МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 14 февраля 1961 г.

1. В. А. Рохлин «Современное состояние топологии многообразий».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Мельников Илья Григорьевич,
Поволоцкий Абрам Исаакович.

Заседание 28 февраля 1961 г.

1. Обсуждение работ М. М. Постникова, выдвинутых на соискание Ленинской премии. Обзор работ М. М. Постникова сделал А. А. Иванов. В обсуждении приняли участие В. А. Рохлин и Д. К. Фаддеев.

Общество поддержало выдвижение работ М. М. Постникова на соискание Ленинской премии.

2. Г. Ц. Тумаркин «Приближение в среднем на спрямляемых кривых рациональными дробями с заданными полюсами».

Заседание 14 марта 1961 г.

1. С. М. Лозинский «Некоторые вопросы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 28 марта 1961 г.

1. С. С. Кислицин «Современное состояние теории поиска».

Вопросы поиска объекта в плоскости и пространстве рассматриваются в работах [1]—[4]. Представляет интерес статья Гильберта [5].

Ряд задач теории поиска связан с комбинаторикой, динамическим программированием и теорией информации. Пусть, например, имеется N монет, среди которых одна фальшивая, более легкая, чем все остальные. Априорные вероятности для каждой из монет быть фальшивой равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_N$ $\left(\sum_{i=1}^{N} p_i = 1\right)$. Разрешается делить множество монет произвольным образом на n частей и задавать вопрос, в какой из них находится фальшивая монета. Как нужно производить последовательные деления, чтобы выделить фальшивую монету за наименьшее в среднем число вопросов? Эта задача решена Хаффманом [6] (см. также [7]).

Вопрос о величине наименьшего среднего остается открытым. Для случая равных априорных вероятностей минимальное среднее $V_n\left(\left\{\frac{1}{N}\right\}, N\right)$ равно

$$V_n\left(\left\{\frac{1}{N}\right\}, N\right) = [\log_n N] + \frac{n\left(N - n^{[\log_n N]}\right) - d_n \mid + n - 1}{(n-1)N},$$

где $d_n = \left[\frac{N - n^{[\log_n N]}}{n-1}\right]$, а число за чертой добавляется при $d_n \neq 0$.

С частным случаем вышеуказанной ($n=3$) тесно связана задача о выделении более легкой фальшивой монеты с помощью чашечных весов без гирь за наименьшее в среднем число взвешиваний. Однако здесь деления множества монет подчинены дополнительным ограничениям (например, в первом делении должно быть два множества одинаковой численности). В случае равных априорных вероятностей имеет место формула для наименьшего среднего числа взвешиваний, $U\left(\left\{\frac{1}{N}\right\}, N\right)$:

$$U\left(\left\{\frac{1}{N}\right\}, N\right) = \begin{cases} V_3\left(\left\{\frac{1}{N}\right\}, N\right) & \text{при } N \neq 6, \\ V_3\left(\left\{\frac{1}{6}\right\}, 6\right) + \frac{1}{6} & \text{при } N = 6 \end{cases}$$

Относительно наименьшего числа взвешиваний, необходимого в самом неблагоприятном случае для выделения фальшивой монеты см. [8], [9]. Кэрнс [10] сообщает о частичном решении минимаксного варианта задачи о выделении двух более легких фальшивых монет.

Автором получена оценка для наименьшего среднего числа испытаний $S(N)$, необходимых для полного упорядочения N предметов с различными весами путем попарных сравнений (все $N!$ возможных расположений по весу предполагаются равновероятными) частичное решение минимаксного варианта задачи имеется в [11]):

$$S(N) < \log_2(N!) + 0{,}0773N.$$

Очевидно, снизу $S(N)$ можно оценить так:

$$\log_2(N!) \leqslant V_2\left(\left\{\frac{1}{N!}\right\}, N!\right) \leqslant S(N).$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. М. Морз и Д. Е. Кимбелл, Методы исследования операций, «Советское радио», 1956.

[2] B. O. Koopman, Kinematic bases, Operations Res. 4, 3 (1956), 324—346.

[3] B. O. Koopman, Target detection, Operations Res. 4, 5 (1956), 503—531.

[4] B. O. Koopman, The optimum distribution of searching effort, Operations Res. 5, 6 (1957), 613—626.

[5] E. N. Gilbert, Optimal search strategies, Journ. Soc. Industr. and Appl. Math. 7, 4 (1959), 413—424.

[6] D. A. Huffman, A method for the construction of minimum-redundancy codes, Proceedings of I.R.E. 40, 9 (1952), 1098—1101.

[7] S. Zimmerman, An optimal search procedure, Amer. Math. Monthly 66, 8 (1959), 690—693.

[8] V. Devidé, Ein Problem über Wagen, Elem. Math. 10, 1 (1959), 11—15.

[9] А. М. Яглом и И. М. Яглом, Вероятность и информация, М., Гостехиздат, 1957.

[10] S. S. Gairns, Balance scale sorting, Bull. of Amer. Math. Soc. 62, 2 (1956), 177.

[11] L. R. Ford, S. M. Johnson, A tournament problem, Amer. Math. Monthly 66, 5 (1959), 387—389.

2. Б. М. Бредихин (Куйбышев) «О некоторых законах распределения образующих элементов в теории упорядоченных полугрупп».

1°. Пусть G — мультипликативно записанная свободная коммутативная полугруппа со счетной системой P образующих элементов. Гомоморфизм полугруппы G в полугруппу положительных вещественных чисел назовем нормой и обозначим $N(\alpha)$, где $\alpha \in G$. Полугруппу G упорядочим по возрастающим нормам ее элементов при условии, что число элементов полугруппы G с условием $N(\alpha) \leqslant x$ конечно для любого $x > 0$.

Пусть, далее,

$$\nu_G(x) = \sum_{N(\alpha) \leqslant x,\ \alpha \in G} 1 \quad \text{и} \quad \pi_G(y) = \sum_{N(\omega) \leqslant x,\ \omega \in P} 1.$$

В докладе рассматриваются асимптотические взаимоотношения, существующие между функциями $\nu_G(x)$ и $\pi_G(x)$.

2°. Функция $\nu_G(x)$ характеризует рост упорядоченной полугруппы G. Важным примером будет класс полугрупп степенного роста. К этому классу, например, принадлежат полугруппа всех натуральных чисел и полугруппа всех целых идеалов конечного расширения поля рациональных чисел степени n.

3°. С помощью элементарных методов, развитых в работах Эйуба [1] и Шапиро [2], выводится асимптотический закон распределения образующих элементов в упорядоченных полугруппах со степенным ростом, а именно

Теорема. *Если*

$$\nu_G(x) = C_G x^\theta + O\left(\frac{x^\theta}{\ln^{2+\varepsilon} x}\right),$$

где $C_G > 0$, $\theta > 0$ и $\varepsilon > 0$ — *произвольно малое заданное число, то*

$$\pi_G(x) \sim \frac{x^\theta}{\theta \ln x}.$$

Доказательство основано на рассмотрении в частном случае $\theta = 1$, к которому приводится общий случай обобщенного неравенства Сельберга (без остаточного члена)

$$\sum_{N(\omega) \leqslant x} \ln^2 N(\omega) + \sum_{N(\omega_i) N(\omega_j) \leqslant x} \ln N(\omega_i) \ln(\omega_j) \sim 2x \ln x.$$

4°. Распределение элементов в упорядоченных полугруппах с заданными системами образующих элементов изучается в случае, когда

$$\pi_G(x) \sim \frac{a}{\theta} \frac{x^\theta}{\ln x}.$$

С помощью элементарных методов выводится асимптотический закон распределения элементов полугруппы. Конструируются полугруппы со степенной плотностью, для дзета-функций которых имеет место аналог гипотезы Римана. Даются другие приложения теории, связанные с обобщением и уточнением некоторых теорем Ландау [3] и Вирзинга [4]. Основные результаты изложены в [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Ayoub, On Selberg's lemma for algebraic fields, Canad. Journ. Math. 7, № 1 (1955), 138—143.

[2] H. Shapiro, Tauberian theorems and elementary prime number theory, Communs Pure and Appl. Math. 12, № 4 (1959), 579—610.

[3] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, т. 2, 1909, 641—669.

[4] E. Wirsing, Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegebenen Menge angehören, Arch. Math. 7, № 4 (1956), 263—272.

[5] Б. М. Бредихин, Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп, Матем. сб. 50 (92) : 2 (1960), 221—232.

Заседание 11 апреля 1961 г.

1. Б. Н. Делоне (Москва) «О правильных разбиениях пространств».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран:

Зубов Владимир Иванович.

Заседание 25 апреля 1961 г.

1. Н. Н. Мейман (Москва) «Новые результаты о распределении нулей и экстремальных свойствах целых функций».

2. С. Левшец (США) «О некоторых математических проблемах теории автоматического регулирования».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран:

Реморов Питирим Николаевич.

Заседание 9 мая 1961 г.

1. В. А. Якубович «Строение функционального пространства комплексных канонических уравнений с периодическими коэффициентами».

2. А. Н. Еругин «Асимптотика, асимптотическая структура и свойства интегральных кривых в окрестности особой точки типа фокус».

Рассматривается система $\dot{x}=\sum_{i=1}^{\infty} X_i$, $\dot{y}=\sum_{i=1}^{\infty} Y_i$, где X_i, Y_i — однородные полиномы от x и y и характеристическое уравнение системы имеет чисто мнимые корни. В случае фокуса уравнение интегральных кривых системы приводится к виду

$$\frac{dr}{d\vartheta}=gr^m+\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\vartheta)\, r^{m+n} \quad (m \geqslant 3),$$

где r, ϑ — преобразованные полярные координаты; $\mathfrak{R}_n$ — полиномы от $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$; $g=\mathrm{const}<0$ (для определенности). Доказано, что

$$r=\vartheta_1^{-1}\,[1+\gamma(\vartheta)]; \quad \vartheta_1=\sqrt[m-1]{g(m-1)\,\vartheta}; \quad \gamma(\vartheta)=\sum_{r=0}^{k}\ \sum_{l=r(m-1)}^{k(m-1)+x} h_{r,e}\frac{\ln^r\vartheta}{\vartheta_1^e}+$$

$$+\sum_{r=0}^{k-1}\ \sum_{l=m+r(m-1)}^{k(m-1)+x} \mathfrak{X}_{r,e}(\vartheta)\frac{\ln^r\vartheta}{\vartheta_1^e}+o\left(\frac{1}{\vartheta_1^{k(m-1)+x}}\right) \qquad (0 \leqslant x \leqslant m-2);$$

$k \geqslant 0$ — любое целое; $h_{r,e}=\mathrm{const}$ $\mathfrak{X}_{r,e}$ — полиномы от $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$; $\left(\int_0^{2\pi} \mathfrak{X}_{r,e}\,d\vartheta=0\right)$; $o\left(\frac{1}{\vartheta_1^{k(m-1)+x}}\right)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\frac{1}{\vartheta_1^{k(m-1)+x}}$. Для $h_{r,e}$ и $\mathfrak{X}_{r,e}$ получены рекуррентные формулы. Далее, коэффициенты $h_{r,k(m-1)+x}$ и $\mathfrak{X}_{r,k(m-1)+x}$ являются полиномами относительно произвольной постоянной системы порядка соответственно $k-r$ и $k-r-1$. Нетрудно привести примеры систем, у которых в разложении $\gamma(\vartheta)$ нет членов, содержащих $\ln\vartheta$. Аналогичным образом можно рассмотреть некоторые системы с неголоморфными правыми частями. Множество значений произвольной постоянной (множество S) имеет следующую структуру:

$$S=(-\infty,\ d_0]=\bigcup_{n=0}^{\infty}[d_{n+1},\ d_n];\quad d_n=\mathrm{const};\quad d_{n+1}<d_n;\quad \lim_{n\to\infty} d_n=-\infty,$$

при этом каждый отрезок вида $[d_{n+1},\ d_n]$ отображается взаимно однозначно на множество интегральных кривых системы; $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-d_{n+1})=|2\pi g|$. Из полученных результатов следует, что в случае фокуса существует кривая $r=r_0(\vartheta)=\vartheta_1^{-1}$ такая, что при приближении к началу координат интегральные кривые все меньше и меньше отличаются от $r=r_0(\vartheta)$ в смысле выполнения равенства $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} r(\vartheta,\ C):r_0(\vartheta)$, где $r=r(\vartheta,\ C)$ — уравнение интегральной кривой, соответствующей значению произвольной постоянной, равному C. В случае центра при приближении к началу координат все интегральные кривые все меньше и меньше отличаются от круга радиуса C в смысле выполнения равенства $\lim\limits_{C\to 0} r(\vartheta,\ C)\,C^{-1}$. Подобным же свойством обладает качественная картина системы двух дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями в случае двух одинаковых корней характеристического уравнения. Таким образом, здесь дан метод, позволяющий получить результаты, аналогичные результатам Фроммера [1] в тех случаях, когда метод Фроммера неприменим (метод Фроммера применим в тех случаях, когда имеется исключительное направление.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Фроммер, Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер, УМН, вып. IX (1941).

Заседание 23 мая 1961 г.

1. Н. Н. Воробьев «К аксиоматическому обоснованию теории вероятностей».

2. В. Г. Мазья «Теоремы вложения для произвольных множеств».

Изучаются классы открытых множеств Ω, для которых справедливы различные теоремы вложения, и оценки решений эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами. Некоторые из доказанных результатов имеют характер необходимых и достаточных условий, т. е. не только класс множеств определяет область изменения параметров p, l, q, s и т. п., в которой оператор вложения ограничен или вполне непрерывен, но и обратно, эти показатели определяют класс множеств, в которых заданы функции. Указываются также более легко проверяемые достаточные условия для справедливости теорем вложения. Часть результатов опубликована в [1]—[3].

Сформулируем достаточное условие принадлежности открытого множества Ω классу $J_{\nu(l)}^{(n)}$, определенному в [3]. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое в Ω отображение $\xi_i=\xi_i(x)$ с якобианом $J(x)=\left|\dfrac{\partial(\xi_1\ \dots\ \xi_n)}{\partial(x_1\ \dots\ x_n)}\right|$. Предположим, что существует такая постоянная C, что для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ при $x\in\Omega$ выполняется неравенство

$$\nabla\xi_i\nabla\xi_j(x)\cdot\alpha_1\alpha_2\geqslant CJ^2(x)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Пусть множество Ω есть сумма конечного числа, может быть, пересекающихся открытых множеств $\Omega^{(l)}$, для каждого из которых существует преобразование $\xi_i^{(l)}=\xi_i^{(l)}(x)$ с суммируемым якобианом $J^{(l)}(x)$, удовлетворяющее условию (1) и отображающее $\Omega^{(l)}$ на множество из класса $J_{\frac{n-1}{n}}^{(0)}$ (например, на область, звездную* *относительно шара). Пусть, кроме того, существуют постоянные M и K такие, что для любого измеримого множества $E \subset \Omega^{(l)}$, мера которого не превосходит M, справедливо неравенство*

$$\nu(\mathrm{mes}_n E) \leqslant K \left(\int_F J^{(l)}(x)\, dx \right)^{\frac{n-1}{n}},$$

где $\nu(+)$ — некоторая неотрицательная функция. Тогда множество Ω принадлежит классу $J_{\nu(t)}^{(n)}$.

Сформулируем еще оценку в $L_{\frac{n}{n-1}}$ градиента решения эллиптического уравнения

$$\nabla[A(x)\nabla] + b(x)\ \nabla u + c(x)u = f(x), \tag{2}$$

дополняющую теорему 2 заметки [2].

Теорема 2. *В условиях теоремы 2 заметки* [2] *имеет место оценка*

$$\|\nabla u\|_{L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leqslant K \left(\int_\Omega |f| \ln^+ |f|\, dx + 1 + \|u\|_{L(\Omega)} \right). \tag{3}$$

Заменить выражение $\int_\Omega |f| \ln^+ |f|\, dx + 1$ нормой f в $L(\Omega)$ нельзя. Аналогичный результат получен для второй краевой задачи для областей с нерегулярной границей.

Заметим еще, что в теореме 6 заметки [1] неравенство

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}}(\Omega) \leqslant c\, \{C\, \|\nabla u\|_{L(\Omega)} + D\, \|u\|_{L_{\frac{p(n-1)}{(n-p)\beta}}}(\Gamma\Omega)$$

справедливо для множеств $\Omega \in K_\beta^{(n)}$ не только при $\beta \geqslant 1$, но и при $\beta \geqslant \frac{n}{n-1}$. Пример 3 в [1] при $\beta > \frac{1}{2}$ неверен.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Мазья, Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств, ДАН 133, № 3 (1960).
[2] В. Г. Мазья, Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств, ДАН 137, № 5 (1961).
[3] В. Г. Мазья, P-проводимость и теоремы вложения функциональных пространств в пространство C, ДАН (1961).

3. Обсуждение издательского плана Физматгиза на 1962 г.

С сообщением от имени издательства выступил В. И. Битюцков. Общество одобрило план издания Физматгиза на 1962 г.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 26 сентября 1961 г.

