

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.6

ПЕРЕХОДНАЯ ЗОНА В ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЕ СО СКАЧКОМ КРИВИЗНЫ. МЕТОД КИРХГОФА И МЕТОД ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© 2022 г. Е. А. Злобина^{a, *}, А. П. Киселев^{a, b, c, **}

^a Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация

^b Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023 Российская Федерация

^c Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О. 61, Санкт-Петербург 199178, Российская Федерация

*E-mail: ezlobina2@yandex.ru

**E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2021 г.

После доработки 24.08.2021 г.

Принята к публикации 01.09.2021 г.

Исследовано волновое поле в двумерной задаче о некасательном падении высокочастотной волны от точечного источника на импедансную границу со скачком кривизны. Детально описано поле в окрестности предельного луча. Показано, что выражения, найденные в рамках метода Кирхгофа, согласуются с результатами построений методом пограничного слоя. Определены области пригодности полученных выражений, для чего подробно изучена геометрия задачи.

DOI: 10.31857/S0033849422020176

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к высокочастотным задачам дифракции на препятствиях, обладающих в каждой точке непрерывной касательной, но имеющих разрывную кривизну, не ослабевает уже шесть десятилетий (см., например, [1–13]) – в сущности, с момента создания геометрической теории дифракции (ГТД) [13–15]. Эта тематика, помимо приложений к радиолокации, привлекает внимание исследователей тем, что для нее нет простой эталонной задачи, из которой можно было бы определить дифракционные коэффициенты¹, являющиеся базовым понятием ГТД.

Определению дифракционных коэффициентов для разных граничных условий как при некасательном, так и при касательном падении посвящены соответственно работы [1–8] и [9–12]. В этих задачах, как и вообще в теории дифракции, дифракционные коэффициенты обращаются в бесконечность при приближении к направлению геометрического отражения от границы в точке ее негладкости – *предельному лучу*. В окрестности предельного луча возникает *переходная зона*, где происходит слияние геометрически отраженной волны

и волны, дифрагированной точкой негладкости, а поле выражается через подходящие специальные функции. Для угловых областей, в простейших случаях, поля в переходных зонах описываются имеющими двухсотлетнюю историю формулами, содержащими интегралы Френеля [15]. Сейчас их обобщения систематически изучаются под именем краевых и угловых катастроф [16, 17]. Исследование переходной зоны в задаче дифракции на разрыве кривизны, которому посвящена данная статья, тоже можно отнести к этой проблематике (соответствующая угловая катастрофа имеет тип B_2 [17]).

В подавляющем большинстве работ [1–12] рассматривалась исключительно двумерная задача и использовался восходящий к работам Френеля метод Кирхгофа [15]. Метод Кирхгофа хорошо зарекомендовал себя при описании полей в переходных зонах, но не дает детального описания дифрагированного поля за их пределами [15]. Полученные в его рамках дифракционные коэффициенты для дифракции на разрыве кривизны не совпадают с выражениями, которые дает строгий метод пограничного слоя (см. [13], также ср. результаты [3] и [6]). Метод пограничного слоя [18] (в этой тематике восходящий к работе [3], имеющей большую эвристическую составляющую)

¹ Так Дж. Б. Келлер назвал диаграммы направленности волн, излучаемых точками негладкости границы [14, 15].

строго описывает поле в окрестности сингулярной точки и дает выражение для дифрагированной волны, пригодное на любых расстояниях [8]. Однако полученное с его помощью выражение для поля в переходной зоне ограничено пока малыми расстояниями [8]. Для некасательного падения плоской волны и условия Дирихле, в рамках последовательного погранслоного подхода, влияние скачка кривизны на волновое поле в переходной зоне описывается выражением [8]

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \sin \varphi_0}} [\mathfrak{a}] r_1 \exp\left(ikr_1 - i\frac{z^2}{2}\right) D_{-3}\left(\sqrt{2}z \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (1)$$

где $kr_1 \gg 1$, а $[\mathfrak{a}]$ — величина скачка кривизны. Здесь r_1 и φ_1 — полярные координаты с центром в точке негладкости границы, $\varphi_0 > 0$ — значение угла падения в точке негладкости, и

$$z = \sqrt{kr_1/2}(\varphi_1 - \varphi_0). \quad (2)$$

Присутствие переменной (2) в аргументе специальной функции типично для описания переходных зон, где сливаются плоская и цилиндрическая волны [15].

Выражение (1) применимо только на малых расстояниях $kr_1 \ll 1$ (здесь κ — характеристический параметр, определяемый геометрией границы, см. (6)). Это обусловлено, во-первых, очевидным фактом линейного роста амплитуды по r_1 . Во-вторых, тем требующим углубления в геометрические рассуждения обстоятельством, что формула (1) перестает сшиваться с геометрически отраженной волной при $|z| \gg 1$, если не выполняются условия $\kappa r_1 \ll 1$ и $\kappa r_1 z^2 \ll 1$ (подробнее см. [8]).

Вместе с тем с точки зрения метода Кирхгофа представляется, что результат для переходной зоны должен быть другим [6, 13]. Для получения главного члена асимптотики, описывающей влияние разрыва кривизны на уходящее поле, достаточно рассматривать границы, составленные из двух касающихся дуг окружностей разного радиуса. Естественно (и это делалось в работах [6, 13]) разбить кирхгофовский интеграл на две соответствующие части, которые без большого труда выражаются через интегралы Френеля от сложных (не таких, как в дифракции на клине) аргументов, зависящих от кривизны соответствующей дуги. Интеграл Френеля простым образом выражается через функцию параболического цилиндра D_{-1} , в то время как погранслоные рассуждения приводят к специальной функции D_{-3} , см. (1). Разрешение этого (как выяснится, кажущегося) противоречия и составляет один из основных результатов данной работы.

