1953 г. ноябрь—декабрь *т. VIII, вып. 6 (58)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

РАБОТА ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

С начала 1953 г. в Ленинграде работает общегородской математический семинар. Заседания семинара происходят два раза в месяц по вторым и четвёртым вторникам в Ленинградском доме учёных, начало заседаний в 19 часов.

Задачей семинара является объединение математиков г. Ленинграда, обмен опытом и проблематикой. За февраль—май 1953 г. проведено восемь заседаний. Ленинградские математики живо интересуются работой семинара и принимают в ней активное участие; на заседаниях семинара присутствует до 200 человек.

Первое заседание семинара состоялось 10 февраля 1953 г. После вступительного слова ректора Ленинградского университета член-корр. АН СССР А. Д. Александрова о задачах семинара академик В. И. Смирнов прочитал доклад на тему «Современные проблемы математической физики»; в конце заседания был избран президиум семинара, в который вошли: В. И. Смирнов (председатель), Ю. В. Линник (зам. председателя), Б. А. Венков, С. М. Лозинский, А. А. Марков, А. А. Иванов, М. Ф. Широхов (секретарь).

На следующих заседаниях семинара были поставлены доклады:

24 февраля 1953 г. доклад Н. П. Еругина «Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в большом».

10 марта 1953 г. доклад С. М. Лозинского «Оценка ошибки при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений».

24 марта 1953 г. доклад А. Д. Александрова «Отношение геометрии к физике».

14 апреля 1953 г. доклад О. А. Ладыженской «Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения общего вида» и доклад Б. В. Русанова «Обтекание кругового цилиндра и шара вязкой жидкостью».

28 апреля 1953 г. доклад М. К. Гавурина «О современных вычислительных машинах» и доклад Л. В. Канторовича «Значение современной вычислительной техники для прикладной математики».

12 мая 1953 г. доклад Е. В. Вороновской «Метод Чаплыгина для уравнений первого порядка и его видоизменение с помощью поверхности Чебы-

шева» и доклад В. А. Якубович «Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами».

26 мая 1953 г. доклад А. А. Маркова «Теория алгорифмов».

После летних каникул 22 сентября с. г. семинар возобновил свою работу. Первое заседание семинара в новом учебном году было посвящено памяти выдающегося русского математика Е. И. Золотарёва в связи с 75-летием со дня его смерти.

Заседание открыл академик В. И. Смирнов, который в своём вступительном слове рассказал о кратком по времени, но блестящем по результатам пути Е. И. Золотарёва в науке. Затем был заслушан доклад проф. Б. А. Венкова «О работах Е. И. Золотарёва по теории чисел». Докладчик специально указывал на факты и методы, открытые Е. И. Золотарёвым ранее иностранных учёных, которым до недавнего времени незаслуженно приписывалась честь их открытия. Во второй половине заседания был заслушан доклад проф. И. П. Натансона «О работах Е. И. Золотарёва по конструктивной теории функций». Докладчик особо отметил связь работ Е. И. Золотарёва с современной математикой.

Ниже приводится резюме докладов В. И. Смирнова и Н. П. Еругина.

В. И. Смирнов—«Современные проблемы математической физики».

В начале доклада были указаны основные этапы развития математической физики, приведшие к современному состоянию этой отрасли математики. Было отмечено, что математическая физика за последние полстолетия, с одной стороны, обогатилась решением ряда важных и трудных конкретных задач физики, с другой стороны—создана общая теория дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков и систем дифференциальных уравнений, а также даны новые постановки и новые методы решения задач математической физики, связанные прежде всего с функциональным анализом.

В первом разделе были отмечены работы А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, Н. М. Гюнтера по гидродинамике, С. Н. Бернштейна по уравнениям эллиптического типа, В. А. Фока по диффракции и электромагнитному полю, работы по распространению колебаний (С. Л. Соболев, В. И. Смирнов, Г. И. Петрашень) и ряд других работ. Указано на влияние некоторых из этих работ на разработку новых методов исследования.

В направлении общих исследований упоминались работы В. А. Стеклова по теории замкнутости систем ортогональных функций и по оправданию метода Фурье в одномерном случае, а также работы Н. М. Гюнтера, относящиеся к новым постановкам задач математической физики, теории функций от областей и методу усреднения функций.

Далее была дана общая характеристика современного положения математической физики главным образом в направлении работ С. Л. Соболева и И. Г. Петровского.

Отмечалась плодотворность идеи получения интегральных оценок для решений различных задач и использования этих оценок для доказательства единственности, корректности и существования этих решений.

На примере задачи Коши и смешанной задачи для гиперболических уравнений были даны современная постановка этих задач и способы их решения.

Далее было указано современное проведение прямых методов вариационного исчисления для предельных задач в случае уравнений эллиптического типа.

Наконец, были отмечены некоторые новые задачи, которые естественно возникают в ходе развития современной математической физики:

1. Дальнейшее развитие общей теории дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. Разработка для них постановок различных задач и, в частности, смешанной задачи для уравнений гиперболического типа.

2. Дальнейшее развитие теории уравнений с частными производными смешанного типа. Рассмотрение частных задач для таких уравнений в случае, когда число независимых переменных более двух.

3. Исследование линейных уравнений с частными производными при наличии особенностей в коэффициентах, в частности спектральная теория для уравнения такого вида.

4. Решение предельных задач для уравнений эллиптического типа в случае неограниченных областей. Выяснение условий на бесконечности и спектральная теория для этого случая.

5. Вопросы асимптотики собственных функций для уравнений с частными производными.

6. Решение задачи Коши для гиперболических систем специального вида в форме, удобной для вычислений и качественного исследования.

7. Продолжение качественного исследования эллиптических систем и то же для эллиптических уравнений высших порядков.

8. Предельные задачи для областей специального вида в случае систем уравнений в связи с дальнейшим развитием теории специальных функций.

9. Обратные граничные задачи.

10. Предельные задачи для нелинейных уравнений и, в частности, для уравнений, связанных с вариационными задачами.

11. Распространение колебаний в однородных и неоднородных средах при наличии границ специального вида. Качественное исследование решений таких задач. Проблемы диффракции, сюда относящиеся.

12. Качественное исследование распространения волн в неоднородных средах со специальной неоднородностью в связи с геометрической оптикой этой среды.

Н. П. Еругин «Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в целом».

Первый метод Ляпунова позволяет не только обнаружить наличие асимптотической устойчивости невозмущённого движения, но и построить решения в окрестности точки равновесия в виде степенных рядов по начальным значениям неизвестных функций с коэффициентами, зависящими от независимого переменного t.

Эти ряды сходятся равномерно в промежутке $t>0$ при достаточно малых начальных значениях неизвестных функций.

Рассматривая такие разложения в случае установившихся движений, мы приходим к важной для теории устойчивости задаче об определении области начальных значений неизвестных функций, в которой такие разложения Ляпунова сходятся.

Когда имеем только две неизвестные функции x, y и область асимптотической устойчивости (область, в которой начинаются движения, асимптотически приближающиеся к точке равновесия при $t\to\infty$) ограничена предельным циклом, то интересно выяснить, не будет ли в некоторых случаях область сходимости совпадать с этой областью асимптотической устойчивости и какие факторы вообще определяют область сходимости этих рядов. В докладе было также обращено внимание на ещё не разрешённую задачу построения решений в окрестности асимптотически устойчивой точки равновесия, когда имеются и нулевые характеристичные числа системы первого приближения.

Далее в докладе освещались методы решения вопроса об асимптотической устойчивости в целом и проблема о существовании функции Ляпунова, позволяющей установить наличие асимптотической устойчивости в целом.

Затронуты были и другие вопросы.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

Заседание 22 сентября 1953 г.

Посвящено памяти Е. И. Золотарёва.

1. Вступительное слово В. И. Смирнова.

2. Доклад Б. А. Венкова «О работах Е. И. Золотарёва по теории чисел».

3. Доклад И. П. Натансона «О работах Е. И. Золотарёва по конструктивной теории функций».

Заседание 13 октября 1953 г.

1. Доклад С. Г. Михлина «Об интегрировании уравнения Пуассона в бесконечной области».

2. Доклад А. В. Малышева «О целых точках на эллипсоидах».

Рассматривается вопрос о представлении целых чисел m положительными тернарными квадратичными формами $f(x, y, z)$ с целыми коэффициентами

$$m \rightarrow f(x, y, z). \qquad (1)$$

Представления (x, y, z) числа m формой f суть целые точки на эллипсоиде (1). Изучаются асимптотические формулы (при $m \to \infty$) для количества целых точек на эллипсоидах некоторого типа (теорема 2); для количества целых точек на таких эллипсоидах, принадлежащих к данному классу вычетов (теоремы 1, 3); для количества целых точек, находящихся в некоторой области на эллипсоиде (теоремы 4, 5).

В основе всех доказательств лежит следующая лемма из арифметики кватернионов.

Лемма. *Пусть R — примитивный кватернион нечётной нормы r, m — целое число, примитивно представимое суммой трёх квадратов и простое с r; наконец, l — целое число, удовлетворяющее сравнению*

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod r. \qquad (2)$$

Обозначим через $t(R, m)$ количество целых примитивных векторов L нормы m, для которых кватернион $l + L$ делится слева на R. Тогда при $m \to \infty$

$$t(R, m) \sim \frac{t(m)}{c_r}; \qquad (3)$$

где $t(m)$ — количество целых примитивных векторов L нормы m, а σ_r — количество примитивных, не ассоциированных справа кватернионов нормы r.

С помощью этой леммы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть r — нечётное число, m — целое число, простое с r, и с условием $\left(\frac{-m}{p}\right)=1$ для всех простых $p \setminus r$. Пусть, далее, x_0, y_0, z_0 — такие целые числа, что*

$$m \equiv x_0^2+y_0^2+z_0^2 \pmod r. \tag{4}$$

Обозначим через $t(r, m; x_0, y_0, z_0)$ количество тех примитивных точек на сфере $x^2+y^2+z^2=m$, для которых

$$(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod r. \tag{5}$$

Тогда при $m \to \infty$

$$t(r, m; x_0, y_0, z_0) \sim \frac{(m)}{r^2\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, \quad p_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot p_h^{e_k}=r. \tag{6}$$

Помимо сферы в докладе рассматриваются эллипсоиды (1), где f — форма рода $\mathfrak{G}_{[r,1]}$. Говорят, что квадратичная форма $f(x, y, z)$ инвариантов $[r, 1]$, где r — нечётное число, принадлежит роду $\mathfrak{G}_{[r,1]}$, если $\left(\frac{f}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ для всех простых $p \setminus r$.

Теорема 2. *Пусть r — нечётное число; $f(x, y, z) \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$; целое число m просто с r, причём сравнение $m \equiv f(x, y, z) \pmod{8r}$ разрешимо. Обозначим через $t(f, m)$ количество примитивных представлений числа m формой f. Тогда при $m \to \infty$*

$$t(f, m) \sim \begin{cases} \dfrac{12\cdot 2^k h(-m)}{r\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, & m \equiv 1, 2 \pmod 4, \\[2ex] \dfrac{8\cdot 2^k h(-m)}{r\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_k}\right)}, & m \equiv 3 \pmod 8, \end{cases} \tag{7}$$

$$t(f, m)=0, \qquad m \equiv 0 \pmod 4, \ \equiv 7 \pmod 8,$$

где $h(-m)$ — количество классов положительных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя m; $r=p_1^{e_1}\ldots p_k^{e_k}$.

Теорема 3. *Пусть r и g — нечётные числа; $f \in \mathfrak{G}_{[r,1]}$; m — целое число, удовлетворяющее условиям*

$$\text{о. н. д. } (m, rg)=1, \quad m \equiv f(x_0, y_0, z_0) \pmod{8rg}. \tag{8}$$

Обозначим через $t(f, m, g; x_0, y_0, z_0)$ количество примитивных представлений $m=f(x, y, z)$, для которых $(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod g$. Тогда при $m \to \infty$

$$t(f, m, g; x_0, y_0, z_0) \sim \frac{2^k t(m)}{\sigma_{rg^2}}, \tag{9}$$

Теорема 4 (см. [1]). *Пусть q — некоторое простое число, а целое число m примитивно представимо суммой трёх квадратов, причём $\left(\frac{-m}{q}\right)=1$. Тогда для достаточно больших m в любом конусе раствора λ (где $\lambda > 0$ не зависит от m), вершина которого лежит в точке O, найдётся*

$$> \varkappa_{q,\lambda}\, t(m) \tag{10}$$

целых примитивных точек сферы $x^2+y^2+z^2=m$.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathfrak{G}[r, 1]$ и для целого числа m, простого с нечётным числом r, сравнение $m \equiv f(x, y, z) \pmod{8r}$ разрешимо. Тогда для достаточно больших m в любом конусе раствора λ (где $\lambda > 0$ не зависит от m) найдётся*

$$> \varkappa_{r, \lambda} h(-m) \tag{11}$$

целых примитивных точек эллипсоида $f(x, y, z) = m$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник и А. В. Малышев, О целых точках на сфере, ДАН СССР 89 (1953), 209—212.

Заседание 27 октября 1953 г.

1. Доклад Б. Н. Делоне (Москва) «О росте дискриминантов полей алгебраических чисел данной степени».

2. Доклад В. И. Смирнова «О сопряжённых функциях».

Заседание 10 ноября 1953 г.

1. Доклад А. Д. Александрова «О международном съезде геометров».

2. Доклад П. С. Новикова (Москва) «Проблема тождества в теории групп».

Заседание 24 ноября 1953 г.

1. Доклад Ю. В. Линника и А. П. Хусу «Математико-статистическое описание неровностей профиля поверхности при шлифовании».

