

Посвящается Василию Михайловичу Бабичу

## ДИФРАКЦИЯ КОРОТКИХ ВОЛН НА КОНТУРЕ С ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ КРИВИЗНЫ

© Е. А. ЗЛОВИНА, А. П. КИСЕЛЕВ

Строятся формулы коротковолновой асимптотики в задаче дифракции плоской волны на контуре с непрерывной кривизной, гладкой всюду за исключением точки, вблизи которой имеет степенное поведение. Волновое поле описано в пограничных слоях, окружающих особую точку контура и предельный луч. Найдено выражение для дифрагированной волны.

### §1. Введение

В геометрической теории дифракции Келлера (ГТД), см. [1, 2], крупными мазками набросана программа построения главных членов коротковолновых асимптотик решений дифракционных задач. Волны, отраженные от гладких участков границы, описываются лучевым методом, а вклады от точек негладкости границы берутся из решений модельных (в русской традиции — эталонных) задач. Если кусочно-гладкая граница в окрестности особенности может быть смоделирована клином или конусом, то дело сводится к задачам, допускающим, в скалярном случае, точное решение. Для границы с негладкой кривизной точно решаемые эталонные задачи не известны.

Более продвинутые версии ГТД, см., например, [2], учитывают, что около особых направлений — предельных лучей — где фазы отраженной и дифрагированной волн близки, волновое поле описывается специальными функциями (например, в классической задаче дифракции на клине — интегралом Френеля). Подобные явления естественно характеризовать как возникновение пограничных слоев, или переходных зон, и исследовать

---

*Ключевые слова:* дифракция коротких волн, негладкие препятствия, метод пограничного слоя.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00627.

с помощью приемов, в совокупности известных как метод пограничного слоя. Под этим понимают технику, основанную на локальном изучении исходной задачи в малой области, окружающей точку негладкости, обычно с использованием растянутых (масштабированных) переменных. Затем полученное внутреннее разложение сшивается (или, как еще говорят, сращивается) с решением вне окрестности особенности. Погранслоиная техника давно применяется в задачах дифракции коротких волн, см. [3–5]. Для погранслоиных задач в коротковолновом случае единственность решения может быть обеспечена аналогом условия излучения; при этом детального построения внешнего разложения (что часто необходимо при рассмотрении других задач математической физики, см., например, [6, 7]) не требуется.

В настоящей работе мы продолжаем систематическое применение метода пограничного слоя к задачам дифракции коротких волн на кусочно-гладких контурах с особенностями кривизны, начатое в [8]. Нашей целью является построение асимптотических формул, описывающих влияние этих особенностей на волновое поле. Простейшей задаче такого рода — о контуре со скачком кривизны — посвящено немало исследований (см., например, [9–20]), основывавшихся на различных версиях эвристического метода Кирхгофа (см., например, [2]) и метода пограничного слоя, а также на их комбинациях. Рассмотреть окрестность точки негладкости контура и окрестность предельного луча в рамках последовательного погранслоино-го подхода (причем только на небольших расстояниях от точки негладкости) удалось лишь в недавней работе [8]. Это не было сделано раньше, по-видимому, из-за аналитических трудностей, возникающих при построении внутреннего разложения. Нетривиальным оказался и детальный анализ процедуры сшивания решений погранслоиных задач с лучевыми формулами для дифрагированной и отраженной волн.

Здесь мы рассматриваем технически более сложные и ранее не изучавшиеся задачи дифракции плоской волны на контурах с непрерывной кривизной, имеющей в одной точке сингулярность вида (2.4), которую мы называем гёльдеровской. План исследования примерно тот же, что в [8], но почти ничем из полученных там результатов воспользоваться не удастся. Сначала мы обращаемся к волновому полю в малой окрестности точки негладкости контура и строим внутреннее разложение. На больших по сравнению с длиной волны расстояниях от сингулярной точки, см. (2.10), мы сшиваем внутреннее разложение с лучевыми формулами, получая выражение для дифрагированной волны. Далее мы описываем поле в пограничном слое, окружающем предельный луч, отталкиваясь от анзаца, предложенного в работе Н. В. Цепелева [21]. Построенная асимптотика

выражается через функцию параболического цилиндра  $D_{-3-\lambda}$ , где параметр  $0 < \lambda < 1$  характеризует особенность кривизны контура, см. (2.4).

Подробный анализ лучевых формул для отраженной волны, которому мы уделяем много внимания, показывает, что выбранный анзац может использоваться лишь на расстояниях от точки негладкости контура, малых по сравнению с его геометрическими параметрами. В то же время, выражение для дифрагированной волны пригодно и на бóльших расстояниях.

## §2. Постановка задачи

В бесконечной области, ограниченной контуром  $C$ , см. рисунок 2.1, волновое поле  $u = u(x, y)$  описывается уравнением Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) u = 0. \quad (2.1)$$

Волновое число  $k$  велико:

$$k \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

соответственно длина волны мала, и мы имеем дело с коротковолновым случаем. Предполагается, что гармоническая зависимость от времени  $t$  имеет вид  $e^{-i\omega t}$ . Здесь  $\omega$  — круговая частота, связанная с  $k$  соотношением  $\omega/c = k$ , и  $c$  — скорость распространения волн, которая принимается равной единице:  $c = 1$ .

На контуре  $C$  выполнено граничное условие Дирихле

$$u|_C = 0. \quad (2.3)$$

Кривизна контура  $\kappa = \kappa(s)$  гладкая всюду, за исключением точки  $O$ , в малой окрестности которой  $\kappa$  описывается формулой

$$\kappa(s) = \kappa_0 + h s_+^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (2.4)$$

Здесь  $s$  — длина дуги контура, отсчитываемая от точки  $O$ , см. рисунок 2.1, и введено стандартное обозначение для функции “с плюсином” (см. [22])

$$s_+^\nu = \begin{cases} 0, & \text{при } s \leq 0, \\ s^\nu, & \text{при } s > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \quad (2.5)$$

а  $\kappa_0$  и  $h$  — не зависящие от большого параметра  $k$  константы, на знак которых не накладывается никаких ограничений, в частности,  $\kappa_0$  может равняться нулю, однако  $h \neq 0$ . Особенность вида (2.4) мы будем называть гёльдеровской сингулярностью.

Устремляя  $\lambda \rightarrow 0$ , мы придем к случаю скачка кривизны, а устремляя  $\lambda \rightarrow 1$  — к случаю скачка ее первой производной. Результаты соответствующих предельных переходов обсуждаются в §6.