1. В. Н. Чугуева и А. П. Хусу «Обзор исследований по математическим задачам оптимального управления энергоузлами со случайными входами».

2. Ю. В. Линник «О реорганизации национального комитета советских математиков и о международном математическом съезде 1962 г. в Стокгольме».

Заседание 10 октября 1961 г.

1. В. Н. Судаков и А. М. Вершик «Топологические вопросы теории меры в линейных пространствах».

Пусть E и E' — два локально выпуклых линейных топологических пространства в двойственности [1].

Определение 1. Говорят, что в E' задано *слабое распределение* μ, если для каждого замкнутого (в $\sigma(E', E)$) подпространства $F \subset E'$ конечного дефекта на фактор-пространство E'/F задана вероятностная мера μ_F, причем для разных F меры μ_F естественным образом согласованы (ср. [4]).

Задание слабого распределения эквивалентно, очевидно, заданию согласованной системы отображений

$$P_n^{\mu}\colon \overbrace{E\times\ \ldots\ \times E}^{n} \to V_n,$$

где V_n — множество всех n-мерных распределений. Достаточно задавать лишь P_1^{μ}.

Всякая вероятностная мера в E', заданная на σ-алгебре, содержащей цилиндрические множества, порождает слабое распределение. Говорят, что слабое распределение продолжается до меры, если существует мера, порождающая это слабое распределение.

Теорема 1 (Колмогоров [2], см. также [3]). *Пусть E^* — пространство всех линейных форм на E. Всякое слабое распределение в E' продолжается (и единственным образом) до меры в E^*.*

Определение 2 ([4], [5]). Пусть (Ω, m) — пространство с мерой, $S_m(\Omega)$ — пространство всех измеримых функций на Ω. *Обобщенным случайным процессом* в E' называется линейное отображение $\Phi\colon E \to S_m(\Omega)$.

Каждому обобщенному случайному процессу на E' отвечает единственное слабое распределение μ в E'.

Теорема 2. *Два предложения эквивалентны:*

1) *При почти всех* $\omega_0 \in \Omega$ $[\Phi(\varphi)](\omega_0) \in E'$.

2) *Слабое распределение, отвечающее* Φ, *продолжается до меры в* E'.

Пусть μ — слабое распределение в E', μ^* — продолжение его до меры в E^*. Тогда очевидное вложение $E \subset S_{\mu^*}(E^*)$ можно рассматривать как один из обобщенных случайных процессов, порождающих μ.

Определение 3 ([16]). *Характеристическим функционалом слабого распределения* μ *в* E' *называется функционал* $f_\mu(\varphi)$ *на* E:

$$f_\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} d(P_1^\mu \varphi)(t).$$

Характеристический функционал является положительно определенным и непрерывным на каждом конечномерном подпространстве в E. Всякий функционал, обладающий этими двумя свойствами, есть характеристический функционал некоторого слабого распределения.

Пусть теперь τ — некоторая линейная топология на E, μ — слабое распределение в E'.

Теорема 3. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *Отображение* P_1^μ *непрерывно из* τ *в слабую топологию на* V_1.

2) $f_\mu(\varphi)$ *непрерывно в* τ.

3) *Вложение* $E \subset S_{\mu^*}(E^*)$ *непрерывно из* τ *в топологию сходимости по мере в* $S_{\mu^*}(E^*)$.

Будем для краткости говорить, что μ непрерывно в топологии τ, если 1), 2), 3) справедливы. Важная задача теории меры в линейных пространствах заключается в выяснении связей между непрерывностью слабого распределения в той или иной топологии на E и возможностью его продолжения до меры в E'. Решение этой задачи позволяет, например, судить о том, каков запас реализаций данного случайного процесса и т. п.

Обозначим через χ_μ слабейшую линейную топологию на E, в которой μ непрерывно. Из теоремы 3 следует, что топология χ_μ есть ограничение на E топологии $S_{\mu^*}(E^*)$, и поэтому χ_μ метризуема. Поскольку топология сходимости по мере не локально выпукла, то и χ_μ не обязана быть локально выпуклой. Такая возможность действительно реализуется: пусть μ есть счетная степень меры ϱ,

$$\varrho(A) = \int_A h(x)\,dx, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{216}, & |x| \leqslant 36, \\ |x|^{-3/2}, & |x| > 36, \end{cases}$$

топология χ_μ есть топология $l^{1/2}$.

Если слабое распределение μ гауссовское, то χ_μ обязательно гильбертова топология.

Поставим следующий вопрос: какова топология χ на E (если она существует), непрерывность в которой слабого распределения μ была бы необходима и достаточна для того, чтобы μ продолжалось до меры в E'? Этот вопрос решен Р. А. Минлосом и В. Сазоновым для счетно-гильбертовых пространств E.

Теорема 4 ([7] — [9]). *Пусть* E *— счетно-гильбертово пространство. Топология* χ *на* E *определяется системой полунорм* $p_B(\varphi) = (B_\varphi, \varphi)$, *где* B *— произвольный положительно определенный ядерный оператор из* E *в* E'.

Следующая теорема показывает, что в общем случае такой топологии χ может не существовать.

Теорема 5. *Пусть* μ *есть счетное произведение одной и той же меры на* R^1, *у которой существует второй момент. Топология* χ_μ *есть топология* l^2.

Таким образом, все μ указанного вида топологически неразличимы, в то время как их продолжения до меры могут лежать в существенно различных пространствах.

Неизвестно, для каких пар пространств (E, E') топология χ существует. Если E' сепарабельно и метризуемо, то легко показать, что топология χ на E (если она существует) не сильнее топологии равномерной сходимости на компактах из E'. Интересен также вопрос о нахождении топологий χ_1, непрерывности в которых слабого распределения μ достаточно для продолжимости μ до меры в E', и топологий χ_2, непрерывность в которых является необходимой для продолжимости μ до меры. Заметим, что $\chi_2 = \sup\limits_{\mu} \chi_{\mu}$, где sup берется по всем μ, продолжимым до меры в E'.

Если ограничиться гауссовскими слабыми распределениями, то задача о продолжении слабого распределения до меры в весьма широком классе случаев может быть решена в топологических терминах. Однако отыскание такой топологии для конкретных пространств, как правило, трудная задача.

Невыясненным остается вопрос о характере условий продолжимости (в тех случаях, когда топологических условий недостаточно).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959.

[2] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., ГТТИ, 1934.

[3] Getoor, On characteristic functions of Banach space valued random variables, Pacific Journ. Math. 7, 1 (1957).

[4] И. М. Гельфанд, Обобщенные случайные процессы, ДАН 100, № 5 (1955).

[5] Ито, Стационарные случайные обобщенные процессы, Матем., сб. переводов 1 : 1 (1957).

[6] A. Kolmogorof, La transformation de Laplase dans les linéaires, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 200, (1935).

[7] Р. А. Минлос, Обобщенные случайные процессы и их продолжения до меры, Труды Моск. матем. о-ва 8 (1959).

[8] В. Сазонов, Замечание о характеристических функционалах, Теория вероятн. и ее прим. 3, вып. 2 (1958).

[9] А. Н. Колмогоров, Замечания к работам Р. А. Минлоса и В. Сазонова, Теория вероятн. и ее прим. 4, вып. 2 (1959).

2. Рекомендация докладчиков на международный математический съезд 1962 г. в Стокгольме.

Заседание 24 октября 1962 г.

1. Г. Ш. Рубинштейн «Об одном принципе двойственности и некоторых его приложениях».

2. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1962 г.

Заседание 14 ноября 1961 г.

1. В. М. Бабич «О математических вопросах теории дифракции и распространения волн».

Заседание 28 ноября 1961 г.

1. Н. А. Сапогов «К теории приближения непрерывных функций линейными операторами».

1. Рассматривается пространство $\widetilde{C}$ всех непрерывных, 2π-периодических функций вещественных) с нормой $\|f\|_{\widetilde{C}} = \max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$. Пусть $U(f, x)$—линейный положитель-

ный оператор, заданный в $\widetilde{C}$ и отображающий это пространство в его часть $\widetilde{C}^* \subset \widetilde{C}$. Положительность оператора U означает, что $U(f, x) \geqslant 0$ для любого $x \in [0, 2\pi]$ всякий раз, когда $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0, 2\pi]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $$\| U(1, x) - 1 \|_{\widetilde{C}} = \eta < \frac{1}{3}; \qquad (1)$$

2) $$| f^*(x') - f^*(x'') | \leqslant L \, | x' - x'' | \cdot \| f^* \|_{\widetilde{C}}$$

для любой функции $f^* \in \widetilde{C}$ *и любых вещественных* x', x'', *причем предполагается, что* $3\pi L \geqslant 2(1-3\eta)$.

Тогда найдется точка $x_0 \in [0, 2\pi]$, *для которой будет выполняться неравенство*

$$U\left(\sin^2 \frac{x-x_0}{2},\ x_0\right) \geqslant H_2 \cdot L^{-2},$$

где постоянная $H_2 \geqslant (1-3\eta)^2 / 54\pi^2 (1+\eta)^2$.

Из этой теоремы, в частности, выводится оценка приближения непрерывных периодических функций линейными положительными операторами, отображающими $\widetilde{C}$ в его подпространство $\mathcal{T}_n$, элементами которого могут быть лишь тригонометрические полиномы $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$: если $U_n(f, x)$ отображает $\widetilde{C}$ в $\mathcal{T}_n$, причем выполнено условие (1), то найдется точка $x_0 \in [0, 2\pi]$, для которой будет выполняться неравенство $U_n\left(\sin^2 \frac{x-x_0}{2},\ x_0\right) \geqslant H_2 n^{-2}$.

Этот результат несколько усиливает теорему П. П. Коровкина ([1], стр. 125), гласящую, что не существует последовательности линейных положительных операторов $U_n(f, x)$, отображающих $\widetilde{C}$ в $\mathcal{T}_n$, для которой одновременно выполнялись бы при $n \to \infty$ соотношения

$$n \| U_n(1, x) - 1 \|_{\widetilde{C}} \to 0, \quad n^2 \left\| U_n\left(\sin^2 \frac{x-x_0}{2},\ x_0\right) \right\|_{\widetilde{C}} \to 0.$$

Теорема 1 допускает видоизменение, делающее ее удобной для применения к операторам, представляющим собой алгебраические многочлены. Аналогичным образом трактуется случай, когда значениями операторов являются полиномы по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля.

2. Далее под $\widetilde{C}$ понимается пространство всех *комплекснозначных* непрерывных и 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{\widetilde{C}} = \max\limits_{x} |f(x)|$. Через $\mathcal{E}_n$ обозначается подпространство $\widetilde{C}$, элементами которого могут быть лишь тригонометрические полиномы $E_n(x) = \sum\limits_{|k| \leqslant n} c_k \exp(ikx)$.

$U_n(f, x)$ — произвольный линейный оператор, отображающий $\widetilde{C}$ в $\mathcal{E}_n$, причем

$$U_n(\exp(ikx),\ x) = \sum_{|h| \leqslant n} \gamma_{k, h}^{(n)} \exp(ihn), \qquad (2)$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Далее, $c_k(f)$ обозначает коэффициент Фурье функции f, $f_n(x) = \sum\limits_{|k| \leqslant n} c_k(f) \exp(ikx)$, $f_t \equiv f(x+t)$.

Теорема 2. *Для любой* $f \in \widetilde{C}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(f_t,\ x-t)\, dt = U_n^0(f,\ x),$$

где

$$U_n^0(f, x) \equiv \sum_{|k| \leqslant n} c_k(f)\, \gamma_{k, k}^{(n)} \exp(ikx).$$

Теорема 3. *Если*

$$\sup_{\|E_n\|_{\widetilde{C}}\leqslant 1} \| U_n(E_n, x) - E_n(x)\|_{\widetilde{C}} = \Delta_n,$$

где $\Delta_n \leqslant 1$ *и* sup *берется по всем* $E_n \in \widetilde{C}$, $\| E_n \| \leqslant 1$, *то*
то

$$\| U_n \|_{\widetilde{C}} \geqslant \frac{4}{\pi^2}(1-\Delta_n)\ln n + O(1).$$

Из теорем 2 и 3 выводится

Следствие. *Не существует последовательности линейных операторов* $U_n(f, x)$, *отображающих* $\widetilde{C}$ *в* $\mathscr{E}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, *для которой выполнялись бы при любой* $f \in \widetilde{C}$ *соотношения*

$$\| U_n(f, x) - f(x)\|_{\widetilde{C}} \to 0, \quad n\to\infty,$$

если

$$\left(1-\sqrt{\sum_{|k|\leqslant n} |\gamma_{k,k}^{(n)}-1|^2}\right)\ln n \to \infty \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

где числа $\gamma_{k,k}^{(n)}$ *представляют собой диагональные коэффициенты линейного преобразования* (2).

Теоремы 2 и 3 допускают перефразировку на случай, когда вместо тригонометрических полиномов $E_n(x)$ рассматриваются алгебраические многочлены $P_n(x)$. Аналогичные результаты справедливы также и для линейных операторов, заданных в пространствах непрерывных функций на коммутативных бикомпактных группах.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., Физматгиз, 1959.

2. Г. Я. Арешкин «О компактности семейства вполне аддитивных функций множества П».

Пусть E — множество, M — кольцо его подмножеств, содержащее E, $K=K(M)$ — σ-кольцо, порожденное кольцом M. Рассматриваемые функции множества считаются конечными. Вполне аддитивные функции множества называются зарядами, неотрицательные — мерами. $V(\nu, H)$, $V^+(\nu, H)$ и $V^-(\nu, H)$ обозначают соответственно полную, верхнюю и нижнюю вариации заряда ν на множестве $H \in K$.

Пусть $\Phi_M = \{\nu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ — семейство зарядов, заданных на M. Рассмотрим следующие типы непрерывности семейства Φ_M.

$(\text{РАН})_M^\mu$ — равностепенная абсолютная непрерывность относительно меры μ на кольце M (Витали).

$(\text{РН})_M$ — равностепенная непрерывность на кольце M (Каччиопполи).

$(\text{РА})_M$ — равномерная аддитивность на M (В. М. Дубровский).

$(\text{РСН})_M$ — равностепенная слабая непрерывность на M (см. [1]).

Очевидно, что $(\text{РСН})_K \rightleftarrows (\text{РА})_K$. Равносильность $(\text{РСН})_K$ и $(\text{РН})_K$ была доказана мною в работе [1]. Очевидно, что $(\text{РАН})_K^\mu \to (\text{РА})_K$. Обратное соотношение было доказано В. М. Дубровским. Таким образом, на σ-кольце K все четыре определения равносильны друг другу. Несколькими годами позже эту равносильность установил Кафиеро [3]. Если же $M \neq K(M)$, то эти определения, вообще говоря, не равносильны друг другу. Можно утверждать:

1. $(\text{РАН})_M^\mu \to (\text{РА})_M \to (\text{РСН})_M$, $(\text{РАН})_M^\mu \to (\text{РН})_M \to (\text{РСН})_M$.
2. $(\text{РА})_{M_\sigma} \to (\text{РСН})_{M_\sigma}$.
3. $(\text{РА})_M \to (\text{РА})_{M_\sigma}$.

4. Для того чтобы Φ_M обладало одним из свойств $(\mathrm{PCH})_M$, $(\mathrm{PH})_M$, $(\mathrm{PA})_M$ или $(\mathrm{PAH})_M^{\mu}$, достаточно, чтобы соответствующим свойством обладала любая счетная подсистема системы Φ_M.

Далее в работе исследуются различные типы сходимости зарядов и связь между ними. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность зарядов на M.

1. $\{\nu_n\}$ называется сходящейся на M к заряду ν, $\nu_n \underset{M}{\rightarrow} \nu$, если для каждого $\mathscr{M} \in M$ $\nu_n(\mathscr{M}) \rightarrow \nu(\mathscr{M})$ при $n \rightarrow \infty$.

2. $\{\nu_n\}$ сходится на кольце M к заряду ν по вариациям, $\nu_n \underset{M}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$, если $\nu_n \underset{M}{\rightarrow} \nu$ и если $V(\nu_n, E) \rightarrow V(\nu, E)$.

3. $\{\nu_n\}$ сильно сходится на M по вариациям к заряду ν, $\nu_n \underset{M}{\overset{cV}{\rightarrow}} \nu$, если $V(\nu_n - -\nu, E) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

4. $\{\nu_n\}$ равномерно сходится на M к заряду ν, $\nu_n \underset{M}{\rightrightarrows} \nu$, если $\nu_n(M) \rightarrow \nu(M)$ равномерно относительно $\mathscr{M} \in M$.

Сходимость $\nu_n \underset{M}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$ изучалась мною в [2]. Справедливы также следующие предложения:

I. Если $\nu_n \underset{K}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$, то при любом $H \in K$ $V(\nu_n, H) \rightarrow V(\nu, H)$.

II. Если $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$, то для того, чтобы $\nu_n \underset{K}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий $V^+(\nu_n, E) \rightarrow V^+(\nu_n, E)$, $V^-(\nu, E) \rightarrow V^-(\nu, E)$.

