Математические заметки

Том 114 выпуск 3 сентябрь 2023

УДК 517.928.1

Аппроксимация функций Матье функциями параболического цилиндра

Е. А. Злобина

Рассматривается классическое уравнение Матье с комплексными коэффициентами специального вида. Строятся простые неравномерные асимптотики его решений в терминах функций параболического цилиндра.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: уравнение Матье, асимптотические методы, функции параболического цилиндра.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13975

1. Введение. Решения уравнения Матье, традиционно записываемого в виде

$$u''(x) + (\lambda - 2q\cos 2x)u(x) = 0,$$

имеют широкое применение как в математических, так и в физических задачах. Асимптотики функций Матье исследовались в многочисленных работах (см. например, [1]–[6], а также литературу в [7]), где роль большого параметра играли величины λ, q или λ/q, и для вещественных λ и q были построены равномерные по x асимптотические формулы.

Мы обращаемся к ранее не обсуждавшемуся случаю, когда коэффициенты в уравнении Матье, которое нам удобно переписать следующим образом:

$$u''(x) + (a + b\sin^2 x)u(x) = 0, \tag{1.1}$$

принимают значения

$$a = -ik(2\nu+1), \qquad b = k^2, \tag{1.2}$$

где

$$\nu \leqslant -1, \qquad k \to +\infty.$$

Рассмотрение этого случая мотивировано изучением задач дифракции на контурах с негладкой кривизной. В этих задачах возникают высокочастотные пограничные слои, для описания которых удобны простые аппроксимации решений (1.1)–(1.2)

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Л. Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-287 от 06.04.2022).

при вещественных значениях x, малых по сравнению с k [8]. Мы строим соответствующие приближения в терминах функций параболического цилиндра D_ν [9], удовлетворяющих уравнению

$$D''_\nu(z) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) D_\nu(z) = 0 \tag{1.3}$$

с начальными данными

$$D_\nu(0) = \frac{2^{\nu/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\nu)/2)}, \qquad D'_\nu(0) = -\frac{2^{(\nu+1)/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)} \tag{1.4}$$

(здесь Γ – гамма-функция). Нашей целью является построение простых неравномерных асимптотических формул.

Отметим, что функции параболического цилиндра допускают удобную равномерную аппроксимацию функциями Эйри [10], однако лишь на вещественной оси и при $\nu \geqslant -1/2$ – нам же важен только случай $\nu \leqslant -1$.

2. Формулировка и доказательство результата.

Теорема 1. *Уравнения Матье* (1.1) *с параметрами* (1.2) *имеет решение* $u(x)$, *такое что при отрицательных* x, *в области*

$$-Ck^{-1/4-\varepsilon} < x \leqslant 0, \tag{2.1}$$

для него справедливо представление

$$u(x) = D_\nu\bigl(-\sqrt{2k}xe^{-i\pi/4}\bigr)\bigl(1 + O(k^{-4\varepsilon})\bigr), \tag{2.2}$$

а при положительных x, *в области*

$$0 \leqslant x < Ck^{-1/2+1/(3(1-\nu))-\varepsilon}, \tag{2.3}$$

– представление

$$u(x) = D_\nu(-\sqrt{2k}xe^{-i\pi/4})(1 + O(k^{-3(1-\nu)\varepsilon})). \tag{2.4}$$

Здесь $C > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *– константы, не зависящие от* k.

Замечание 1. Хотя уравнение (1.3) возникает из уравнения (1.1) при замене $\sin x$ на x, предполагающей малость x, асимптотика (2.2), (2.4) пригодна в области, где аргумент функции D_ν может принимать большие значения, и, соответственно, u осциллирует. Область пригодности аппроксимации при отрицательных x не зависит от параметра ν (см. (2.1)), а при положительных x она сужается с увеличением $|\nu|$ (см. (2.3)).

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 1. 1. Сделаем в уравнении (1.1) с параметрами (1.2) замену переменной

$$z = -\sqrt{2k}xe^{-i\pi/4}. \tag{2.5}$$

и положим
$$u(x) = w(z(x)).$$
Тогда w удовлетворяет уравнению
$$w''(z) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) w(z) = R(z) w(z), \tag{2.6}$$
где
$$R(z) = -\frac{z^2}{4} - \frac{ik}{2} \sin^2\left(\frac{z e^{i\pi/4}}{\sqrt{2k}}\right).$$
Вещественным значениям x отвечают z, лежащие на прямой $\mathbb{R}e^{-i\pi/4}$.

Для R, очевидно, при каждом из условий (2.1) и (2.3) справедлива оценка
$$|R(z)| < C\frac{|z|^4}{k}. \tag{2.7}$$
Здесь и далее C – положительная константа, не зависящая от k.

2. Уравнение (2.6) стандартным образом [11] сводится к уравнению Вольтерра
$$w(z) = D_\nu(z) + \int_0^z M(z,t) R(t) w(t)\, dt \tag{2.8}$$
на прямой $\mathbb{R}e^{-i\pi/4}$. Здесь
$$M(z,t) = \big[D_\nu(t) D_{-\nu-1}(iz) - D_\nu(z) D_{-\nu-1}(it)\big] e^{i\pi(\nu+1)/2}, \tag{2.9}$$
а $D_\nu(z)$ и $D_{-\nu-1}(iz)$ – два линейно независимых решения уравнения (1.3), см. [9], вронскиан которых равен
$$W[D_\nu(z), D_{-\nu-1}(iz)] = e^{-i\pi(\nu+1)/2}.$$

При $\nu \leqslant -1$ функция $D_\nu(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ имеет бесконечно много нулей, приближающихся на бесконечности к лучам $\arg z = \pm 3\pi/4$, но не лежащих на них, а в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ не обращается в нуль [7]. Тогда $w(z)$ на прямой $\mathbb{R}e^{-i\pi/4}$ допускает представление
$$w(z) = D_\nu(z) v(z) \tag{2.10}$$
с функцией $v(z)$, удовлетворяющей уравнению
$$v(z) = 1 + \int_0^z \mu(z,t) R(t) v(t)\, dt, \tag{2.11}$$
где
$$\mu(z,t) = \frac{D_\nu(t)}{D_\nu(z)} M(z,t), \tag{2.12}$$
см. (2.8) и (2.9).

Мы будем рассматривать уравнение (2.11) отдельно для $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$ и для $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ (отвечающих отрицательным и положительным x, соответственно, см. (2.5)).

3. Пусть сначала $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$.

Оценим $\mu(z,t)$ в области, где выполнено (2.1). В секторе $-3\pi/4 < \arg z < 3\pi/4$ функция $D_\nu(z)$ имеет асимптотику [9]

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right),$$

откуда, с учетом (1.4), следует, что

$$|D_\nu(z)| < C(1+|z|)^\nu, \qquad |D_\nu^{-1}(z)| < C(1+|z|)^{-\nu}, \qquad |D_{-\nu-1}(iz)| < C(1+|z|)^{-\nu-1}.$$

Тогда

$$\left|\frac{D_\nu(t)}{D_\nu(z)} M(z,t)\right| \leqslant \left|\frac{D_\nu^2(t) D_{-\nu-1}(iz)}{D_\nu(z)}\right| + |D_\nu(t) D_{-\nu-1}(t)| < C(1+|t|)^{2\nu}(1+|z|)^{-2\nu-1}, \quad |t| \leqslant |z|,$$

и справедлива

Лемма 1. *Пусть $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$, $t \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$ и $|t| \leqslant |z|$. Тогда функция $\mu(z,t)$, см.* (2.12), *удовлетворяет оценке*

$$|\mu(z,t)| < C(1+|t|)^{2\nu}(1+|z|)^{-2\nu-1}.$$

Решая уравнение (2.11) на полуоси $z \in \mathbb{R}_+ e^{-i\pi/4}$ итерациями, с помощью неравенства (2.7) и леммы 1 получим, что при $\nu \neq -5/2$

$$|v(z) - 1| \leqslant \left|\int_0^z \mu(z,t) R(t)\, dt\right| < C \frac{(1+|z|)^{-2\nu-1}}{k} \int_0^{|z|} (1+s)^{2\nu} s^4\, ds < C \frac{|z|^4}{k}. \tag{2.13}$$

В случае $\nu = -5/2$ левая часть (2.13) оценивается через $C|z|^4 \ln|z|/k$, что в свою очередь не превосходит $C|z|^{4+\delta}/k$, где $\delta > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Значит, при всех $\nu \leqslant -1$ выполнена оценка

$$|v(z) - 1| < C \frac{|z|^{4+\delta}}{k},$$

откуда, с учетом (2.10), вытекает справедливость представления (2.2) в области (2.1).

4. Рассмотрим теперь уравнение (2.11) при $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$.