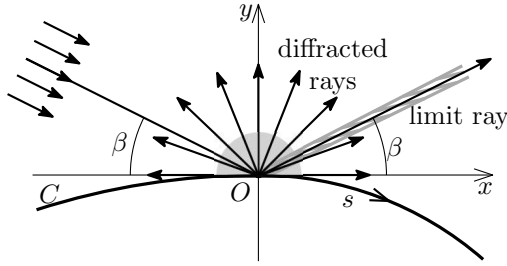


Рис. 2.1. Дифрагированная волна и пограничные слои.

Введем декартовы координаты  $x$  и  $y$  с центром в точке  $O$  и осью абсцисс, направленной по касательной к контуру, так что  $x > 0$  для точек контура с  $s > 0$ , см. рисунок 2.1. Пусть  $\rho$  и  $\phi$  — классические полярные координаты:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad 0 \leq \rho, \quad -\pi < \phi \leq \pi. \quad (2.6)$$

Волновое поле будем искать в виде

$$u = u^i + u^o, \quad (2.7)$$

где  $u^i = u^i(x, y)$  — падающая (*incident*) плоская волна с углом скольжения  $\beta$ , см. рисунок 2.1

$$u^i = e^{ik(x \cos \beta - y \sin \beta)}, \quad (2.8)$$

а  $u^o = u^o(x, y)$  — уходящая (*outgoing*) волна. Мы рассматриваем случай некасательного падения, то есть  $\beta > \varepsilon > 0$  с фиксированной и не зависящей от  $k$  константой  $\varepsilon$ .

Согласно геометрической теории дифракции, см. [1, 2], уходящая волна в самом грубом приближении есть сумма двух волн:

$$u^o = u^r + u^d. \quad (2.9)$$

Здесь  $u^r = u^r(x, y)$  — волна, геометрически отраженная от гладких частей контура, а  $u^d = u^d(x, y)$  — волна, дифрагированная точкой его негладкости. В рассматриваемом нами случае некасательного падения лучевой метод, см., например, [23], дает для  $u^r$  явное выражение, теряющее гладкость на предельном (геометрически отраженном от сингулярной точки контура) луче. Подробное исследование лучевой формулы для  $u^r$  приведено в Приложении А. Дифрагированная волна  $u^d$ , см. (2.9), на больших по сравнению с длиной волны расстояниях, то есть при

$$k\rho \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

является цилиндрической волной:

$$u^d = A(\phi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} [1 + \mathcal{E}], \quad (2.11)$$

где  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \phi)$  — неравномерная по углу погрешность. Функцию  $A(\phi)$  называют дифракционным коэффициентом, см., например, [1, 2]. Для подобных задач, см., например, [2, 8, 18], характерно обращение  $A$  и  $\mathcal{E}$  в бесконечность на предельном луче. Явные выражения для  $A$  и  $\mathcal{E}$  в нашем случае будут получены в разделе 3.8.2.

Представление (2.9) применимо не во всей рассматриваемой области: вокруг предельного луча возникает пограничный слой, — так называемая переходная зона — выделенный на рисунке 2.1 штриховкой. Поскольку выражение (2.11) имеет смысл только на больших расстояниях от точки  $O$ , см. (2.10), около нее возникает другой пограничный слой (закрашенная серым зона на рисунке 2.1). Его размер, как будет установлено в разделе 3.8.2, характеризуется соотношениями (3.31).

Нашей целью является построение асимптотических формул, описывающих влияние гёльдеровской сингулярности кривизны на уходящее волновое поле. Последовательный метод пограничного слоя будет развит в малой окрестности точки  $O$  и вблизи предельного луча, см. рисунок 2.1.

### §3. Окрестность точки $O$ . Внутреннее разложение

**3.1. Локальные координаты в окрестности точки  $O$ .** Точку наблюдения  $M$ , лежащую вблизи точки  $O$ , будем характеризовать ортогональными координатами  $s$  и  $n$ , где  $n$  — длина отрезка нормали, опущенной из  $M$  на контур  $C$ , см. рисунок 3.1. В рассматриваемой нами области  $n \geq 0$ . Аналогом полярных координат (2.6) в малой окрестности точки  $O$  являются координаты  $r$  и  $\varphi$ :

$$s = r \cos \varphi, \quad n = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \quad (3.1)$$

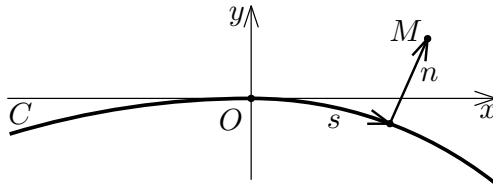


Рис. 3.1. Координаты  $s$  и  $n$ .

С помощью хорошо известных формул дифференциальной геометрии, см., например, [24], нетрудно, как в [8], выразить координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  через  $s$  и  $n$ :

$$\begin{cases} x = s + \mathfrak{a}_0 n s + \frac{h n s_+^{1+\lambda}}{1+\lambda} + O(\mathfrak{a}_0^2 r^3) + O(h^2 r^{3+\lambda}), \\ y = n - \frac{\mathfrak{a}_0 s^2}{2} - \frac{h s_+^{2+\lambda}}{(2+\lambda)(1+\lambda)} + O(\mathfrak{a}_0^2 r^3) + O(h^2 r^{3+\lambda}). \end{cases} \quad (3.2)$$

Из (3.2) мгновенно получаются соотношения, связывающие полярные координаты (2.6) и их локальный аналог (3.1):

$$r = \rho[1 + O(\mathfrak{a}_0 \rho) + O(h \rho^{1+\lambda})], \quad \varphi = \phi[1 + O(\mathfrak{a}_0 \rho) + O(h \rho^{1+\lambda})], \quad (3.3)$$

так что  $r \approx \rho$  и  $\varphi \approx \phi$  в области, где

$$\mathfrak{a}_0 \rho \rightarrow 0, \quad h \rho^{1+\lambda} \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Заметим, что при  $\mathfrak{a}_0 \neq 0$  второе соотношение в (3.4) следует из первого, то есть область, характеризующаясь первым соотношением, уже области, характеризующейся вторым.

Везде далее мы предполагаем условия (3.4) выполненными.

