2008 г. март — апрель *т. 63, вып. 2 (380)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

В Санкт-Петербургском математическом обществе

Заседания общества

9 января 2007 г. Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых.

1. К 25-летию Секции математики при Доме Ученых РАН. Краткое сообщение А. М. Вершика.

Секция была образована в декабре 1981 г. по инициативе ряда математиков Ленинграда, отчасти в связи с переездом матмеха ЛГУ – в помещении которого проводились до этого все заседания Общества, – в Ст. Петергоф, а отчасти в связи с необходимостью устраивать больше открытых заседания с привлечением более широкой аудитории, интересующейся математикой и ее приложениями. Предшествующий созданию Общества (в 1959 г.) Городской математический семинар, организованный в 1953 г., также работал в Доме Ученых. Первым председателем секции был С. М. Лозинский, затем с 1985 г. – А. М. Вершик. Заседания секции одновременно были заседаниями Математического общества, последние проходили поочередно на старом матмехе и в Доме Ученых. В настоящее время секция устраивает ежегодно 3–4 заседания; обычно это заседания по проблемам образования, популяризации математики, а также мемориальные заседания и дискуссии и др. Актуальным является вопрос о вступлении членов Математического общества и участников заседаний в члены Дома Ученых, работа которого нуждается в финансовой поддержке.

2. Вручение премии общества “Молодому математику” за 2006 г. Н. В. Дурову.

3. Доклады лауреатов премии общества “Молодому математику” за 2006 и 2005 г.

Н. В. Дуров. *Арифметическая теория пересечений и гомотопическая алгебра.*

Доклад посвящен изложению общего плана построения арифметической (аракеловской) геометрии и особенно теории пересечений, основанного на построенной докладчиком теории обобщенных колец и на гомотопической алгебре, которая в данной ситуации успешно заменяет гомологическую алгебру, традиционно применяющуюся для подобных задач. Был подробно рассмотрен один из самых простых, но в то же время интересных примеров – компактификация спектра кольца целых чисел. На этом примере продемонстрирована ставшая уже классической связь арифметических кратностей пересечений и логарифмов объемов решеток.

О. А. Тараканов. *Слабое отслеживание для омега-устойчивых диффеоморфизмов.*

В докладе рассмотрена связь понятия слабого отслеживания (СО) и омега-устойчивости диффеоморфизмов на гладком многообразии. Известны примеры омега-

Предыдущий отчет о работе СПбМО см. в УМН, **62**:1 (2007). Отчеты обо всех заседаниях имеются на сайте общества: http://www.mathsoc.spb.ru/rus/reportsr.html.

устойчивых диффеоморфизмов, у которых наличие свойства СО зависит от нетривиальных численных характеристик седловых гиперболических неподвижных точек. Известно, что неблуждающее множество омега-устойчивого диффеоморфизма f состоит из конечного числа замкнутых, попарно непересекающихся “базисных” множеств, каждое из которых содержит плотную траекторию. Доказано, что если в фазовой диаграмме омега-устойчивого диффеоморфизма длина любой цепи не превосходит трех, то диффеоморфизм обладает свойством СО. (Цепью длины n называется последовательность базисных множеств $O_1 \to O_2 \to \cdots \to O_n$, для которых существуют траектории T_i, $i = 1, \ldots, n-1$, стремящиеся к O_i на минус бесконечности и к O_{i+1} на плюс бесконечности.)

В члены общества приняты Н. В. Дуров, О. А. Тараканов.

Заседание 25 января 2007 г. Н. К. Никольский. *Проблема Кадисона–Зингера вызывающе элементарна?..*

Известная проблема Кадисона–Зингера (ПКЗ, 1959), происходящая на самом деле из одной математической оплошности П. А. Дирака, – одна из наиболее старых нерешенных задач анализа (мы не говорим о гипотезе Римана...). Вопрос состоит в (недоказанной) единственности продолжения чистых состояний C^*-подалгебры алгебры операторов $L(H)$ на всю эту алгебру.

В последние годы было обнаружено, что ПКЗ эквивалентна десятку других нерешенных задач математики и ее приложений – о базисах гильбертова пространства, о замащивании бесконечных матриц, о разбиениях фреймов (frames), об обратимости конечных матриц с лидирующей диагональю, о тригонометрических суммах на канторовых множествах, о комбинаторных свойствах систем векторов в $\mathbb{R}^n$ и другим задачам. Некоторые из эквивалентных формулировок вызывающе элементарны и могут быть сформулированы в качестве упражнений к обычному курсу анализа 5-го семестра. С другой стороны, недавно появились указания на зависимость ПКЗ (и всего узла эквивалентных ей гипотез) от гипотезы континуума (которая, как известно, не зависит от аксиоматики Цермело–Френкеля).

