell^2(\Omega)$ — это пространство классов эквивалентности измеримых и квадратично интегрируемых векторных полей, наделенное скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathscr{H}} = \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \langle u(\theta), v(\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta.$$

Если $\mathscr{H}$ — прямой интеграл пространств $\ell^2(\Omega)$, то пишут

$$\mathscr{H} = \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \oplus \ell^2(\Omega)\, d\theta.$$

Далее, говорят, что оператор A на $\mathscr{H}$ разложен в прямой интеграл операторов, если существует функция $A(\theta)$, $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$, принимающая значения в пространстве линейных операторов из $\ell^2(\Omega)$ в $\ell^2(\Omega)$, такая, что для всех $\psi \in \mathscr{H}$ выполнено

$$(A\psi)(\theta) = A(\theta)\psi(\theta), \qquad \theta \in \widetilde{\mathscr{C}}.$$

В этом случае пишут

$$A = \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \oplus A(\theta)\, d\theta,$$

при этом $A(\theta)$ называют операторами в слое, а параметр θ называют квазиимпульсом. Более подробное изложение можно найти в гл. XIII.16 книги [20].

Различные применения данной техники можно найти как для дискретных, так и для непрерывных операторов на периодических структурах. Для дискретного оператора Лапласа разложение в прямой интеграл с явным видом оператора в слое было получено в [17], [18]. Без явного вида оператора в слое это разложение получено в [14], [15]. Аналогичная теория для периодических дифференциальных операторов называется теорией Флоке–Блоха. В этом случае преобразование, переводящее исходное пространство в прямой интеграл слоев, называют преобразованием Гельфанда. Для дифференциальных операторов такое разложение широко встречается в литературе (см., например, [3], [5] и упомянутые там работы).

Обычно в литературе разложение в прямой интеграл строится для операторов $\mathscr{A}$, у которых лишь конечное число коэффициентов $a(v,\cdot)$, $v \in \mathbf{Z}^d$, не обращается в нуль. Поэтому мы приведем разложение оператора $\mathscr{A}$ в прямой интеграл с доказательством.

Теорема 2. *Оператор* $\mathscr{A}\colon \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ *унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов, т.е. справедливо представление*

$$U\mathscr{A}U^{-1} = \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \oplus A(\theta)\, d\theta, \tag{12}$$

где $U\colon \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \mathscr{H}$ *— унитарный оператор. Оператор* $A(\theta)\colon \ell^2(\Omega) \to \ell^2(\Omega)$ *имеет вид*

$$(A(\theta)f)(v) = \sum_{u\in\Omega} \widetilde{a}(v,u,\theta) f(u) + \widetilde{Q}(v) f(v), \qquad v \in \Omega, \quad \theta \in \widetilde{\mathscr{C}},$$

где коэффициенты $\widetilde{a}(v,u,\theta)$ *и потенциал* $\widetilde{Q}$ *определяются равенствами*

$$\widetilde{a}(v,u,\theta) = \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} a(v+g,u), \tag{13}$$

$$(\widetilde{Q}f)(v) = Q(v)f(v), \qquad v \in \Omega.$$

Доказательство. Пусть $\ell_0^2(\mathbf{Z}^d)$ — множество функций из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$, имеющих конечный носитель. Рассмотрим оператор $U\colon \ell_0^2(\mathbf{Z}^d) \to \mathscr{H}$, определенный равенством

$$(Uf)(v,\theta) = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(v+g), \qquad v \in \Omega, \tag{14}$$

где, как и раньше, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Для нормы функции Uf имеем

$$\begin{aligned}
\|Uf\|^2_{\mathscr{H}} &= \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \|(Uf)(\,\cdot\,,\theta)\|^2_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta \\
&= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \biggl(\sum_{v\in\Omega} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(v+g) \sum_{g'\in\Gamma} e^{i\langle g',\theta\rangle} \overline{f}(v+g') \biggr)\, d\theta \\
&= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1} \sum_{v\in\Omega} \sum_{g\in\Gamma} \sum_{g'\in\Gamma} \biggl(f(v+g)\overline{f}(v+g') \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} e^{-i\langle g-g',\theta\rangle}\, d\theta \biggr) \\
&= \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |f(v)|^2 = \|f\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, оператор U сохраняет норму функции из множества $\ell_0^2(\mathbf{Z}^d)$, плотного в $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$. Тогда он может быть по непрерывности продолжен до изометрического оператора из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ в $\mathscr{H}$. Покажем сюръективность отображения U. Для этого рассмотрим сопряженный оператор U^*. Пусть $h = \{h_v\}_{v\in\Omega} \in \mathscr{H}$, где $h_v\colon \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathbf{C}$. Определим

$$(U^*h)(v+g) = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} e^{i\langle g,\theta\rangle} h_v(\theta)\, d\theta, \qquad v\in\Omega, \quad g\in\Gamma.$$

Явное вычисление показывает, что U^* является сопряженным оператором к оператору U. Более того, из формулы

$$\begin{aligned}\|U^*h\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z^d})} &= \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |(U^*h)(v)|^2 = \sum_{v\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma} |(U^*h)(v+g)|^2 \\ &= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1} \sum_{v\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma} \left| \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} e^{i\langle g,\theta\rangle} h_v(\theta)\, d\theta \right|^2 \\ &= \sum_{v\in\Omega} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} |h_v(\theta)|^2\, d\theta = \|h\|^2_{\mathscr{H}}\end{aligned}$$