**3.2. Падающая волна в растянутых координатах.** Волновое поле в малой окрестности точки  $O$  удобно описывать с помощью стандартных растянутых координат  $S$  и  $N$ , см., например, [25, 26]:

$$S = ks, \quad N = kn. \quad (3.5)$$

Очевидно, что фаза падающей волны (2.8) в координатах (3.5) представляет собой ряд по отрицательным степеням большого параметра  $k$ , см. (3.2):

$$\begin{aligned} x \cos \beta - y \sin \beta &= \frac{S \cos \beta - N \sin \beta}{k} + \frac{\mathfrak{a}_0}{k^2} \left( \frac{\sin \beta}{2} S^2 + \cos \beta NS \right) \\ &+ \frac{h}{k^{2+\lambda}} \left( \frac{\sin \beta}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} + \frac{\cos \beta}{1+\lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следовательно, в малой окрестности точки  $O$  падающая волна имеет вид

$$u^i = u_0^i + \frac{\mathfrak{a}_0}{k} u_1^i + \frac{h}{k^{1+\lambda}} u_{1+\lambda}^i + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

где функции  $u_0^i = u_0^i(S, N)$ ,  $u_1^i = u_1^i(S, N)$  и  $u_{1+\lambda}^i = u_{1+\lambda}^i(S, N)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_0^i &= e^{i(S \cos \beta - N \sin \beta)}, \quad u_1^i = i \left( \frac{\sin \beta}{2} S^2 + \cos \beta NS \right) e^{i(S \cos \beta - N \sin \beta)}, \\ u_{1+\lambda}^i &= i \left( \frac{\sin \beta}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} + \frac{\cos \beta}{1+\lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \beta - N \sin \beta)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

и не зависят от  $h$ .

Аналогично выглядит вытекающая из лучевой формулы, см. [23], асимптотика отраженной волны, получение которой приведено в Приложении А.

**3.3. Оператор Гельмгольца в растянутых координатах.** Элементарные формулы дифференциальной геометрии, см., например, [24], позволяют записать оператор Гельмгольца в растянутых координатах  $S$  и  $N$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = k^2 \left( L_0 + \frac{\varkappa_0}{k} L_1 + \frac{h}{k^{1+\lambda}} L_{1+\lambda} + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 1, \quad L_1 = -2N \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial}{\partial N}, \\ L_{1+\lambda} &= -2N S_+^\lambda \frac{\partial^2}{\partial S^2} + S_+^\lambda \frac{\partial}{\partial N} - \lambda N S_+^{-1+\lambda} \frac{\partial}{\partial S}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Функции  $S_+^\nu$  определены в (2.5).

**3.4. Внутреннее разложение.** Мы будем искать внутреннее разложение для уходящей волны в виде, аналогичном (3.7):

$$u^o = U_0^o + \frac{\varkappa_0}{k} U_1^o + \frac{h}{k^{1+\lambda}} U_{1+\lambda}^o + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где  $U_0^o = U_0^o(S, N)$ ,  $U_1^o = U_1^o(S, N)$  и  $U_{1+\lambda}^o = U_{1+\lambda}^o(S, N)$ . Нас интересует только линейный по  $h$  член  $U_{1+\lambda}^o$ .

**3.5. Задачи пограничного слоя.** Подставляя (3.7) и (3.11) в уравнение Гельмгольца (2.1) и граничное условие (2.3) и приравнявая к нулю коэффициенты при степенях  $k$ , получим задачи пограничного слоя. Задача для  $U_{1+\lambda}^o$  имеет вид

$$\begin{cases} L_0 U_{1+\lambda}^o + L_{1+\lambda} U_0^o = 0, \end{cases} \quad (3.12a)$$

$$\begin{cases} U_{1+\lambda}^o|_{N=0} = -u_{1+\lambda}^i|_{N=0}, \end{cases} \quad (3.12b)$$

а для  $U_0^o$  —

$$\begin{cases} L_0 U_0^o = 0, \end{cases} \quad (3.13a)$$

$$\begin{cases} U_0^o|_{N=0} = -u_0^i|_{N=0}. \end{cases} \quad (3.13b)$$

Операторы  $L_0$  и  $L_{1+\lambda}$  введены в (3.10), функции  $u_0^i$  и  $u_{1+\lambda}^i$  определены в (3.8). Имея в виду сшивание с уходящей волной, дополним задачи пограничного слоя типичным для теории дифракции коротких волн требованием, чтобы их решения удовлетворяли принципу предельного поглощения, см., например, [5, 26]. А именно, замена 1 на  $1 + i\delta$ ,  $\delta > 0$ , в выражении

для  $L_0$ , см. (3.10), приводит к задачам, каждая из которых имеет единственное убывающее при  $N \rightarrow \infty$  решение. Предельный переход  $\delta \rightarrow 0$  выделяет нужные нам решения исходных задач пограничного слоя.

Отметим, что задача для  $U_1^o$  отличается от задачи (3.12) заменой  $L_{1+\lambda}$  и  $u_{1+\lambda}^i$  на  $L_1$  и  $u_1^i$  соответственно. Сшивание функции  $U_1^o$  с лучевой формулой для отраженной волны обсуждается в Приложении А.

**3.6. Решение задачи (3.13).** Задача (3.13) решается мгновенно:

$$U_0^o = -e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}. \quad (3.14)$$

Вопрос о сшивании выражения (3.14) с отраженной волной будет рассмотрен в Приложении А.

**3.7. Исследование решения задачи (3.12).** С учетом формул (3.8), (3.10) и (3.14), задача (3.12) принимает вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) U_{1+\lambda}^o \\ = \left( (i \sin \beta + 2 \cos^2 \beta N) S_+^\lambda - i \lambda \cos \beta N S_+^{-1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \end{cases} \quad (3.15a)$$

$$U_{1+\lambda}^o|_{N=0} = -\frac{i \sin \beta}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \beta}. \quad (3.15b)$$

Технически удобно представить  $U_{1+\lambda}^o$  как сумму двух функций

$$U_{1+\lambda}^o = W + V, \quad (3.16)$$

где  $W = W(S, N)$  и  $V = V(S, N)$  — соответственно решения задач

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) W \\ = \left( (i \sin \beta + 2 \cos^2 \beta N) S_+^\lambda - i \lambda \cos \beta N S_+^{-1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \end{cases} \quad (3.17a)$$

$$W|_{N=0} = \frac{i \sin \beta}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \beta}, \quad (3.17b)$$

и

$$\left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) V = 0, \right. \quad (3.18a)$$

$$\left. V|_{N=0} = -\frac{2i \sin \beta}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \beta}. \right. \quad (3.18b)$$

Единственность решений этих задач обеспечивается принципом предельного поглощения.



Нетрудно проверить, что решением задачи (3.17) является функция

$$W = i \left( \frac{\sin \beta}{(1 + \lambda)(2 + \lambda)} S_+^{2+\lambda} - \frac{\cos \beta}{1 + \lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}. \quad (3.19)$$

Как показано в Приложении А, она сшивается с отраженной волной, а потому не представляет для нас интереса.