Оценим функцию $\mu(z,t)$ (2.12) в области, где выполнено (2.3). В секторе $\pi/4 < \arg z < 5\pi/4$ функция D_ν имеет асимптотику [9]

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{i\pi\nu} z^{-\nu-1} e^{z^2/4}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right), \tag{2.14}$$

а асимптотика в секторе $-5\pi/4 < \arg z < -\pi/4$ отличается от (2.14) лишь заменой $e^{i\pi\nu}$ на $e^{-i\pi\nu}$ во втором слагаемом. Отсюда, с учетом (1.4), вытекают неравенства

$$|D_\nu(z)| < C(1+|z|)^{-\nu-1}, \qquad |D_{-\nu-1}(iz)| < C(1+|z|)^{-\nu-1}. \tag{2.15}$$

Оценка же $D_\nu^{-1}(z)$ осложняется тем, что корни $D_\nu(z)$ приближаются на бесконечности к лучу $\arg z = 3\pi/4$ [7]. Для больших по модулю корней $z_{\nu,n}$ справедливо асимптотическое выражение [7]

$$z_{\nu,n} = e^{3i\pi/4}\sqrt{2\tau_{\nu,n}}\biggl(1 + O\biggl(\frac{\ln \tau_{\nu,n}}{\tau_{\nu,n}}\biggr)\biggr),$$

где

$$\tau_{\nu,n} = (2n+1+\nu) + if(\nu), \qquad f(\nu) = \ln\biggl(\frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\Gamma(-\nu)\biggr),$$

n – достаточно большое натуральное число, а под квадратным корнем и логарифмом подразумеваются главные ветви этих функций. Оценим расстояние от корня $z_{\nu,n}$ до луча $\mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$. Пусть точка z лежит на луче $\mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ близко к $z_{\nu,n}$. В главном порядке

$$|z|^4(1+o(1)) = |z_{\nu,n}|^4 = 4(2n+1+\nu)^2 + 4f^2(\nu),$$

и

$$\begin{aligned} |z - z_{\nu,n}| &= |z| \operatorname{tg}\biggl|\arg z_{\nu,n} - \frac{3\pi}{4}\biggr|(1+o(1)) = |z| \operatorname{tg}\biggl|\frac{\arg \tau_{\nu,n}}{2}\biggr|(1+o(1)) \\ &= \frac{|z| f(\nu)}{2\sqrt{|z|^4 - 4f^2(\nu)}}(1+o(1)) = \frac{f(\nu)}{2|z|}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Поэтому $D_\nu^{-1}(z)$ на луче $\mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ удовлетворяет оценке

$$|D_\nu^{-1}(z)| < C(1+|z|). \tag{2.16}$$

Из неравенств (2.15) и (2.16) немедленно следует

Лемма 2. *Пусть $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$, $t \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ и $|t| \leqslant |z|$. Тогда для функции $\mu(z,t)$, см.* (2.12), *справедлива оценка*

$$|\mu(z,t)| < C(1+|t|)^{-2\nu-2}(1+|z|)^{-\nu}.$$

Решая уравнение (2.11) на полуоси $z \in \mathbb{R}_- e^{-i\pi/4}$ итерациями, с помощью неравенства (2.7) и леммы 2 получим оценку

$$\begin{aligned} |v(z) - 1| &\leqslant \biggl|\int_0^z \mu(z,t)R(t)\,dt\biggr| \\ &< C\frac{(1+|z|)^{-\nu}}{k}\int_0^{|z|}(1+s)^{-2\nu-2}s^4\,ds < C\frac{|z|^{3(1-\nu)}}{k}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость представления (2.4) в области (2.3).

Таким образом, теорема доказана.

Замечание 2. В доказательстве теоремы 1 использованы простые оценки, которые не являются предельно точными, поэтому построенная асимптотика (2.2), (2.4) может быть пригодна и в несколько более широкой области, чем ограниченная неравенствами (2.1) и (2.3).

Благодарности. Автор благодарит А. П. Киселева и А. В. Цветкову за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. E. Langer, “The solutions of the Mathieu equation with a complex variable and at least one parameter large”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**:3 (1934), 637–710.

[2] R. W. McKelvey, “The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 103–123.

[3] A. Sharples, “Uniform asymptotic forms of modified Mathieu functions”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **20**:3 (1967), 365–380.

[4] A. Sharples, “Uniform asymptotic expansions of modified Mathieu functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **247** (1971), 1–17.

[5] W. Barret, “Mathieu functions of general order: connection formulae, base functions and asymptotic formulae. I–V”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **301** (1981), 75–162.

[6] D. T. Mark, “Uniform asymptotic approximation of Mathieu functions”, *Methods Appl. Anal.*, **1**:2 (1994), 143–168.

[7] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, eds. F. W. G. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. B. Clark, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[8] Е. А. Злобина, А. П. Киселев, “Френелевские переходные зоны”, *Радиотехника и Электроника*, **68**:6 (2023), 542–552.

[9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1973.

[10] S. Yu. Dobrokhotov, A. V. Tsvetkova, “Global asymptotics for functions of parabolic cylinder and solutions of the Schrödinger equation with a potential in the form of a nonsmooth double well”, *Russ. J. Math. Phys.*, **30**:1 (2023), 46–61.

[11] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978.

Е. А. Злобина
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: ezlobina2@yandex.ru

Поступило
08.04.2023
Принято к публикации
15.04.2023