следует, что оператор U^* является изометрическим. Здесь мы использовали равенство Парсеваля для функции $h_v(\theta)$. Тогда оператор U — унитарный. Для оператора $\mathscr{A}_0$ и функции $f \in \ell^2_0(\mathbf{Z}^d)$ имеем

$$\begin{aligned}(U\mathscr{A}_0 f)(v,\theta) &= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} (\mathscr{A}_0 f)(v+g) \\ &= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} \sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a(v+g,u) f(u) \\ &= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} \sum_{u\in\Omega}\sum_{g'\in\Gamma} a(v+g,u+g') f(u+g') \\ &= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{u\in\Omega}\sum_{g'\in\Gamma}\sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g',\theta\rangle} e^{-i\langle g-g',\theta\rangle} a(v+g-g',u) f(u+g') \\ &= |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{u\in\Omega}\sum_{g'\in\Gamma} e^{-i\langle g',\theta\rangle} f(u+g') \sum_{g''\in\Gamma} e^{-i\langle g'',\theta\rangle} a(v+g'',u) \\ &= \sum_{u\in\Omega} (Uf)(u,\theta)\widetilde{a}(v,u,\theta) = A_0(\theta)(Uf)(v,\theta), \end{aligned} \tag{15}$$

где $v\in\Omega$, $\theta\in\widetilde{\mathscr{C}}$. Через $A_0(\theta)$ мы обозначили оператор $\ell^2(\Omega)\to\ell^2(\Omega)$ вида

$$(A_0(\theta)f)(v) = \sum_{u\in\Omega} \widetilde{a}(v,u,\theta) f(u), \tag{16}$$

где коэффициенты $\widetilde{a}(v,u,\theta)$ определены равенством (13). Для потенциала Q, определенного формулой (8), в силу периодичности имеем

$$(UQf)(v,\theta) = Q(v)(Uf)(v,\theta) = \widetilde{Q}(Uf)(v,\theta). \tag{17}$$

Из (15) и (17) следует (12). Теорема 2 доказана.

Оператор $A(\theta)$ при каждом $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$ является конечномерным самосопряженным оператором. Это значит, что его спектр состоит из конечного набора вещественных собственных значений

$$\lambda_1(\theta) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p(\theta),$$

где p — число точек фундаментального множества Ω. Коэффициенты оператора $A(\theta)$ являются непрерывными функциями $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$. Тогда собственные значения $\lambda_j(\theta)$ — непрерывные функции $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$ при всех $j = 1, \ldots, p$. Отсюда и из теоремы XIII.85 в [20] следует, что спектр оператора $\mathscr{A}$ состоит из p спектральных зон (возможно перекрывающихся)

$$\sigma(\mathscr{A}) = \bigcup_{j=1}^{p} \lambda_j(\widetilde{\mathscr{C}}),$$

где $\lambda_j(\widetilde{\mathscr{C}})$ обозначает область значений функции $\lambda_j(\theta)$, $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$. Оператор $A_0(\theta)$, определенный (16), как и оператор $\mathscr{A}_0$, — неположительный. При каждом $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$ возмущение оператора $A_0(\theta)$ потенциалом $\widetilde{Q}$ является конечномерным.

В случае, когда зависимость коэффициентов $\widetilde{a}(v, u, \theta)$ от θ аналитическая, про спектр $\sigma(\mathscr{A})$ удается сказать больше. Например, из теоремы 1 в [13] следует, что он состоит из абсолютно непрерывных зон и конечного числа собственных значений бесконечной кратности. Коэффициенты $\widetilde{a}(v, u, \theta)$ будут бесконечно гладкими, если условие (v) заменить на условие

$$\sum_{g \in \Gamma} \|g\|^N |a(v, u+g)| < \infty, \qquad u, v \in \mathbf{Z}^d, \tag{18}$$

для любого натурального N. Для того, чтобы коэффициенты $\widetilde{a}(v, u, \theta)$ были аналитическими, достаточно считать, что при каждом $v \in \mathbf{Z}^d$ лишь конечное число коэффициентов $a(v, u)$ отлично от нуля в (18).

Чтобы исследовать асимптотику числа частиц при больших временах, мы должны понять, как ведет себя правый край спектра оператора $\mathscr{A}$. Ниже мы покажем, что максимум спектра оператора $\mathscr{A}$ совпадает со старшим собственным значением $\lambda_1(0)$ оператора в слое $A(0)$, т.е.

$$\max \sigma(\mathscr{A}) = \lambda_1(0),$$

а соответствующая спектральная зона не вырождается. В случае, когда только конечное число коэффициентов $a(v, \cdot)$, $v \in \mathbf{Z}^d$, не обращается в нуль, аналогичные утверждения доказаны в работе [21].

3.1. Анализ спектра оператора $A(\theta)$. Напомним, что $v_1, \ldots, v_p$ обозначают точки множества Ω. Для краткости обозначим через $\widetilde{a}_{jk}(\theta)$ коэффициенты $\widetilde{a}(v_j, v_k, \theta)$. Пусть $\widetilde{\delta}_{v_1}, \ldots, \widetilde{\delta}_{v_p}$ — стандартный базис в пространстве $\ell^2(\Omega)$:

$$\widetilde{\delta}_{v_j}(v) = \begin{cases} 1, & v = v_j, \\ 0, & v \neq v_j. \end{cases} \tag{19}$$