**3.8. Исследование функции  $V$ .** Решение задачи (3.18) будем искать в виде интеграла Фурье

$$V(S, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\sigma, N) e^{i\sigma S} d\sigma \quad (3.20)$$

с неизвестной плотностью  $\mu(\sigma, N)$ . Преобразование Фурье функции  $S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \beta}$  дается выражением

$$(\widehat{S_+^{2+\lambda} e^{iS \cos \beta}})(\sigma) = e^{i(1-\lambda)\frac{\pi}{2}} \Gamma(3 + \lambda)(\sigma - \cos \beta - i0)^{-3-\lambda}, \quad (3.21)$$

где, согласно Гельфанду и Шилову [22], выбрана главная ветвь функции  $(\cdot)^{-3-\lambda}$ . Из (3.18) и (3.21) вытекает, что  $\mu(\sigma, N)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 - \sigma^2 \right) \mu = 0 \quad (3.22)$$

и граничному условию

$$\mu|_{N=0} = 2 \sin \beta e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(1 + \lambda)(\sigma - \cos \beta - i0)^{-3-\lambda}. \quad (3.23)$$

Задача (3.22), (3.23) имеет два линейно независимых решения:

$$\mu = 2 \sin \beta e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(1 + \lambda)(\sigma - \cos \beta - i0)^{-3-\lambda} e^{\pm iN\sqrt{1-\sigma^2}}. \quad (3.24)$$

Ветвь квадратного корня выберем так, что при  $-1 < \sigma < 1$  его значения положительны, соответствующие разрезы плоскости показаны на рисунке 3.2 волнистыми линиями. Для сходимости интеграла в (3.20) на бесконечности возьмем решение (3.24) со знаком плюс в показателе экспоненты. Регуляризуя интеграл (3.20) с помощью показанной на рисунке 3.2 деформации контура, приходим к следующему представлению для решения  $V$  задачи (3.18):

$$V(r, \varphi) = e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(1 + \lambda) \frac{\sin \beta}{\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{ikr(\sqrt{1-\sigma^2} \sin \varphi + \sigma \cos \varphi)}}{(\sigma - \cos \beta)^{3+\lambda}} d\sigma. \quad (3.25)$$

Обозначения  $r$  и  $\varphi$  введены в (3.1). Разрез, соответствующий функции  $(\sigma - \cos \beta)^{-3-\lambda}$ , показан на рисунке 3.2 штрихпунктирной линией.

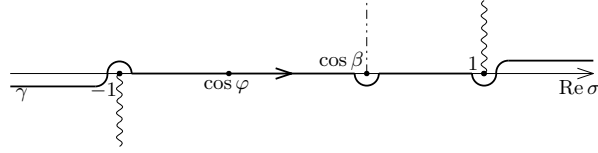
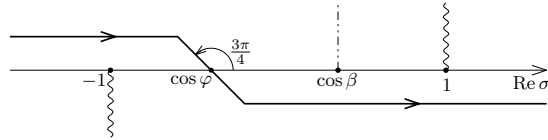
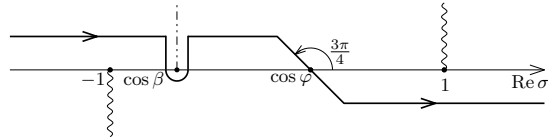


Рис. 3.2. Контур интегрирования в (3.25).

В дальнейшем мы будем рассматривать функцию  $hV/k^{1+\lambda}$ , которая, в отличие от  $V$ , имеет смысл аддитивной части волнового поля. В области  $k\rho \rightarrow \infty$ , см. (2.10), мы будем исследовать ее, опираясь на стандартную асимптотическую технику, см., например, [27, 28]. В соответствии с общепринятой терминологией, медленно меняющийся множитель подынтегральной функции в (3.25) мы будем называть амплитудой, а показатель быстро меняющейся экспоненты — фазой. Вклады в асимптотику функции  $hV/k^{1+\lambda}$  дают критическая точка фазы  $\sigma = \cos \varphi$  и точка ветвления амплитуды  $\sigma = \cos \beta$ .

Везде далее условие (2.10) предполагается выполненным.

**3.8.1. Критическая точка фазы не близка к точке ветвления амплитуды.** Предположим сначала, что критическая точка фазы достаточно удалена от точки ветвления амплитуды, так что асимптотика (3.25) может быть найдена стандартным методом перевала, см., например, [27]. Линия наибыстрейшего спуска в критической точке фазы  $\sigma = \cos \varphi$  образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $3\pi/4$ . В случае  $\cos \beta > \cos \varphi$  мы деформируем контур интегрирования, см. рисунок 3.2, как показано на рисунке 3.3, а в случае  $\cos \beta < \cos \varphi$  — как показано на рисунке 3.4.

Рис. 3.3. Контур интегрирования в (3.25) при  $\cos \beta > \cos \varphi$ .Рис. 3.4. Контур интегрирования в (3.25) при  $\cos \beta < \cos \varphi$ .

В результате для функции  $hV/k^{1+\lambda}$  получается следующая асимптотика:

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{1+\lambda}} = & \left( -\frac{2ikh(s \sin \beta - n \cos \beta)_+^{2+\lambda}}{(1+\lambda)(2+\lambda)(\sin \beta)^{1+\lambda}} e^{ik(s \cos \beta + n \sin \beta)} \right. \\ & \left. + \tilde{A}(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \right) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kr(\varphi - \beta)^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\tilde{A}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda)}{k^{1+\lambda}} \frac{h \sin \varphi \sin \beta}{(\cos \varphi - \cos \beta)^{3+\lambda}} e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{\lambda\pi}{2}}. \quad (3.27)$$

Первое слагаемое в круглых скобках описывает вклад точки ветвления и сшивается с отраженной волной, см. Приложение А. Вклад критической точки фазы дается вторым слагаемым и описывает дифрагированную волну.

Погрешности в (3.26) малы при условии

$$\sqrt{k\rho} |\phi - \beta| \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

которое означает, что точка наблюдения расположена не слишком близко к предельного лучу.

**3.8.2. Сшивание выражений (2.11) и (3.26).** Покажем, что при выполнении условия (3.28) второе слагаемое в правой части (3.26) сшивается с цилиндрической волной (2.11).

Сравнивая (2.11) и (3.26) с учетом (3.3), получим, что  $A(\phi) = \tilde{A}(\phi)$ , см. (3.27),  $\mathcal{E} = O(1/k\rho(\phi - \beta)^2)$ , и дифрагированная волна  $u^d$  имеет вид

$$u^d = \tilde{A}(\phi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\rho(\phi - \beta)^2}\right) \right]. \quad (3.29)$$

Малость остаточного члена в (3.29) обеспечивается соотношением (3.28). Выражение для дифрагированной волны (3.29) допускает распространение на большие расстояния, не удовлетворяющие ограничениям (3.4).

Из (3.3) вытекает, что

$$\tilde{A}(\varphi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} = \tilde{A}(\phi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \left[ 1 + O(k\varpi_0\rho^2) + O(kh\rho^{2+\lambda}) \right]. \quad (3.30)$$

В области, где не выполняются условия

$$k\varpi_0\rho^2 \rightarrow 0, \quad kh\rho^{2+\lambda} \rightarrow 0, \quad (3.31)$$

второе слагаемое в (3.26) и выражение (3.29) не сшиваются друг с другом.

Таким образом, размер пограничного слоя вокруг точки  $O$  характеризуется соотношениями (3.31). Отметим, что при  $\varpi_0 = 0$  пограничный слой шире, чем при  $\varpi_0 \neq 0$ , ср. (3.4).

3.8.3. *Критическая точка фазы близка к точке ветвления амплитуды.* Теперь обратимся к случаю, когда условие (3.28) не выполняется, и анализ интеграла в (3.25) требует модификации стандартного метода перевала. Пусть точка наблюдения расположена вблизи предельного луча, а именно

$$(k\rho)^{\frac{1}{3}}(\phi - \beta) \rightarrow 0, \quad (3.32)$$

и по-прежнему выполнено условие (2.10). В малой окрестности критической точки фазы введем переменную интегрирования  $\sigma = \cos \varphi + \zeta \sin \varphi$ . Следуя, например, Эрдеи [28], разложим фазу (3.25) до квадратичных членов и распространим интегрирование на всю ось:

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{1+\lambda}} &= e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \frac{\Gamma(1+\lambda)h}{\pi(k \sin \beta)^{1+\lambda}} e^{ikr} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + O(\varphi - \beta) + O(kr\zeta^3)}{(\zeta - (\varphi - \beta))^{3+\lambda}} \exp\left(-\frac{ikr}{2}\zeta^2\right) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Асимптотику правой части (3.33) нетрудно выразить через функцию параболического цилиндра  $D_{-3-\lambda}$ , см. Приложение Б:

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{1+\lambda}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(\sin \beta)^{1+\lambda}} \frac{hr^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} e^{ikr-i\frac{z^2}{2}} D_{-3-\lambda}\left(\sqrt{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &\times \left[1 + O\left(kr(\varphi - \beta)^3\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь введена переменная

$$z = \sqrt{\frac{kr}{2}}(\varphi - \beta), \quad (3.35)$$

часто возникающая при описании переходных зон:  $z^2$  приближенно равняется разности фаз плоской и цилиндрической волн, см. [2], и обращается в нуль на предельном луче.

Малость остаточных членов в (3.34) обеспечивается условиями (2.10) и (3.32). Мы опускаем процедуру их получения, она вполне аналогична описанной в [8].

3.8.4. *Сшивание выражений (3.26) и (3.34).* Покажем, что в области, где выполнены оба условия (3.28) и (3.32), асимптотические выражения (3.26) и (3.34) для функции  $hV/k^{1+\lambda}$  сшиваются друг с другом. В самом деле, заменяя в (3.34) функцию  $D_{-3-\lambda}$  ее асимптотикой при  $|z| \rightarrow \infty$ , см. (Б.2)

и (Б.3), и подставляя выражение для  $z$  (3.35), получим

$$\begin{aligned} \frac{hV}{k^{1+\lambda}} = & \left( -\frac{2ikh(r(\beta-\varphi))_+^{2+\lambda}}{(1+\lambda)(2+\lambda)(\sin\beta)^{1+\lambda}} e^{ikr\left(1-\frac{(\varphi-\beta)^2}{2}\right)} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda)}{(k\sin\beta)^{1+\lambda}} \frac{h e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{(\beta-\varphi)^{3+\lambda}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \right) \left[ 1 + O(kr(\varphi-\beta)^3) + O\left(\frac{1}{kr(\varphi-\beta)^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Легко видеть, что главные члены (3.26) и (3.36) совпадают.

#### §4. Окрестность предельного луча. Анзац Н. В. Цепелева

Обратимся к описанию волнового поля в пограничном слое, окружающем предельный луч (заштрихованная зона на рисунке 2.1).

**4.1. Точные решения Н. В. Цепелева.** В работе [21], которая посвящена описанию коротковолнового поля в области слияния волн различной природы, Н. В. Цепелев ввел семейство точных решений уравнения Гельмгольца:

$$\mathfrak{U}(\xi, \eta) = C D_{-\frac{1-q}{2}}(\sqrt{2k}\xi e^{-i\frac{\pi}{4}}) D_{-\frac{1+q}{2}}(\sqrt{2k}\eta e^{-i\frac{\pi}{4}}). \quad (4.1)$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  — классические параболические координаты, см., например, [29],  $D_\nu$  — функция параболического цилиндра, см. Приложение Б,  $C \in \mathbb{C}$  — амплитудная константа,  $q \in \mathbb{C}$  — параметр разделения. Из асимптотических выражений для функций параболического цилиндра следует, что при удалении от предельного луча конструкция Цепелева описывает сумму плоской и цилиндрической волн, см. [21].

В нашей задаче вблизи предельного луча происходит слияние отраженной волны и цилиндрической дифрагированной волны (3.29). Покажем, что волновое поле в его окрестности, при надлежащем выборе констант  $C$  и  $q$ , описывается одной из функций семейства (4.1). Размер соответствующего пограничного слоя определяется из условия, что отраженная волна близка к плоской, см. Приложение А.

Следуя [21], введем параболические координаты следующим образом:

$$\xi = \sqrt{2\rho} \cos\left(\frac{\phi - \beta}{2}\right), \quad \eta = \sqrt{2\rho} \sin\left(\frac{\phi - \beta}{2}\right), \quad (4.2)$$

см. (2.6). Тогда в узкой окрестности предельного луча координатные линии  $\xi$  идут приблизительно вдоль него, а координатные линии  $\eta$  — поперек. В предположении, что  $k\rho \rightarrow \infty$ , см. (2.10), функцию  $D_{-\frac{1-q}{2}}$  в (4.1) можно заменить ее асимптотикой, см. (Б.2):

$$\mathfrak{U} = \tilde{C} (\sqrt{k}\xi)^{-\frac{1-q}{2}} e^{ik\frac{\xi^2}{2}} D_{-\frac{1+q}{2}}(\sqrt{2k}\eta e^{-i\frac{\pi}{4}}) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\xi^2}\right) \right]. \quad (4.3)$$

**4.2. Сшивание выражений (3.34) и (4.3) в малой окрестности точки  $O$ .** Рассмотрим область вблизи предельного луча в малой окрестности точки  $O$ , где выполнены соотношения (3.31) и (3.32), а волновое поле описывается выражением (3.34). Сравнивая (3.34) с (4.3) с учетом (3.3) и (4.2), приходим к следующим значениям параметра разделения  $q$

$$q = 5 + 2\lambda \quad (4.4)$$

и константы  $\tilde{C}$  в формуле (4.3)

$$\tilde{C} = \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}k\sin\beta)^{1+\lambda}}h. \quad (4.5)$$

Теперь выражение (4.3) в области  $|\phi - \beta| \rightarrow 0$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{(\sin\beta)^{1+\lambda}} \frac{h\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}} e^{ik\rho(1-\frac{(\phi-\beta)^2}{4})} D_{-3-\lambda}(\sqrt{k\rho}(\phi-\beta)e^{-i\frac{\pi}{4}}) \\ & \times \left[ 1 + O((\phi-\beta)^2) + O(k\rho(\phi-\beta)^4) + O\left(\frac{1}{k\rho}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Малость поправочных членов обеспечивается условиями (2.10) и (3.32). Очевидно, (4.6) асимптотически совпадает с (3.34) в пограничном слое около точки  $O$ , который описывается соотношениями (3.31).