Докладчики делали попытку представления кривой профиля шлифованной поверхности как выборочной кривой некоторого нормального стационарного процесса с корреляционной функцией, приближённо представимой в виде

$$B(\tau) = B(0) \cdot e^{-\alpha|\tau|}.$$

Описание неровностей делалось при помощи параметров $B(0)$ и α; ординаты отсчитывались от средней линии профиля, найденной по методу наименьших квадратов, что вводило ещё два параметра. Подробно обработаны пять профилей. Делались попытки для любого заданного уровня предсказывать суммарную длину $S(u)$ кусков, вырезаемых профилем на уровне, и суммарную площадь (Qu) гребешков, возвышающихся над уровнем. Эти величины существенны при изучении трения поверхностей. Предсказания хорошо согласуются с конкретными наблюдениями.

2. Доклад П. Н. Реморова «Обзор исследований по теореме Ферма и сходным с ней задачам».

Заседание 8 декабря 1953 г.

1. Доклад Е. С. Ляпина «О системах операторов с неподвижными точками».

Изоморфное отображение полугруппы A в полугруппу всех операторов некоторого множества M назовём представлением A операторами множества M.

Будем говорить, что полугруппа A принадлежит классу P, если при любом представлении A операторами каждый оператор представления имеет неподвижную точку. Оказывается, что для принадлежности A к классу P необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент A имел правый нуль. Класс P содержит, например, полугруппу всех операторов сближения полного метрического пространства и некоторые другие важные полугруппы операторов.

Произвольную полугруппу операторов A множества M можно всегда пополнить операторами M так, чтобы имело место одно из двух: 1) пополненная полугруппа операторов A' принадлежит P; тогда всякий оператор из A имеет в M неподвижную точку; 2) A' не принадлежит P; тогда не все операторы A имеют неподвижные точки.

Для класса P строится базисный класс P', т. е. класс, удовлетворяющий условиям:

1) всякий элемент любой полугруппы из P содержится в некоторой подполугруппе из P';

2) если всякий элемент полугруппы A содержится в некоторой полугруппе из P', то A принадлежит P;

3) класс P' — «наименьший», удовлетворяющий этим условиям.

2. Доклад Ю. Г. Решетняка «Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны».

Заседание 22 декабря 1953 г.

1. Доклад О. А. Олейник (Москва) «Об уравнениях в частных производных с малым параметром при старших производных».

2. Доклад Х. Л. Смолицкого «О приближённом разложении многочленов на множители».

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

Заседание 9 марта 1954 г.

1. Г. Ю. Джанелидзе «Принцип Сен-Венана в теории упругости и связанные с ним задачи».

1. Сформулированный в 1855 г. Сен-Венаном принцип «Способ приложения и распределения сил по концам призмы безразличен для эффектов, вызванных на остальной длине, так что всегда возможно с достаточной степенью приближения заменить силы, которые были приложены, статически эквивалентными силами, имеющими тот же полный момент и ту же равнодействующую»—является одним из основных положений современной теории упругости.

2. Существующие энергетические доказательства принципа Сен-Венана (Саусвелла, Занабони и др.) относятся лишь к факту убывания в интегральном смысле напряжений и деформаций, вызванных действием системы сил, статически эквивалентных нулю. Эти доказательства не позволяют дать оценку порядка убывания напряжений и деформаций, которая может быть получена лишь для конкретных классов задач.

Имеющиеся решения показывают, что в случае неограниченных тел порядок затухания степенной, а в случае ограниченных упругих тел—экспоненциальный.

3. Рассмотрение действия системы сил, распределённой в малом объёме безграничной среды, показывает, что перемещение слагается из перемещения от главного вектора и перемещений от некоторой системы тензоров (полимоментов). В состав перемещения от первого тензора входит перемещение от главного момента системы сил и тензора бисил.

Каждому полимоменту отвечает свой характер затухания, поэтому статическая эквивалентность двух систем сил не всегда обеспечивает большую быстроту затухания, чем простое равенство главных векторов.

4. Обобщение принципа Сен-Венана на другие задачи математической физики приводит к следующей постановке задачи: на части границы изменяются граничные условия, но сохраняются некоторые интегральные величины; как меняется при этом решение (в области, достаточно удалённой от места, где были изменены граничные условия)?

Упрощение исходной системы уравнений может существенно изменить характер затухания «интегрально-эквивалентных» решений.

2. Были произведены довыборы президиума семинара. Членом президиума семинара избран Г. Ю. Джанелидзе.

Заседание 23 марта 1954 г.

Н. А. Шанин «О конструктивном определении некоторых понятий анализа».

Доклад вызвал дискуссию, в которой приняли участие А. А. Марков, Л. В. Канторович и др.

Заседание 13 апреля 1954 г.

1. Б. А. Венков «Об одном классе евклидовых многогранников».

1. Б. А. Венков «Об одном классе евклидовых многогранников».

В первой части доклада был сделан краткий обзор работ по правильному делению евклидова пространства. Пусть R^n—n-мерное евклидово пространство. Выпуклый, конечный, n-мерный многогранник Q в R^n называется *параллелоэдром*, если существует система параллельных Q многогранников Q, Q', Q'',..., покрывающих R^n и не имеющих общих внутренних точек. Если в любом месте R^n соприкосновение Q, Q', Q'',... происходит по целым граням (любого числа измерений), то Q называется *нормальным*, в противном случае—*ненормальным* параллелоэдром. Нахождение всех геометрически различных типов параллелоэдров для данного n (и вообще исследование их свойств) и представляет задачу о правильном делении евклидова пространства. Для $n=3$ эта задача была решена (не вполне строго) Е. С. Фёдоровым (1885 г.). Г. Минковский (1896 г.) доказал для любого n существование центра (т. е. центра симметрии) у параллелоэдра. Фундаментальные исследования по теории параллелоэдров принадлежат Г. Ф. Вороному (1908—1909 гг.); он рассматривает нормальные параллелоэдры, притом такие, которые определённым образом связаны с положительными квадратичными формами от n переменных (и до сих пор неизвестно, все ли нормальные параллелоэдры принадлежат к этому классу). Алгорифм Вороного, протекающий в пространстве коэффициентов положительной квадратичной формы, действительно даёт все типы параллелоэдров рассматриваемого класса, однако их геометрические свойства в пространстве R^n остаются скрытыми. В позднейшее время образовалось новое направление в рассматриваемой теории (Б. Н. Делоне [1], 1929, А. Д. Александров [2], 1934), задачей которого является изучение параллелоэдров в самом пространстве R^n; в этих работах получены все типы нормальных (Б. Н. Делоне) и ненормальных (А. Д. Александров) четырёхмерных параллелоэдров ($n=4$), причём имеются некоторые общие соображения для любого n. К этому направлению примыкает недавно опубликованная работа докладчика (Б. А. Венков [3]). Из работ Г. Минковского, Б. Н. Делоне, А. Д. Александрова можно вывести необходимое условие того, чтобы многогранник был параллелоэдром.

Теорема 1. *Если Q—нормальный или ненормальный параллелоэдр в R^n, то:* 1) *Q имеет центр,* 2) *каждая $(n-1)$-мерная грань Q имеет центр,* 3) *проекция Q параллельно любой его $(n-2)$-мерной грани g'_{n-2} в дополнительную к g'_{n-2} плоскость R^2 есть двумерный параллелоэдр (т. е. либо параллелограмм, либо шестиугольник с центром), вершины которого суть проекции граней g_{n-2} многогранника Q, лежащих в плоскостях R^{n-2}, параллельных плоскости рассматриваемой грани g'_{n-2}.*

Во второй части доклада было изложено краткое содержание работы [3]. Пусть P—выпуклый конечный n-мерный многогранник в R^n, обладающий свойствами 1), 2) теоремы 1, и g_{n-1}—любая его $(n-1)$-мерная грань. Можно приложить к P параллельный ему многогранник P', соприкасающийся с P по целой грани g_{n-1} (многогранники P, P' назовём смежными). Фиксируя положение P в R^n, приложим к P все смежные с ним многогранники, к каждому из полученных—все смежные с ними и т. д.; совокупность полученных многогранников назовём *поверхностью* M. Последовательность многогранников из M, в которой каждые два рядом стоящих члена смежны, назовём *цепью*. Цепь назовём цепью *типа* k (k—фиксированное, $0\leqslant k\leqslant n-2$), если все её многогранники имеют общую k-мерную грань. Поверхность M (или цепь в ней) назовём накрывающейся, если в M (или в цепи) существуют два (различных по положению в R^n) многогранника, имеющих общую внутреннюю точку. Основным результатом работы [3] является доказательство теоремы 2.

Теорема 2. *Если M—накрывающаяся поверхность, то в ней существуют накрывающиеся цепи типа $n-2$.*

Из теоремы 2 выводится, что необходимое условие того, чтобы многогранник был параллелоэдром (указанное в теореме 1), является и достаточным; точнее: *если выпуклый, конечный, n-мерный многогранник Q в R^n удовлетворяет условиям* 1), 2), 3) *теоремы*

1, то *Q есть нормальный параллелоэдр*. Отсюда, наконец, получается следствие: *всякий ненормальный параллелоэдр в R^n есть вместе с тем нормальный параллелоэдр*.

А. Д. Александров [4] распространил теорему 2 на пространство Лобачевского и сферическое пространство, а также на другие возможные случаи прикладывания многогранников.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Delaunay, Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions, Изв. АН СССР № 1 (1929), 79—110, № 2 (1929), 147—164.

[2] А. Д. Александров, Вывод четырёхмерных ненормальных параллелоэдров, Изв. АН СССР № 6 (1934), 803—817.

[3] Б. А. Венков, Об одном классе евклидовых многогранников, Вестн. Ленингр. университета № 2 (1954), 11—31.

[4] А. Д. Александров, О заполнении пространства многогранниками, Вестн. Ленингр. университета № 2 (1954), 33—43.

2. О. А. Ладыженская «О решении основной задачи гидродинамики вязкой жидкости».

Содержание доклада опубликовано в ДАН 95, № 6, 1954 г. — статья А. А. Киселёва и О. А. Ладыженской «О решении линеаризированных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости».

Заседание 27 апреля 1954 г.

М. В. Пентковский «Номография» (обзорный доклад).

1. Номограммы—специальные изображения функциональных зависимостей. Назначение номограмм.

2. Номограммы различных типов: номограммы из выравненных точек; сетчатые номограммы; транспарантные номограммы.

3. Погрешности вычислений по номограммам. Точное и приближённое номографирование.

4. Современные задачи практической и теоретической номографии: преобразование номограмм, проблема анаморфозы, методы приближённого номографирования.

5. Первоначальный период развития номографии; Окань и его школа. Современное состояние номографии за рубежом.

6. Советская номографическая школа; основные направления в работах советских номографов.

Заседание 11 мая 1954 г.

1. Ю. В. Линник «Цепи Маркова и целые точки на сфере». Содержание доклада публикуется в ДАН 95, № 7, 1954 г.

2. А. А. Киселёв «О решении уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости».

1. Сначала была дана библиография и краткий разбор основных работ, посвящённых решению общих, нелинеаризированных уравнений Навье-Стокса для случая нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости.

Доклад посвящён решению указанной только что задачи для случая плоских течений $\vec{v}=(v_1(x_1, x_2, t), v_2(x_1, x_2, t))$ в ограниченной области $\Omega\times[0, T]$. Кроме того, при условии малости некоторого выражения, которое естественно назвать обобщённым числом Рейнольдса, устанавливается существование решения для всех моментов времени и его затухание при $t\to\infty$.

2. Указанная в п. 1 задача сводится, известным образом, к решению уравнения

$$L\psi\equiv\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}-\nu\Delta^2\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x_2}=f \qquad (1)$$

(ν — коэффициент вязкости) в конечной области Ω плоскости (x_1, x_2) при начальном условии

$$\psi|_{t=0}=\psi_0(x_1, x_2) \tag{2}$$

и граничных условиях

$$\psi\Big|_S=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S=0. \tag{3}$$

Прежде всего обобщим понятие решения этой задачи. Назовём непрерывную функцию $\psi(x_1, x_2, t)$ *обобщённым решением задачи* (1), (2), (3) в цилиндре $Q=\Omega\times[0, T]$, если а) она и её обобщённая производная по t имеют квадратично-суммируемые по Q обобщённые производные по x_1 и x_2 до второго порядка включительно; б) ψ удовлетворяет условиям (2) и (3); в) ψ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\nu\Delta\psi\,\Delta\Phi+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta\psi\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+f\Phi\right\}dQ=0 \tag{4}$$

для любой функции Φ, дважды непрерывно дифференцируемой по x_1 и x_2 и удовлетворяющей условиям (3). Мы остановимся здесь на двух случаях: а) когда $\psi_0\equiv 0$ и б) когда $f\equiv 0$ и начальные возмущения невелики.

Общий случай исследуется аналогично первому, если ввести в рассмотрение функцию $v=\psi-\psi_0$.

Прежде всего доказывается, что обобщённое решение рассматриваемой здесь задачи единственно, по крайней мере в цилиндре $Q=\Omega\times[0, t_1]$ некоторой высоты t_1. Во втором же случае оно единственно в цилиндре любой высоты.

Для определения этих обобщённых решений мы применяем метод конечных разностей. Именно, пространство x_1, x_2, t разобьём плоскостями $x_i=k_ih$, $t=m\Delta t$, k_i, $m=0, \pm 1, \ldots$ Обозначим область, составленную из всех элементарных квадратов, принадлежащих Ω, через Ω_h, а границу Ω_h обозначим через S_h. Уравнение (1) заменим разностным следующим образом:

$$L_h\psi=\Delta_h\psi_t-\nu\Delta_h^2 s\psi+\frac{1}{2}s\psi_{x_2}A_{\bar{x}_1}+\frac{1}{2}s\psi_{\bar{x}_2}A_{\bar{x}_1}^{-x_2}-\frac{1}{2}s\psi_{x_1}A_{\bar{x}_2}-\frac{1}{2}s\psi_{\bar{x}_1}A_{\bar{x}_2}^{-x_1}=f, \tag{5}$$

где

$$\Delta_h\psi=\sum_{i=1}^{2}\psi_{x_i\bar{x}_i}, \qquad A=\Delta_h s\psi^{-t}.$$

Обозначения, а также теоремы вложения в разностях и ряд других вспомогательных теорем о конечных разностях мы заимствуем из книги О. А. Ладыженской [1].