Тогда изображающая матрица оператора $A(\theta)$ в этом базисе имеет вид

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}(\theta) + \beta_1 & \widetilde{a}_{12}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{1p}(\theta) \\ \widetilde{a}_{21}(\theta) & \widetilde{a}_{22}(\theta) + \beta_2 & \cdots & \widetilde{a}_{2p}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{p1}(\theta) & \widetilde{a}_{p2}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{pp}(\theta) + \beta_p \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(0)$ является наиболее простой для исследования, так как в этом случае коэффициенты $\widetilde{a}_{jk}(0)$ легко пересчитываются через коэффициенты $a(v, u)$. А именно,

$$\widetilde{a}_{jk}(0) = \sum_{g \in \Gamma} a(v_j + g, v_k).$$

Теорема 3. *Для правого края оператора $\mathscr{A}$ выполнены следующие утверждения*:

a) *правый край спектра оператора $\mathscr{A}$ совпадает с $\lambda_1(0)$, т.е.*

$$\max \sigma(\mathscr{A}) = \lambda_1(0);$$

b) *расстояние от правого края спектра оператора $\mathscr{A}$ до правого края второй зоны строго положительно, т.е.*

$$\lambda_1(0) - \sup_{\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}} \lambda_2(\theta) > 0; \tag{20}$$

c) *гессиан функции $\lambda_1(\theta)$ не обращается в нуль при $\theta = 0$, т.е.*

$$\operatorname{Hess} \lambda_1(0) \neq 0;$$

d) *число $\lambda_1(0)$ не является собственным значением оператора $\mathscr{A}$, т.е. правый край спектра не вырожден.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Для любого вектора $h \in \Gamma$ существует представление в виде*

$$h = \sum_{s=1}^{n_h} h_s, \qquad h_s \in \Gamma, \tag{21}$$

где для каждого s выполнено $a(v_{j_s}, v_{k_s} + h_s) > 0$ при некоторых $v_{j_s}, v_{k_s} \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $h \in \Gamma$. Из (vi) следует, что вершины 0 и h соединены путем. Пусть $0 = u_0, u_1, \dots, u_{n_h} = h$ — вершины этого пути. Тогда

$$h = \sum_{s=1}^{n_h} (u_s - u_{s-1}).$$

Положим $\omega_s = \pi_\Omega u_s$ и $\gamma_s = \pi_\Gamma u_s$, $s = 1, \dots, n_h$, где проекторы π_Ω и π_Γ определяются формулами (2). Тогда

$$h = \pi_\Gamma h = \sum_{s=1}^{n_h} (\gamma_s - \gamma_{s-1}).$$

По условию $a(u_{s-1}, u_s) > 0$, но

$$a(u_{s-1}, u_s) = a(\gamma_{s-1} + \omega_{s-1}, \gamma_s + \omega_s) = a(\omega_{s-1}, \omega_s + h_s),$$

где $h_s = \gamma_s - \gamma_{s-1}$. Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *Существует набор d линейно независимых векторов $\{g'_m\}_{m=1}^d$ из Γ, таких, что $a(v_{j_m}, v_{k_m} + g'_m) > 0$ при всех $m = 1, \dots, d$ для некоторых $v_{j_m}, v_{k_m} \in \Omega$.*

Доказательство. Пусть $\{g_m\}_{m=1}^d$ — некоторый базис, порождающий решетку Γ. По лемме 2 для каждого вектора g_m существует разложение (21). Среди векторов из всех разложений можно выбрать d линейно независимых векторов $\{g'_m\}_{m=1}^d \in \Gamma$. Из леммы 2 следует, что $a(v_{j_m}, v_{k_m} + g'_m) > 0$ для некоторых $v_{j_m}, v_{k_m} \in \Omega$. Следствие 1 доказано.

Через $A_0(0)$ обозначим матрицу $A(0)$ при условии, что все коэффициенты β_j, $j = 1, \dots, p$, равны 0.

Лемма 3. *Матрица $A_0(0)$ является вещественной и симметричной. Коэффициенты $\widetilde{a}_{jk}(0)$ матрицы $A_0(0)$ имеют следующие свойства*:

(a) *коэффициенты $\widetilde{a}_{jk}(0)$ при $j \neq k$ неотрицательны*:

$$\widetilde{a}_{jk}(0) \geqslant 0, \qquad j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, p;$$

(b) *сумма элементов в каждой строке равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{p} \widetilde{a}_{jk}(0) = 0, \qquad j = 1, \dots, p; \tag{22}$$

(c) *граф $\widetilde{G} = (\Omega, \widetilde{\mathscr{E}})$ с множеством вершин Ω и множеством ребер*

$$\widetilde{\mathscr{E}} = \{(v_j, v_k) \colon \widetilde{a}_{jk}(0) > 0\} \tag{23}$$

является связным;

(d) *при всех* $j,k=1,\dots,p$ *для коэффициентов* $\widetilde{a}_{jk}(0)$ *выполнены неравенства*

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_{jk}(0)&\geqslant|\widetilde{a}_{jk}(\theta)|,\qquad j\neq k,\\ \widetilde{a}_{jj}(0)&\geqslant-|\widetilde{a}_{jj}(\theta)|;\end{aligned}$$

одновременно при всех $j,k=1,\dots,p$ *равенства достигаются только при* $\theta=0$.

Доказательство. Из свойств коэффициентов оператора $\mathscr{A}_0$ следуют вещественность и симметричность матрицы $A_0(0)$, а также свойства (a), (b) для коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(0)$.

Перейдем к доказательству свойства (c). Предположим, что граф $\widetilde{G}$ — несвязный. Обозначим одну из его компонент связности через $\widetilde{G}_1=(\Omega_1,\widetilde{\mathscr{E}}_1)$. Тогда для любых двух вершин $v_j\in\Omega_1$, $v_k\in\Omega_2=\Omega\setminus\Omega_1$

$$\widetilde{a}_{jk}(0)=\sum_{g\in\Gamma}a(v_j+g,v_k)=0.$$

Так как коэффициенты $a(v,u)$ при $v\neq u$ неотрицательны, значит при всех $g\in\Gamma$ коэффициенты $a(v+g,u)$ равны нулю. Тогда на графе $G=(\mathbf{Z}^d,\mathscr{E})$ с множеством ребер, определенным (10), нет ни одного ребра, соединяющего вершину из множества $\Omega_1+\Gamma$ с вершиной из множества $\Omega_2+\Gamma$. Следовательно, граф $G=(\mathbf{Z}^d,\mathscr{E})$ — несвязный, что противоречит свойству (vi) коэффициентов оператора A_0.

