

Представление цикла работ Г. А. Вепрева
“Масштабированная энтропия” на премию СПбМО
“Молодому математику”

Понятие масштабированной энтропии, численного метрического инварианта динамической системы энтропийного типа, было предложено к изучению в работах А. М. Вершика конца 90-х. Схожие инварианты появились в работах С. Ференци и А. Катка–Ж. П. Тувено примерно в то же время. Масштабирующая последовательность описывает динамику метрик на фиксированном пространстве с мерой, показывая, насколько быстро растут так называемые эpsilon-энтропии допустимой метрики при усреднении под действием сохраняющего меру преобразования (или группы преобразований). Масштабирующая последовательность существенно не зависит от выбора усредняемой допустимой метрики и является эффективным инвариантом для систем с нулевой метрической энтропией (Колмогорова–Синяя). Масштабирующая последовательность всегда является неубывающей и субаддитивной, в частности, не может расти быстрее линейной. Теория масштабированных энтропийных последовательностей получила свое развитие в серии работ А. М. Вершика, Ф. В. Петрова и П. Б. Затицкого, однако, многие вопросы теории остаются открытыми. Один из важнейших вопросов — существование для любого автоморфизма масштабированной последовательности, в существенном не зависящей от эpsilon — был решен отрицательно в работе [1]. Построен пример эргодического автоморфизма, для которого масштабированная последовательность существенно зависит от эpsilon (такие автоморфизмы названы нестабильными). Вводится и изучается понятие масштабированной энтропии, обобщающее изучаемое ранее понятие масштабированной последовательности, — класса эквивалентности функции двух переменных (положительного $\varepsilon > 0$ и натурального n), описывающей рост ε -энтропии при усреднении метрик за n шагов.

В работе [2] масштабированная энтропия изучается как функция на группе автоморфизмов со слабой топологией. Доказывается, что для любой наперед заданной последовательности, которая стремится к бесконечности строго медленнее линейной, масштабированная энтропия типичного автоморфизма не сравнима с этой последовательностью.

Топологическая система (X, T) нулевой топологической энтропии называется универсальной для систем нулевой метрической энтропии, если всякая система нулевой метрической энтропии метрически изоморфна системе (X, μ, T) для некоторой T -инвариантной меры μ . Вопрос о существовании универсальной системы нулевой энтропии был поставлен Б. Вейсом. Отрицательный ответ для случая одного преобразования (действия группы \mathbb{Z}) был дан в статье Я. Серафина 2013 года. В работе [3] используется разработанная теория масштабированной энтропии и дается отрицательный ответ на вопрос Б. Вейсса для случая действий непериодических аменабельных групп. В работе [4] этот результат обобщается на случай действий произвольной счетной аменабельной группы; доказательство основано на изучении масштабированной энтропии типичного действия.

Недавняя совместная с А. М. Вершиком и П. Б. Затицким обзорная статья [5] посвящена теории масштабированной энтропии и ее приложениям. Она основана как на серии более ранних работ А. М. Вершика, Ф. В. Петрова и П. Б. Затицкого, так и на недавних результатах Георгия.

Основные результаты, опубликованные в работах [1, 2, 3, 4, 5], неоднократно докладывались на семинарах в ПОМИ, а также в ENS Paris, университете Вроцлава, университете Женевы и международных конференциях.

По моему мнению, Георгий — чрезвычайно талантливый молодой ученый, который успел проявить себя во время учебы в бакалавриате и магистратуре. Хочу отметить его высокий уровень математической грамотности, глубокое погружение в тему и впечатляющую активность. Он является активным участником семинаров ПОМИ, факультета МКН СПбГУ и университета Женевы. Осенью 2021 года Георгий организовал студенческий семинар по эргодической теории на факультете МКН СПбГУ.

Я считаю, что цикл работ о масштабированной энтропии несомненно заслуживает премии “молодому математику” Санкт-Петербургского математического общества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. A. Veprev. Scaling entropy of unstable systems. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 498, 5–17, 2020.
- [2] Г. А. Вепрев. Масштабированная энтропия типичного преобразования. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 507, 5–14, 2021.
- [3] G. Veprev. Non-existence of a universal zero entropy system for non-periodic amenable group actions. *Israel Journal of Mathematics*, 253 (2), 715–743, 2023. Preprint: <https://arxiv.org/abs/2010.09806>.
- [4] G. Veprev. Non-existence of a universal zero entropy system via generic actions of almost complete growth. Submitted. Preprint: <https://arxiv.org/abs/2209.01902>.
- [5] А. М. Вершик, Г. А. Вепрев, П. Б. Затицкий. Динамика метрик в пространствах с мерой и масштабированная энтропия. Принято к публикации в УМН. Препринт: <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2023/23-03.html>.

25 Мая 2023

Научный руководитель
к.ф.-м.н.

П.Б. Затицкий