Заседание 10 апреля 2007 г. В. В. Вершинин (Новосибирск, Монпелье). *Косы и связанные с ними структуры.*

Заседание 24 апреля 2007 г. С. В. Дужин. *Гипотеза геометризации и работы Перельмана.*

Хорошо известна связь между топологией и метрической геометрией замкнутых двумерных поверхностей: на всякой такой поверхности можно ввести метрику постоянной кривизны, причем знак последней совпадает со знаком эйлеровой характеристики поверхности (положителен для сферы, нуль для тора и отрицателен для поверхностей рода выше 1).

Около 1980 г. Уильям Тёрстон высказал гипотезу, что подобным образом, только значительно сложнее, обстоит дело с трехмерными многообразиями. Он описал восемь однородных трехмерных римановых геометрий (три геометрии постоянной кривизны и еще пять, однородных, но не изотропных) и обоснованно предположил, что всякое компактное трехмерное многообразие можно определенным образом разбить на куски, в каждом из которых можно ввести одну из восьми модельных геометрий. Гипотеза геометризации Тёрстона включает в себя в качестве частного случая гипотезу Пуанкаре о том, что связное односвязное ориентируемое трехмерное многообразие гомеоморфно сфере.

В течение 25 лет над программой геометризации трехмерной топологии работало множество математиков. Ими было получено большое количество частных результатов, но в целом гипотеза никак не поддавалась (особое сопротивление оказывали эллиптический и гиперболический случаи).

В цикле из трех препринтов 2002–2003 гг. Г. Перельман предложил доказательство гипотезы геометризации, основанное на исследовании эволюции риманова многообразия под действием потока Риччи. В 2006 г. две независимые группы экспертов закончили изучение работ Перельмана, пришли к выводу, что доказательство правильное, и опубликовали пространные тексты, в которых восполнены детали, отсутствовавшие в сжатых оригинальных препринтах.

В докладе дано введение в трехмерную топологию, описана гипотеза геометризации и схематично рассказано о геометрической части рассуждений Г. Перельмана.

16 мая 2007 г. Совместное заседание общества и международной историко-научной конференции, при участии Фонда поддержки российской математики им. Леонарда Эйлера.

К 300-летию Леонарда Эйлера (1707–1783).

1. Г. К. Михайлов (Москва). *Леонард Эйлер и становление рациональной механики.*

2. С. В. Востоков. *Эйлер и закон взаимности.*

3. М. Матмюллер (Базель). *Первый современный математик? О вкладе Эйлера в развитие современного математического стиля.*

4. Н. А. Вавилов (С.-Петербург). *Соединить идеи с вычислениями. От Эйлера до компьютерной алгебры.*

5. Е. Кац (Израиль). *Леонард Эйлер и современные представления о молекулярной структуре фуллеренов и фуллереноподобных наноструктур.*

Собранию был продемонстрирован новый документальный фильм об Эйлере (режиссер – И. А. Шадхан).

Заседание 29 мая 2007 г. Ю. М. Лифшиц. *Четыре результата Джона Клейнберга.*

Джон Клейнберг получил премию Неванлинны (аналог медали Филдса в теоретической информатике) в 2006 г. на Международном математическом конгрессе в Мадриде. В официальном пресс-релизе указано четыре наиболее существенные группы его результатов.

1. Алгоритмы поиска ближайших соседей. Клейнберг предложил новый способ предварительной обработки семейства точек в евклидовом пространстве, позволяющей по новой точке быстро находить ближайшую точку в базе. Впервые удалось построить метод, который доказуемо быстрее, чем полный перебор.

2. Способ определения авторитетности интернет-страниц. Метод, предложенный Клейнбергом, основан на вычислении собственного вектора матрицы, описывающей структуру ссылок в интернете. На этих идеях основан алгоритм PageRank, сделавший Google лучшей системой интернет-поиска.

3. Математические модели эффекта “как тесен мир”. Джон Клейнберг предложил интересную модель социальной сети с параметром, характеризующим способ создания связей в сети. Ему удалось обнаружить необычное свойство этой модели: существует единственное значение параметра, при котором есть эффективный способ быстро передать сообщение до любого адресата “по цепочке знакомых”.

4. Математическая модель “информационных всплесков”. Рассматривается поток некоторых информационных сообщений (например, научные статьи, письма по электронной почте, новости). Всплеском (burst) называется интервал времени, в который определенное ключевое слово встречается чаще обычного. Клейнберг предложил способ перечислить все всплески, отсортировать их по “весу” и построить их иерархию.