Покажем справедливость утверждения (d). Из явного вида (13) коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(\theta)$ и неравенства треугольника следует, что при всех $j,k=1,\dots,p$ для коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(0)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_{jk}(0)&\geqslant|\widetilde{a}_{jk}(\theta)|,\qquad j\neq k,\\ \widetilde{a}_{jj}(0)&\geqslant-|\widetilde{a}_{jj}(\theta)|.\end{aligned}$$

Если равенства достигаются одновременно при всех $j,k=1,\dots,p$, то для любого $g\in\Gamma$ и всех $j,k=1,\dots,p$

$$e^{-i\langle\theta,g\rangle}a(v_j+g,v_k)=a(v_j+g,v_k).$$

По лемме 2 для вектора $g\in\Gamma$ существует представление (21), при этом $a(v_j+g_s,v_k)\neq0$ при $s=1,\dots,n_g$. Отсюда следует, что $e^{-i\langle\theta,g_s\rangle}=1$, а значит, и

$$e^{-i\langle\theta,g\rangle}=\prod_{s=1}^{n_g}e^{-i\langle\theta,g_s\rangle}=1,$$

для любого вектора $g\in\Gamma$. При $\theta\in\widetilde{\mathscr{C}}$ последнее равенство возможно, только если $\theta=0$. Лемма 3 доказана.

Из (22) следует, что постоянная функция является собственной функцией оператора $A_0(0)$, соответствующей нулевому собственному значению. Отсюда следует, что $0 \in \sigma(\mathscr{A}_0)$. Отметим, что доказательство последнего утверждения для оператора Лапласа на достаточно произвольном графе можно найти в [19].

Лемма 4. *Старшее собственное значение $\lambda_1(0)$ оператора $A(0)$ является простым. Соответствующая ему собственная функция $\psi_1(0)$ может быть выбрана положительной.*

Доказательство. Рассмотрим граф $\widetilde{G}$, определенный (23). По лемме 3 он является связным. Превратим его в ориентированный граф, считая, что каждому неориентированному ребру соответствуют два ребра противоположной ориентации. Тогда из теоремы 6.2.24 в [16] следует, что матрица $A(0)$ неразложима. Выберем число D из условия

$$D > \max_j |a_{jj}(0) + \beta_j|.$$

Все элементы матрицы $A(0) + DI$ неотрицательны. Тогда оба утверждения леммы следуют из теоремы Перрона–Фробениуса (см. [16, теорема 8.4.4]). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Существует такой способ выбрать множество Ω, что граф $G' = (\Omega, \mathscr{E}')$ с множеством ребер*

$$\mathscr{E}' = \{(v_j, v_k) \colon a(v_j, v_k) > 0\} \tag{24}$$

является связным.

Доказательство. Предположим, что граф G' — несвязный. Через J и K обозначим две его компоненты связности. Так как граф $\widetilde{G}$, определенный (23), связный, то существуют две вершины $v_j \in J$ и $v_k \in K$, такие, что $\widetilde{a}_{jk}(0) > 0$. Тогда для некоторого $0 \neq g \in \Gamma$ коэффициент $a(v_j, v_k + g)$ строго положительный. Если в фундаментальном множестве заменить вершины K на вершины, сдвинутые на вектор g, то на новом графе G' все вершины из J и $K + g$ лежат в одной компоненте связности. Повторяя эту процедуру конечное число раз, мы получим связный граф G'. Лемма 5 доказана.

Далее мы будем считать, что граф $G' = (\Omega, \mathscr{E}')$ является связным. Нас интересует правый край спектра оператора $\mathscr{A}$. Следующая лемма показывает, что им является число $\lambda_1(0)$.

Лемма 6. *Существуют постоянные $r > 0$, $C > 0$, такие, что при всех $\|\theta\| \leqslant r$ для старшего собственного значения $\lambda_1(\theta)$ оператора $A(\theta)$*

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geqslant C\|\theta\|^2. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть ψ_1 — нормированная собственная функция, соответствующая старшему собственному значению $\lambda_1(0)$ оператора $A(0)$.

Имеем

$$A(0)\psi_1(v_j) = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{a}_{jk}(0)\psi_1(v_k) + \beta_j\psi_1(v_j) = \lambda_1(0)\psi_1(v_j).$$

Откуда

$$\beta_j\psi_1(v_j) = \lambda_1(0)\psi_1(v_j) - \sum_{k=1}^{p} \widetilde{a}_{jk}(0)\psi_1(v_k).$$

Пусть $f \in \ell^2(\Omega)$, обозначим через $\psi_1 f$ поточечное произведение функций ψ_1 и f. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle A(\theta)\psi_1 f, \psi_1 f\rangle = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p} \widetilde{a}_{jk}(\theta)\psi_1(v_k)f(v_k) + \beta_j\psi_1(v_j)f(v_j)\right)\psi_1(v_j)\overline{f}(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)f(v_k) - \widetilde{a}_{jk}(0)f(v_j)\big)\psi_1(v_k)\psi_1(v_j)\overline{f}(v_j) + \lambda_1(0)\langle\psi_1 f, \psi_1 f\rangle.$$