Определим функцию ψ_h (в дальнейшем мы её будем обозначать пока просто ψ) из следующих условий: она равна нулю на S_h и вне Ω_h для всех $t=k\Delta t$, $k=-1, 0, 1, \ldots$; равна ψ_0 на Ω_h при $t=-\Delta t$; 0; удовлетворяет алгебраической системе (5) для всех точек решётки, принадлежащих Ω_h-S_h при $t=k\Delta t$, $k=0, 1, \ldots$ Мы показываем, что ψ_h однозначно определяется из перечисленных условий и что в пределе при h и $\Delta t\to 0$ ψ_h дают искомое решение. Остановимся несколько подробнее на каждом из случаев а) и б).

а) Пусть f и её обобщённая производная по t квадратично суммируемы по $Q=\Omega\times[0, T]$, где T — какое-либо положительное число (для упрощения дальнейших рассуждений будем считать здесь f и $\frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывными). Положим $\psi_h=0$ для $t=-\Delta t$; 0. Для определения функции ψ_h на каждом шаге по $t=k\Delta t$, $k=1, 2, \ldots$, мы имеем *линейную* алгебраическую систему (хотя рассмотренная в целом, сразу для всех t, она нелинейна). Однозначная разрешимость её выводится из тождества

$$h^2\sum_{\Omega_h}-L_h\psi s\psi=h^2\sum_{\Omega_h}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\psi_{x_i})_t^2+\nu(\Delta_h s\psi)^2\right\}=h^2\sum_{\Omega_h}(-f\cdot s\psi) \tag{6}$$

и вытекающего из него неравенства

$$h^2 \sum_{\Omega_h} \left\{ (s\psi)^2 + \sum_{i=1}^{2} (\psi^2_{x_i}) + (\Delta_h s\psi)^2 \right\} \leqslant C_1 h^2 \sum_{\Omega_h} f^2, \tag{7}$$

имеющих место при *любой* функции A, заданной на решётке. Сходимость разностного процесса (равномерную сходимость ψ_h к искомому решению ψ, а также сходимость разностных отношений ψ_h к соответствующим производным ψ в различных метриках) мы устанавливаем, исходя из (6) и (7), а также из нижеприводимого неравенства.

Именно, составляем сумму

$$\Delta t \sum_{k=0}^{p-1} h^2 \sum_{\Omega_h} (-f_t s\psi_t) = \Delta t \sum_{k=0}^{p-1} h^2 \sum_{\Omega_h} -(L_h\psi)_t \, s\psi_t.$$

После ряда преобразований и оценок типа теорем вложения в разностях мы получим отсюда неравенство

$$F_1^2(p) + [2\nu - C_2 \max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \varphi(k)] \, \Delta t \sum_{k=0}^{p-1} F^2(k) \leqslant C_3 \Delta t \sum_{k=0}^{p-1} h^2 \sum_{\Omega_h} f_t^2 + F_1^2(0) \equiv A_p^2, \tag{8}$$

где

$$F_1^2(p) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{2} (\psi_{x_i t})^2 \Big|_{t=p\Delta t},$$

$$F^2(p) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i,\, s=1}^{2} (s\psi_{x_i x_j t})^2 \Big|_{t=p\Delta t},$$

$$\varphi^2(p) = h^2 \sum_{\Omega_h} \sum_{i,\, j=1}^{2} (s\psi_{x_i x_j})^2 \Big|_{t=p\Delta t} \equiv h^2 \sum_{\Omega_h} (\Delta_h s\psi)^2.$$

Постоянные C_k определяются лишь размерами области Ω. Из (8) и (7) можно вывести, что во всяком случае для всех $p\Delta t$, не превосходящих некоторое число $t_1 > 0$ (величина t_1 зависит лишь от C_1, C_2, C_3) и величины $\Delta t \sum_{k=0}^{p} h^2 \sum_{\Omega_h}^{1} (f^2 + f_t^2)$, выражение $[2\nu - C_2 \max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \varphi(k)]$ будет больше некоторого числа $C_4 > 0$, и потому из (8) следует, что

$$F_1(p) \leqslant A_p,$$

$$\Delta t \sum_{k=0}^{p-1} F^2(k) \leqslant \frac{A_p^2}{C_4}. \tag{9}$$

Величины A_p равномерно для всех h и Δt ограничены, если $p\Delta t \leqslant T$. Поэтому из (9) мы можем извлечь все нужные нам следствия для возможности предельного перехода по $h \to 0$ и $\Delta t \to 0$ и получения искомого решения ψ.

Переходим теперь к случаю б).

б) Будем считать, что $f \equiv 0$ и

$$\frac{C_5}{\nu^3} B_1 B_2 \sqrt{1 + \frac{C_6}{\nu^{3/2}} \sqrt{B_1 B_2}} < 1, \tag{10}$$

где C_5 и C_6—постоянные, определяемые лишь размерами области, а

$$B_1 = \left\{ \int_{\Omega} \left(\nu\Delta^2\psi_0 - \frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} \frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} \frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega \right\}^{1/2},$$

$$B_2 = \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{grad}^2 \psi_0 \, d\Omega \right\}^{1/2}.$$

Ограничение (10) мы и назвали выше условием малости обобщённого числа Рейнольдса.

Мы устанавливаем, что в этом случае обобщённое решение задачи определяется (с использованием указанной выше схемы) для любого $t \geqslant 0$. Кроме того, для этого решения справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad}^2 \psi \, d\Omega \Big|_{t=0}^{t=t} + 2\nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\Delta\psi)^2 \, d\Omega \, dt = 0 \tag{11}$$

и существует интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,\, j=1}^{2} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x_i \partial x_j \partial t} \right)^2 \partial\Omega \, dt. \tag{12}$$

Последнее выводим из неравенства, аналогичного (8). Из (11) и (12) можем заключить, что *при* $t \to \infty$ *решение* ψ *стремится к нулю равномерно относительно* $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Всё вышесказанное относилось к получению обобщённого решения ψ. В силу самого определения ψ есть непрерывная в $\overline{Q}$ функция. Дальнейшее исследование её дифференциальных свойств при различных предположениях гладкости относительно данных функций f и ψ_0 может быть (во всяком случае для внутренних точек области Q) выполнено по плану аналогичных исследований для линейных уравнений, проведённых О. А. Ладыженской (см. [1], гл. III и IV).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболических уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1953.

Заседание 25 мая 1954 г.

1. Д. К. Фадеев и З. И. Боревич «К теории гомологий в группах».

Доложены результаты докладчиков по теории гомологий в группах, опубликованные в ряде статей (1947—1954 гг.) Сформулированы проблемы, представляющие интерес для дальнейшей разработки.

2. Е. В. Вороновская «Полиномы наименьшего отклонения в свете функционального анализа».

1. Конечный отрезок действительных чисел $(\mu_i)_0^n$ определяет линейный функционал на множестве $\{P_n(x)\}$ полиномов n-й степени:

$$F(P) = \sum_0^n p_i \mu_i = P_n(\overline{\mu}).$$

Норма N этого функционала достигается некоторым полиномом $Q_n(x)$; если положить $\max\limits_{[0,\,1]} |Q_n(x)| = 1$, то $F(Q) = +N$. Полином $Q_n(x)$ называется экстремальным полиномом отрезка $(\mu_i)_0^n$.

2. Отрезок $(\mu_i)_0^n$ назван не абсолютно монотонным, если $Q_n(x) \neq \pm 1$, т. е. если $N > |\mu_0|$. Вся последующая теория относится только к не абсолютно монотонным отрезкам.

3. Каждому отрезку $(\mu_i)_0^n$ соответствует вполне определённый, *единственный* набор чисел $(\sigma_i)_1^s$, где $0 \leqslant \sigma_1 < \ldots < \sigma_s \leqslant 1$, такой, что $\mu_k = \sum\limits_{i=1}^{s} \sigma_i^k \delta_i$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, причём если $Q_n(x)$—экстремальный полином отрезка, то $Q_n(\sigma_i) = \pm 1$ и $\operatorname{sgn} \delta_i = Q_n(\sigma_i)$. Число s узлов σ_i подчинено условию $2 < s$, и среди чисел δ_i всегда имеются числа разных знаков. Если каждому σ_i отнести знак соответствующего ему δ_i, то $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^s$ образует *истинное* распределение (узлов) отрезка $(\mu_i)_0^n$

4. Если число s истинных узлов отрезка $(\mu_i)_0^n$ подчинено неравенству $s > \frac{n}{2}+1$, то экстремальный полином отрезка $Q_n(x)$ — *единственный*.

5. Каждому полиному $Q_n(x)$ с $\max|Q_n(x)|=1$ также соответствует вполне определённое распределение чисел (узлов) $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^s$, где σ_i — все точки интервала $[0, 1]$, в которых $Q_n(x)=\pm 1$. Если $s > \frac{n}{2}+1$, то $Q_n(x)$ называется полиномом II класса.

6. Если $\{Q_n(x)\}$ — множество всех полиномов II класса, то его полиномы можно классифицировать, введя понятие о паспорте полинома: $[n, s, p]$, где n — степень полинома, s — число его узлов на $[0, 1]$, p — число повторений знака в распределении $\overset{\pm}{\sigma_1}, \overset{\pm}{\sigma_2}, \ldots, \overset{\pm}{\sigma_s}$, т. е. число тех интервалов между узлами, границам которых отнесены одинаковые знаки. Единственные полиномы паспорта $[n, n+1, p]$ суть $\pm T_n(x) = \pm \cos n \arccos(2x-1)$. Для них $p=0$.

7. Если в отрезке $(\mu_i)_0^n$ один из параметров μ_k $(k>0)$ переменный, пусть $k=n$ и $\mu_n=\theta$, то существует вполне определённый промежуток (μ_n', μ_n'') со следующими свойствами: если $\theta \geqslant \mu_n''$ или $\theta \leqslant \mu_n'$, то экстремальный полином отрезка есть один из полиномов $\pm T_n(x)$, если $\mu_n' < \theta < \mu_n''$, то экстремальный полином $Q_n(x) \neq \pm T_n(x)$, причём каждым двум значениям θ из упомянутого интервала соответствуют два различных экстремальных полинома. Интервал (μ_n', μ_n'') называют *критическим интервалом* параметра μ_n. Если, к тому же, отрезок $(\mu_i)_0^n$ при любом θ остаётся отрезком II класса, то каждому значению θ соответствует единственный экстремальный полином $Q_n(x, \theta)$.

8. Норма отрезка $(\mu_i)_0^n$, содержащего переменный параметр θ, $N(\theta)$ — есть непрерывная функция от θ; пусть $\theta=\mu_n$; тогда $N(\theta)$ имеет одну точку минимума:

$$\theta=\mu_n^*, \quad \text{где} \quad \mu_n' \leqslant \mu_n^* \leqslant \mu_n''.$$

Если имеем отрезок II класса, то экстремальный полином отрезка $Q_n(x)=\sum_{k=0} q_k(\theta)\, x^k$ таков, что все функции $q_k(\theta)$ непрерывны, а $q_n(\theta)$ монотонно возрастает в критическом интервале, обращаясь в нуль в точке $\theta=\mu_n^*$.

9. Задача В. Маркова (1892 г.) тождественна задаче об отыскании экстремального полинома $Q_n(x)$ заданного отрезка $(\mu_i)_0^n$.

10. Задача Пшеборского (1913 г.) об отыскании полинома, наименее отклоняющегося от нуля при наличии двух линейных зависимостей между коэффициентами полинома, приводится к упомянутой задаче Маркова, т. е. две данные зависимости могут быть заменены одной.

11. Взаимно однозначное соответствие, установленное в п. 7 между отрезком с переменным параметром и соответствующим экстремальным полиномом $Q_n(x, \theta)$, даёт возможность определить, изучить и аналитически построить семейство полиномов с помощью отрезка.

12. Простейший пример действия этого метода получается в случае приложения его к полиномам паспорта $[n, n, 0]$. *Всё семейство этих полиномов $Q_n(x, \theta)$ определяется* как семейство экстремальных полиномов пары отрезков $(\mu_i)_0^n$ и $(-\mu_i)_0^n$ вида

$$o_0,\ o_1,\ \ldots,\ o_{n-2},\ \mp 1_{n-1},\ \theta,$$

если θ пробегает в каждом отрезке все значения соответствующего критического интервала.

13. Семейство $Q_n(x, \theta)$ полностью совпадает с семейством полиномов Е. И. Золотарёва (1877 г.).

14. Коэффициенты $q_k(\theta)$ полиномов $Q_n(x, \theta)$ могут быть вычислены как интегралы системы дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1955 г. *т. X, вып. 4 (66)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 14 сентября 1954 г.

Н. А. Лебедев «Обзор экстремальных задач теории функций комплексного переменного».

Заседание 28 сентября 1954 г.

1. С. Б. Стечкин (Москва) «Абсолютная сходимость рядов Фурье и коэффициенты Фурье непрерывных функций».

2. С. М. Лозинский «Нелокальные теоремы существования обратных и неявных функций».

1. Пусть E^n есть n-мерное эвклидово пространство, f — функция из E^n в E^n. Рассмотрим уравнение

$$f(x)=\xi. \tag{1}$$

Классическая теорема о существовании обратной функции $x=\varphi(\xi)$ носит локальный характер: в ней утверждается, что обратная функция существует в некоторой области, но размеры этой области не указываются и без дополнительных предположений не могут быть указаны.

2. Вопрос о размерах области существования обратной функции тесно связан с вопросом о существовании решения уравнения

$$f(x)=0. \tag{2}$$

3. Теоремы, гарантирующие определённые размеры области существования обратной функции, были найдены Гурса, В. А. Стекловым и Л. В. Канторовичем. Результаты Л. В. Канторовича значительно сильнее результатов его предшественников и получаются как следствие из его же теорем о существовании решения уравнения (2) и о вычислении этого решения по методу Ньютона.

4. Однако теоремы Л. В. Канторовича для всякой нелинейной f гарантируют лишь ограниченную область существования обратной функции, в то время как для всякой f, «достаточно близкой» к «невырожденной» линейной, а также для известного класса «сильно нелинейных» функций f обратная функция существует во всём пространстве.

5. Удалось найти теоремы о существовании обратной функции, обобщающие теоремы Л. В. Канторовича. Эти теоремы во всех случаях гарантируют область существования обратной функции, содержащую область, гарантируемую теоремами Л. В. Канторовича; при этом, если f «достаточно близка» к «невырожденной»

линейной функции, а также для некоторого класса «сильно нелинейных» f, гарантируется существование обратной функции во всём пространстве.

6. Получены достаточные условия существования и единственности корня уравнения (2), обобщающие соответственные условия Л. В. Канторовича, однако вопрос о сходимости метода Ньютона нами не рассматривается.

7. Указанные теоремы можно распространить на случай, когда E^n заменяется абстрактным пространством Банаха, причём эти обобщения снова содержат соответственные теоремы Л. В. Канторовича.

8. Из теорем о существовании обратных функций могут быть выведены соответственные теоремы существования неявных функций.

Заседание 12 октября 1954 г.

Б. З. Вулих «Полуупорядоченные пространства и некоторые их применения к теории операторов».

Доклад в основном имеет обзорный характер. В первой части доклада даётся краткий обзор основных идей теории линейных полуупорядоченных пространств (K-пространств). Во второй части даётся обзор нескольких работ различных авторов по исследованию связей между теорией K-пространств и теорией самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.

Заседание 26 октября 1954 г.

1. Н. П. Еругин «К теории неявных функций».

В докладе рассматривается вопрос об области сходимости рядов, представляющих неявные функции, и об области непрерывного продолжения неявных функций.

Пусть дано уравнение

$$\Phi(x, y) = P_m(x, y) + P_{m+1}(x, y) + \ldots, \tag{1}$$

где $P_k(x, y)$ $(k=m, m+1, \ldots)$ суть однородные полиномы степени k с постоянными вещественными коэффициентами, и ряд (1) сходится в области D в окрестности начала координат. Изучается вопрос о том, когда уравнение (1) определяет функцию $y=y(x)$, обладающую свойством

$$y(x_1),\ y(x_2),\ \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad x_1,\ x_2,\ \ldots \to 0, \tag{2}$$

где последовательность $x_1, x_2, \ldots \to 0$ лежит на кривой L, входящей в начало координат $x=0$. Если речь идёт о вещественном решении, то последовательность $x_1, x_2, \ldots$ лежит на вещественной оси. Эта постановка вопроса немного отличается от привычной, так как обыкновенно интересуются решением, обладающим свойством

$$y(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{3}$$

Находится последовательность условий в виде алгебраических равенств, содержащих конечное число коэффициентов ряда (1), при выполнении хотя бы одного из которых существуют и фактически находятся все вещественные решения, обладающие указанным свойством.

Если ни одно из этих условий не выполнено, то имеются комплексные решения такого рода и они также могут быть найдены. Все эти решения представимы в виде сходящихся рядов по положительным степеням величины $x^{\frac{1}{n}}$, где n — целое положительное число. Эти ряды доставляют вещественные решения (если они есть) либо при $x \geqslant 0$, либо при $x \leqslant 0$, либо при $x \gtrless 0$; существует константа K_n, выражаемая конечным числом алгебраических операций через коэффициенты ряда (1), знак которой в случае чётного n и определяет, какой именно из этих случаев имеет место. При нечётном n решение всегда определено при $x \gtrless 0$. Если окажется, что $n > 1$, то точка $x=0$ для рассматриваемого решения будет алгебраической особой точкой. Кроме того, мы видим, что решение, обладающее свойством (2), обладает всегда и свойством (3).

Известно, что если $\frac{\partial\Phi(0, 0)}{\partial y} \neq 0$, то обязательно $n=1$, т. е. $x=0$; в этом случае не будет особой точкой. Таким образом, всякая функция, определяемая равенством (1), обладает одним из свойств

а) $y(x) \to 0$ при $x \to 0$,

б) $|y(x)| \geqslant \delta > 0$ при $x \to 0$.

Всё это позволяет доказать следующую теорему.

Пусть уравнение (1) определяет в окрестности $x=0$ неявную функцию

$$y=y(x). \tag{4}$$

Тогда эта функция не имеет в области D или даже во всей области голоморфности функции $\Phi(x, y)$ таких особых точек $\overset{*}{x}$, что при $x \to \overset{*}{x}$ функция $y(x)$ не имеет предела и бесконечное число значений $y(x)$ при как угодно близких значениях x к $\overset{*}{x}$ принадлежит конечной замкнутой области D_1, погружённой в область D.

Другими словами, при аналитическом продолжении неявной функции $y=y(x)$, определяемой уравнением (1), для всякой точки $x=\overset{*}{x}$ из области D имеем либо

$$y(x) \to \overset{*}{y} \quad \text{при} \quad x \to \overset{*}{x}, \tag{5}$$

либо

$$y(x) \to \text{гр. области } D \quad \text{при} \quad x \to \overset{*}{x}. \tag{6}$$

В (6) $y(x)$ может приближаться к границе области и не стремиться к определённому комплексному числу.

В вещественной области всегда имеем (5), где $\overset{*}{y}$ — или из области D, или на границе области D. Если имеем (5), где $\overset{*}{y}$ — из области D, то $\overset{*}{x}$ может быть особой точкой лишь в том случае, когда кроме

$$\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})=0 \tag{7}$$

имеем ещё:

$$\frac{\partial\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial y}=0. \tag{8}$$

Таким образом, точка $\overset{*}{x}$ из области D может быть особой лишь в том случае, когда либо имеем (7) и (8), либо $\overset{*}{y}$ лежит на границе области голоморфности функции $\Phi(x, y)$.

Если ряд $\Phi(x, y)$ в равенстве (1) целый, то неявная функция $y=y(x)$, определяемая равенством (1), обладает свойством: при $x \to \overset{*}{x}$ (любое комплексное число) имеем или $y(x) \to \overset{*}{y}$, или $|y(x)| \to \infty$.

Если имеем (5), точка $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ принадлежит области голоморфности функции $\Phi(x, y)$ и $\overset{*}{x}$ — особая точка, то $\overset{*}{x}$ — алгебраическая особая точка. Ряд Тейлора $y=b+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-a)^k=\varphi(x-a)$, представляющий неявную функцию, определяемую равенством (1), в окрестности точки $x=a$, наверное, сходится в круге радиуса R, равного расстоянию от a до ближайшей из точек $\overset{*}{x}$, определяемых равенствами (7) и (8).

Если уравнения (7) и (8) не имеют решения $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ в области D, то либо ряд $y=\varphi(x-a)$ сходится при всех x из области D, либо при $x \to \overset{*}{x} \in D$ имеем $y(x) \to$ гр. обл. D. Но точки, удовлетворяющие системе уравнений (7) и (8), не обязательно доставляют особые точки функции $y=\varphi(x-a)$.

Если для этой функции в точке $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ имеем равенства (7), (8), то значение $\overset{*}{x}$ будет особенным, если ещё имеем $\Phi'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) \neq 0$.

Если же имеем $\Phi'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0$, то точка $\overset{*}{x}$ может оказаться неособенной. Например, если в точке $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ имеем

$$\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0, \quad \Phi'_x(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0, \quad \Phi'_y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}) = 0$$

и корни уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial x\,\partial y}\alpha + \frac{\partial^2\Phi(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})}{\partial y^2}\alpha^2 = 0$$

α_1, α_2 суть различные, то точка $\overset{*}{x}$ не будет особенной для функции $y = \varphi(x-a)$. Мы имеем всегда конечное число условий, определяющих, будет или нет точка $\overset{*}{x}$ особенной для функции $y = \varphi(x-a)$. Эти условия состоят в том, что наряду с уравнениями (7) и (8) должны выполняться ещё некоторые равенства, легко составляемые при помощи частных производных от функции $\Phi(x, y)$.

Следует, однако, обратить внимание на то, что в особой точке $\overset{*}{x}$ функция $y = y(x)$ не перестаёт существовать и сохраняет непрерывность. Функция $y = y(x)$ непрерывно продолжима до тех пор, пока $y(x)$ остаётся в области голоморфности функции $\Phi(x, y)$. Таким образом, если $\Phi(x, y)$ вещественная и мы имеем вещественную неявную функцию $y = y(x)$, определённую в окрестности начала координат равенством (1), то это решение непрерывно продолжимо в области вещественных x до тех пор, пока $y(x)$ остаётся в области D и на пути x не встречается такого рода особая точка $\overset{*}{x}$, в окрестности которой вещественная функция $y = y(x)$ определяется лишь с одной стороны от $\overset{*}{x}$. Выше указано, что такие точки x находятся, если они существуют.

Если уравнения (7) и (8) определяют только комплексные значения $\overset{*}{x}$, то вещественная функция $y = y(x)$, определяемая равенством (1), определена и непрерывна при всех x, пока $y(x)$ остаётся в области D. Беря в этом случае $y = y_0$ на границе области D, мы получим x_0 из уравнения $\Phi(x_0, y_0) = 0$, до которого вещественная функция $y(x)$ непрерывно продолжима (хотя, может быть, и не представима рядом Тейлора).

Такие же рассуждения можно провести для систем уравнений, т. е. можно и для систем уравнений установить область сходимости рядов, представляющих неявные функции и область их непрерывного продолжения.

Можно рассуждения об определении области непрерывности неявной функции распространить и на те случаи, когда неявные функции задаются не при помощи голоморфных функций, а лишь при помощи непрерывных функций, имеющих необходимое число частных производных.

2. Ю. Г. Решетняк «Новые способы исследования линейных неравенств».

Заседание 9 ноября 1954 г.

1. О. А. Ладыженская «Применение функционального анализа для доказательства существования решений краевых задач для уравнений с частными производными трёх основных типов».

Доклад посвящён вопросу о разрешимости некоторых типов нестационарных операторных уравнений при определённых начальных условиях. Краевые задачи и задача Коши для уравнений и систем параболического и гиперболического типов, для уравнения Шредингера, а также для систем уравнений Максвелла, Дирака и ряда других уравнений могут быть рассмотрены как частные случаи изученных нами операторных уравнений. Основная идея доказательства разрешимости этих операторных уравнений опубликована в [1], где она приведена на примере двух их типичных представителей: краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Укажем здесь изученные нами операторные уравнения.

Пусть H есть полное сепарабельное гильбертово пространство. Обозначаем через H_1 линейное множество всех измеримых на отрезке $[0, l]$ функций $u(t)$ со значениями из H, для которых $\int\limits_0^l \|u(t)\|^2\,dt < \infty$, где $\|u(t)\|$ есть норма $u(t)$ в H. Множество H_1 будет полным гильбертовым пространством, если скалярное произведение для его элементов u и v определено равенством $(u, v)_{H_1} = \int\limits_0^l (u(t), v(t))\,dt$, где $(u(t), v(t))$ есть скалярное произведение в H.

Доказывается разрешимость следующих задач:

I. Найти функцию $u(t)$ из H_1, удовлетворяющую уравнению

$$Su \equiv u_t + S_1(t)\,u + B(t)\,S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f$$

и условию $u(0) = \varphi_0$. Здесь $S_k(t)$ — заданные линейные операторы в H, зависящие от параметра $t \in [0, l]$, так что $v_k(t) = S_k(t)\,x$ $(k = 1, 2)$ принадлежат H_1, если $x \in D(S_1)$, f и φ_0 — заданные элементы H_1 и H соответственно. Оператор $S_1(t)$ является самосопряжённым и положительно определённым, причём область определения его $D(S_1)$ плотна в H и не зависит от t. Оператор $S_2(t)$ в определённом смысле подчинён $S_1(t)$, а $B(t)$ является ограниченным и кососимметрическим.

II. Найти функцию $u(t) \in H_1$, удовлетворяющую уравнению

$$Su \equiv u_{tt} + S_1(t)\,u + B(t)\,S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f$$

и условиям

$$u(0) = \varphi_0 \quad \text{и} \quad u_t(0) = \varphi_1.$$

Здесь заданные операторы и функции подчинены примерно тем же ограничениям, что и в n° I.

III. Найти функцию $u(t) \in H_1$, удовлетворяющую уравнению Шредингера

$$Su \equiv u_t - iS_1(t)\,u = f$$

и условию

$$u(0) = \varphi_0.$$

Относительно $S_1(t)$ предполагаем то же, что и в n° I.

Мы сформулировали в резюме доклада лишь основные ограничения на входящие в уравнения операторы, не указывая точно, как влияют дифференцируемость операторов $S_k(t)$ и элементов f и φ_0 по t и принадлежность f и φ_0 к тому или иному линейному множеству в H_1 и H на свойства решений, а следовательно, и на то, в каком смысле решение удовлетворяет всем требованиям задачи.

Далее было показано, как краевые задачи и задача Коши для уравнений и систем гиперболического и параболического типов могут быть рассмотрены как частные случаи изученных в n° I—III задач.

Наконец, был сформулирован метод приближённого вычисления решения этих задач, сходимость которого следует из указанных выше теорем существования.

2. Д. М. Эйдус «О собственных функциях уравнения Гельмгольца».

1. Пусть Ω — конечная односвязная область в m-мерном пространстве, ограниченная поверхностью S, удовлетворяющей условиям Ляпунова. Рассмотрим интегральный оператор A_λ в пространстве $L_2(S)$, определяемый равенством

$$A_\lambda f = \int\limits_S \frac{J_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k}\,f(y)\,dS_y,$$

где $\lambda > 0$, $k = \frac{m-2}{2}$, r_{xy} — расстояние между точками x и y, лежащими на S.

Теорема. *Пусть при некотором $\lambda > 0$ уравнение $A_\lambda f = 0$ имеет нетривиальное решение f. Тогда число λ^2 является собственным значением для уравнения*

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

в Ω при краевом условии

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

причём существует такая собственная функция и соответствующая собственному значению λ^2, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f.$$

2. Пусть теперь число $\lambda^2 > 0$ не является собственным значением уравнения (1) при краевом условии (2). Рассмотрим задачу о решении уравнения (1) при краевом условии

$$u|_S = \varphi,$$

где φ — заданная на S непрерывная функция. Пусть μ_i — система собственных значений, а θ_i — соответствующая система собственных функций оператора A_λ. С помощью сформулированной в n⁰ 1 теоремы доказывается, что решение $u(x)$ поставленной краевой задачи имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \theta_i)}{\mu_i} \int_S \frac{J_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k} \cdot \theta_i(y)\, dS_y, \tag{3}$$

где ряд (3) сходится в $L_2(\Omega)$.

Заседание 27 ноября 1954 г.

1. Г. Ю. Джанелидзе «Общая задача о динамической устойчивости упругих систем».

1. Суть проблемы динамической устойчивости состоит в изучении движений упругих систем, вызванных действием переменных во времени внешних нагрузок, причём последние считаются приложенными так, что равноценные по направлению и месту приложения неизменные во времени нагрузки могут вызвать статическую потерю устойчивости.

2. В настоящее время уже решены многие частные задачи динамической устойчивости (см. обзор [1]), однако общие вопросы изучены сравнительно мало и лишь в работе Меттлера [2] сформулирована возможная постановка общей задачи динамической устойчивости.

3. Для пояснения предлагаемой постановки задачи рассматривается задача Н. М. Беляева о динамической устойчивости тонкого прямолинейного стержня, опёртого по концам и сжатого синусоидально изменяющимися со временем силами.

Основные уравнения теории тонких стержней (при учёте главных нелинейных членов; см. [3]) в рассматриваемом случае приводят к следующей системе дифференциальных уравнений продольно-поперечных колебаний стержня:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - E\Omega\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(E\Omega\frac{\partial w}{\partial s}\right) - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(EI\frac{\partial^2 I}{\partial s^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Здесь s — дуга, отсчитываемая вдоль стержня, v — прогиб стержня, w — продольное смещение, ρ — линейная плотность, $E\Omega$ — жёсткость на растяжение, EI — жёсткость на изгиб.

Граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{matrix} s=0 \\ s=l \end{matrix}\right\} v=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=0, \qquad E\Omega\,\frac{\partial w}{\partial s}=-P\cos\omega t. \tag{3}$$

За исходное движение принимаются установившиеся продольные колебания, определяемые следующим решением системы (1)—(2) при граничных условиях (3):

$$v_0(s,\,t)=0,\ w_0(s,\,t)=\frac{P}{E\Omega k}\,\frac{\sin\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t. \tag{4}$$

Для исследования устойчивости продольных колебаний (4) составляются уравнения в вариациях, соответствующие системе (1)—(2). Значения входящих в них производных берутся для исходного движения, что приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} &EY\,\frac{\partial^4\delta v}{\partial s^4}+\rho\,\frac{\partial^2\delta v}{\partial t^2}+P\,\frac{\cos\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t\,\frac{\partial^2\delta v}{\partial s^2}+\\ &\qquad\qquad+\frac{P\omega^2\rho}{E\Omega k}\,\frac{\sin\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t\,\frac{\partial\delta v}{\partial s}=0,\\ &E\Omega\,\frac{\partial^2\delta w}{\partial s^2}-\rho\,\frac{\partial^2\delta w}{\partial t^2}+\frac{PkI}{\Omega}\,\frac{\sin\frac{k}{2}(l-2s)}{\cos\frac{kl}{2}}\cos\omega t\,\frac{\partial^3\delta v}{\partial s^3}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнение Н. М. Беляева вытекает из первого соотношения (5) при $k\to 0$ (т. е. в предположении неограниченного возрастания жёсткости на растяжение).

4. Приближённое решение уравнений (5) по методу Б. Г. Галёркина приводит к формулам, уточняющим результаты Н. М. Беляева.

5. Аналогичный ход рассуждений позволяет рассмотреть и другие задачи динамической устойчивости (устойчивость плоской формы изгиба, устойчивость плит и т. п).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Бейлин и Г. Ю. Джанелидзе, Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем, ППМ 16, вып. 5 (1952).

[2] E. Mettler, Eine Theorie der Stabilitet der elastischen Bewegung, Ingeneur—Archiv, т. XVI, вып. 2 (1947).

[3] М. М. Кобальский, Взаимосвязанные колебания тонких стержней и тонких пластинок под действием периодических сил, Автореферат кандидатской диссертации, Киев, 1951.

2. А. В. Малышев «Предельный случай теоремы Минковского о линейных формах».

Заседание 14 декабря 1954 г.

1. Б. А. Рымаренко «О некоторых экстремальных задачах теории монотонных полиномов».

В теории монотонных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля на некотором отрезке (или имеющих наименьшую осцилляцию на этом отрезке), являющейся частью общей теории приближения функций посредством полиномов, существенную роль играет вопрос о форме экстремальных полиномов.

Ещё П. Л. Чебышев [1] показал, что производная экстремального, монотонно возрастающего на $[-1, +1]$ полинома $y_{2m+1}(x)=x^{2m+1}+\sum_{k=0}^{2m} p_k x^k$ равна точному квадрату некоторого другого полинома, все корни которого лежат в этом промежутке.

Академик С. Н. Бернштейн ([2], т. I, № 39 и т. II, № 100) продолжил исследования П. Л. Чебышева, а также ввёл в науку понятие о кратно монотонных и циклически монотонных полиномах, создав новые методы в этой теории и решив ряд основных её задач.

Следуя их идеям, можно показать справедливость двух довольно общих теорем, определяющих форму экстремальных полиномов.

Рассматриваются полиномы $y(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ с вещественными коэффициентами степени не более n, монотонно возрастающие на $[-1, +1]$ (класс таких полиномов назовём — T_n) или на всей вещественной оси (класс этих полиномов — B_n), коэффициенты которых подчинены допустимым (т. е. не противоречащим монотонности и совместным) связям:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \alpha_{k,i}=A_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s \leqslant n) \tag{1}$$

($\alpha_{k,i}$ и A_i — данные вещественные числа, причём хотя одно $A_i \neq 0$).

Теорема 1. *Пусть полиномы $y_n(x)\in T_n$, коэффициенты которых подчинены одной связи* (1) (*причём предположим, что $y_n(-1)=0$, если $\alpha_{0,1} \neq 0$*). *Тогда среди полиномов, экстремальных на $[-1, +1]$, существует полином вида*

$$y_n^*(x)=\int_{-1}^{x}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}u_m^2(x)\,dx,$$

где $u_m(x)$ — некоторый полином степени $\leqslant m$ $(n-1=2m+\alpha+\beta)$, все корни которого лежат в промежутке $[-1, +1]$, а α и β — числа, равные нулю или единице.

Теорема 2. *Пусть полином $y_n(x)\in B_n$ и его коэффициенты подчинены двум связям* (1) (*причём предполагается, что $y_n(-1)=0$, если* $\begin{vmatrix}\alpha_{0,1} & A_1\\ \alpha_{0,2} & A_2\end{vmatrix}=0$, *а хотя одно из чисел $\alpha_{0,i}\neq 0$*). *Тогда среди экстремальных на $[-1, +1]$ полиномов существует полином вида*

$$y_n^*(x)=\int_{-1}^{x}u_n^2(x)\,dx,$$

где $u_m(x)$ — некоторый полином степени $\leqslant m$ $(n-1=2m)$ с вещественными коэффициентами.

В этих теоремах, аналогичных теореме С. Н. Бернштейна ([2], т. I, № 44) о неотрицательных тригонометрических многочленах, единственность экстремальных полиномов не утверждается. С их помощью оказывается возможным решить некоторые новые экстремальные задачи (две из которых приводятся ниже), а также упростить решение других задач этой теории [3] (задачи II и III), в которых использовалась ранее теорема А. А. Маркова — Люкача о неотрицательных полиномах.

Задача 1. Пусть $y_{2m+1}(x)\in T_{2m+1}$ и $\alpha y'_{2m+1}(1)+\beta y''_{2m+1}(1)=A$, где α, β и $A\neq 0$ — данные вещественные числа. Найти наименьшую на $[-1, +1]$ осцилляцию Ly^*_{2m+1} этих полиномов.

Задача 2. Пусть $y_{2m+1}(x)=x^{2m+1}+\sum_{k=0}^{2m} p_k x^k \in B_{2m+1}$ и

$$\frac{y''_{2m+1}(\eta)}{y'_{2m+1}(\eta)}=A,$$

где η — данное вещественное число. Найти, при каком вещественном A наименьшая на $[-1, +1]$ осцилляция Ly^*_{2m+1} этих полиномов достигает минимальной величины; найти также

$$\mathscr{L} = \inf_A Ly^*_{2m+1}.$$

Ответ на поставленные задачи таков:

$$\text{I. } Ly^*_{2m+1} = \frac{48A}{m(m+1)^2(m+2)\beta^2} \times$$
$$\times \left[\sqrt{\frac{\beta^2}{3} + \frac{\alpha\beta}{m(m+2)} + \frac{\alpha^2}{m^2(m+2)^2}} - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{m(m+2)} \right) \right],$$

$$\text{II. } A = \frac{\hat{P}'_m(\eta)}{\hat{P}_m(\eta)}, \qquad \mathscr{L} = 2^{2m+1} \frac{(m!)^4}{[(2m)!]^3},$$

если η не является корнем полинома Лежандра $\hat{P}_m(x)$ степени m; если же $\hat{P}_m(\eta) = 0$, то задача не имеет решения. (Аппаратом для получения указанных решений служат ортогональные полиномы Лежандра и Якоби.)

Отметим, что если для $y_n(x) \in T_n$ число связей (1) более одной, а для $y_n(x) \in B_n$ более двух, то указанные теоремы могут не иметь места (см. [4] и [3] — задача I).

Для кратно монотонных полиномов можно получить теоремы, аналогичные указанным выше, причём для решения экстремальных задач аппаратом здесь также служат полиномы Якоби.

В классе циклически монотонных порядка p полиномов $y_n(x) \in U_p$ теоремой, аналогичной указанным выше, служит лемма 2 С. Н. Бернштейна ([2], т. II, № 100), а аппаратом для решения экстремальных задач уже являются не ортогональные полиномы, а S и C — полиномы Эйлера—Бернштейна.

Так, например, применяя упомянутую лемму С. Н. Бернштейна к задаче, аналогичной известной задаче Е. И. Золотарёва [5], найти на $[0, 1]$ наименьшее уклонение от нуля полинома

$$y_n(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k x^k \in Ц_{n-1},$$

где σ — данное вещественное число (примем $\sigma \leqslant 0$ или $\sigma \geqslant n$), получим:

$$Ly^*_n = \begin{cases} |E_n + (n-\sigma) E^*_{n-1}|, & \text{если } n = 2m, \\ |E^*_n - \sigma E_{n-1}|, & \text{если } n = 2m+1, \end{cases}$$

или

$$Ly^*_n = \begin{cases} |E_n + \sigma E^*_{n-1}|, & \text{если } n = 2m, \\ |E^*_n + (\sigma - n) E_{n-1}|, & \text{если } n = 2m+1, \end{cases}$$

где E_n и E^*_n — числа, подобные числам Эйлера.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Чебышев, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля, Полн. собр. соч., т. III, М.—Л., Изд. АН, 1948.

[2] С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, М., Изд. Академии наук, 1952—1954.

[3] Б. А. Рымаренко, О полиномах, монотонных на всей вещественной оси, ДАН 71, № 6 (1950).

[4] С. Н. Бернштейн, В. Ф. Бржечка и Б. А. Рымаренко, Сообщ. Харьков. матем. об-ва, серия 4, III (1929).

[5] Б. А. Рымаренко, О наименьшем уклонении от нуля циклически монотонного полинома при задании двух его старших коэффициентов, ДАН 83, № 2 (1952).

2. Г. Ш. Рубинштейн «Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и некоторые её приложения».

Пусть в вещественном n-мерном пространстве R^n заданы конечное множество точек $A=\{a_i=(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in})\}_{i=1,\ldots,m}$ и точки $c=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $d=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Под задачей о крайней точке пересечения оси $B=\{b=c+\lambda d\}_{\lambda\in(-\infty,\infty)}$ с многогранником M — выпуклой оболочкой множества A понимается:

1. Установить, имеют ли B и M общие точки.

2. Если $B\cap M\neq\wedge$ ($\wedge$ — знак пустого множества), то а) определить $\lambda_0=\max_{c+\lambda d\in M}\lambda$; б) указать вершины симплекса $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\in A$, внутри которого расположена точка $b_0=c+\lambda_0 d$; в) найти гиперплоскость H_0, строго отделяющую луч $Л(b_0, b_0+d)=\{b=b_0+\lambda d\}_{\lambda>0}$ от многогранника M (M расположен по одну сторону от H_0, $Л(b_0, b_0+d)$ — по другую, причём $H_0\cap Л(b_0, b_0+d)=\wedge$).

3. Если $B\cap M=\wedge$, то найти гиперплоскость H_0, строго отделяющую ось B от многогранника M.

Для решения этой задачи используется метод *разрешающих множителей* (*индексов*), разработанный Л. В. Канторовичем [1]; однако для вычисления разрешающих множителей применён другой процесс последовательных приближений, использующий идеи метода наискорейшего спуска [2]. Использованный процесс является двойственным аналогом процесса последовательных приближений, применённого С. И. Зуховицким для решения задачи наилучшего (в смысле П. Л. Чебышева) приближения конечной системы несовместных линейных уравнений ([3], [4]).

К поставленной геометрической задаче приводится исследование различных вопросов.

I. Пусть дана система линейных неравенств

$$\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{i,n-1}\xi_{n-1}\leqslant\alpha_{in}\quad (i=1,\ldots,m). \tag{1}$$

Примем $A=a_i=(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in}\}_{i=1,\ldots,m}$, $c=\theta$, $d=(0,\ldots,0,-1)$ и рассмотрим соответствующую задачу о крайней точке пересечения оси B с многогранником M. Имеют место следующие утверждения:

1. Если $B\cap M\neq\wedge$, то

а) При некоторых правых частях система (1) разрешима, при других — несовместна; первое имеет место, если $\lambda_0\leqslant 0$, второе, — если $\lambda_0>0$; при этом $\lambda_0=$ $=\min_{x=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})}\max_i(\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{i,n-1}\xi_{n-1}-\alpha_{in})$. Для совместной системы $|\lambda_0|$ характеризует *устойчивость* её *разрешимости*, для несовместной системы λ_0 — *минимальное уклонение*.

б) Если гиперплоскость H_0 имеет уравнение $\xi_1^0\alpha_1+\ldots+\xi_{n-1}^0\alpha_{n-1}-\alpha_n=\lambda_0$, то $x_0=(\xi_1^0,\ldots,\xi_{n-1}^0)$ является *наилучшим решением* системы, если $\lambda_0\leqslant 0$, и *наилучшим приближением*, если $\lambda_0>0$. Совокупность наилучших решений или приближений системы (1) является выпуклым множеством в $(n-1)$-мерном пространстве; это множество называется *многогранником наилучших решений* или *приближений*.

в) Если $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ — вершины симплекса, внутри которого расположена точка b_0, то подсистема

$$\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{in-1}\xi_{n-1}\leqslant\alpha_{in}\quad (i=i_1,\ldots,i_k) \tag{2}$$

является *чебышевской* (системы (1) и (2) либо обе разрешимы, либо обе несовместны; в первом случае они имеют одинаковую устойчивость разрешимости, во втором — равные минимальные уклонения; многогранник наилучших решений или приближений системы (1) содержится в соответствующем многограннике (2); никакая собственная подсистема системы (2) не обладает перечисленными свойствами). Многогранник наилучших решений или приближений системы (2) имеет размерность $n-k$, поэтому размерность соответствующего многогранника системы (1) не превосходит $n-k$.

г) Для того чтобы многогранник наилучших решений или приближений системы (1) при любых правых частях был не более чем r-мерным, необходимо и достаточно, чтобы в $(n-1)$-мерном пространстве точек $a'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ точка θ лежала вне каждого $(k-1)$-мерного симплекса с вершинами из $A'=\{a'_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i,n-1})\}_{i=1,\ldots,m}$ при всех $k<n-r$.

2. Если $B\cap M=\Lambda$, то система (1) разрешима при любых правых частях. При этом, если H_0 имеет уравнение $\xi_1^0\alpha_1+\ldots+\xi_{n-1}^0\alpha_{n-1}=\beta$, то $x=z+\varepsilon x_0=(\zeta_1+\varepsilon\xi_1^0, \ldots, \zeta_{n-1}+\varepsilon\xi_{n-1}^0)$ является решением системы (1) при любых z и ε, удовлетворяющих условиям

$$\varepsilon\beta\leqslant 0,\quad -\varepsilon\beta\geqslant \max_i(\zeta_1\alpha_{i1}+\ldots+\zeta_{n-1}\alpha_{i,n-1}-\alpha_{in}).$$

II. В случае системы линейных уравнений

$$\alpha_{i1}\xi_1+\ldots+\alpha_{i,\,n-1}\xi_{n-1}=\alpha_{in}\quad (i=1, \ldots, m) \tag{3}$$

имеет место следующее: для того чтобы многогранник наилучших решений или приближений системы (3) при любых правых частях был не более чем r-мерным, необходимо и достаточно, чтобы каждые $k-1$ точек из множества $A'=\{a'_i=(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in-1})\}_{i=1,\ldots,m}$ при $k<n-r$ были линейно независимыми.

Последнее утверждение (как, впрочем, и пункт г) из I) остаётся справедливым и в случае бесконечной системы, если соответствующее множество A' ограничено и замкнуто. Это даёт возможность, учитывая замеченную М. Г. Крейном связь последнего вопроса с проблемой А. Хаара [5], дать обобщение классического результата А. Хаара.

Пусть C — пространство непрерывных функций, определённых на компакте Q, $L\subset C$ — n-мерное пространство. *Для того чтобы для каждой функции $f\in C$ многогранник наилучших приближений $P\subset L$ был не более чем r-мерным, необходимо и достаточно, чтобы каждые $r+1$ линейно независимых функций из L имели в Q не более $n-r-1$ общих корней.*

III. В задаче рационального раскроя [1] (а также при решении конечной игры двух игроков с нулевой суммой в нормальной форме [6]) требуется по данной матрице $\|\alpha_{ij}\|_{i=1,\ldots,m,\,j=1,\ldots,n}$ определить $\max_{x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)}\min_j\sum\alpha_{ij}\xi_i$ при условии $\xi_i\geqslant 0$, $\sum\xi_i=1$, а также найти вектор x, на котором этот максимум реализуется. Вопрос сводится к задаче о пересечении некоторого многогранника M, лежащего в первом гипероктанте R^n, с осью, определяемой точками $c=\theta$ и $d=(1, \ldots, 1)$.

IV. Задача о $\max_{x=(\xi_1,\ldots,\xi_m)}\sum\alpha_{nj}\xi_j$ при $\sum\alpha_{ij}\xi_j=\gamma_i$ $(i=1, \ldots, n-1)$, $\xi_j\geqslant 0$, $\sum\xi_j=1$ также сводится к задаче о пересечении некоторого многогранника $M\subset R^n$ с осью, определяемой точками $c=(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, 0)$ и $d=(0, \ldots, 0, 1)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Математические методы в организации и планировании производства, изд. Ленинградского университета, 1939.

[2] Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН III, вып. 6 (28) (1948).

[3] С. И. Зуховицкий, Матем. сб. 33 (75), № 2 (1953).

[4] С. И. Зуховицкий, Алгорифм для решения чебышевской задачи приближения в случае конечной системы несовместных линейных уравнений, ДАН 79, № 4 (1951).

[5] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[6] J. Neumann, O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1947.

Заседание 28 декабря 1954 г.

1. Г. С. Цейтин «О теореме Коши в конструктивном анализе».

В докладе рассматривается вопрос об истинности конструктивных аналогов следующих утверждений, верных в классическом анализе:

1) всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых промежутков имеет общую точку;

2) первая теорема Коши (об обращении в нуль внутри промежутка непрерывной функции, принимающей на его концах значения разных знаков);

3) вторая теорема Коши (о том, что функция, непрерывная в замкнутом промежутке, принимает там все значения, промежуточные между её значениями на концах);

4) теорема Ролля;

5) теорема Лагранжа (формула конечных приращений).

Для построения конструктивных аналогов этих утверждений нужно заменить встречающиеся здесь понятия классического анализа соответствующими понятиями конструктивного анализа и к полученным утверждениям применить конструктивное истолкование суждений, разработанное А. Н. Колмогоровым [1] в уточнении С. К. Клина [2]. Вместо рекурсивных функций мы будем часто говорить о нормальных алгорифмах [3].

Понятие вещественного числа мы заменим понятием конструктивного вещественного числа, которое совпадает с понятием вычислимого (berechenbar) числа в работе [4] Э. Шпекера. Мы будем пользоваться понятием конструктивной функции, введённым А. А. Марковым [5]. Конструктивной функцией, определённой в данном промежутке, называем алгорифм, перерабатывающий всякую запись (или гёделевский номер) вещественного числа из этого промежутка в запись некоторого вещественного числа, причём записи равных вещественных чисел перерабатываются снова в записи равных вещественных чисел. Понятия равномерно непрерывной конструктивной функции и производной от конструктивной функции определяются очевидным образом. Мы будем в формулировках теорем классического анализа понятие функции, непрерывной в данном промежутке, заменять понятием равномерно непрерывной в данном промежутке конструктивной функции. Наконец, понятие последовательности вложенных замкнутых промежутков будем заменять понятием конструктивной последовательности вложенных промежутков, под которой будем понимать алгорифм, дающий по каждому натуральному числу запись промежутка, причём выполнены условия вложенности промежутков.

Подвергая теперь полученные суждения конструктивному истолкованию, заметим, что они все имеют вид: для всякого X существует Y, находящийся к этому X в отношении A ($\forall X \exists Y A$). В конструктивном истолковании это будет означать, что существует алгорифм, применимый ко всякому X и перерабатывающий его в соответствующий Y. Поэтому, для того чтобы опровергнуть такое утверждение, достаточно доказать невозможность требуемого алгорифма, в то время как опровергающего примера—значения X, для которого соответствующего Y не существует, может не быть вовсе ($\neg \forall X \exists Y A$, но $\neg \exists X \neg \exists Y A$). Как раз такое положение и имеет место для всех наших суждений. *Аналоги указанных теорем классического анализа оказываются ложными, но верны их «двойные отрицания».*

В частности, по поводу 1) теоремы Коши могут быть сформулированы следующие утверждения (промежуток можно считать фиксированным):

а) Не существует алгорифма, перерабатывающего всякую запись равномерно непрерывной в данном промежутке конструктивной функции, принимающей на его концах значения разных знаков, в запись вещественного числа из этого промежутка, при котором эта функция обращается в нуль.

б) Не существует функции, равномерно непрерывной в данном промежутке и принимающей на его концах значения разных знаков, которая нигде в промежутке не обращалась бы в нуль. (Как мне было сообщено А. А. Марковым, ещё раньше было доказано утверждение, более сильное, чем утверждение б).)

Утверждение о неверности конструктивного аналога 2) теоремы Коши может быть усилено следующим образом: существует такая равномерно непрерывная в промежутке конструктивная функция $f(x)$, что невозможен алгорифм, перерабатывающий всякую запись вещественного числа y, промежуточного между значениями $f(x)$ на концах промежутка, в запись числа x из этого промежутка такого, что $f(x)=y$. Именно достаточно рассмотреть функцию $f(x)=|x-1|-|x|+2x-1$ в промежутке $[-1, 2]$. Такое же усиление возможно и для утверждения о неверности конструктивного аналога теоремы Лагранжа. Там нужно брать функцию $F(x)=(|x-1|+|x|-1)^2$. Может быть также усилено утверждение о неверности конструктивного аналога теоремы о вложенных промежутках: достаточно ограничиться последовательностями промежутков с рациональными концами и с длинами, не меньшими фиксированного числа.

Доказательства этих теорем основаны на существовании такой частично-рекурсивной функции, принимающей значения не больше единицы, которую невозможно продолжить до общей рекурсивной функции (такой функцией будет, например, $\alpha(x)=\min(1, \varphi(x, x))$, где $\varphi(m, n)$ есть универсальная частично-рекурсивная функция (см. [6], стр. 196); этой функции $\alpha(x)$ будет эквивалентен некоторый нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$). Используется следующая лемма, вытекающая из этого утверждения: невозможен алгорифм, применимый ко всякой записи вещественного числа x при $|x| \geqq 1$, дающий в результате нуль, если $x>0$, и единицу, если $x<0$. (Эта лемма получается, если каждому натуральному числу l сопоставить вещественное число так, что его n-е рациональное приближение определяется работой алгорифма $\mathfrak{A}$ над l в течение не более чем n первых шагов.)

Утверждения о невозможности опровержения на примере конструктивных аналогов указанных теорем доказываются с применением принципа 7.2 работы [5] («ленинградский принцип», как его называют). Идея этих доказательств состоит в следующем. Пусть требуемой точки не существует. Затем делят отрезок пополам и, используя то, что его середина не является такой точкой, выбирают определённым образом одну из половин, затем эту половину снова делят пополам и т. д. Полученная последовательность стягивающихся вложенных промежутков определяет некоторую точку, которая, как оказывается, уже не может не удовлетворять требуемым условиям, что приводит к противоречию.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Kolmogoroff, Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Math. Zeitschr. 35 (1932), 58—65.

[2] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, The Journ. of Symb. Log. 10 (1945), 109—123.

[3] В. К. Детловс, Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, ДАН 90 (1953), 723—725.

[4] E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, The Journ. of Symb. Log. 14 (1949), 145—158.

[5] А. А. Марков, О непрерывности конструктивных функций, УМН IX, вып. 3 (1954), 226—230.

[6] Р. Петер (Rózsa Péter), Рекурсивные функции, М., ИЛ, 1954.

2. И. Д. Заславский «Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе».

1. Перечислим основные понятия конструктивного анализа, употребляемые в настоящем резюме. Под *конструктивным вещественным числом* мы будем понимать вычислимое (berechenbar) число по Шпекеру [1], заменяя в определении такого числа слова «общерекурсивная функция» на «нормальный алгорифм [2], применимый ко всем натуральным числам». (Равносильность этих понятий доказана в [3].) *Конструктивную функцию* (вещественного переменного) мы будем понимать в смысле определения, данного А. А. Марковым [4]. Другие понятия, которые мы будем употреблять, представляют собой перевод обычных понятий классического анализа на «конструктивный язык» при помощи правил конструктивного истолкования суждений, установленных А. Н. Колмогоровым [5] и С. Клином [6]. Например, понятие непрерывной функции в переводе на «конструктивный язык» звучит так: конструктивная функция $f(x)$ называется непрерывной в некотором промежутке, если существует нормальный алгорифм (или частично-рекурсивная функция) $\delta(x_0, \varepsilon)$, перерабатывающий запись конструктивного вещественного числа x_0 (или соответственно гёделевский номер общерекурсивной функции, задающей x_0) из данного промежутка и любое рациональное число $\varepsilon > 0$ (соответственно его номер при нумерации всех рациональных чисел) в рациональное число $\delta > 0$ (соответственно его номер) такое, что как только $|x-x_0| < \delta(x_0, \varepsilon)$ и x принадлежит данному промежутку, так сейчас же

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Аналогичным образом вводятся конструктивные понятия: равномерно непрерывной функции, дифференцируемой функции, также понятие конструктивной последовательности каких-либо объектов и понятие предела последовательности конструктивных вещественных чисел.

Как показывается в нижеследующих теоремах, свойства этих понятий конструктивного анализа во многом отличны от свойств соответствующих им понятий классического анализа.

Теорема 1. *Существует последовательность* Φ_m *непустых конечных наборов попарно не пересекающихся сегментов с рациональными концами*

$$[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}],\quad [a_2^{(m)}, b_2^{(m)}],\ \ldots,\ [a_{k_m}^{(m)}, b_{k_m}^{(m)}]$$

такая, что 1) $\Phi_m \subset [0, 1]$ при всех m, 2) $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_m \supset \ldots$, 3) *не существует конструктивного вещественного числа, входящего во все* Φ_m.

Если мы рассмотрим, кроме Φ_m, также и наборы интервалов $G_m = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - \Phi_m$, то последовательность G_m, очевидно, будет обладать следующим свойством: вся последовательность G_m покрывает $[0, 1]$, но никакая конечная совокупность G_m не покрывает $[0, 1]$. При этом можно построить Φ_m и G_m так, что покрытие $[0, 1]$ будет конструктивным, т. е. будет существовать алгорифм $m(x)$, выдающий по записи любого вещественного числа $x \in [0, 1]$ такое натуральное число m, что x входит в G_m.

Исходя из теоремы 1, доказываются следующие утверждения:

Теорема 2. *Существует конструктивная функция* $f(x)$, *непрерывная на* $[0, 1]$, *и не ограниченная на нём.*

Теорема 3. *Существует конструктивная функция* $f(x)$, *равномерно непрерывная на* $[0, 1]$, *принимающая все значения* $0 \leqslant f(x) < 1$ *и не принимающая значения* $f(x)=1$.

Теорема 4. *Существует конструктивная функция* $f(x)$, *непрерывная на* $[0, 1]$ *и не имеющая на нём точной верхней границы*[1]).

Теорема 5. *Существует конструктивная функция* $f(x)$, *непрерывная и ограниченная на* $[0, 1]$, *но не равномерно непрерывная на нём.*

Таким образом, в конструктивном анализе оказываются неверными: теорема об убывающей последовательности замкнутых множеств, теорема Гейне-Бореля, обе теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Specker, Nicht konstruktiv beweislare Sätze der Analysis, The Journ. of Symb. Log. 14 (1949), 145—158.

[2] А. А. Марков, Теория алгорифмов, Труды Матем. ин-та им. Стеклова 38 (1951), 176—189.

[3] В. К. Детловс, Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, ДАН 90 (1953), 723—725.

[4] А. А. Марков, О непрерывности конструктивных функций, УМН IX, вып. 3 (1954), 226—230.

[5] А. Н. Колмогоров, Zur Deutung der intuizionistischen Logik, Math. Zeitschr. 35 (1932), 58—65.

[6] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, The Journ. of Symb. Log. 10 (1945), 109—123.

[7] Р. Петер, Рекурсивные функции, М., ИЛ, 1954.

[8] S. C. Kleene, Recursive predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), 41—73.

---

[1]) То-есть не существует конструктивного вещественного числа y_0, являющегося верхней границей $f(x)$ (т. е. $f(x) \leqslant y_0$ при всех $x \in [0, 1]$) и такого, что никакое число $y < y_0$ не может являться верхней границей $f(x)$.

1956 г. январь—февраль т. XI, вып. 1 (67)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 8 февраля 1955 г.

1. В. И. Крылов «О сходимости интерполирования в классах дифференцируемых функций».

2. Д. С. Горшков «Неквадратичные комплексные иррациональности, которые разлагаются в непрерывные дроби с ограниченными неполными частными».

Заседание 22 февраля 1955 г.

1. С. М. Лозинский «О радиусе аналитичности решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью».

2. А. А. Киселёв «Решение краевой задачи для линеаризированных уравнений гидродинамики вязкой жидкости в трёхмерном пространстве».

3. Организационные вопросы: удовлетворена просьба Ю. В. Линника об освобождении его от обязанностей заместителя председателя семинара; заместителем председателя семинара избран С. М. Лозинский.

Заседание 8 марта 1955 г.

1. Н. А. Лебедев «К теории конформных преобразований круга на неналегающие области».

Пусть на плоскости w дана односвязная область D и в ней две точки a_1 и a_2 $(a_1 \neq a_2)$. Пусть функции $f_1(\zeta)$, $f_1(0)=a_1$ и $f_2(\zeta)$, $f_2(0)=a_2$ конформно отображают круг $|\zeta|<1$ соответственно на области $D_1 \ni a_1$ и $D_2 \ni a_2$, не имеющие друг с другом общих точек и лежащие в области D. Рассмотрим множество точек $M(|f_1'(0)|, |f_2'(0)|)$ (в декартовой системе координат) для всех возможных D_1 и D_2. Это множество назовём областью значений системы $M(|f_1'(0)|, |f_2'(0)|)$.

Представляют интерес следующие три случая:

1. Область D — вся плоскость (включая точку $w=\infty$).
2. Область D — вся плоскость, исключая точку $w=\infty$.
3. Область D — круг $|w|<R$, $R>0$.

Во всех трёх случаях в работе найдены области значений введённой выше системы. Опираясь на полученные области значений, находятся известные ранее и новые оценки для некоторых «простых» функций от $|f_1'(0)|$ и $|f_2'(0)|$. Кроме того, в работе указаны некоторые обобщения решённой задачи.

2. Г. П. Сафронова «О некоторых граничных задачах теории аналитических функций в классах Орлича».

Регулярная внутри единичного круга функция $f(z) \in H_M$, если

$$\int_0^{2\pi} M[|f(re^{i\theta})|]\,d\theta \leqslant H \qquad (0 \leqslant r < 1).$$

Справедлива следующая теорема.

Пусть $M(u)$, $N(u)$ — непрерывные выпуклые функции, определённые в промежутке $(0, +\infty)$. Если $f(z) \in H_M$, её предельные значения $f(e^{i\theta}) \in L_N$, то $f(z) \in H_N$.

Условие выпуклости в общем случае отбросить нельзя.

Однако, если $M(u)$ строго возрастает, удовлетворяет неравенству

$$M(2u) \leqslant KM(u) \tag{1}$$

и существует функция $\varphi(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости, кроме, может быть, $z=0$, и такая, что $|\varphi(z)| = M(|z|)$, то заключение этой теоремы имеет место при выполнении одного из трёх условий:

1. $N[M^{-1}(u)]$ выпукла при $u \geqslant u_0$;
2. $\dfrac{M(u)}{u}$ возрастает, $\dfrac{N(u)}{u}$ убывает и $N(u)$ удовлетворяет неравенству (1) при $u \geqslant u_0$;
3. $N(u)$, $M^{-1}(u)$ удовлетворяют неравенству (1) при $u \geqslant u_0$ и отношение $\dfrac{M(u)}{N(u)}$ монотонно.

Из этих результатов вытекает известная теорема, принадлежащая В. И. Смирнову:

Если $f(z) \in H_\delta$, $f(e^{i\theta}) \in Lp\ (p > \delta)$, то $f(z) \in Hp$.

Заседание 22 марта 1955 г.

Эрих Келер (Германская Демократическая Республика) «Арифметика, алгебраическая геометрия и теория функций».

Заседание 8 апреля 1955 г.

Карл Шрётер (Университет им. Гумбольта в Берлине) «О систематической трактовке математической логики и оснований математики в рамках изучения математики».

Заседание 12 апреля 1955 г.

1. Е. С. Ляпин «Потенциальная обратимость элементов в полугруппах».

Полугруппа есть множество, в котором определено ассоциативное умножение элементов. Если совокупность некоторых преобразований произвольного множества такова, что содержит вместе со всякими двумя преобразованиями и их произведение (т. е. преобразование, являющееся результатом последовательного применения этих преобразований), то она, очевидно, является полугруппой. Известно, что всякая полугруппа может быть реализована таким образом.

Элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ называется обратимым, если для любого $A \in \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ найдутся такие Y и Z, что $XY = A$, $ZX = A$. Элемент X называется потенциально обратимым элементом $\mathfrak{A}$, если существует такая надполугруппа $\mathfrak{A}'$ полугруппы $\mathfrak{A}$, что X является обратимым элементом полугруппы $\mathfrak{A}'$.

Теорема. *Для того чтобы элемент X полугруппы $\mathfrak{A}$ был потенциально обратим, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $A \in \mathfrak{A}$ уравнения*

$$XS = A, \quad TX = A$$

относительно неизвестных $S \in \mathfrak{A}$ и $T \in \mathfrak{A}$ имели каждое не более одного решения.

Существуют такие бесконечные матрицы, которые, не являясь обратимыми элементами ни в какой мультипликативной матричной полугруппе, могут быть потенциально обратимыми элементами некоторых матричных полугрупп. В полугруппе бесконечных матриц, состоящей из матриц, в каждой строке и в каждом столбце которых имеется лишь конечное число непулевых элементов, потенциально обратимыми являются, например, матрицы Якоби.

2. Ю. Е. Аленицын «Об однолистных функциях в многосвязных областях».

Для функций, однолистных в конечно-связной области данной плоскости, устанавливаются теоремы, из которых одни обобщают соответствующие теоремы об однолистных функциях в единичном круге, а другие дают новые результаты и по отношению к этим последним функциям. К числу теорем первого типа относятся обобщение теоремы Кёбе об $^1/_4$, теоремы Ренгеля, решающей известную задачу Сегё, и теоремы М. А. Лаврентьева об оценке сверху функционала $|f_1'(z_1) f_2'(z_2)|$ для однолистных функций, отображающих единичный круг на взаимно не налегающие области. К числу теорем второго типа относится точная оценка сверху функционала $\prod_{\nu=1}^{2m} |f_\nu'(z_\nu)|$ при $m \geqslant 2$ в соответствующем классе функций, однолистно отображающих данную многосвязную область на взаимно не налегающие области, и усиления известных оценок сверху для $|f'(z)|$ в соответствующих классах ограниченных однолистных функций — через модуль некоторой двусвязной области, характеризующей образ, или через производную Шварца данной функции (в случае круга). Оценки выражаются через модуль производной функции, однолистно отображающей данную многосвязную область на единичный круг с концентрическими круговыми разрезами. В доказательствах используются результаты работы Нехари (Z. Nehari, Trans. Amer. Math. Soc. 75, № 2 (1953)), вытекающие из рассмотрения надлежащих интегралов Дирихле и их минимального свойства.

Заседание 26 апреля 1955 г.

1. Е. В. Вороновская «О системе дифференциальных уравнений некоторых экстремальных полиномов».

Классические задачи на отыскание полиномов, наименее отклоняющихся от нуля в данном промежутке, могут отличаться друг от друга лишь условиями, налагаемыми на коэффициенты искомого полинома $P_n(x) = \sum_0^n p_i x^i$; назовём их условиями (A), а саму задачу назовём для краткости задачей (A).

Пусть $[0, 1]$ данный промежуток, S — число всех точек отклонения полинома на нём, а сами эти точки суть $(\sigma_i)_1^S$, т. е. $\max\limits_{[0,1]} |P_n(x)| = |P_n(\sigma_i)| = L$. Если $S > \frac{n}{2} + 1$, то справедливо следующее утверждение: всякий полином $P_n(x)$, удовлетворяющий некоторой задаче (A), удовлетворяет также задаче, в которой условия (A) заменены условиями В. Маркова, т. е. $P_n(x)$ одновременно является и полиномом, наименее отклоняющимся от нуля на [0, 1] среди множества всех полиномов, коэффициенты которых удовлетворяют некоторой одной линейной неоднородной зависимости. Но задача В. Маркова с условием $\sum_0^n p_i\mu_i = M\ (\neq 0)$ эквивалентна задаче (F) о нахождении полинома, на котором конечный функционал F, определённый отрезком чисел $(\mu_i)_0^n$, достигает своей нормы N (экстремальный полином); а именно, если $P_n(x)$ — полином задачи Маркова с отклонением L, то $Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{L}$ и есть экстремальный полином функционала F, т. е. $F(Q) = +N$. (Для экстремального полинома функционала всегда имеет место $\max\limits_{[0,1]} |Q_n| = 1$.) Выгода от замены задач вида (A) задачами вида (F) весьма значительна. Изучение задачи (F) естественно приводит к упорядочиванию всего множества $\{Q_n(x)\}$ экстремальных полиномов $\left(S > \frac{n}{2}+1\right)$ с помощью их паспортизации. Множество $\{Q_n(x)\}$ разбивается при этом на семейства, зависящие: 1) от одного переменного параметра, 2) от двух и т. д.

Если положить m — число таких переменных параметров в семействе, то имеет место равенство $S + m = n + 1$.

Простейшее, однопараметровое семейство таких полиномов распадается на полиномы паспорта $[n, n, 0]$ и на полиномы паспорта $[n, n, 1(k)]$; последние делятся ещё на $n-1$ разрядов, так как $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Предложенный автором метод изучения экстремальных полиномов с помощью самих функционалов даёт возможность не только качественно изучить однопараметровые полиномы и заранее установить, какие именно задачи вида (A) разрешает каждый такой полином, но и найти аналитическое выражение этих полиномов с помощью системы дифференциальных уравнений.

Обозначим всё семейство однопараметровых экстремальных полиномов через $Q_n(x, \vartheta)$. За переменный параметр удобнее всего взять старший коэффициент полинома, который изменяется монотонно для каждого упомянутого паспорта и разряда. Таким образом, $Q_n(x, \vartheta) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(\vartheta)x^k + \vartheta x^n$. Пусть $\{\sigma_i(\vartheta)\}_{i=1}^n$ суть все точки на [0, 1], в которых $Q_n(\sigma_i, \vartheta) = \pm 1$; положим $R_n(x, \vartheta) = \prod_1^n (x - \sigma_i)$. Тогда для всех $Q_n(x, \vartheta)$ имеет место следующая основная формула:

$$\frac{\partial Q_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} = R_n(x, \vartheta). \tag{1}$$

Если в число узлов $(\sigma_i)_1^n$ входит только одна из точек, 0 или 1, то полиномы Q_n всегда принадлежат паспорту $[n, n, 0]$ и являются следующими: $\pm T_n(\alpha x)$ или $\pm T_n[\alpha(1-x)]$, где $T_n(x) = \cos n \arccos(2x-1)$ и $\cos^2\frac{\pi}{2n} < \alpha < 1$.

Эти случаи, как известные, мы исключим из рассмотрения. Все остальные однопараметровые полиномы $\{Q_n(x, \vartheta)\}$ имеют в числе точек (σ_i) оба конца интервала [0, 1]; точки $(\sigma_i)_2^{n-1}$ суть корни $\frac{\partial Q_n}{\partial x}$; обозначим через $\lambda = \lambda(\vartheta)$ корень этой производной, не вошедший в число (σ_i). Тогда имеется ещё (очевидная) зависимость

$$x(x-1)\frac{\partial Q_n(x, \vartheta)}{\partial x} = n\vartheta(x-\lambda)R_n(x, \vartheta). \tag{2}$$

(Заметим, что равенством (2) пользовался Е. И. Золотарёв; равенство (1) получено впервые в 1954 г. автором этой заметки.) Теперь имеем из (1) и (2) уравнение

$$n\vartheta\,(x-\lambda)\frac{\partial Q_n(x,\,\vartheta)}{\partial\vartheta}=x\,(x-1)\frac{\partial Q_n(x,\,\vartheta)}{\partial x}\,, \tag{3}$$

которое распадается, образуя систему $n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $n-1$ коэффициентов $y_i(\vartheta)$ полинома $Q_n(x,\vartheta)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1$; $y_0=(-1)^n$; $y_n=\vartheta)$.

$$\left.\begin{aligned}
y'_{n-1}&=\frac{n-1}{n\vartheta}\,y_{n-1}+\lambda-1,\\
y'_{n-2}&=\frac{n-2}{n\vartheta}\,y_{n-2}+\lambda y'_{n-1}-\frac{n-1}{n\vartheta}\,y_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y'_2&=\frac{2}{n\vartheta}\,y_2+\lambda y'_3-\frac{3}{n\vartheta}\,y_3,\\
y'_1&=\frac{1}{n\vartheta}\,y_1+\lambda y'_2-\frac{2}{n\vartheta}\,y_2.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $\lambda=\dfrac{y_1}{n\vartheta y'_1}$ — начальные условия для полиномов $[n,\,n,\,0]$: при $\vartheta=2^{2n-1}\cos^{2n}\dfrac{\pi}{2n}$ имеет место $y_i=t_i\cos^{2i}\dfrac{\pi}{2n}$, где $\sum\limits_{i=0}^{n}t_i\,x^i=T_n(x)$; $T'_n(x)=2^{2n-1}\,n\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x-\tau_i)$, $1<\lambda(\vartheta)<+\infty$. Для полиномов $[n,\,n,\,1\,(k)]$ при $\vartheta=2^{2n-1}$, $Q_n(x)=T_n(x)$, $\tau_{k-1}<\lambda<\tau_{k+1}$; $[T_n(\tau_i)=\pm 1]$.

Полиномы $Q_n(x,\vartheta)$, паспорта $[n,\,n,\,0]$, тождественны полиномам Е. И. Золотарёва; если обозначим последние через $Y_n(x,\sigma)$, а их отклонение на $[-1,\,+1]$ через L (σ — коэффициент при x^{n-1}), то $Q_n(x,\vartheta)=\dfrac{Y_n(2x-1)}{L}$, $\vartheta=\dfrac{2^n}{L}$.

Вопрос о приближённом интегрировании системы (4) может быть решён следующим образом. Задаваясь некоторым исходным значением $\lambda=\lambda_0(\vartheta)\neq 1$ (см. ниже), удовлетворяющим начальным условиям, подставим λ_0 в систему (4) и проинтегрируем получившиеся линейные уравнения (сверху вниз); пусть $y_i=y_{i_1}$; за следующее приближение для λ возьмём $\lambda_1=\dfrac{y_{1_1}}{n\vartheta y'_{1_1}}$ и т. д. Процесс является сходящимся и даёт в пределе искомые функции $y_i(\vartheta)$.

Отметим некоторые частные случаи, когда система (4) интегрируется в конечном виде.

Как легко убедиться, при $\lambda=1$ система имеет решения $y_k=t_k\left(\dfrac{\vartheta}{2^{n-1}}\right)^{\frac{k}{n}}$; тогда $Q_n(x,\vartheta)=T_n(\alpha x)$, где $\vartheta=\alpha^n\cdot 2^{2n-1}$, т. е. получается уже упомянутый отброшенный случай.

Если $n=3$, система приводится к одному уравнению второго порядка в точных производных, что даёт $y_1=\vartheta y_1'^2+\dfrac{C_1}{y'}$, и получаем:

$$y_1=p^2\vartheta+\frac{C_1}{p}\,,$$

$$\vartheta=\frac{C_2}{(p-1)^2}+\frac{C_1}{2p^2\,(p-1)^2}-\frac{C_1}{p\,(p-1)^2}\qquad (p=y'_1)\,;$$

Для паспорта $[3,\,3,\,0]$ имеем из начальных условий $C_1=4$; $C_2=0$, откуда для $Q_3(x,\vartheta)$ получим:

$$\vartheta=\frac{2\,(1-2p)}{p^2\,(1-p)^2}\,,\qquad y_2=-2\,\frac{1-3p^2}{p^2\,(1-p)^2}\,,\qquad y_1=2\,\frac{2-3p}{p\,(1-p)^2}\,.$$

Полиномы, паспорта $[3,\,3,\,1\,(k)]$ при $k=1,\,2$, находятся аналогичным образом.

В заключение в связи с найденными полиномами остановимся на задаче В. Маркова для $n=2$ и $n=3$. При $n=2$ все экстремальные полиномы исчерпываются следующими:

$$\pm T_2(x), \quad \pm T_2(\alpha x), \quad \pm T_2[\alpha(1-x)].$$

При $n=3$ обозначим полиномы, не совпадающие с чебышевскими трансформациями, для паспорта [3, 3, 0] через $Z_3(x, \vartheta)$, а для паспорта $[3, 3, 1(k)]_{k=1, 2}$ через $W_{3, k}(x, \vartheta)$. Тогда все экстремальные полиномы суть:

$$\pm T_3(x), \quad \pm T_3(\alpha x), \quad \pm T_3[\alpha(1-x)],$$
$$\pm Z_3(x, \vartheta), \quad \pm Z_3(1-x, \vartheta),$$
$$\pm W_{3,1}(x, \vartheta), \quad \pm W_{3,1}(1-x, \vartheta) = \pm W_{3,2}(x, \vartheta).$$

Таким образом, аналитический вид полиномов всех (конкретных) задач В. Маркова при $n=2$ и 3 заранее известен, и соответствующая задача (F) приводится к элементарному вопросу об отыскании максимума $F(Q)$ по параметру ϑ или α.

2. О. В. Гусева «Об априорных оценках решений эллиптических уравнений и систем».

1956 г. июль—август *т. XI, вып. 4(70)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 24 мая 1955 г.

В. П. Басов «Исследование поведения решений систем линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки типа иррегулярной».

В начале доклада на примере работ Хорна [1, 2] и Лява [3] приводится краткая характеристика исследований в направлении построения формальных и асимптотических рядов, удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами. Далее даётся обзор работ, выполненных главным образом на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений Ленинградского государственного университета имени А. А. Жданова и посвящённых представлению решений систем линейных дифференциальных уравнений в виде рядов, равномерно сходящихся на полубесконечном промежутке.

Обзор начинается с примера исследования уравнения 2-го порядка, приведённого в книге Пикара [4], затем излагается идея метода Н. П. Еругина, высказанного в работе [5], и, наконец, приводятся основные результаты работ, основанных на методе Н. П. Еругина. Рассмотрены работы В. В. Хорошилова [6, 7], Л. И. Донской [8], А. К. Гаханова [9] и автора [10—12]. После этого указаны основные результаты ещё не опубликованной работы автора.

В этой работе рассматривается система n линейных дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме:

$$\frac{dX}{dt}=(P^0+P)\,X. \tag{1}$$

Предполагается, что P^0 — постоянная матрица, P — матрица, представимая равномерно сходящимся при $t\geqslant t^*$ или асимптотическим рядом вида

$$P=\sum_{l_1+\ldots+l_k>0} t^{-(l_1\gamma_1+\ldots+l_k\gamma_k)}U^{(l_1,\ldots,l_k)},$$

где $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ — любые несоизмеримые между собой вещественные числа; $U^{(l_1,\ldots,l_k)}$ — матрицы, постоянные или периодические относительно t с одним и тем же периодом ω; k — целое число, не меньшее единицы.

При любой канонической структуре матрицы P^0 даётся способ построения фундаментальной системы решений уравнения (1) как в виде рядов, равномерно сходящихся на промежутке $(t_0,\infty)(t_0>0)$, так и в виде асимптотических рядов. При этом устанавливается связь между равномерно сходящимися и асимптотическими рядами.

В конце доклада изложены основные теоремы об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений, приведённые в книге И. М. Рапопорта [13] и в работе [14]. При этом обращено внимание на одно странное обстоятельство. Именно, в докладе показано, что метод, применённый И. М. Рапопортом, по существу является простым обобщением метода Н. П. Еругина, однако как в книге [13], так и в работе [14] И. М. Рапопорт никаких ссылок на работу Н. П. Еругина и на связанные с ней работы не делает и не проводит сравнения полученных результатов, хотя работы [5, 7, 8, 11] ему были известны. Во всяком случае они числятся в списке литературы, приведённом в конце цитированной книги. Больше того, в предисловии к книге [13] И. М. Рапопорт заявляет, что идея его метода в отдельных случаях применялась ранее О. Перроном [15] и Н. Левинсоном [16]. Из этого предисловия можно сделать вывод, что О. Перрон и Н. Левинсон предложили некий метод, И. М. Рапопорт этот метод развил, а больше никто ничего в этом направлении не делал. Дело в том, что работа О. Перрона [15] никакого отношения к вопросу о представлении решений в виде равномерно сходящихся рядов не имеет; что же касается работы Н. Левинсона [16], то он в ней получил лишь грубое асимптотическое представление решений. Если бы Н. Левинсон умел строить решения в виде равномерно сходящихся рядов, то И. М. Рапопорту ничего не осталось бы делать.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Horn, Ueber das Verhalten der Integral linearer Differenzen und Differentialgleichungen für grosse Werte der Veränderlichen, Gel. Jorn. **138**, (1910).

[2] J. Horn, Unbestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungen mit mehrfachen Wurzeln der characteristischen Gleichung, Math. Zeitschr. **44**, вып. 4 (1938).

[3] C. E. Love, On the asymptotic solutions of linear differential equations, Amer. Journ. Math. **36**, № 2 (1914).

[4] Picard, Traité d'analyse, т. III.

[5] Н. П. Еругин, Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. Стеклова XIII (1946).

[6] В. В. Хорошилов, О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой, Учён. зап. ЛГУ, серия матем. наук, вып. 19 (1950).

[7] В. В. Хорошилов, О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой, ПММ **15**, вып. 1 (1951).

[8] Л. И. Донская, О структуре решений системы трёх линейных дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярной особой точки $t=\infty$, ДАН **80**, № 3 (1951).

[9] А. К. Гахапов, Исследование условий приводимости некоторых систем дифференциальных уравнений, автореферат диссертации, Лен. гос. университет имени А. А. Жданова, 1950.

[10] В. П. Басов, Исследование устойчивости движения для некоторого класса нединамических систем, автореферат диссертации, Лен. гос. университет имени А. А. Жданова, 1949.

[11] В. П. Басов, О решениях одного класса систем линейных дифференциальных уравнений, ДАН **80**, № 3 (1951).

[12] В. П. Басов, Построение решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений, ПММ **18**, вып. 3 (1954).

[13] И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Киев, Изд. АН УССР, 1954.

[14] И. М. Рапопорт, Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, ДАН **78**, № 6 (1951).

[15] O. Perron, Ueber lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reel ist, Journ. reine und angew. Math. **142**, **143** (1913).

[16] N. Levinson, The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations, Duke Math. Journ. **15** (1948).

Заседание 13 сентября 1955 г.

1. Е. В. Вороновская «О полиномах Н. И. Ахиезера».

2. Г. С. Цейтин «Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности».

Заседание 27 сентября 1955 г.

А. А. