

Представление
Данилы Дмитриевича Черкашина
на премию “Молодому математику”
Санкт-Петербургского математического общества

31 мая 2022 г.

На премию выдвигается цикл работ Д. Д. Черкашина по экстремальной комбинаторике. В этих работах решаются естественные, но непростые задачи, связанные со структурами гиперграфов — иначе говоря, систем конечных множеств. Многие из вопросов, ответы на которые получены номинантом, были поставлены выдающимися специалистами по комбинаторике и вызывали значительный интерес специалистов. Перейдём к кратком изложению основных выдвигаемых на премию результатов.

В работе [1] получена остающаяся до сих пор лучшей оценка на величину $m(n, r)$ наименьшего количества рёбер в n -однородном гиперграфе (то есть системе n -элементных множеств), который нельзя правильным образом покрасить в r цветов (раскраска вершин гиперграфа называется правильной, если нет одноцветных рёбер.) Как и многие задачи экстремальной комбинаторики, эта тематика берёт начало в работах Эрдёша. Эрдёш и Ловас предположили что $m(2, n)$ растёт как $n2^n$. Наилучшей верхней оценкой для $m(n, 2)$ до сих пор остаётся $Cn^2 \cdot 2^n$ (Эрдёш), нижняя оценка Эрдёша 2^{n-1} улучшалась Плухаром до $\Omega(n^{1/4}2^n)$ и Радхакришнаном и Сринивасаном до $\Omega((n/\log n)^{1/2}2^n)$. Остроумная вероятностная конструкция позволила Даниле Черкашину (то же независимо и одновременно сделал Якуб Козик) привести намного более ясное и простое, чем оригинальное, доказательство оценки Радхакришнана и Сринивасана, а также доказать, что $m(n, r) = \Omega((n/\log n)^{1-1/r}r^n)$.

В [2] доказано, что при фиксированном n величина $m(n, r)/r^n$ имеет предел — ранее это было высказано в качестве предположения Ногой Алоном. Аналогичная теорема регулярности доказана и для случая списочных раскрасок.

Сходной величине $p(n, r)$ для панхроматических раскрасок (то есть таких, в которых каждое ребро содержит все цвета) посвящена работа [3]. В полной общности вопрос остаётся понятным не до конца, но в ряде асимптотических режимов улучшены известные верхние и нижние оценки.

В работе [4] изучаются раскраски кросс-пересекающихся семейств — гиперграфов, рёбра которых можно разбить на две группы так что любые два ребра из разных групп пересекаются. Интересно, что на один из естественных экстремальных вопросов о таких гиперграфах (о максимальном числе рёбер в так называемом критическом кросс-пересекающемся семействе с рёбрами размера не больше n) удаётся получить не асимптотический, а точный ответ n^n . Это редкость в этом круге вопросов.

Обозначим через $f(n)$ наименьшее число рёбер в n -однородном гиперграфе, который нельзя раскрасить в два цвета равномерно — то есть так, что каждое ребро содержит по $n/2$ вершин каждого из двух цветов. Алон, Клейтман, Померанке, Сакс и Сеймур доказали что

$$c_1 \frac{\log \operatorname{snd} n}{\log \log \operatorname{snd} n} \leq f(n) \leq c_2 \frac{\log^3 \operatorname{snd} n}{\log \log \operatorname{snd} n},$$

где $\operatorname{snd}(n)$ — наименьший натуральный не-делитель числа n . В [5] верхняя оценка улучшена до $O(\log \operatorname{snd} n)$.

Работа [6] посвящена покраскам обобщённого графа Кнезера $K(n, k, s)$, вершины которого суть k -подмножества n -элементного множества, а рёбра соответствуют тому что два множества имеют меньше

чем s общих элементов. С помощью конструкции, основанной на гиперграфах большого разброса, строится раскраска $K(n, n/2 - t, s)$ в $(4 + o(1))(s + t)^2$ цветов. Интересно, что конструкция использует очень богатую комбинаторную структуру — именно, матрицы Адамара.

Подробнее ознакомиться с состоянием дел в этой области и вкладом номинанта можно по обстоятельному обзору [7].

Фёдор Петров

Список литературы

- [1] D. D. Cherkashin и J. Kozik, “A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs”, *Random Structures & Algorithms*, т. 47, № 3, с. 407—413, 2015.
- [2] D. Cherkashin и F. Petrov, “Regular behavior of the maximal hypergraph chromatic number”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, т. 34, № 2, с. 1326—1333, 2020.
- [3] D. Cherkashin, “A note on panchromatic colorings”, *Discrete Mathematics*, т. 341, № 3, с. 652—657, 2018.
- [4] —, “Coloring cross-intersecting families”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, т. 25, № 1, #P1.47, 2018.
- [5] D. Cherkashin и F. Petrov, “On small n -uniform hypergraphs with positive discrepancy”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, т. 139, с. 353—359, 2019.
- [6] J. Balogh, D. Cherkashin и S. Kiselev, “Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs”, *European Journal of Combinatorics*, т. 79, с. 228—236, 2019.
- [7] А. М. Райгородский и Д. Д. Черкашин, “Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов”, *Успехи математических наук*, т. 75, № 1 (451), с. 95—154, 2020.