III. Пусть $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$ и $\psi_n = \nu_n - \nu$. Для того чтобы $\nu_n \underset{K}{\overset{cV}{\rightarrow}} \nu$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий $\psi_n(E_{\psi_n}^{+}) \rightarrow 0$, $\psi_n(E_{\psi_n}^{-}) \rightarrow 0$, где $E = E_{\psi_n}^{+} \cup E_{\psi_n}^{-}$ — разложение Хана множества E по отношению к заряду ψ_n.

IV. Если $\nu_n \underset{K}{\overset{cV}{\rightarrow}} \nu$, то $\nu_n \underset{K}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$.

V. $\left(\nu_n \underset{K}{\overset{cV}{\rightarrow}} \nu\right) \rightleftarrows (\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu)$ (Кафиеро).

Отсюда вытекает ряд следствий о связях различных типов сходимости мер.

Справедливы следующие признаки сходимости зарядов:

I. Пусть ν_n и ν — заряды на K. Для того чтобы имело место одно из соотношений 1) $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$, 2) $\nu_n \underset{K}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$ или 3) $\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu$, достаточно выполнения соответствующего соотношения 1) $\nu_n \xrightarrow[M_{\sigma\delta}]{} \nu$, 2) $\nu_n \xrightarrow[M_{\sigma\delta}]{V} \nu$ или 3) $\nu_n \underset{M_{\sigma\delta}}{\rightrightarrows} \nu$.

II. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность зарядов на K, сходящаяся на каждом множестве $\mathscr{M} \in M$ к конечным пределам. Чтобы существовал заряд ν на K и чтобы $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$, необходимо выполнение условия $(\mathrm{PA})_K$ и достаточно выполнения условия $(\mathrm{PA})_{M_\delta}$.

III. Пусть последовательность зарядов $\{\nu_n\}$ равномерно сходится на каждом множестве кольца M к конечным пределам. Чтобы $\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\nu_n\}$ была $(\mathrm{PA})_{M_\delta}$. В частности, если $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$, то для того, чтобы $\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu$, достаточно $\nu_n \underset{M}{\rightrightarrows} \nu$. В случае, когда $\nu_n \geqslant 0$, в этом предложении можно заменить M_δ на M.

IV. Пусть $\{\nu_n\}$— последовательность зарядов на K. Для того, чтобы на K существовал заряд ν и чтобы $\nu_n \underset{K}{\overset{V}{\rightarrow}} \nu$ необходимо и достаточно выполнение условий: 1) последовательности $\{V^+(\nu_n)\}$ и $\{V^-(\nu_n)\}$ сходятся к конечным пределам на каждом множестве $\mathscr{M} \in M$, 2) $\{V(\nu_n)\}$ обладает свойством $(\mathrm{PA})_M$.

Справедливы следующие теоремы о переходе к пределу под знаком производной:

1. *Пусть на σ-кольце K задана ненулевая мера μ и последовательность $\{\nu_n\}$ абсолютно непрерывных относительно μ зарядов. Пусть, далее, $\nu_n \xrightarrow[M_{\sigma\delta}]{} \nu$. Для того чтобы $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$ и чтобы последовательность производных Радона — Никодима $\frac{d\nu_n}{d\mu}$ сходилась по мере μ*

на множестве E к производной Радона—Никодима $\frac{d\nu}{d\mu}$, $\frac{d\nu_n}{d\mu} \overset{\mu}{\Longrightarrow} \frac{d\nu}{d\mu}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\nu_n \underset{M_{\sigma\delta}}{\overset{>}{\longrightarrow}} \nu$.

2. *Пусть на σ-кольце K задана ненулевая мера μ и последовательность $\{\nu_n\}$ абсолютно непрерывных относительно μ зарядов. Для того чтобы существовал заряд ν на K такой, что* $\nu_n \underset{K}{\rightarrow} \nu$ *и* $\frac{d\nu_n}{d\mu} \overset{\mu}{\Longrightarrow} \frac{d\nu}{d\mu}$, *необходимо и достаточно выполнение условий:* 1) $\{\nu_n\}$ *равномерно сходится к конечным пределам на M и* 2) $\{V(\nu_n)\}$ *сходится к конечным пределам на M и обладает свойством* $(\mathrm{PA})_M$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Я. Арешкин, О сходимости по длине и о криволинейном интеграле Лебега, ДАН, 72, № 5 (1950).

[2] Г. Я. Арешкин, О возможности перестановки знаков предела и полной вариации в теории вполне аддитивных функций множества, УМН 4, вып. 3 (1949).

[3] F. Cafiero, Sulle famiglie compatte di funzioni additive di insieme astrato, Atti IV congr. Unione mat, ital. 2 (1953).

Заседание 12 декабря 1961 г.

1. Е. С. Ляпин «Об упорядочиваемости преобразований и функций».
2. Р. А. Зайдман «Случайные блуждания немарковского типа».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 27 февраля 1962 г.

1. В. И. Зубов «Теория рекуррентных (по Биркгофу) движений».
2. А. Н. Андрианов «Новые методы в теории эллиптических модулярных функций».

Заседание 13 марта 1962 г.

1. Б. З. Вулих «О геометрии частично упорядоченных нормированных пространств».

Намечается некоторое объединение теории Л. В. Канторовича линейных структур с монотонной нормой с общей теорией конусов в нормированных пространствах, построенной М. Г. Крейном и дополненной за последнее время М. А. Красносельским. Используется терминология, введенная в [1].

Пусть X — частично упорядоченная линейная система, X_+ — конус ее положительных элементов. Будем говорить, что в $X(X_+)$ выполнен принцип Архимеда, если из того, что для некоторого $x \in X(X_+)$ множество всех его «кратных» $\{nx\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничено сверху, следует, что $x \leqslant 0$ $(x = 0)$. Известно, что если в K-линеале X конус X_+ архимедов, то и сам X тоже архимедов. Однако в общих частично-упорядоченных линейных системах возможно, что конус X_+ архимедов и притом воспроизводящий, а сама система X не архимедова. Пример — двумерная плоскость с открытым «развернутым» конусом: $x = (x_1, x_2) > 0$ означает, что $x_1 > 0$. Та же плоскость, упорядоченная лексикографически, представляет пример линейной структуры (даже цепи), где принцип Архимеда нарушен уже в конусе положительных элементов. Д. А. Владимиров заметил, что нарушение принципа Архимеда в X (соответственно в X_+) равносильно тому, что в X существует двумерная плоскость с «лексикографическим» (т. е. полуоткрытым развернутым) или с открытым развернутым (соответственно только лексикографическим) конусом положительных элементов.

Пусть теперь X — частично упорядоченное нормированное пространство. Если конус X_+ замкнут, то пространство X — архимедово. Обратное неверно, даже если X — структура. Однако докажем, что *если X архимедово, а конус X_+ телесен, то он замкнут.*

Действительно, пусть $x_n \geqslant 0$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$. Если $u \gg 0$, то $x_n - x \leqslant \varepsilon u$, где $\varepsilon_n \to 0$. Отсюда следует, что $x \geqslant -\varepsilon_n u$ при всех n, а тогда $x \geqslant 0$ по принципу Архимеда.

Замкнутость конуса X_+ равносильна возможности перехода к пределу в неравенстве: если $x_n \geqslant y_n$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, $y_n \xrightarrow{(b)} y$, то $x \geqslant y$.

Переходим к рассмотрению нормальных конусов (определение принадлежит М. Г. Крейну и приведено в [1]). Нормальность конуса X_+ также равносильна справедливости одной из классических теорем анализа: если $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, $z_n \xrightarrow{(b)} x$, то $y_n \xrightarrow{(b)} x$.

Нормальность конуса X_+ легче всего проверяется с помощью следующего признака И. А. Бахтина [2]: *для того чтобы конус X_+ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $0 \leqslant y \leqslant x$ влекло $\| y \| \leqslant M \| x \|$, где постоянная M не зависит от x и y.* Из этого признака сразу следует, что *нормальный конус X_+ всегда архимедов.* Однако пространство X может при этом не быть архимедовым (пример: двумерная евклидова плоскость с открытым конусом, угол раствора которого меньше π).

Свойства замкнутости и нормальности конуса X_+ непосредственно друг с другом не связаны. Замкнутый конус может не быть нормальным, а нормальный конус даже в архимедовом банаховом пространстве может не быть замкнутым. Последнее замечание остается в силе и в том случае, когда X — не просто частично упорядочено, а представляет K-линеал. Это подтверждается примером, построенным Г. Я. Лозановским.