Заседание 2 октября 2007 г. А. М. Райгородский (Москва). *О проблеме Борсука в комбинаторной геометрии.*

Комбинаторная геометрия – одна из красивейших дисциплин современной математики. С одной стороны, постановки большинства задач, относящихся к комбинаторной геометрии, абсолютно элементарны и потому доступны пониманию сильного старшеклассника. С другой стороны, решения этих задач зачастую крайне нетривиальны (если, вообще, известны), и требуются весьма глубокие и оригинальные методы для получения серьезных результатов в указанной области.

Одной из наиболее ярких проблем в комбинаторной геометрии является проблема Борсука о разбиении множеств в евклидовом пространстве на части меньшего диаметра. Гипотеза Борсука 1933 г. состояла в том, что каждое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, имеющее ненулевой диаметр, может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра. В связи с попытками обосновать или опровергнуть эту гипотезу были разработаны тонкие методы элементарной геометрии и топологии, комбинаторики и теории вероятностей, которые оказались применимы и ко многим другим задачам.

В докладе было рассказано об интригующей истории проблемы и об упомянутых методах ее решения.

Заседание 16 октября 2007 г. Н. Н. Петров. *Квантовая механика и нейрофизиология. В поисках единой теории.*

В докладе рассматривались некоторые проблемы квантовой механики и нейрофизиологии, лежащие (пока?) за пределами нашего понимания. Известно, что эти науки активно взаимодействуют.

С одной стороны, мышление, в своих самых существенных проявлениях, основано на сложной игре эволюции и редукции (коллапса) волновых функций, являющихся решениями уравнения Шрёдингера. Этот процесс иногда связывают с "неалгоритмической составляющей" нашего мышления, той самой, которая отличает человека от компьютера.

С другой стороны, как оказалось, наш мозг (исключая, быть может, подсознание) совершенно не приспособлен к восприятию загадочных квантово-механических эффектов. Есть предположение, что эта способность, сохранившаяся у животных, утрачена человеком в результате эволюции.

Основной идеей доклада является отказ от "вещественного" описания упомянутых процессов. Что касается квантовой механики, то эта идея не нова. Еще А. Пуанкаре (на основании весьма скудных данных науки начала XX века) однажды заметил, что переход от рациональных чисел к вещественным – нетривиальный и ответственный выбор. Адекватное изменение математического аппарата, по мнению докладчика, заключается в замене отрезка евклидовой прямой канторовым совершенным множеством. В нейрофизиологии эта замена отражает "хаотичность" (или, скорее, исключительную гибкость) нашего сознания, что косвенно подтверждается электроэнцефалограммой здорового человека.

В докладе подробно обсуждается простейшая модель "логического рассуждения", в которой "истина" интерпретируется как неподвижная точка некоторого полиномиального оператора в подходящем компактном кольце, а "приближенные представления" о ней – как итерации этого отображения. В подобных моделях адекватное "вещественное" описание, по-видимому, невозможно.

Заседание 30 октября 2007 г. Т. Е. Панов (Москва). *Торическая топология.*

Начиная с 1970-х годов, торические действия играют все возрастающую роль в различных областях математики, а их изучение стимулирует возникновение новых взаимосвязей между алгебраической геометрией, комбинаторной и выпуклой геометрией, коммутативной и гомологической алгеброй, дифференциальной топологией и теорией гомотопий. По мере расширения этих приложений возникла целая новая область исследований, ставшая известной как торическая топология. Предметом изучения торической топологии являются алгебраические, комбинаторные, дифференциальные, геометрические и гомотопические аспекты важного класса действий тора с богатой структурой в пространстве орбит.

Первоначальный импульс этому развитию придала теория торических многообразий в алгебраической геометрии. С начала 1990-х годов идеи и методы торических многообразий начали проникать в топологию. Пространство орбит регулярного действия компактного тора $\mathbb{T}^n$ несет богатую комбинаторную структуру, отражающую распределение стационарных подгрупп. Во многих случаях топологию пространства с действием тора можно описать в терминах комбинаторики пространства орбит. Замечательно, что этот подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространств с действием тора удается интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически.

Одной из основных здесь является конструкция момент-угол комплекса, переводящая "комбинаторную топологию" в "эквивариантную топологию". В наиболее общем виде эта конструкция сопоставляет симплициальному комплексу (или триангуляции) многообразие или комплекс с просто устроенным действием тора. В частном случае триангуляций сфер, получаемых как границы выпуклых многообразий, эта конструкция приводит к интересному семейству комплексных многообразий, не имеющих кэлеровой структуры. Эти многообразия также возникают в симплектической топологии как множества уровня отображений моментов для гамильтоновых действий тора и задаются полными пересечениями вещественных квадрик.