Рассмотрена двумерная задача дифракции высокочастотной волны от точечного источника на

импедансной границе со скачком кривизны. Падающая волна приходит в точку негладкости границы некасательно. Граница предполагается пассивной, т.е. поверхностных волн не возникает. Все рассуждения ведутся в высокочастотном приближении: расстояния от точки негладкости до источника и точки наблюдения много больше длины волны. Основываясь на методе Кирхгофа, мы детально исследуем поле в узкой окрестности предельного луча на умеренных (по сравнению с геометрическим параметром задачи κ) расстояниях. Интересующий нас эффект слияния геометрически отраженной и дифрагированной волн асимптотически описывается суммой двух френелевских выражений. Обращаясь к малым расстояниям, мы аналитически прослеживаем переход френелевской асимптотики в выражение, аналогичное (1).

Поле в переходной зоне вблизи предельного луча уже исследовалось методом Кирхгофа в работах [13] и [6]. Однако в [13] были рассмотрены только граничные условия Дирихле и Неймана, а в [6] — специфическое импедансное условие, при котором возникает поверхностная волна, причем авторов преимущественно интересовало поле в случае слияния поверхностной волны с дифрагированной и отраженной волнами. Кроме того, ранее не обсуждались границы применимости возникающих формул и не давалась геометрическая интерпретация аргументов соответствующих спецфункций.

В данной работе, как и в [8], большое внимание уделяется геометрическим рассуждениям, благодаря которым удастся подробно проследить за сшиванием неравномерных по углу асимптотических формул для окрестности предельного луча с классическими геометрическими формулами, непригодными в его окрестности. Практически для всех полученных выражений мы выписываем соответствующие погрешности, что позволяет точно указать границы их применимости. Помимо этого, геометрический анализ позволил проследить, как аргументы спецфункций зависят от формы границы и кривизны фронта падающей волны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифракцию на границе C , составленной из дуг двух касающихся окружностей разного радиуса. Точки на контуре будем характеризовать длиной дуги s , отсчитываемой от точки касания O (считаем, что $s > 0$ справа от O , рис. 1). Кривизна границы имеет вид

$$\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{a}_- + [\mathfrak{a}]\theta(s), \quad (3)$$

где

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

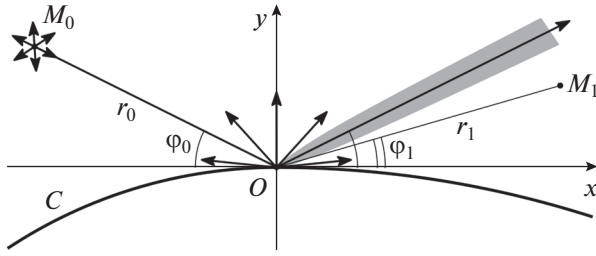


Рис. 1. Дифрагированная волна и переходная зона.

— функция Хевисайда;

$$[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_- \quad (5)$$

— амплитуда скачка кривизны (\mathfrak{a}_\pm — константы). Кривизна может быть положительной, отрицательной или знакопеременной. Важным геометрическим параметром задачи является величина

$$\kappa = \max\{|\mathfrak{a}_-|, |\mathfrak{a}_+|\}. \quad (6)$$

Введем декартову систему координат, как показано на рис. 1: начало координат расположено в точке скачка кривизны O , и ось x касается контура.

Предполагается гармоническая зависимость от времени вида $\exp(-i\omega t)$. Здесь ω — круговая частота, связанная с волновым числом k соотношением $\omega/c = k$, и $c = \text{const}$ — скорость распространения волн, которая принимается равной единице: $c = 1$. Полное волновое поле u над контуром C описывается уравнением Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (7)$$

где $M_0 = (x_0, y_0)$ — точка источника. Большим параметром в нашей задаче является величина

$$k/\kappa \gg 1. \quad (8)$$

На контуре выполнено импедансное граничное условие:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + ikg \right) u \Big|_C = 0. \quad (9)$$

Импеданс g предполагается постоянным. В предельных случаях $g = \infty$ и $g = 0$ условие (9) переходит в условие Дирихле и в условие Неймана соответственно. На бесконечности u удовлетворяет условию излучения.

В соответствии с (7) поле u разбивается на падающую и уходящую волны

$$u = u^{\text{пад}} + u^{\text{yx}}, \quad (10)$$

причем падающая волна возбуждается точечным источником колебаний, расположенным в точке M_0 , и имеет вид

$$u^{\text{пад}}(x, y) = G(x, y; x_0, y_0) := \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right). \quad (11)$$

Здесь введено обозначение для удовлетворяющей условию излучения функции Грина для уравнения Гельмгольца в свободном пространстве, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля. Предполагается, что падающая волна приходит в точку O некасательно.

Согласно ГТД (см., например, [13–15]), уходящее поле в грубом приближении есть сумма волн $u^{\text{отр}}$, геометрически отраженных от гладких частей контура, и волны $u^{\text{диф}}$, дифрагированной точкой негладкости границы:

$$u^{\text{yx}} = u^{\text{отр}} + u^{\text{диф}}. \quad (12)$$

Для некасательного падения лучевой метод (см., например, [19]) дает для $u^{\text{отр}}$ явное выражение, теряющее гладкость на предельном (геометрически отраженном в точке негладкости контура) луче.

Везде далее предполагается, что точка источника $M_0 = (x_0, y_0)$ и точка наблюдения $M_1 = (x_1, y_1)$ лежат на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от точки негладкости O :

$$kr_0 \gg 1, \quad kr_1 \gg 1. \quad (13)$$

Тогда дифрагированная волна $u^{\text{диф}}$ является цилиндрической волной:

$$u^{\text{диф}} = A(\varphi_0, \varphi_1; k) \frac{\exp(ik(r_0 + r_1))}{k\sqrt{r_0 r_1}} \times [1 + \mathcal{E}(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1; k)]. \quad (14)$$

Здесь $r_{0,1} = |OM_{0,1}|$ — расстояния от точки O до точек источника M_0 и наблюдения M_1 , $\varphi_{0,1}$ — углы между осью Ox и прямыми OM_0 и OM_1 соответственно (см. рис. 1), A — дифракционный коэффициент, а \mathcal{E} — неравномерная по углам погрешность. Для дифракции на негладких препятствиях (см., например, [3, 8, 15, 20, 21]) характерно обращение A и \mathcal{E} в бесконечность на предельном луче, где $\varphi_1 = \varphi_0$. В наших рассуждениях $\varphi_0 > 0$.

В области над границей u^{yx} удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Формула Грина (см., например, [15]) позволяет выразить поле u^{yx} в точке M_1 через значения собственно его и его нормальной производной на границе:

$$u^{\text{yx}}(x_1, y_1) = \int_C ds \left(u^{\text{yx}}(X, Y) \frac{\partial G}{\partial n}(X, Y; x_1, y_1) - G(X, Y; x_1, y_1) \frac{\partial u^{\text{yx}}}{\partial n}(X, Y) \right). \quad (15)$$

Здесь $X = X(s)$ и $Y = Y(s)$ – координаты переменной точки $N(s)$ на контуре C , $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к границе области. Метод Кирхгофа основан на подстановке в (15) геометрических аппроксимаций u^{yx} и $\partial u^{yx}/\partial n$ (см., например, [15]).

Нас интересует уходящее поле u^{yx} , во-первых, в области, где $kr_1 \sim 1$, и, во-вторых, в области, где $kr_1 \ll 1$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

2.1. Поле и его нормальная производная на границе

Согласно традиционному кирхгофовскому подходу [15], значения уходящего поля и его нормальной производной на границе принимаются равными соответственно:

$$\begin{aligned} u^{yx}(s) &= R(s)u^{\text{пад}}(s), \\ \frac{\partial u^{yx}}{\partial n}(s) &= -R(s)\frac{\partial u^{\text{пад}}}{\partial n}(s), \end{aligned} \quad (16)$$

где $u^{yx}(s) := u^{yx}(X(s), Y(s))$, а $R(s)$ – коэффициент отражения плоской волны от соответствующей плоской границы. Для импедансного граничного условия (9) он равен [22]

$$R(s) = \frac{\cos \alpha(s) - g}{\cos \alpha(s) + g}, \quad (17)$$

где $\alpha(s)$ – значение угла падения в точке контура $N(s)$. В предельных случаях Дирихле ($g = \infty$) и Неймана ($g = 0$) $R = -1$ и $R = 1$ соответственно. В отличие от работ [6, 21] мы предполагаем, что при $s = 0$ коэффициент отражения $R(s)$ не обращается в нуль или бесконечность.

2.2. Виртуальные лучи

Обозначим расстояние от произвольной точки контура $N(s) = (X(s), Y(s))$ до точки источника $M_0 = (x_0, y_0)$ через $l_0(s)$, а до точки наблюдения $M_1 = (x_1, y_1)$ через $l_1(s)$ (рис. 2):

$$\begin{aligned} l_{0,1}(s) &:= |NM_{0,1}| = \\ &= \sqrt{(X(s) - x_{0,1})^2 + (Y(s) - y_{0,1})^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что $r_{0,1} = l_{0,1}(0)$. Пользуясь асимптотической функцией Ганкеля [23]

$$H_0^{(1)}(L) = \sqrt{2/\pi L} \exp(iL - i\pi/4) (1 + O(L^{-1})), \quad (19)$$

$$L \gg 1,$$

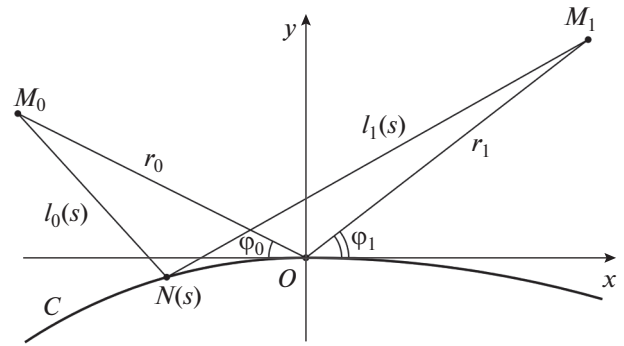


Рис. 2. Виртуальные лучи.

получим при $kl_{0,1}(s) \gg 1$

$$\begin{aligned} G(X, Y; x_{0,1}, y_{0,1}) &= \\ &= \frac{\exp(ikl_{0,1}(s) + i\pi/4)}{\sqrt{8\pi kl_{0,1}(s)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{kl_{0,1}(s)}\right) \right), \\ \frac{\partial G}{\partial n}(X, Y; x_{0,1}, y_{0,1}) &= \\ &= ik \frac{\partial l_{0,1}}{\partial n}(s) G(X, Y; x_{0,1}, y_{0,1}) \left(1 + O\left(\frac{1}{kl_{0,1}(s)}\right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Подынтегральная функция в (15) принимает вид

$$\begin{aligned} & - \frac{R(s)}{8\pi} \left(\frac{\partial l_0}{\partial n}(s) + \frac{\partial l_1}{\partial n}(s) \right) \frac{\exp(ik\tau(s))}{\sqrt{l_0(s)l_1(s)}} \times \\ & \times \left(1 + O\left(\frac{1}{kl_0(s)}\right) + O\left(\frac{1}{kl_1(s)}\right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь τ – длина ломаной $M_0N(s)M_1$:

$$\tau(s) = l_1(s) + l_0(s). \quad (22)$$

Таким образом, интеграл Кирхгофа ((15) с подстановкой (16) и (20)) имеет вид суммы вкладов виртуальных лучей $M_0N(s)M_1$. Поле в точке наблюдения, лежащей вблизи предельного луча, формируется в результате синфазного сложения виртуальных лучей, у которых точки $N(s)$ лежат вблизи O .

2.3. Разложения при малых s

Выражение для длины звена $N(s)M_{0,1}$ виртуального луча зависит от положения точки $N(s)$ относительно O . Обозначим ее $l_{0,1}^+$ в случае $s > 0$ и $l_{0,1}^-$ в случае $s < 0$. Раскладывая $l_{0,1}(s)$ (см. (18)) при малых s справа и слева от нуля до квадратич-

ных членов, в результате прямого вычисления получим²

$$l_0^\pm(s) = r_0 + s \cos \varphi_0 + \frac{s^2}{2} \left(\mp \sin \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{r_0} \right) + O \left(\frac{s^3}{r_0^2} (1 + \kappa^2 r_0^2) \right). \quad (23)$$

Выражения для l_1^\pm получаются заменой индекса 0 на 1 и знака плюс перед линейным по s членом на минус. Обозначения $r_{0,1}$ и $\varphi_{0,1}$ введены после (14), см. также рис. 2. Для длины виртуального луча (22) получаем

$$\begin{aligned} \tau_\pm(s) &= l_0^\pm(s) + l_1^\pm(s) = \\ &= r_0 + r_1 + s(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) + \\ &+ \frac{s^2}{2} \left(\mp (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1) + \frac{\sin^2 \varphi_0}{r_0} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{r_1} \right) + \\ &+ O \left(s^3 \left(\kappa^2 + \frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь следует взять индекс $+$ ($-$), если точка $N(s)$ лежит справа (слева) от O . Из (18) нетрудно получить, что

$$\partial l_{0,1}(s)/\partial n|_{s=0} = -\sin \varphi_{0,1}. \quad (25)$$

Подынтегральная функция (21) при малых s переписывается в виде

$$\begin{aligned} &\frac{R(0) \sin \varphi_0 + \sin \varphi_1}{8\pi \sqrt{r_0 r_1}} \exp(ik\tau_\pm(s)) \times \\ &\times \left[1 + O \left(\frac{1}{kr_0} + \frac{1}{kr_1} \right) + O \left(s \left(\kappa + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

2.4. Замена переменной в интеграле Кирхгофа

Для точки наблюдения M_1 , расположенной вблизи предельного луча, $\varphi_1 \approx \varphi_0$ (см. рис. 2), и выражение (24) мгновенно переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tau_\pm(s) &= r_0 + r_1 + s \sin \varphi_0 \delta\varphi + \\ &+ \frac{s^2}{2\rho} \sin^2 \varphi_0 \left(\frac{2\mp \rho}{\sin \varphi_0} + 1 \right) + \epsilon(s), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\epsilon(s) = O(s(\delta\varphi)^2) + O(s^2 \delta\varphi(\kappa + r_0^{-1} + r_1^{-1})) + O(s^3(\kappa^2 + r_0^{-2} + r_1^{-2}))$. Здесь введены важные для дальнейшего изложения обозначения

$$\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0, \quad \rho = r_0 r_1 / (r_0 + r_1). \quad (28)$$

Величина ρ часто встречается при описании полей в областях слияния двух цилиндрических волн (см., например, [24, 25]). Очевидно, что если κr_1

много меньше или порядка единицы, то $\kappa\rho$ тоже много меньше или порядка единицы. Везде далее

$$\kappa\rho \gg 1, \quad (29)$$

что равносильно (13)³.

Перейдем в интеграле Кирхгофа к безразмерной переменной

$$p = s\sqrt{k/\rho} \sin \varphi_0 \exp(-i\pi/4). \quad (30)$$

Поскольку падающая волна приходит в точку O некасательно, $\sin \varphi_0 > 0$. Фаза подынтегральной функции $ik\tau_\pm$ принимает вид

$$\begin{aligned} ik\tau_\pm &= ik(r_0 + r_1) - (\xi p + J_\pm p^2/2) + \\ &+ O((p\xi + p^2)\delta\varphi) + O(p^3/\sqrt{k\rho}). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь введены обозначения

$$\xi = \sqrt{k\rho} \delta\varphi \exp(-i\pi/4), \quad (32)$$

$$J_\pm = 1 + 2\mp \rho / \sin \varphi_0, \quad (33)$$

см. (28). В случае выпуклого контура $2\mp \rho / \sin \varphi_0 > 0$, и $J_\pm \sim 1$ как при $\kappa\rho \ll 1$, так и при $\kappa\rho \sim 1$. Если же контур имеет вогнутый участок, например $\mp < 0$, то J_- обращается в нуль при $\rho = -\sin \varphi_0 / 2\mp$, что соответствует каустике. В таком случае мы ограничимся рассмотрением области, где $\rho + \sin \varphi_0 / 2\mp$ не мало, и тогда $J_\pm \sim 1$.

2.5. Разбиение интеграла и упрощение подынтегрального выражения

Следуя стандартной схеме (см., например, [6, 13]), представим интеграл Кирхгофа в виде суммы двух интегралов по участкам $p < 0$ и $p > 0$, на которых подынтегральная функция гладкая. Возникшие интегралы исследуем с помощью традиционных приемов (см., например, [26]): упрощаем подынтегральное выражение для малых p , удерживая квадратичные члены в фазе и главные члены в амплитуде, переносим малые члены из фазы в амплитуду и распространяем интегрирование на промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ соответственно.

Таким образом, учитывая (26), (30) и (31), получаем выражение для уходящего поля вблизи предельного луча

$$u^{yx} \approx \frac{R(0) \exp(i\pi/4) \exp(ik(r_0 + r_1))}{4\pi \sqrt{k(r_0 + r_1)}} (I_- + I_+), \quad (34)$$

² Здесь использованы выведенные в Приложении выражения (П.4) для координат точки, лежащей на границе.

³ Это видно из равносильности неравенства $1/\kappa\rho = 1/kr_0 + 1/kr_1 \leq 1$ паре неравенств $1/kr_0 \leq 1$ и $1/kr_1 \leq 1$.

где

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^0 dp \exp\left(\pm \xi p - J_{\pm} \frac{p^2}{2}\right) (1 + \epsilon(p)), \quad (35)$$

причем

$$\epsilon(p) = O(\delta\varphi) + O(1/k\rho) + O(p\sqrt{k\rho}(\delta\varphi)^2) + O(p^2\delta\varphi) + O(p^3/\sqrt{k\rho}).$$

3. ДЕТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

3.1. Асимптотика уходящего поля вблизи предельного луча при $k\rho \sim 1$

Рассмотрим сначала поле в области, где $k\rho \sim 1$. Перейдем в интегралах I_{\pm} к переменным $p\sqrt{J_{\pm}/2} \mp \xi/\sqrt{2J_{\pm}}$, после чего интегралы легко переписываются в виде

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^0 dp \exp\left(\pm \xi p - J_{\pm} \frac{p^2}{2}\right) (1 + \epsilon(p)) = \sqrt{\frac{2\pi}{J_{\pm}}} \exp\left(\frac{\xi^2}{2J_{\pm}}\right) \Phi\left(\mp \frac{\xi \exp(i\pi/4)}{\sqrt{2J_{\pm}}}\right) (1 + \epsilon), \quad (36)$$

где Φ — интеграл Френеля [15],

$$\Phi(t) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t dq \exp(iq^2), \quad (37)$$

а $\epsilon = O(\sqrt{k\rho}(\delta\varphi)^2) + O(1/\sqrt{k\rho})$. Оценка погрешности получена тем же способом, что и в [8].

Введем обозначение для выражения, входящего в аргументы интегралов Френеля в (36):

$$\xi = \xi \exp(i\pi/4)/\sqrt{2} = \sqrt{k\rho/2} \delta\varphi, \quad (38)$$

см. (32). Величина ξ характерна для аргументов спецфункций, описывающих поля в областях слияния двух цилиндрических волн. Когда источник удаляется на бесконечность вдоль фиксированного направления ($k\rho_0 \gg 1$, $\varphi_0 = \text{const}$), ξ переходит в величину (2), типичную для областей слияния цилиндрической и плоской волн.

Формула (34) для уходящего поля принимает вид

$$u^{yx} = \frac{R(0)}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(ik(r_1 + r_0) + \frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{k(r_1 + r_0)}} \times \left(A_- \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{J_-}}\right) + A_+ \Phi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{J_+}}\right) \right) (1 + \epsilon), \quad (39)$$

где ϵ определено после (37), а

$$A_{\pm} = \exp(-i\xi^2/J_{\pm})/\sqrt{J_{\pm}}. \quad (40)$$

Похожая формула была получена в работе [6], в которой авторы не следили за остаточными членами. В предельных случаях Дирихле и Неймана формула согласуется с выражением, полученным в [13] для плоской падающей волны.

В задачах дифракции цилиндрической волны на клине [24] и плоской волны на ленте [25] переменная ξ выступала как аргумент специальных функций, описывавших поля в переходных зонах. В [6], где рассматривалась дифракция цилиндрической волны на криволинейной границе с разрывом кривизны, аргументами таких функций были, как и в (39), отношения $\xi/\sqrt{J_{\pm}}$. В случае клина и ленты кривизна гладких участков границы равняется нулю, и $J_{\pm} = 1$. Отметим, что, когда $\alpha_{\pm} = 0$, формула (39) описывает поле, отраженное от соответствующей плоской границы.

3.2. Асимптотика уходящего поля при $|\xi| \gg 1$

Асимптотика интеграла Френеля имеет вид [15]

$$\Phi(t) = \theta(t) - \frac{\exp(it^2 - i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{i}{t} + \frac{1}{2t^3} + O\left(\frac{1}{t^5}\right) \right), \quad |t| \gg 1. \quad (41)$$

Отметим, что $\theta(t)$ равно нулю при отрицательных t и равно единице для положительных t . При $|\xi| \gg 1$

$$\begin{aligned} A_- \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{J_-}}\right) &= A_- \theta(\xi) - \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}\xi} - \frac{J_- \exp(-i\pi/4)}{4\sqrt{\pi}\xi^3} + O\left(\frac{1}{\xi^5}\right), \\ A_+ \Phi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{J_+}}\right) &= A_+ \theta(-\xi) + \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}\xi} + \frac{J_+ \exp(-i\pi/4)}{4\sqrt{\pi}\xi^3} + O\left(\frac{1}{\xi^5}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Из формулы (39), в результате сокращения вторых слагаемых в правых частях (42) получим

$$u^{yx} = \frac{R(0)}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(ik(r_1 + r_0) + \frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{k(r_1 + r_0)}} \times \left(A_- \theta(\xi) + A_+ \theta(-\xi) - \frac{J_-}{4\sqrt{\pi}\xi^3} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^5}\right) \right) \times (1 + \epsilon), \quad |\xi| \gg 1, \quad (43)$$

где A_{\pm} определены в (40), а погрешность ϵ — после (37). Интересно, что величины J_{\pm} (см. (33)) связаны с геометрическими расхождениями \mathcal{J}_{\pm} цилиндрических волн, отраженных от дуг окружностей с радиусами α_{\pm}^{-1} [19]:

$$\mathcal{J}_{\pm} = r_0 + r_1 + 2\alpha_{\pm} r_0 r_1 / \sin \varphi_0 = (r_0 + r_1) J_{\pm}. \quad (44)$$

С использованием выражений (38) и (44) формула (43) переписывается в геометрических терминах:

$$u^{yx} = \frac{R(0)}{2\sqrt{2\pi}} \exp(ik(r_1 + r_0) + i\pi/4) \times \\ \times [\mathcal{A}_-\theta(\delta\varphi) + \mathcal{A}_+\theta(-\delta\varphi)](1 + \varepsilon) + \\ + \frac{[\mathfrak{a}]R(0)}{2\pi \sin \varphi_0 (\delta\varphi)^3} \frac{\exp(ik(r_1 + r_0))}{k^2 \sqrt{r_0 r_1}} \times \\ \times (1 + \hat{\varepsilon}), \quad k\rho(\delta\varphi)^2 \gg 1. \quad (45)$$

Здесь

$$\mathcal{A}_\pm = \exp(-ikr_0 r_1 (\delta\varphi)^2 / 2\mathcal{J}_\pm) / \sqrt{k\mathcal{J}_\pm} = \\ = A_\pm / \sqrt{k(r_0 + r_1)}, \quad (46)$$

см. (40), а погрешность имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = O(\sqrt{k\rho}(\delta\varphi)^2) + O(1/(k\rho(\delta\varphi)^2)).$$

Первое слагаемое в правой части отлично от нуля для положительных $\delta\varphi$ и соответствует волне, отраженной от контура слева от точки O . Второе слагаемое отлично от нуля при отрицательных $\delta\varphi$ и отвечает волне, отраженной от контура справа от точки O . Третье слагаемое описывает дифрагированную волну, ее диаграмма направленности согласуется с формулами, полученными методом пограничного слоя в [3, 8], где рассматривалась плоская падающая волна.

Остаточные члены в (45) малы при выполнении неравенств (29), $k\rho(\delta\varphi)^4 \ll 1$ и

$$k\rho(\delta\varphi)^2 \gg 1. \quad (47)$$

Последнее условие означает, что точка наблюдения не слишком близка к предельному лучу.

В Приложении показано, что выражения для отраженных волн в (45) согласуются с лучевыми формулами [19] в области, где выполнено неравенство

$$k\rho|\delta\varphi|^3 \ll 1, \quad (48)$$

характеризующее ширину переходной зоны (отсюда вытекает малость $k\rho(\delta\varphi)^4$).

3.3. Волновое поле в области $k\rho \ll 1$

Рассмотрим теперь область, где $k\rho \ll 1$ (но $k\rho \gg 1$, см. (29)). Покажем, что выражение (39), полученное выше методом Кирхгофа, согласуется с выглядящей качественно иначе формулой (1), полученной в [8] методом пограничного слоя. Учитывая выражения (33), перепишем фазы экспонент в (35) в виде

$$-\xi p - J_\pm \frac{p^2}{2} = -\xi p - \frac{p^2}{2} - \frac{\mathfrak{a}_\pm \rho}{\sin \varphi_0} p^2. \quad (49)$$

Поскольку $k\rho \ll 1$, последнее слагаемое мало. Перенесем его в амплитуду и получим

$$I_\pm = \int_0^{+\infty} dp \exp\left(\mp \xi p - \frac{p^2}{2}\right) \times \\ \times \left(1 - \frac{\mathfrak{a}_\pm \rho}{\sin \varphi_0} p^2 + O(p^4 \kappa^2 \rho^2)\right) (1 + \epsilon(p)) = \\ = \int_0^{+\infty} dp \exp\left(\mp \xi p - \frac{p^2}{2}\right) (1 + \epsilon(p)) - \\ - \frac{\mathfrak{a}_\pm \rho}{\sin \varphi_0} \int_0^{+\infty} dp p^2 \exp\left(\mp \xi p - \frac{p^2}{2}\right) \times \\ \times (1 + \epsilon(p) + O(p^2 \kappa \rho)). \quad (50)$$

Сумма интегралов I_\pm принимает вид (поправочные члены не приводим)

$$I_+ + I_- \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(-\xi p - \frac{p^2}{2}\right) - \frac{\mathfrak{a}_- \rho}{\sin \varphi_0} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dp p^2 \exp\left(-\xi p - \frac{p^2}{2}\right) - \\ - \frac{[\mathfrak{a}]\rho}{\sin \varphi_0} \int_0^{+\infty} dp p^2 \exp\left(-\xi p - \frac{p^2}{2}\right) = \\ = \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathfrak{a}_- \rho}{\sin \varphi_0} (\xi^2 + 1)\right) - \\ - \frac{2[\mathfrak{a}]\rho}{\sin \varphi_0} \exp\left(\frac{\xi^2}{4}\right) D_{-3}(\xi). \quad (51)$$

Здесь мы явно выделили линейный по амплитуде скачка кривизны $[\mathfrak{a}]$ член и воспользовались интегральным представлением для функции параболического цилиндра [23]:

$$D_\nu(t) = \frac{\exp(-t^2/4)}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} dp p^{-\nu-1} \exp\left(-tp - \frac{p^2}{2}\right), \quad (52) \\ \nu < 0,$$

а первые два интеграла вычислили, пользуясь тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \exp(-\beta q^2) = \sqrt{\pi/\beta}$$

(см. [23]). Подставляя (51) в выражение для полного поля (34), получим

$$u^{yx} = \frac{R(0) \exp(ik(r_1 + r_0) + i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{k(r_1 + r_0)}} \times \\ \times (U_0 + U_1 + V_1). \quad (53)$$

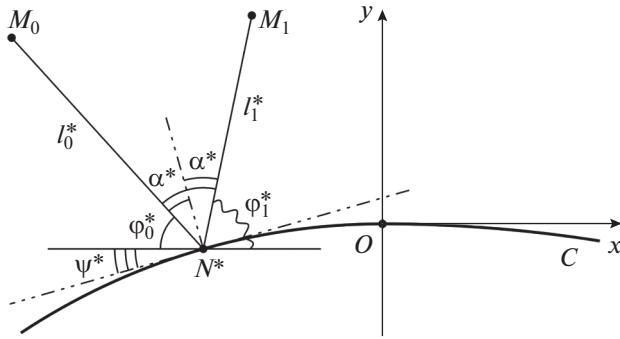


Рис. 3. Геометрическое отражение.

Здесь

$$U_0 = \exp(-i\xi^2)(1 + \varepsilon_1), \quad (54)$$

$$U_1 = \frac{\varkappa_0 \rho}{\sin \varphi_0} (2i\xi^2 - 1) \exp(-i\xi^2)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (55)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{[\varkappa] \rho}{\sin \varphi_0} \exp\left(-i\frac{\xi^2}{2}\right) \times \times D_{-3}\left(\sqrt{2}\xi \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (56)$$

$\xi = \sqrt{k\rho/2} \delta\varphi$, погрешности имеют вид

$$\varepsilon_1 = O(1/k\rho) + O(k\rho(\delta\varphi)^3),$$

$$\varepsilon_2 = O(k\rho) + O(k\rho^2(\delta\varphi)^2).$$

Поправочные члены малы при выполнении условий (29), (48) и

$$k\rho \ll 1, \quad k\rho^2(\delta\varphi)^2 \ll 1. \quad (57)$$

В Приложении показано, что в области, где справедливы неравенства (29), (48) и (57), первые два слагаемых в (53) соответствуют геометрически отраженной волне. Главный (относительно малого параметра $k\rho$) член, отвечающий U_0 , описывает отраженную волну в главном приближении и представляет собой волну от мнимого (отраженного относительно оси Ox) источника. Члены,

отвечающие U_1 и V_1 , учитывают влияние кривизны границы.

Выражение для линейного по $[\varkappa]$ члена для граничных условий Дирихле ($R(0) = -1$) при удалении источника на бесконечность ($k\rho_0 \gg 1$ с выполнением условий (57)) согласуется с формулой (1), полученной в рамках погранслошной техники для случая падения плоской волны [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода Кирхгофа найдены выражения для уходящего поля в переходной зоне на умеренных и малых расстояниях от границы (кр порядка единицы или мало). Детально изучены области их применимости. Установлено, что ширина переходной зоны характеризуется неравенством $k\rho(\delta\varphi)^3 \ll 1$, см. (48). Показано, что в случае, когда точка наблюдения находится на малых расстояниях от границы ($k\rho \ll 1$), найденные асимптотики согласуются с полученными в [8] методом пограничного слоя. Приемы, использованные в работе, могут быть применены в задачах дифракции на препятствиях с кривизной, имеющих более слабые особенности [20, 21].

ПРИЛОЖЕНИЕ

АНАЛИЗ ЛУЧЕВОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

Проанализируем классическую (см., например, [19]) лучевую формулу для отраженной волны $u^{\text{отр}}$ в окрестности предельного луча на умеренных ($k\rho \sim 1$) и на малых ($k\rho \ll 1$) расстояниях от точки негладкости O . Это позволит определить области пригодности полученных выше формул.

П.1. Формула лучевого метода

В случае гладкой границы лучевой метод [19] дает для геометрически отраженной волны следующую формулу:

$$u^{\text{отр}}(M_1) = \frac{R^*}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(ik\tau^* + i\pi/4)}{\sqrt{k\mathcal{J}^*}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k\mathcal{J}^*}\right)\right), \quad \mathcal{J}^* = l_0^* + l_1^* + \frac{2\varkappa^* l_0^* l_1^*}{\cos \alpha^*}. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $l_{0,1}^*$ — расстояния соответственно от точек источника M_0 и наблюдения M_1 до точки геометрического отражения N^* , $\tau^* = l_0^* + l_1^*$ — значение эйконала в точке M_1 (геометрическое время пробега), α^* — угол падения в точке N^* , \varkappa^* — значение кривизны в точке N^* , R^* — коэффициент отражения в точке N^* (рис. 3). Для границы, кривизна которой имеет скачок в точке O , выражение (П.1)

правильно описывает волны, геометрически отраженные от гладких частей границы справа и слева от O . Однако выражение (П.1) имеет разрыв на предельном луче и поэтому непригодно в узкой его окрестности⁴.

⁴ В работе [27] показано, что в случае разрыва кривизны при постановке выражения (П.1) в уравнение Гельмгольца на предельном луче возникают дельта-функция и ее производные.

Упростим лучевую формулу (П.1) для точек наблюдения M_1 , лежащих вблизи предельного луча, $|\delta\varphi| \ll 1$, подобно тому как это сделано в [8, 20] для случая падения плоской волны. Умеренные и малые расстояния рассмотрим по отдельности.

П.2. Умеренные расстояния

Пусть сначала $\kappa\rho \sim 1$. Получим выражение для длины дуги s^* , соответствующей точке отражения N^* (см. рис. 3). Ясно, что для точек наблюдения из узкой окрестности предельного луча ($|\delta\varphi| \ll 1$) точка отражения лежит вблизи O , т.е. s^* мало.

Согласно закону геометрического отражения

$$\varphi_0^* + \psi^* = \varphi_1^* - \psi^*, \quad (\text{П.2})$$

где $\varphi_{0,1}^* = \varphi_{0,1}(s^*)$ — углы между осью Ox и прямыми $N_*M_{0,1}$, $\psi^* = \psi(s^*)$ — угол наклона касательной к контуру в точке N^* (см. рис. 3). Из (П.2) следует равенство $\text{tg}\varphi_0^* = \text{tg}(\varphi_1^* - 2\psi^*)$. Это записывается через координаты в виде

$$\begin{aligned} -T(x_0, y_0) &= \frac{T(x_1, y_1) - \text{tg}2\psi^*}{1 + T(x_1, y_1)\text{tg}2\psi^*}, \\ T(x_{0,1}, y_{0,1}) &= \frac{x_{0,1} - X^*}{y_{0,1} - Y^*}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Здесь $X^* = X(s^*)$ и $Y^* = Y(s^*)$ — декартовы координаты точки N^* .

Поскольку граница состоит из дуг окружностей (см. (3)), легко получим:

$$\begin{aligned} \psi^* &= -\alpha s^*, \quad X^* = s^* + O(\kappa^2 (s^*)^3), \\ Y^* &= -\alpha (s^*)^2/2 + O(\kappa^2 (s^*)^3). \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

После подстановки (П.4) в (П.3) прямое вычисление, использующее малость s^* , дает

$$\begin{aligned} \sin\delta\varphi + s^* \left(2\alpha^* + \frac{\sin\varphi_0}{r_0} + \frac{\sin\varphi_1}{r_1} \right) + \\ + O(\kappa(r_0 + r_1)(s^*)^2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Учитывая, что $|\delta\varphi| \ll 1$ и пользуясь (44), в результате некоторых выкладок получаем из (П.5):

$$\begin{aligned} s^* &= -\frac{r_0 r_1 \delta\varphi}{\sin\varphi_0} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\mathcal{F}_-} + \theta(-\delta\varphi) \left(\frac{1}{\mathcal{F}_+} - \frac{1}{\mathcal{F}_-} \right) \right) (1 + O(\delta\varphi)). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Здесь использовано выражение для кривизны контура (3).

Теперь упростим фазу экспоненты в лучевой формуле (П.1). При N^* , близких к O , значение эйконала $\tau^* = l_0^* + l_1^*$ в точке M_1 записывается вполне аналогично (27):

$$\begin{aligned} \tau^* &= r_0 + r_1 + s^* \sin\varphi_0 \delta\varphi + \\ &+ \frac{(s^*)^2}{2r_0 r_1} \sin^2\varphi_0 (\mathcal{F}_- + \theta(s^*)(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-)) + \\ &+ O(s^*(\delta\varphi)^2) + O((s^*)^2 \delta\varphi/\rho) + O((s^*)^3/\rho^2). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Подставляя сюда (П.6) и снова учитывая малость $\delta\varphi$, получим выражение для фазы экспоненты в (П.1):

$$\begin{aligned} ik\tau^* &= ik(r_1 + r_0) - ik \frac{r_0 r_1}{2} (\delta\varphi)^2 \times \\ &\times \left(\frac{1}{\mathcal{F}_-} + \theta(-\delta\varphi) \left(\frac{1}{\mathcal{F}_+} - \frac{1}{\mathcal{F}_-} \right) \right) + O(k\rho(\delta\varphi)^3). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Поправочный член мал при условии (48).

Аналогичным образом упростим выражение в знаменателе формулы (П.1):

$$\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}_- + \theta(-\delta\varphi)(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-))(1 + O(\delta\varphi)).$$

Перенесем последнее слагаемое в (П.8) в амплитуду и получим упрощенный вид лучевой формулы при $\kappa\rho \sim 1$ и $|\delta\varphi| \ll 1$:

$$u^{\text{отр}} = \frac{R(0)}{2\sqrt{2\pi}} \exp \left(ik(r_1 + r_0) + i\frac{\pi}{4} \right) (\mathcal{A}_- + \theta(-\delta\varphi)(\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-)) (1 + O(k\rho(\delta\varphi)^3)), \quad (\text{П.9})$$

см. (46). Формула (45) согласуется с (П.9) в области, где выполнены неравенства (47) и (48).

(см. (29)). Преобразуем формулу (П.9). Очевидно,

$$\frac{r_0 r_1}{\mathcal{F}_\pm} = \frac{\rho}{1 + 2\alpha_\pm \rho / \sin\varphi_0} = \rho - \frac{2\alpha_\pm \rho^2}{\sin\varphi_0} + O(\kappa^2 \rho^3), \quad (\text{П.10})$$

Обратимся теперь к случаю, когда точка наблюдения M_1 близка к O , $\kappa\rho \ll 1$, но $k\rho \gg 1$

и выражение (П.9) переписывается в виде

$$u^{\text{отр}} \approx \frac{R(0) \exp\left(ik(r_1 + r_0 - \rho(\delta\varphi)^2/2) + i\pi/4\right)}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{k(r_0 + r_1)}} \left(1 + (\varepsilon_- + [\varepsilon]\theta(-\delta\varphi)) \frac{\rho(ik\rho(\delta\varphi)^2 - 1)}{\sin\varphi_0}\right). \quad (\text{П.11})$$

Формула (П.11) получена в предположении, что выполнены неравенства (48) и (57)⁵. В главном (относительно параметра $k\rho \ll 1$) приближении отраженная волна представляет собой волну от мнимого источника, соответствующего прямолинейной границе. Следующие члены учитывают влияние кривизны.

Из (П.11) явствует, что слагаемые в (53), отвечающие U_0 и U_1 , в области своей пригодности соответствуют геометрически отраженной волне.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны А.В. Попову за полезные обсуждения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00627).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weston V.H.* // IRE Trans. 1962. V. AP-10. № 6. P. 775.
2. *Weston V.H.* // IEEE Trans. 1965. V. AP-13. № 4. P. 611.
3. *Kaminetzky L., Keller J.B.* // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22. № 1. P. 109.
4. *Senior T.B.A.* // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. № 3. P. 323.
5. *Bouche D.* // Ann. Télécommunic. 1992. V. 47. № 9–10. P. 391.
6. *Rogoff Z.M., Kiselev A.P.* // Wave Motion. 2001. V. 33. № 2. P. 183.
7. *Bouche D.P., Aguilera P., Loillier S.* // Proc. Int. Conf. on Electromagnetics in Adv. App. (ICEAA), Verona, 11–15 Sep. 2017. N.Y.: IEEE, 2017. P. 531.
8. *Zlobina E.A., Kiselev A.P.* // Wave Motion. 2020. V. 96. P. 102671.
9. *Попов А.В.* // Тр. V Всес. симпози. по дифракции и распространению волн. Ленинград, 13–17 июня 1970. Л.: Наука, 1971. С. 171.
10. *Michaeli A.* // IEEE Trans. 1990. V. AP 38. № 6. P. 929.
11. *Кирпичникова Н.Я., Филиппов В.Б., Кирпичникова А.С.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1999. Т. 267. С. 75.
12. *Kirpichnikova A.S., Philippov V.B.* // IEEE Trans. 2001. V. AP-49. № 12. P. 1618.
13. *James G.L.* Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves. L: IEEE Electromagnetic. Ser. 1., 1986.
14. *Keller J.B.* // J. Opt. Soc. Amer. 1962. V. 52. № 5. P. 116.
15. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
16. *Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 10. С. 1155.
17. *Крюковский А.С.* Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РсНОУ, 2013.
18. *Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
19. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
20. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 2. С. 35.
21. *Злобина Е.А.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 493. С. 169.
22. *Бреховских Л.М., Гордин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
23. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
24. *Уфимцев П.Я.* Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2012.
25. *Попов А.В.* // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 4. С. 594.
26. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматлит, 1962.
27. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т. 471. С. 113.

⁵ Аналогичные (П.11) выражения были получены в случае отражения плоской волны от границы с негладкой кривизной (как разрывной [8], так и непрерывной [20, 21]). Область их применимости описывалась неравенствами (57), а выполнения (48) не требовалось.