По лемме 4 можно считать, что $\psi_1(v_j) > 0$ при всех $j = 1, \ldots, p$. Тогда для любой функции $h \in \ell^2(\Omega)$ существует представление в виде $h = \psi_1 f$, $f \in \ell^2(\Omega)$. Для старшего собственного значения $\lambda_1(\theta)$ оператора $A(\theta)$ имеем

$$\lambda_1(\theta) = \max_{|h|=1}\langle A(\theta)h, h\rangle = \max_{|\psi_1 f|=1}\langle A(\theta)\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}$$

$$= \lambda_1(0) + \max_{|\psi_1 f|=1}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p}\big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)f(v_k) - \widetilde{a}_{jk}(0)f(v_j)\big)\psi_1(v_k)\right)\psi_1(v_j)\overline{f}(v_j).$$

При каждом $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$ обозначим через f_θ функцию, на которой достигается максимум. Имеем

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p}\big(\widetilde{a}_{jk}(0)f_\theta(v_j) - \widetilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\big)\psi_1(v_k)\right)\psi_1(v_j)\overline{f}_\theta(v_j). \tag{26}$$

Рассмотрим два слагаемых суммы с индексами j, k и k, j. С учетом того, что ψ_1 — вещественный вектор, а матрица $A(\theta)$ — самосопряженная, имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\widetilde{a}_{jk}(0)f_\theta(v_j) - \widetilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\big)\psi_1(v_k)\psi_1(v_j)\overline{f}_\theta(v_j)\\
&\quad + \big(\widetilde{a}_{kj}(0)f_\theta(v_k) - \widetilde{a}_{kj}(\theta)f_\theta(v_j)\big)\psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\overline{f}_\theta(v_k)\\
&= \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\big(\widetilde{a}_{jk}(0)|f_\theta(v_j)|^2 + \widetilde{a}_{kj}(0)|f_\theta(v_k)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\overline{f_\theta}(v_j)\big)\big)\\
&= \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\big(\widetilde{a}_{jk}(0)(|f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)|)^2\big)\\
&\quad + \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\big(2\widetilde{a}_{jk}(0)|f_\theta(v_j)|\,|f_\theta(v_k)| - 2\,\mathrm{Re}\big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\overline{f_\theta}(v_j)\big)\big)\\
&\geqslant \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\widetilde{a}_{jk}(0)(|f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)|)^2.
\end{aligned} \tag{27}$$

Из последней формулы следует, что

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\widetilde{a}_{jk}(0)\big(|f_\theta(v_j)|-|f_\theta(v_k)|\big)^2 \leqslant \lambda_1(0)-\lambda_1(\theta).$$

Так как $\lambda_1(\theta)$ — непрерывная функция θ, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что при $\|\theta\|<\delta$

$$|\lambda_1(0)-\lambda_1(\theta)|\leqslant\varepsilon.$$

Тогда для значений функции f_θ, $\|\theta\|<\delta$, в двух любых различных смежных вершинах v_j, v_k графа $\widetilde{G}$

$$|f_\theta(v_j)-f_\theta(v_k)|\leqslant\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\widetilde{a}_{jk}(0)}}.$$

Граф $\widetilde{G}$, определенный (23), является связным, и имеет лишь p вершин. Тогда на нем существует путь между любой парой вершин, причем длина этого пути не больше, чем $p-1$. Тогда для любой пары различных вершин v_j, v_k графа $\widetilde{G}$

$$|f_\theta(v_j)-f_\theta(v_k)|\leqslant(p-1)\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\min_{j\neq k}\psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\widetilde{a}_{jk}(0)}}. \tag{28}$$

В силу условия $|\psi_1 f_\theta|=1$, нормы функций f_θ равномерно ограничены снизу. Тогда при достаточно малых ε значения функции f_θ отделены от нуля. Далее считаем, что $\|\theta\|$ настолько мал, что это выполнено. Обозначим через $\phi_{jk}(\theta)$ разность аргументов $\arg f_\theta(V_j)-\arg f_\theta(V_k)$. Из (26) и (27) следует, что

$$\begin{aligned}&\lambda_1(0)-\lambda_1(\theta)\\ &\quad\geqslant\Big(\min_j\psi_1(v_j)\Big)^2\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\big(\widetilde{a}_{jk}(0)|f_\theta(v_j)|\,|f_\theta(v_k)|-2\,\mathrm{Re}\big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)f_\theta(v_k)\overline{f_\theta}(v_j)\big)\big)\\ &\quad\geqslant C_1\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{g\in\Gamma}a(v_j,v_k+g)\big(1-\cos[\langle g,\theta\rangle+\phi_{jk}(\theta)]\big).\end{aligned}$$

Аналогично доказательству (28) можно показать, что $\phi_{jk}(\theta)\to0$ при $\|\theta\|\to0$. Из леммы 1 следует, что существует базис $\{g_s\}_{s=1}^{d}$, такой, что $a(v_{j_s},v_{k_s}+g_s)>0$ при некоторых j_s,k_s. Все слагаемые суммы выше неотрицательны. Оставляя слагаемые при $g = 0$ и слагаемые с индексами g_s, j_s, k_s, получаем

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geqslant C_1 \sum_{s=1}^{d} \bigl(a(v_{j_s}, v_{k_s} + g_s)\bigl(1 - \cos[\langle g_s, \theta\rangle + \phi_{j_s k_s}(\theta)]\bigr)\bigr) \\ + C_1 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \sum_{k=1}^{p} a(v_j, v_k)(1 - \cos\phi_{jk}(\theta)).$$