**4.3. Сшивание выражения (4.3) с уходящим полем вне малой окрестности точки  $O$ .** Рассмотрим теперь область, где не выполнены ограничения (3.31). Пусть  $|\phi - \beta| \rightarrow 0$ , но в тоже время выполнено условие (3.28). Запишем (4.3) в полярных координатах с помощью (4.2), подставляя выражения для параметра разделения (4.4) и константы (4.5) и заменяя функцию  $D_{-3-\lambda}$  ее асимптотикой, см. (Б.2) и (Б.3):

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = & \left( -ikh \frac{(\rho(\phi-\beta))_+^{2+\lambda}}{(\sin\beta)^{1+\lambda}} e^{ik(x\cos\beta+y\sin\beta)} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h\Gamma(1+\lambda)e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{\lambda\pi}{2}}}{(k\sin\beta)^{1+\lambda}(\beta-\phi)^{3+\lambda}} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \right) \left[ 1 + O((\beta-\phi)^2) + O\left(\frac{1}{k\rho(\phi-\beta)^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Второе слагаемое в круглых скобках сшивается с дифрагированной волной, см. (3.29) и (3.27).

В Приложении А показано, что первое слагаемое в (4.7) сшивается с отраженной волной, если помимо (2.10) и (3.28) выполнены (не противоречащие (3.28)) условия (3.4) и

$$k\alpha_0\rho^2(\phi-\beta)^2 \rightarrow 0, \quad kh(\rho|\phi-\beta|)^{2+\lambda} \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, влияние гёльдеровской сингулярности кривизны на уходящее волновое поле в узкой окрестности предельного луча описывается выражением (4.3) с выбранными согласно (4.4) и (4.5) параметром разделения  $q$  и константой  $\tilde{C}$ . Область применимости этого описания характеризуется соотношениями (3.4) и (4.8).

### §5. Случай граничного условия Неймана

Вполне аналогично исследуется задача дифракции на гёльдеровской сингулярности кривизны в случае граничного условия Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = 0. \quad (5.1)$$

Дифракционный коэффициент, см. раздел 2, теперь имеет вид

$$A(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1+\lambda)}{k^{1+\lambda}} \frac{h(\cos \beta \cos \phi - 1)}{(\cos \phi - \cos \beta)^{3+\lambda}} e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{\lambda\pi}{2}}, \quad (5.2)$$

ср. (3.27), вблизи предельного луча сохраняются формулы (4.3) и (4.4), а формула (4.5) заменяется на

$$\tilde{C} = -\frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{\lambda\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{2}k \sin \beta)^{1+\lambda}} h. \quad (5.3)$$

Сравнивая (4.5) и (5.3), видим, что выражения, описывающие влияние негладкости кривизны на волновое поле при граничных условиях Дирихле и Неймана, отличаются только знаком.

### §6. Заключительные замечания

Мы применили последовательный метод пограничного слоя в задаче дифракции коротких волн на контуре с гёльдеровской сингулярностью кривизны. Волновое поле описано в окрестности точки негладкости, размер которой характеризуется соотношениями (3.31). Это позволило получить выражение для дифракционного коэффициента, имеющее степенную особенность на предельном луче, и представление для волнового поля вблизи предельного луча через функцию параболического цилиндра  $D_{-3-\lambda}$ , справедливое при выполнении условий (3.4) и (4.8).

Отметим, что при устремлении в (2.4) параметра  $\lambda$  к нулю, гёльдеровская сингулярность кривизны переходит в скачок, и, соответственно, все построенные нами формулы переходят в полученные в работе [8]. Выражения для дифракционных коэффициентов (3.27) и (5.2) в этом случае совпадают с найденными ранее в работах [9–11, 18, 19]. Если же  $\lambda \rightarrow 1$ , то можно проследить переход (3.27) и (5.2) в формулы, которые были

получены для случая скачка первой производной кривизны в [18]. Развита в настоящей работе техника обобщена на случай негладкой производной кривизны порядка  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , и импедансного краевого условия в недавней заметке [30].

Авторы благодарят В. М. Бабица, А. Я. Казакова, А. И. Назарова и В. Э. Петрова за интерес к работе и полезные обсуждения.

### Приложение §А. Исследование лучевой формулы для отраженной волны

Проведем исследование классической, см., например, [23], лучевой формулы для отраженной волны  $u^r$  на малых расстояниях от точки  $O$ .

Начнем с геометрических рассуждений. Пусть точке наблюдения  $M = (x, y)$  соответствует точка отражения  $R = (X, Y)$ , см. рисунок А.1. Закон геометрического отражения гласит, что

$$\beta + \psi = \gamma - \psi, \quad (\text{A.1})$$

где  $\psi$  — угол между касательной к контуру и положительным направлением оси абсцисс в точке  $R$ , а  $\gamma$  — угол между осью абсцисс и отраженным лучом  $RM$ . Расстояние между точками  $M$  и  $R$  обозначим через  $l$ .

Лучевая формула для отраженной волны во введенных нами обозначениях имеет вид

$$u^r = - \left( 1 + \frac{2\alpha l}{\sin(\beta + \psi)} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\tau} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2})$$

Здесь значение кривизны  $\alpha$  берется в точке отражения  $R$ , а  $\tau = \tau(x, y)$  — значение эйконала в точке наблюдения  $M$ :

$$\tau(x, y) = \tau(X, Y) + l. \quad (\text{A.3})$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} l &= (x - X) \cos \gamma + (y - Y) \sin \gamma \\ &= (x - X) \cos(\beta + 2\psi) + (y - Y) \sin(\beta + 2\psi), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

см. рисунок А.1. Значение эйконала  $\tau(X, Y)$  в точке  $R$  равно значению фазы падающей волны (2.8):

$$\tau(X, Y) = X \cos \beta - Y \sin \beta. \quad (\text{A.5})$$



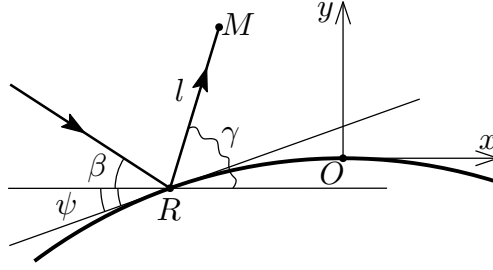


Рис. А.1. Отражение от гладкой части контура.

Запишем асимптотику выражения (А.2) вблизи точки  $O$ . Из хорошо известных формул  $X'(s) = \cos \psi$ ,  $Y'(s) = \sin \psi$ , и  $\psi'(s) = -\mathfrak{x}(s)$ , см., например, [24], следует, что в точке  $R$

$$\begin{aligned} \psi &= -\mathfrak{x}_0 s - \frac{hs_+^{1+\lambda}}{1+\lambda}, \quad X = s + O(\mathfrak{x}_0^2 s^3) + O(h^2 s^{3+2\lambda}), \\ Y &= -\frac{\mathfrak{x}_0 s^2}{2} - \frac{hs_+^{2+\lambda}}{(1+\lambda)(2+\lambda)} + O(\mathfrak{x}_0^2 s^3) + O(h^2 s^{3+2\lambda}), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$s \rightarrow 0$ . Заметим, что из (А.1) вытекает равенство  $\operatorname{tg}(\beta + 2\psi) = \operatorname{tg} \gamma$ , которое нам удобно записать в виде

$$\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} 2\psi}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} 2\psi} = \frac{y - Y}{x - X}. \quad (\text{A.7})$$

Подставив соотношения (А.6) в (А.7) и учитывая близость точки  $R$  к  $O$ , найдем:

$$s = \frac{\rho \sin(\beta - \phi)}{\sin \beta} \left( 1 + O(\mathfrak{x}_0 \rho) + O(h \rho^{1+\lambda}) \right). \quad (\text{A.8})$$

При выполнении условия (3.4) поправочные члены малы.

С помощью формул (А.4), (А.5), (А.6) и (А.8) получим значение эйконала (А.3) в точке наблюдения  $M$ :

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= x \cos \beta + y \sin \beta + \mathfrak{x}_0 \frac{(x \sin \beta - y \cos \beta)^2}{\sin \beta} \\ &+ h \frac{2(x \sin \beta - y \cos \beta)_+^{2+\lambda}}{(1+\lambda)(2+\lambda)(\sin \beta)^{1+\lambda}} + O(\mathfrak{x}_0^2 \rho^3) + O(h^2 \rho^{3+2\lambda}). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Аналогичным образом мы перепишем выражение в знаменателе формулы (А.2):

$$\frac{2\mathfrak{x}l}{\sin(\beta + \psi)} = \frac{2y}{\sin^2 \beta} \left( \mathfrak{x}_0 + h \frac{(x \sin \beta - y \cos \beta)_+^\lambda}{(\sin \beta)^\lambda} \right) + O(\mathfrak{x}_0^2 \rho^2) + O(h^2 \rho^{2+2\lambda}). \quad (\text{A.10})$$

Обратимся теперь к волновому полю. Для использования конструкции Цепелева, см. раздел 4, требуется, чтобы в соответствующей окрестности предельного луча отраженная волна была близка к плоской. Отсюда возникают ограничения на расстояния от точки наблюдения  $M$  до предельного луча и до точки негладкости  $O$ .

Итак, мы рассматриваем выражение (A.2) для отраженной волны с учетом (A.9) и (A.10). Оставляя в фазе экспоненты в (A.2) только “плосковолновую фазу”  $ik(x \cos \beta + y \sin \beta)$ , приходим к следующей асимптотике:

$$u^r = w^r + v^r \left[ 1 + O\left(\rho(\varkappa_0 + h\rho^\lambda)\right) + O\left(k\rho^2(\phi - \beta)^2(\varkappa_0 + h(\rho|\phi - \beta|)^\lambda)\right) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Здесь главный член асимптотики  $w^r = w^r(x, y)$  — уходящая плоская волна:

$$w^r = -e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)}, \quad (\text{A.12})$$

а  $v^r = v^r(x, y)$  — поправка, учитывающая влияние кривизны:

$$\begin{aligned} v^r = & \varkappa_0 \left( \frac{y}{\sin^2 \beta} - ik \frac{(x \sin \beta - y \cos \beta)^2}{\sin \beta} \right) e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \\ & + h \frac{(x \sin \beta - y \cos \beta)_+^\lambda}{(\sin \beta)^\lambda} \left( \frac{y}{\sin^2 \beta} - 2ik \frac{(x \sin \beta - y \cos \beta)^2}{(1+\lambda)(2+\lambda) \sin \beta} \right) e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Поправочные члены в (A.11) малы при выполнении условий (3.4) и (4.8). Отметим, что условия (3.4) и (4.8) выполнены в пограничном слое вблизи точки  $O$ , то есть при предположениях (3.31).

Имея в виду сшивку решений погранслойных задач (3.12) и (3.13) с лучевой формулой для отраженной волны, перепишем выражение (A.11) в растянутых координатах  $S$  и  $N$ , см. (3.5):

$$u^r = w_0^r + \frac{\varkappa_0}{k}(w_1^r + v_1^r) + \frac{h}{k^{1+\lambda}}(w_{1+\lambda}^r + v_{1+\lambda}^r) + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \quad (\text{A.14})$$

Здесь  $w_0^r = w_0^r(S, N)$ ,  $w_1^r = w_1^r(S, N)$ ,  $w_{1+\lambda}^r = w_{1+\lambda}^r(S, N)$ ,  $v_1^r = v_1^r(S, N)$  и  $v_{1+\lambda}^r = v_{1+\lambda}^r(S, N)$  задаются выражениями

$$\begin{aligned} w_0^r &= -e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \\ w_1^r &= i \left( \frac{\sin \beta}{2} S^2 - \cos \beta NS \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \\ w_{1+\lambda}^r &= i \left( \frac{\sin \beta}{(1+\lambda)(2+\lambda)} S_+^{2+\lambda} - \frac{\cos \beta}{1+\lambda} N S_+^{1+\lambda} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned}
v_1^r &= \left( \frac{N}{\sin^2 \beta} - i \frac{(S \sin \beta - N \cos \beta)^2}{\sin \beta} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}, \\
v_{1+\lambda}^r &= \left( \frac{N(S \sin \beta - N \cos \beta)_+^\lambda}{(\sin \beta)^{2+\lambda}} \right. \\
&\quad \left. - 2i \frac{(S \sin \beta - N \cos \beta)_+^{2+\lambda}}{(1+\lambda)(2+\lambda)(\sin \beta)^{1+\lambda}} \right) e^{i(S \cos \beta + N \sin \beta)}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Легко увидеть, что решение (3.14) задачи (3.13) совпадает с  $w_0^r$ , а решение (3.19) задачи (3.17) — с  $w_{1+\lambda}^r$ . Первое слагаемое в асимптотическом выражении для функции  $hV/k^{1+\lambda}$ , см. (3.26), сшивается с функцией  $v_{1+\lambda}^r$ . Наконец, можно показать, что функция  $U_1^o$  (задача для которой описана в разделе 3.5) совпадает с  $w_1^r + v_1^r$ .

### Приложение §Б. Функции параболического цилиндра

Функции параболического цилиндра  $D_\nu(Z)$  с  $\nu < 0$  задаются интегральным представлением, см., например, [31],

$$D_\nu(Z) = \frac{e^{i(\nu+1)\pi}}{\sqrt{2\pi} i} e^{\frac{Z^2}{4}} \int_{-\epsilon+i\infty}^{-\epsilon-i\infty} e^{Zp+\frac{1}{2}p^2} p^\nu dp, \tag{B.1}$$

где выбрана главная ветвь функции  $(\cdot)^\nu$  и  $\epsilon > 0$ . При больших значениях  $|Z|$  и фиксированном  $\nu$  функция  $D_\nu$  имеет асимптотику

$$D_\nu(Z) = Z^\nu e^{-\frac{Z^2}{4}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|Z|^2}\right) \right), \tag{B.2}$$

при  $-3\pi/4 < \arg Z < 3\pi/4$ , и

$$D_\nu(Z) = \left( Z^\nu e^{-\frac{Z^2}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{i\nu\pi} Z^{-\nu-1} e^{\frac{Z^2}{4}} \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{|Z|^2}\right) \right), \tag{B.3}$$

при  $\pi/4 < \arg Z < 5\pi/4$ , см., например, [32].

### Список литературы

- [1] Keller J. B., *Geometrical theory of diffraction*, J. Opt. Soc. Am. **52** (1962), no. 5, 116–130.
- [2] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е., *Геометрическая теория дифракции*, Связь, М., 1978.
- [3] Фок В. А., *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, Советское радио, М., 1970.
- [4] Buchal R. N., Keller J. B., *Boundary layer problems in diffraction theory*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), no. 1, 85–114.

- [5] Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я., *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, Издательство ЛГУ, Ленинград, 1974.
- [6] Ильин А. М., *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [7] Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B., *Asymptotic Theory of Elliptic Problems in Singularly Perturbed Domains*, volume 1, 2. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [8] Zlobina E. A., Kiselev A. P., *Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature*, Wave Motion **96** (2020), 102571.
- [9] Weston V. H., *The effect of a discontinuity in curvature in high-frequency scattering*, IRE Trans. AP **10** (1962), 775–780.
- [10] Weston V. H., *Effect of a discontinuity of curvature in high-frequency scattering. Part II*, IEEE Trans. AP **13** (1965), 611–613.
- [11] Senior T. B. A., *The diffraction matrix for a discontinuity in curvature*, IEEE Trans. AP **20** (1972), no. 3, 326–333.
- [12] Michaeli A., *Diffraction by a discontinuity in curvature including the effect of creeping wave*, IEEE Trans. AP **38** (1990), no. 6, 929–931.
- [13] Попов А. В., *Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны*, Труды V Всес. Симпоз. Дифр. Распр. Волн, Наука, Ленинград, 1971, с. 171–175.
- [14] Andronov I. V., Bouche D., Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B., *Creeping wave diffraction by a junction with plane surface*, Ann. Télécommunic. **52** (1997), 483–488.
- [15] Кирпичникова Н. Я., Филиппов В. Б., *Дифракция волны шепчущей галереи вблизи линии разрыва кривизны*, Зап. науч. семин. ПОМИ **239** (1997), 95–109.
- [16] Кирпичникова Н. Я., Филиппов В. Б., Кирпичникова А. С., *Дифракция волн со скальзывания от линии скачка кривизны. (Акустическая трехмерная среда)*, Зап. науч. семин. ПОМИ **257** (1999), 75–92.
- [17] Kirpichnikova A. S., Philippov V. B., *Diffraction by a line of curvature jump (a special case)*, IEEE Trans. Antennas and Propagation **49** (2001), no. 12, 1618–1623.
- [18] Kaminetzky L., Keller J. B., *Diffraction coefficients for higher order edges and vertices*, SIAM J. Appl. Math. **22** (1972), no. 1, 109–134.
- [19] Филиппов А. Ф., *Отражение от границы, состоящей из дуг различной кривизны*, Прикл. Мат. Мех. (ПММ) **34** (1971), 1076–1084.
- [20] Rogoff Z. M., Kiselev A. P., *Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary*, Wave Motion **33** (2001), no. 2, 183–208.
- [21] Цепелев Н. В., *О некоторых специальных решениях уравнения Гельмгольца*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **51** (1975), 197–202.
- [22] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, том 1, Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1959.
- [23] Бабич В. М., Булдырев В. С., *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972.
- [24] Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, том 2, Наука, М., 1974.
- [25] Avila G. S. S., Keller J. B., *The high-frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), no. 4, 363–381.
- [26] Бабич В. М., Киселев А. П., *Упругие волны. Высокочастотная теория*, БХВ, Санкт-Петербург, 2014.
- [27] Федорюк М. В., *Асимптотика: Интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [28] Эрдейи А., *Асимптотические разложения*, Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1962.

- [29] Морс Ф. М., Фешбах Г., *Методы теоретической физики*, том 1, Издательство иностранной литературы, М., 1960.
- [30] Злобина Е. А., *Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Погранслоинный подход*, Зап. науч. семин. ПОМИ, **493** (2020), 169–185.
- [31] Абрамовиц М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979.
- [32] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, том 2, Наука, М., 1966.

С.-Петербургский  
государственный университет  
198504, С.-Петербург  
Петродворец, Ульяновская ул., 3;  
С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27  
191023, С.-Петербург, Россия  
*E-mail:* ezlobina2@yandex.ru

Поступило 1 июля 2020 г.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27  
191023, С.-Петербург, Россия;  
С.-Петербургский государственный университет  
198504, С.-Петербург, Петродворец, Ульяновская ул., 3;  
Институт Проблем Машиноведения РАН  
Большой пр. В.О., 61, 199178, С.-Петербург, Россия  
*E-mail:* aleksei.kiselev@gmail.com