Назовем *нормированной* (*банаховой*) *структурой* всякое частично упорядоченное нормированное пространство (частично упорядоченное банахово пространство), являющееся K-линеалом (здесь мы отклоняемся от терминологии, принятой в [1]). Норма в структуре называется *монотонной*, если из $|x| \leqslant |y|$ вытекает, что $\| x \| \leqslant \| y \|$. Такое в некотором смысле наилучшее согласование нормы с упорядочением имеет место во многих важных конкретных функциональных пространствах. В теории Л. В. Канторовича рассматривались нормированные структуры только с монотонной нормой (в [1] они называются KN-линеалами; (b)-полные KN-линеалы называются KB-линеалами). Однако при рассмотрении более общих нормированных структур существенный интерес представляют и такие структуры, где норма эквивалентна некоторой монотонной норме. Существование эквивалентной монотонной нормы связано в первую очередь с нормальностью конуса X_+, но одного этого свойства еще недостаточно. Нормальность конуса X_+ позволяет ввести в X монотонную норму, но с более сильной сходимостью. *Для того чтобы в банаховой структуре X норма была эквивалентна некоторой монотонной норме, необходимо и достаточно, чтобы конус X_+ был нормальным и замкнутым* [3]. Для произвольной нормированной структуры и этого условия еще недостаточно, и требование замкнутости конуса X_+ нужно заменить на такое: из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ следует, что $x_n^+ \xrightarrow{(b)} x_+$ ((b)-непрерывность структурных операций).

В [4] введены понятия правильного и вполне правильного конуса. Эти понятия также тесно связаны с некоторыми элементами теории Л. В. Канторовича. Так, например, оказывается, что *KB-пространство—это KN-линеал X с вполне правильным конусом X.* Если X — нормированное K_σ-пространство с замкнутым и нормальным конусом X_+, то правильность X_+ равносильна одному из условий, входящих в определение KB-пространства: из $x_n \downarrow 0$ вытекает $x_n \xrightarrow{(b)} 0$.

Наконец, понятие полной правильности конуса X_+ позволяет также сформулировать условие, при котором данная нормированная структура эквивалентна некоторому KB-пространству.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.

[2] И. А. Бахтин, О положительных решениях нелинейных уравнений с вогнутыми операторами, Диссертация, Воронеж. ун-т, 1958.

[3] Б. З. Вулих, О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой, ДАН (1962).

[4] М. А. Красносельский, Правильные и вполне правильные конусы, ДАН **135**, № 2 (1960), 255—257.

2. О. М. Калинин «Математическая экология».

Экология изучает жизнь на популяционном уровне ее проявления. Эволюционный процесс, идущий на этом уровне, Дарвин назвал «естественным отбором», а для обозначения взаимоотношения организма и среды, в результате которого происходит естественный отбор, использовал термин «борьба за существование». Математические работы по динамике популяций часто носят название «борьба за существование» [1]—[3].

Важной характеристикой популяции служит численность (иногда рассматривают живую массу, а иногда энтропию). В трудно обозримой литературе по математической экологии можно выделить два основных направления: динамика численности и экспериментальное определение численности.

Первым из известных математиков, занимавшихся изучением моделей динамики нескольких видов, был Вольтерра [4], работавший с помощью дифференциальных уравнений. Изящную разработку математической модели взаимодействия двух видов, исходя лишь из самых естественных гипотез о динамике, произвел Колмогоров в трудно доступной статье [5]. Новые идеи, возникшие на почве математических построений, стимулировали проведение экспериментов по динамике популяций микроорганизмов Г. Ф. Гаузе и нашли отклик в большой исследовательской работе по динамике населения животных С. А. Северцова [6]. В работах Кернера [7] методы дифференциальных уравнений смыкаются с идеями статистической механики и термодинамики необратимых процессов.

Метод марковских процессов в динамике популяции является по сути дела обобщением метода дифференциальных уравнений. При естественных предположениях реализации марковского процесса $x(t)$ удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dx = m(t, x)\, dt + \sigma(t, x)\, dZ(t),$$

которое при $\sigma \equiv 0$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. С другой стороны, при естественных предположениях об m и σ существует «решение» этого уравнения, являющееся марковским процессом. Кроме общих тенденций процесса, схватываемых дифференциальными уравнениями, уравнение Ито учитывает чисто случайные флуктуации. Краткий и основательный обзор этого направления (и других вопросов математической экологии) содержится в [8].

Скептическое отношение некоторых биологов [9] к работам Вольтерра и его последователей основано на полном непонимании места математики в исследовательской работе. Например, статистическое изучение биоценозов характеризуется в [9] (стр. 291) как бесплодное извращение объективной картины теснейшей связи организмов со средой.

Среди задач количественного учета организмов исключительно интересны в математическом отношении задачи теории мечения [10], [11]. Постановку задач и изложение некоторых результатов теории можно найти в [12].

Замена реальной ситуации некоторой идеализированной гипотетической системой (математической моделью) вызывает пристальное внимание биолога. Но вопрос об отношении модели к действительности не прост. Полезным понятием может служить «универсальность» модели. Например, модель чистого роста популяции более универсальна, чем модель замкнутой популяции, так как логически замкнутость есть частный случай чистого роста. В докладе на примерах теории мечения показано, что с ростом универсальности модели повышается ее «тривиальность» (увеличиваются дисперсии оценок максимального правдоподобия, а в предельно универсальной модели эти оценки совсем исчезают). Грубые модели могут оказаться далеко нетривиальными. Эту мысль подчеркивал Бартлетт [8]. С другой стороны, совершенно адекватная модель может оказаться бесполезной.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Paris, 1935.

[2] G. F. Gause, The struggle for existence, Baltimore, 1934.

[3] T. Neyman, T. Park, E. L. Scott, Struggle for existence. The Tribolium model: diological and statistical aspects, Proc. Third. Berkeley Symposiym on Math. statistics and Probability, California (1956).

[4] V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, Mem. Acad. Lincei (6) 2 (1926), 31—113.

[5] A. Kolmogoroff, Sulla teoria di Volterra della lotta per l'existenza, Giornale dell'Istituto Italiano degli attuari 7 (1936), 74—80.

[6] С. А. Северцев, Динамика населения и приспособительная эволюция животных, М. — Л., 1941.
[7] E. Kerner, On the Volterra — Lotka principle, Bull. Math. Biophys. 23, № 2 (1961), 141—57.
[8] M. S. Bartlett, Stochastic population models in ecology and epidemiology, London, New York, 1960.
[9] Б. Г. Иогандзен, Основы экологии, Томск, 1959.
[10] T. N. Darroch, The multiple-recapture census, Biometrika 45 (1958), 343—59; 46 (1959), 336—51.
[11] T. N. Dorroch, The two-sample capture-recapture census rohen tagging and sampling are stratified, Biometrika 48 (1961), 241—60.
[12] О. М. Калинин, Математическая теория мечения, Труды Третьей конференции по применению математики в биологии (1962).

Заседание 20 марта 1962 г.

Обсуждение работ в области математики, выдвинутых на соискание Ленинских премий 1962 г.

Краткие обзоры обсуждаемых работ сделали Ю. Ф. Борисов, В. И. Зубов, О. А. Ладыженская и М. Ш. Бирман.

Заседание 10 апреля 1962 г.

1. В. М. Бабич «Учебники теоретической механики и студент-математик».

Доклад В. М. Бабича вызвал оживленную дискуссию по вопросам преподавания теоретической механики в университетах.

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Векслер Александр Ильич.

Заседание 24 апреля 1962 г.

1. Обсуждение плана работ Физматгиза. С сообщением от издательства выступил А. Т. Цветков.

Общество одобрило план работ Физматгиза.

2. В. А. Якубович «Автоматы».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Болдырев Николай Георгиевич.

Заседание 8 мая 1962 г.

1. Б. Н. Делоне (Москва) «Об одной задаче геометрической теории чисел».

2. Присуждение премии Ленинградского математического общества молодому математику.

Премия Общества за 1962 г. присуждена В. Г. Мазье за работы «Классы множеств и теоремы вложения функциональных пространств. Некоторые вопросы теории эллиптических уравнений».

Представленные на конкурс работы К. Г. Валеева и И. В. Романовского отмечены грамотами Общества.

Заседание 22 мая 1962 г.

1. Президент Общества Ю. В. Линник предлагает избрать действительного члена Общества академика В. И. Смирнова в связи с его семидесятипятилетием почетным членом Общества.

Владимир Иванович Смирнов единогласно избирается почетным членом Ленинградского математического Общества.

2. Обсуждение кандидатов в академики и члены-корреспонденты АН СССР.

3. Ю. Нейман (США) «Основная проблема статистики от С. Н. Бернштейна до наших дней».

4. Вручение премии Ленинградского математического Общества молодому математику. Премия Общества за 1962 г. вручена В. Г. Мазье.

5. В. Г. Мазья «О теоремах вложения».

1963 г. июль — август т. XVIII, вып. 4(112)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 25 сентября 1962 г.

1. Ю. В. Линник и Л. Д. Фаддеев сделали сообщение о международном съезде математиков в Стокгольме.

Заседание 9 октября 1962 г.

1. С. М. Лозинский «О некоторых основных понятиях и теоремах теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 23 октября 1962 г.

1. М. К. Гаврин «О ценности информации и близости информаций».

1°. Класс рассматриваемых информаций содержательно ограничивается следующими предположениями.

А. Информация служит руководством к действию.

Б. Результат действия может быть оценен числом (существует целевая функция — в терминах теории игр).

Будем предполагать, что имеется некто, мы будем называть его *деятелем*, который может предпринимать действия y из множества действий Y. Деятель получает, перерабатывает и хранит информацию. Накопленная информация называется *представлением* [1]) (деятеля о внешнем мире), порции поступающей информации называются *сообщениями*. Предполагается, что деятель имеет одно представление ξ из множества возможных представлений Ξ.

Выбор действия y осуществляется деятелем на основе имеющегося у него представления ξ, причем зависимость y от ξ целесообразно считать стохастической. Предполагается существование вероятности

$$\mathbf{P}(e \mid \xi)$$

того, что при имеющемся у деятеля представлении ξ, избранное им действие y будет принадлежать множеству $e \subset Y$. Функция P определена для всех $\xi \in \Xi$ и e, принадлежащих некоторому борелевому классу V_Y, не зависящему от ξ.

Примем, что действительное состояние внешнего мира характеризуется некоторым представлением $\xi_0 \in \Xi$, которое мы назовем *верным*.

Результатом действия y, предпринятого при верном представлении ξ_0, является платеж деятеля $\varphi(\xi_0, y)$. Математическое ожидание платежа при представлении

---

[1]) В некоторых работах мы по существу встречаемся с частными случаями представлений. В статье [1] роль представления играет весь накопленный в результате нескольких экспериментов опыт. В книге [3] (гл. XIII) представлением служит распределение вероятностей на множестве возможных состояний природы.

деятеля ξ есть

$$\zeta(\xi_0, \xi) = \int\limits_Y \varphi(\xi_0, y)\, \mathbf{P}(de \mid \xi)$$

(существование интеграла предполагается). Примем, что верна

А к с и о м а 1. *Для всякого* $\xi_0 \in \Xi$

$$\zeta(\xi_0, \xi_0) = \min_{\xi \in \Xi} \zeta(\xi_0, \xi).$$

Тогда разность

$$\nu(\xi_0, \xi) = \zeta(\xi_0, \xi) - \zeta(\xi_0, \xi_0)$$

характеризует отклонение представления ξ от верного представления ξ_0.

2°. Выдвигается *принцип обоснованности*, согласно которому применение любого критерия $\varkappa(\xi_0, \xi)$, характеризующего близость представлений ξ_0 и ξ, должно быть обосновано связью критерия $\varkappa$ с критерием ν. Для определенности будем считать критерий $\varkappa$ *обоснованным*, если из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa(\xi_0, \xi_n) = 0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(\xi_0, \xi_n) = 0$.

Примем, что Y есть метрический компакт и $\varphi(\xi, y)$ есть полунепрерывная снизу функция y. Тогда $\varphi(\xi, y)$ достигает на Y минимума и множество

$$\Theta(\xi) = \{y_0 : \varphi(\xi, y_0) = \min_{y \in Y} \varphi(\xi, y)\}$$

не пусто. Допустим теперь, что верна

А к с и о м а 2.

$$\mathbf{P}(\Theta(\xi) \mid \xi) = 1,$$

т. е. что деятель избирает лишь те действия, которые сулят ему минимальный платеж в предположении, что его представление ξ *является верным.*

Легко доказывается, что из аксиомы 2 следует аксиома 1.

Т е о р е м а 1. *Метрика* (см. [2])

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sup_{y \in Y} |\varphi(\xi_1, y) - \varphi(\xi_2, y)|$$

является обоснованной. Более того,

$$\nu(\xi_1, \xi_2) \leqslant 2r(\xi_1, \xi_2)$$

и постоянная 2 *не может быть заменена на меньшую.*

Т е о р е м а 2. *Если* Ξ *и* Y *суть метрические компакты и* $\varphi(\xi, y)$ *есть непрерывная функция совокупности своих аргументов, то* $\zeta(\xi_0, \xi)$ *непрерывна при* $\xi = \xi_0$, *т. е. метрика пространства* Ξ *является обоснованной.*

3°. Предположим, что и функция платежа φ является переменной. Считая Ξ и Y метрическими компактами, введем пространство $\Phi = C_{\Xi \times Y}$ непрерывных функций $\varphi(\xi, y)$ с метрикой $r_\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_{\xi \in \Xi,\, y \in Y} |\varphi_1(\xi, y) - \varphi_2(\xi, y)|$. Будем писать $\zeta(\xi_0, \xi; \varphi)$ вместо $\zeta(\xi_0, \xi)$ и аналогично введем φ в другие обозначения.

Т е о р е м а 3.

$$\overline{\lim_{\substack{\varphi \to \bar\varphi \\ \xi \to \bar\xi}}} |\zeta(\xi_0, \xi; \varphi) - \zeta(\xi_0, \bar\xi; \bar\varphi)| \leqslant \sup_{y \in \Theta(\bar\xi;\, \bar\varphi)} \bar\varphi(\xi_0, y) - \inf_{y \in \Theta(\bar\xi;\, \bar\varphi)} \bar\varphi(\xi_0, y).$$

Из этой теоремы следует, что $\zeta(\xi_0, \xi; \varphi)$, рассматриваемая как функция переменных (ξ, φ), непрерывна в точке $(\xi_0, \bar\varphi)$, где $\bar\varphi \in \Phi$ — любое. Содержательная интерпретация: руководитель предприятия имеет задачей получение максимальной прибыли; если его представление (о производственных возможностях предприятия, возможностях снабжения, себестоимости изделий и пр.) далеко от верного, небольшие колебания в уровне цен могут вызвать значительные изменения в размере получаемой прибыли, в отличие от случая, когда его представление близко к верному.

4°. Коротко остановимся на роли сообщений. Пусть деятель, имевший представление ξ и получивший сообщение u, вырабатывает новое представление $\bar{\xi}=f(\xi, u)$. Если при этом верным было представление ξ_0, то *ценность* сообщения u (в данной ситуации, характеризуемой заданием ξ_0 и ξ) есть

$$\mu(u; \xi_0, \xi)=\zeta(\xi_0, \xi)-\zeta(\xi_0, f(\xi, u)) \gtreqless 0\text{ [1]}.$$

5°. Под *дезинформацией* (в широком смысле) понимаем передачу лицом A лицу $Б$ сообщения с целью побудить $Б$ к производству действий, выгодных лицу A. Допустим, что лицом $Б$ является деятель и что при верном представлении ξ_0 и действии y, произведенном деятелем, платеж лица A есть $\varphi_A(\xi_0, y)$. Математическое ожидание платежа при представлении деятеля ξ есть

$$\zeta_A(\xi_0, \xi)=\int\limits_Y \varphi_A(\xi_0, y)\,\mathbf{P}(de\mid\xi).$$

Ценность сообщения u для лица A есть

$$\mu_A(u; \xi_0, \xi)=\zeta_A(\xi_0, \xi)-\zeta_A(\xi_0, f(\xi, u)).$$

Если лицу A известны ξ_0, ξ, $\mathbf{P}$, φ, f, то он может решить задачу о максимизации μ_A, т. е. минимизации $\zeta_A(\xi_0, f(\xi, u))$ за счет выбора сообщения u. В противном случае ему приходится иметь дело с той или иной задачей на выбор решения в условиях неопределенности.

Если $\varphi_A=-\varphi$, можно говорить о дезинформации в узком смысле.

6°. Ставится задача о построении ε-сетей в Ξ в смысле критерия ν, т. е. о выборе такого конечного множества $\Xi_1\subset\Xi$, что для любого $\xi_0\in\Xi$ найдется $\xi\in\Xi_1$, так что $\nu(\xi_0, \xi)<\varepsilon$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Вальд, Основные идеи общей теории статистических решений. В кн. «Последовательный анализ», М., Физматгиз, 1960.
[2] A. Wald, Statistical decision function, New York, 1950.
[3] Р. Д. Льюс и Х. Райфа, Игры и решения, М., ИЛ, 1961.

2. Б. А. Рымаренко «О конференции по конструктивной теории функций в Баку».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран Мазья Владимир Гилелевич.

Заседание 13 ноября 1962 г.

1. Н. А. Сапогов «О нормах линейных полиномиальных операторов в связи с задачами приближения функций».

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ — система непрерывных ортонормированных на конечном отрезке $[a, b]$ функций:

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x)\,\overline{\varphi_l(x)}\,dV(x)=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

$C=C[a, b]$ обозначает линейное нормированное пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на $[a, b]$ (с нормой $\|f\|=\max|f(x)|$), а $\mathscr{F}_n$ — его подпространство, образованное всеми полиномами $\Phi_n=\sum\limits_1^n c_k\varphi_k(x)$, где c_k — комплексные числа.

[1]) Нетрудно привести пример, когда даже истинное сообщение имеет отрицательную ценность.

C_Φ пусть обозначает замыкание в C объединения всех $\mathfrak{F}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Вводятся четыре линейных оператора A_t, U_n, $\overline{A_t}$ и Π_n. Оператор $A_t: C_\Phi \longrightarrow C_\Phi$, определен на $\mathfrak{F}_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ формулами $A_t\Phi_N = \sum\limits_1^N c_k\varphi_k(x)\,\varphi_k(t)$, предполагается, что $\| A_t \|_{\mathfrak{F}_N} \leqslant M$, где M не зависит от N.

Оператор $U_n = U_n(\Phi, x): C_\Phi \longrightarrow \mathfrak{F}_n$, причем

$$U_n(\varphi_k, x) = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{k,\,l}^{(n)}\,\varphi_l(x) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

где $\gamma_{k,\,l}^{(n)}$ — фиксированные коэффициенты.

Оператор $\overline{A}_t: \mathfrak{F}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$, определен формулой

$$\overline{A}_t\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}.$$

Оператор $\Pi_n(\Phi, x)$: $C_\Phi \longrightarrow \mathfrak{F}_n$, определен формулой

$$\Pi_n(\Phi, x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\gamma_{k,\,k}^{(n)}\,\varphi_k(x),$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции Φ относительно $\varphi_k(x)$, а $\gamma_{k,\,k}^{(n)}$ — диагональные коэффициенты преобразования (1).

Тогда оказывается, что справедливо тождество

$$\int_a^b \overline{A}_t U_n(A_t\,\Phi, x)\,dt = \Pi_n(\Phi, x), \tag{2}$$

какова бы ни была функция $\Phi \in C_\Phi$.

Тождество (1) из [1] содержится в (2), если за $\{\varphi_k(x)\}$ принимается система тригонометрических функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\ \ ikx)\right\}$ и $a=0$, $b=2\pi$. Специально изучается случай, когда за $\{\varphi_k(x)\}$ принимается система собственных функций $\{v_k(x)\}$ задачи Штурма — Лиувилля:

$$u'' + (\lambda - q(x))\,u = 0, \qquad \left.\begin{aligned} u'(0) - hu(0) = 0, \\ u'(\pi) + Hu(\pi) = 0, \end{aligned}\right\}$$

для которой принято, что существует ограниченная производная $q'(x)$ и h, H — конечны. На этот случай переносятся (и несколько усиливаются) теоремы, опубликованные ранее для тригонометрических и алгебраических операторов в [1] и [2].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Сапогов, Усиление теоремы Лозинского—Харшиладзе о полиномиальных приближениях, ДАН 143, № 1 (1962), 53—55.
[2] Н. А. Сапогов, О нормах линейных полиномиальных операторов, ДАН 143, № 6 (1962), 1286—1288.

2. В. Л. Файншмидт «О некоторых экстремальных задачах в классе регулярно-монотонных полиномов».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Виденский Виктор Соломонович,

Файншмидт Виктор Лейбович.

Заседание 26 ноября 1962 г.

Заседание проводилось совместно с заседанием Ученого совета Ленинградского университета и было посвящено пятидесятилетию со дня рождения и тридцатилетию научной и педагогической деятельности Александра Даниловича Александрова.

1. С. В. Валландер «Вступительное слово».

2. Б. Н. Делоне, Н. В. Ефимов, А. В. Погорелов «Проблемы и достижения современной геометрии».

3. В. И. Свидерский «Связь точных наук и философии».

4. Приветствия юбиляру.

Заседание 11 декабря 1962 г.

1. Н. Г. Чудаков «Современное состояние теории L-функций».

В течение всей первой половины нашего века делались попытки улучшения наших знаний о распределении нулей L-функций в критической полосе и приближения к доказательству гипотезы Римана.

Однако все исследования в этом направлении пока шли путем, который впервые был указан в работах Адамара и Валле-Пуссена еще в конце прошлого века. Идея этого метода состоит в том, что величина $M=\max|L(s,\chi)|$ внутри заданной области влияет на расположение нулей $L(s,\chi)$ в этой области — чем меньше M, тем дальше влево лежат эти нули. Поэтому все усилия были направлены на улучшение оценок тригонометрических сумм, от которых зависит оценка и M. Основные этапы в успехах по исследованию нулей $L(s,\chi)$ сопутствовали новым методам оценок тригонометрических сумм. Таковы были в свое время работы Ландау, Литтлвуда, Н. Г. Чудакова [1]. В настоящее время наиболее точные результаты о нулях L-функций получены в работах И. М. Виноградова и Н. М. Коробова.

Но этот адамаровский путь исследования имеет свои естественные границы; он не может дать доказательства даже квазиримановской гипотезы, т. е. степенного понижения в остаточном члене для числа простых. Это связано с тем, что $M=\infty$ для всей полуплоскости $\sigma\geqslant 1$. Еще большие затруднения встречаются в теории L-функций для действительных характеров, где даже довольно грубые оценки границы нулей содержат постоянные, для численного вычисления которых нет до сих пор алгоритма (теорема Зигеля).

Поэтому в классической теории L-функции мы должны искать принципиально новых путей исследований, используя все известные факты современной математики.

А пока полезно классическую теорию сопоставить с арифметическими объектами, которые ей родственны. Таковыми являются L-функции полей алгебраических функций с конечным числом постоянных.

Здесь исследование аналогичных проблем было продвинуто значительно дальше и аналог гипотезы Римана был доказан. Напомним основные факты этой теории. Пусть K — поле алгебраических функций, содержащее ровно q постоянных,

$$Z(u,K,\chi)=\sum_{\mathfrak{A}}\chi(\mathfrak{A})\,u^{d\mathfrak{A}},$$

где $\mathfrak{A}$ пробегает все целые дивизоры поля K, $d\mathfrak{A}$ — степень $\mathfrak{A}$, $\chi(\mathfrak{A})$ — характер группы классов вычетов $\operatorname{mod}\mathfrak{M}$.

Если $\chi(\mathfrak{A})=1$, то

$$Z(u)=Z(u,K,1)=(1-u)^{-1}(1-qu)^{-1}P(u,K),$$

где $P(u,K)$ — многочлен от u, степень которого равна $2g$ (g — род поля K).

Артин (1925) высказал гипотезу, что все нули $Z(u)$ лежат на окружности $|u|=q^{-\frac{1}{2}}$. Это и есть аналог гипотезы Римана в нашем случае. А. Вейль [2] полностью доказал эту гипотезу, опираясь на глубокие факты алгебраической геометрии; теперь обнаружено, что гипотеза Артина эквивалентна проблеме фикспунктов рациональных преобразований [3].

С другой стороны, теория полей классов обнаруживает, что все нули $Z(u, K, \chi)$ для любого χ образуют подмножество нулей некоторой $Z(u, L, 1)$, где L — конечное расширение K (поле классов χ относительно K). Поэтому теорема А. Вейля распространяется и на нули всех $Z(u, K, \chi)$.

Теорема А. Вейля нашла широкое применение в современной аналитической теории чисел. Например, она позволяет хорошо оценивать широкий класс тригонометрических сумм, которые интересны особенно для аддитивных проблем теории чисел, см., например, [4].

Упомянем здесь еще о работе Д. Н. Ленского [5], который использовал вышеупомянутую теорему для оценки числа представлений простого числа значениями многочленов от простых же аргументов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, М., ИЛ, 1953.
[2] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en deduisent, Paris, 1948 (Hermann).
[3] А. Маттук и Дж. Тэт, О неравенстве Кастельнуово—Севери, Математика 4 : 2 (1960).
[4] Г. И. Перельмутер, Оценка одной суммы с простыми числами. ДАН 144, № 1 (1962).
[5] Д. Н. Ленский, К оценке сверху некоторых теоретико-числовых функций в полях алгебраических чисел, ДАН 150, № 2 (1963).

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран:

Берман Давид Львович.