Вершины v_{j_s} и v_{k_s} связаны на графе G', определенном (24), путем длины не больше, чем $p-1$. Тогда на этом пути существует по крайней мере одно ребро такое, что разность аргументов функции f_θ в его концах не меньше, чем $\phi_{j_s k_s}(\theta)/(p-1)$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) &\geqslant C_2 \sum_{s=1}^{d} \left(2 - \cos\left(\frac{\phi_{j_s k_s}}{p-1}\right) - \cos[\langle g_s, \theta\rangle + \phi_{j_s k_s}(\theta)]\right) \\ &= \frac{C_2}{2} \sum_{s=1}^{d} \left(\frac{\phi_{j_s k_s}(\theta)^2}{(p-1)^2} + [\langle g_s, \theta\rangle + \phi_{j_s k_s}(\theta)]^2 + O(\|\theta\|^4) + O(\phi_{j_s k_s}(\theta)^4)\right) \\ &\geqslant C_3 \sum_{s=1}^{d} \langle g_s, \theta\rangle^2.\end{aligned}$$

Пусть P — матрица замены ортонормированного базиса $\{e_s\}_{s=1}^d$ на базис $\{g_s\}_{s=1}^d$. Так как базис g_s состоит из векторов с целочисленными координатами, то $|g_s| \geqslant 1$. Имеем

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geqslant C_3 \sum_{s=1}^{d} \left\langle \sum_{k=1}^{d} Pe_k, \theta \right\rangle^2 \geqslant C_4 \|P^*\theta\|^2 \geqslant C\|\theta\|^2.$$

Лемма 6 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3.

(a) Из формулы (27) следует, что

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)\bigl(\widetilde{a}_{jk}(0)(|f_\theta(v_j)| - |f_\theta(v_k)|)^2 \\ + 2\widetilde{a}_{jk}(0)|f_\theta(v_j)|\,|f_\theta(v_k)| - 2\,\mathrm{Re}\bigl(\widetilde{a}_{jk}(\theta) f_\theta(v_k)\overline{f_\theta}(v_j)\bigr)\bigr).$$

Рассмотрим случай $|f_\theta(v_j)| \neq |f_\theta(v_k)|$ при некоторых $v_j, v_k \in \Omega$. Так как граф $\widetilde{G}$ — связный, то на пути, соединяющем эти вершины, функция $|f_\theta|$ не постоянна, и сумма выше строго положительна. Если функция $|f_\theta|$ постоянна, то в силу $|\psi_1 f| = 1$, она не обращается в нуль. Тогда

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \psi_1(v_j)\psi_1(v_k)|f_\theta(v_j)|\,|f_\theta(v_k)|\bigl(\widetilde{a}_{jk}(0) - |\widetilde{a}_{jk}(\theta)|\bigr).$$

Правая часть последнего равенства обращается в нуль только при $\theta = 0$ в силу пункта (d) леммы 3. Отсюда следует, что

$$\lambda_1(0) > \lambda_1(\theta), \qquad \theta \neq 0, \tag{29}$$

т.е. точка $\theta = 0$ является точкой глобального максимума и первая частная производная по любому направлению в этой точке обращается в нуль.

(b) В силу леммы 4 и неравенства (29) расстояние от $\lambda_1(0)$ до второй спектральной зоны оператора $\mathscr{A}$ больше нуля, т.е. выполнено (20).

(c) Отметим, что из условия (v) следует, что собственное значение $\lambda_1(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в нуле. Предположим, что гессиан обращается в нуль в точке $\theta = 0$. Тогда существует такое направление τ, что

$$\frac{\partial^2 \lambda_1(0)}{\partial \tau^2} = 0,$$

что противоречит оценке (25).

(d) Число $\lambda_1(0)$ не может быть собственным значением оператора $\mathscr{A}$ в силу неравенства (29) и свойств спектра прямого интеграла операторов (теорема XIII.85 в [20]). Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Приведем два достаточных условия существования положительного собственного значения $\lambda_1(0)$ матрицы $A(0)$, определенной формулой (4). Напомним, что через $A_0(0)$ мы обозначаем матрицу $A(0)$ при условии, что все коэффициенты β_j, $j = 1, \ldots, p$, равны 0.

Предложение 1. *Пусть потенциал* $\widetilde{Q}$ *удовлетворяет одному из следующих условий*:

(a) $\sum_{j=1}^{p} \beta_j > 0$;

(b) $\beta_m > \|A_0(0)\|$ *при некотором* $m = 1, \ldots, p$.

Тогда у оператора $A(0)$ *есть положительное собственное значение.*

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (a). Пусть $\varphi(v_j) = 1$, $j = 1, \ldots, p$, — постоянная функция на фундаментальном множестве Ω. Для старшего собственного значения $\lambda_1(0)$ оператора $A(0)$ имеем

$$\lambda_1(0) = \sup_{\substack{h \in \ell^2(\Omega) \\ h \neq 0}} \frac{\langle A(0)h, h\rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle h, h\rangle_{\ell^2(\Omega)}} \geqslant \frac{\langle A(0)\varphi, \varphi\rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle \varphi, \varphi\rangle_{\ell^2(\Omega)}} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j}{p} > 0.$$

Пусть выполнено условие (b). Спектр оператора $\widetilde{Q}$, как оператора $\mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p$, состоит из собственных значений $\beta_1, \ldots, \beta_p$. Тогда в силу классической теории возмущений (см., например, лемму 3 в [2, § 9.4, гл. 9]) у оператора $A(0) = A_0(0) + \widetilde{Q}$ есть собственное значение, которое не меньше $\beta_m - \|A_0(0)\| > 0$. Предложение 1 доказано.