Заседание 13 ноября 2007 г. Н. А. Вавилов. *Вычисления в исключительных группах.*

Одним из величайших математических открытий на рубеже XIX–XX веков было обнаружение 5 исключительных алгебр Ли/групп Ли/алгебраических групп, типов E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2, Киллингом и Картаном. Позже Диксон и Шевалле построили их аналоги над произвольным, в частности, конечным полем, что было одним из решающих продвижений в классификации конечных простых групп.

Группа типа G_2 представляется как группа матриц степени 7×7 (или 8×8) и похожа на классические группы. Но вот остальные исключительные группы довольно велики. Кроме того, в минимальных представлениях они задаются уравнениями степени 3 или 4 (уравнениями степени 2 можно задать, с точностью до унипотентной части, только произведения классических групп).

Поэтому вычисления в них считались совсем непростым делом. Для поля техника таких вычислений была развита бельгийской и голландской школами в 1950-х и 1960-х годах (Фрейденталь, Титс, Спрингер, Фельдкамп), но вот для кольца приходилось искать обходные пути, типа локализации.

Доклад посвящен вычислениям в больших исключительных группах как группах матриц степеней 27×27, 56×56, 248×248 и 27×27 соответственно.

В начале 1990-х годов было обнаружено, что в вычислениях можно ограничиться использованием лишь *квадратичных* уравнений на элементы одного столбца, а не уравнений степени 3 или 4, как это делалось ранее. Метод сведения к вычислениям такого типа, названный разложением унипотентов, оказался чрезвычайно полезным во многих вопросах структурной теории.

Однако в последнее время в работах докладчика, Гавриловича, Николенко и Лузгарева выяснилось, что при помощи несложных теоретико-групповых соображений можно организовать все вычисления так, чтобы использовать при этом только *линейные* уравнения на алгебру Ли. Используя этот метод, нам удалось передоказать и усилить основные структурные теоремы. Кроме того, этот метод работает не только на уровне K_1, но и на уровне K_2 (в группе Стейнберга).

Заседание 27 ноября 2007 г. Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых. *Вечер памяти академика Владимира Ивановича Смирнова* (к 120-летию со дня рождения).

На заседании выступили: А. И. Назаров, А. М. Вершик, В. М. Бабич, Н. Н. Уральцева, В. П. Хавин, Г. П. Матвиевская (Оренбург). Были заслушаны выступления отсутствующих М. С. Бирмана и В. А. Залгаллера.

Принято решение о присуждении премий Санкт-Петербургского математического общества "Молодому математику" за 2007 г. В. А. Петрову и К. В. Первышеву.

Заседание 25 декабря 2007 г. *Доклады лауреатов премии общества "Молодому математику" за 2007 г.*

К. В. Первышев. *Иерархии по времени для эвристических алгоритмов.*

Известно следующее утверждение: для любых $a < b$ существует язык, распознаваемый некоторым детерминированным алгоритмом за время $O(n^b)$, но не распознаваемый никаким детерминированным алгоритмом за время $O(n^a)$. Данное утверждение называется иерархией детерминированных алгоритмов по времени. Открытым является вопрос о существовании подобной иерархии для *вероятностных* алгоритмов.

Эвристическими алгоритмами будем называть алгоритмы, которые выдают правильный ответ на 99% входов, но могут ошибаться на 1% входов. Сравнительно недавно Л. Фортноу и Р. Сантанам показали, что иерархия по времени существует для *эвристических вероятностных* алгоритмов. В докладе рассказывалось простое доказательство этого результата.

В. А. Петров. *Мотивы однородных проективных многообразий.*

Рассмотрим полупростую алгебраическую группу G внутреннего типа над полем k и проективное многообразие X, однородное относительно действия G. Предположим, что G расщепляется над полем функций $k(X)$. Мы показываем, что в этом случае мотив Чжоу X по модулю любого простого числа p раскладывается в сумму сдвинутых копий некоторого неразложимого мотива $R_p(G)$, зависящего только от G и p. Мы также обсуждаем связь с когомологическими инвариантами и некоторые приложения, относящиеся к вычислению канонической размерности и изучению поведения G при расширении скаляров.

Докладчикам были вручены грамоты лауреатов и премии.

В члены общества приняты: А. А. Кожевников, К. В. Первышев и В. А. Петров.

Математический лекторий для студентов (15 сентября 2007 г.). А. Скопенков (Москва). *Заузливание многообразий малой размерности.*