Предположим, что интенсивность источников ветвления увеличилась в μ раз, тогда потенциал Q меняется на потенциал μQ. В этом случае говорят, что константа μ является константой связи. Вычислим асимптотическое поведение старшего собственного значения $\lambda_1(0)$ (или правого края спектра оператора $\mathscr{A}$) при $\mu \to 0$ и $\mu \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_0 + \mu Q$. Тогда для правого края спектра*

(a) *при $\mu \to 0$ выполнено*

$$\max \sigma(\mathscr{A}_\mu) = \frac{\mu}{p} \sum_j \beta_j + O(\mu^2), \tag{30}$$

где p — число точек фундаментального множества Ω;

(b) *при $\mu \to +\infty$ выполнено*

$$\max \sigma(\mathscr{A}_\mu) = \mu \max_j \beta_j + O(1). \tag{31}$$

Доказательство. (a) Нуль является собственным значением оператора $A_0(0)$. Из леммы 1 следует, что оно является старшим. Тогда по лемме 4 это собственное значение простое. Из конечномерной теории возмущений при малых μ (см., например, [20, с. 17, 18]) следует, что

$$\lambda_1(0) = \frac{\mu}{p} \sum_j \beta_j + O(\mu^2).$$

Так как $\lambda_1(0) = \max \sigma(\mathscr{A}_\mu)$, отсюда следует (30).

(b) В силу классической теории возмущений (см., например, лемму 3 в [2, § 9.4, гл. 9]) при больших μ старшее собственное значение оператора в слое $A(0)$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda_1(0) - \mu \max_j \beta_j| \leqslant \|A_0(0)\|.$$

Из последнего неравенства следует (31). Теорема доказана.

4. Асимптотическое поведение среднего числа частиц. Напомним, что $M(v, u, t) = (P^t \delta_u)(v)$ описывает среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в момент времени t в точке u, если в начальный момент времени $t = 0$ мы стартовали из точки v.

Как и раньше, через $\psi_1(0)$ мы обозначаем собственный вектор матрицы $A(0)$, отвечающий старшему собственному значению $\lambda_1(0)$. Напомним, что данный вектор мы выбрали так, что все его координаты положительны.

Для точек v и u воспользуемся представлением (1). Через ω_v и ω_u обозначим действие проектора π_Ω на v и u соответственно, а через γ_v и γ_u обозначим действие проектора π_Γ на v и u.

Теорема 5. *При* $t \to +\infty$ *для функции* $M(v,u,t)$ *старший член асимптотики имеет вид*

$$M(v,u,t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \frac{(2\pi)^{d/2}\psi_1(\omega_v,0)\psi_1(\omega_u,0)}{|\widetilde{\mathscr{C}}|\sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} (1+O(t^{-1})).$$

Доказательство. Из уравнения (9) следует, что

$$M(v,u,t) = e^{\mathscr{A}t} M(v,u,0) = e^{\mathscr{A}t}\delta_u(v), \qquad v \in \mathbf{Z}^d, \quad u \in \mathbf{Z}^d.$$

Тогда

$$M(v,u,t) = \langle M(\,\cdot\,,u,t), \delta_v(\,\cdot\,)\rangle_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)}.$$

В силу унитарности преобразования U, определенного соотношением (14), имеем

$$\begin{aligned} M(v,u,t) &= \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \langle U e^{\mathscr{A}t}\delta_u(\,\cdot\,,\theta), U\delta_v(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta \\ &= \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \langle e^{A(\theta)t} U\delta_u(\,\cdot\,,\theta), U\delta_v(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta. \end{aligned}$$

Тогда для $w \in \Omega$ имеем

$$U\delta_v(w,\theta) = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle}\delta_v(w+g) = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} e^{-i\langle \gamma_v,\theta\rangle}\widetilde{\delta}_{\omega_v}(w),$$

$$U\delta_u(w,\theta) = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle}\delta_u(w+g) = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2} e^{-i\langle \gamma_u,\theta\rangle}\widetilde{\delta}_{\omega_u}(w),$$

где $\widetilde{\delta}_{\omega_v}(w)$ и $\widetilde{\delta}_{\omega_u}(w)$ определены формулой (19). Разложим функции $U\delta_{\omega_v}(\,\cdot\,,\theta)$ и $U\delta_{\omega_u}(\,\cdot\,,\theta)$ по собственным функциям оператора $A(\theta)$ при каждом $\theta \in \widetilde{\mathscr{C}}$

$$U\delta_{\omega_v}(w,\theta) = \sum_{j=1}^{p} c_j^{\omega_v}(\theta)\psi_j(w,\theta), \quad U\delta_{\omega_u}(w,\theta) = \sum_{j=1}^{p} c_j^{\omega_u}(\theta)\psi_j(w,\theta),$$

где

$$\begin{aligned} c_j^{\omega_v}(\theta) &= \langle U\delta_{\omega_v}(\,\cdot\,,\theta), \psi_j(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)} = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2}\overline{\psi}_j(\omega_v,\theta), \\ c_j^{\omega_u}(\theta) &= \langle U\delta_{\omega_u}(\,\cdot\,,\theta), \psi_j(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)} = |\widetilde{\mathscr{C}}|^{-1/2}\overline{\psi}_j(\omega_u,\theta). \end{aligned}$$

Имеем

$$e^{A(\theta)t} U\delta_{\omega_u}(w,\theta) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)t} c_j^{\omega_u}(\theta)\psi_j(w,\theta).$$

Отсюда следует, что

$$M(v,u,t) = \frac{1}{|\widetilde{\mathscr{C}}|} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)t} e^{i\langle \gamma_v - \gamma_u, \theta\rangle} \overline{\psi}_j(\omega_u,\theta)\psi_j(\omega_v,\theta)\, d\theta.$$

При $t \to \infty$ основной вклад в интеграл дает экспонента с наибольшим собственным значением $\lambda_1(\theta)$ в показателе. Тогда

$$M(v,u,t) = \frac{1}{|\widetilde{\mathscr{C}}|} \int_{\widetilde{\mathscr{C}}} e^{\lambda_1(\theta)t} e^{i\langle \gamma_v - \gamma_u, \theta\rangle} \overline{\psi}_1(\omega_u,\theta)\psi_1(\omega_v,\theta)\, d\theta \left(1 + O(e^{-\varepsilon t})\right) \tag{32}$$

для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, где ε_1 определяется формулой (20). Асимптотика старшего члена в интеграле (32) может быть вычислена с помощью метода Лапласа (см. [8, § 4, гл. 2]). Так как мы показали, что нуль является невырожденной точкой максимума функции $\lambda_1(\theta)$ на $\widetilde{\mathscr{C}}$, то основной вклад в интеграл вносят значения функции в окрестности нуля. Тогда при $t \to \infty$

$$M(v,u,t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \frac{(2\pi)^{d/2}\psi_1(\omega_v,0)\psi_1(\omega_u,0)}{|\widetilde{\mathscr{C}}|\sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} \left(1 + O(t^{-1})\right).$$

Теорема 5 доказана.

Для удобства читателя напомним некоторые известные определения. Последовательность $\{\varphi_k(t)\}$ называется асимптотической при $t \to \infty$, если при любом целом $k \geqslant 0$

$$\varphi_{k+1}(t) = o(\varphi_k(t)).$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t),$$

вообще говоря, расходящийся, называется асимптотическим рядом функции $f(t)$ при $t \to +\infty$, если для любого натурального n справедливо равенство (см. [8, § 3, гл. 1])

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right| = o(\varphi_n(t)).$$

В этом случае также говорят, что функция $f(t)$ разлагается в асимптотический ряд при $t \to +\infty$ и пишут

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t).$$

Следующее утверждение относится к случаю, когда выполнено условие (18), а значит, коэффициенты $\widetilde{a}(v,u,\theta)$ являются бесконечно гладкими.

Теорема 6. *При выполнении условия* (18) *справедливо асимптотическое разложение*

$$M(v,u,t) \sim e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v,u) t^{-k}.$$

Все коэффициенты $c_k(v,u)$ *могут быть вычислены явно.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теоремы 4.1, [8, § 4, гл. 2].

Авторы выражают благодарность И. А. Ибрагимову и Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания. Авторы также благодарны рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. А. Антоненко, Е. Б. Яровая, “Расположение собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании”, *Современные проблемы математики и механики*, **10**:3 (2015), 9–22.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, 2-е изд., испр. и доп., Лань, СПб.–М.–Краснодар, 2010, 464 с.; англ. пер. 1-го изд.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **5**, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1987, xv+301 pp.
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, “Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения”, *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 1–108; англ. пер.: M. Sh. Birman, T. A. Suslina, “Second order periodic differential operators. Threshold properties and homogenization”, *St. Petersburg Math. J.*, **15**:5 (2004), 639–714.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 567 с.; англ. пер. 1-го изд.: I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, *Introduction to the theory of random processes*, W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa.–London–Toronto, Ont., 1969, xiii+516 pp.
5. П. А. Кучмент, “Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных”, *УМН*, **37**:4(226) (1982), 3–52; англ. пер.: P. A. Kuchment, “Floquet theory for partial differential equations”, *Russian Math. Surveys*, **37**:4 (1982), 1–60.
6. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, “Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbf{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления”, *Вероятность и статистика*. 26, Зап. науч. сем. ПОМИ, **466**, ПОМИ, СПб., 2017, 234–256.
7. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971, 436 с.; нем. пер.: B. A. Sewastjanow, *Verzweigungsprozesse*, Math. Lehrbücher Monogr. II. Abt. Math. Monogr., **34**, Akademie-Verlag, Berlin, 1974, xi+326 pp.

8. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977, 368 с.
9. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Изд-во ЦПИ при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007, 104 с.
10. Е. Б. Яровая, “Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **55**:4 (2010), 705–731; англ. пер.: E. B. Yarovaya, “Criteria of exponential growth for the numbers of particles in models of branching random walks”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:4 (2011), 661–682.
11. Е. Б. Яровая, “Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 123–140; англ. пер.: E. B. Yarovaya, “Spectral properties of evolutionary operators in branching random walk models”, *Math. Notes*, **92**:1 (2012), 115–131.
12. G. Berkolaiko, P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs*, Math. Surveys Monogr., **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, xiv+270 pp.
13. N. Filonov, A. V. Sobolev, “Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 36, Зап. науч. сем. ПОМИ, **318**, ПОМИ, СПб., 2004, 298–307; англ. пер.: N. Filonov, A. V. Sobolev, “Absence of the singular continuous component in spectra of analytic direct integrals”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **136**:2 (2006), 3826–3831.
14. Y. Higuchi, Y. Nomura, “Spectral structure of the Laplacian on a covering graph”, *European J. Combin.*, **30**:2 (2009), 570–585.
15. Y. Higuchi, T. Shirai, “Some spectral and geometric properties for infinite graphs”, *Discrete geometric analysis*, Contemp. Math., **347**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 29–56.
16. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989, 656 с.; пер. с англ.: R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, xviii+643 pp.
17. E. Korotyaev, N. Saburova, “Schrödinger operators on periodic discrete graphs”, *J. Math. Anal. Appl.*, **420**:1 (2014), 576–611.
18. E. Korotyaev, N. Saburova, “Schrödinger operators with guided potentials on periodic graphs”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **145**:11 (2017), 4869–4883.
19. B. Mohar, “Some relations between analytic and geometric properties of infinite graphs”, *Discrete Math.*, **95**:1-3 (1991), 193–219.
20. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982, 430 с.; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. IV: *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978, xv+396 pp.
21. P. W. Sy, T. Sunada, “Discrete Schrödinger operators on a graph”, *Nagoya Math. J.*, **125** (1992), 141–150.

Поступила в редакцию
23.III.2018
Исправленный вариант
17.VII.2018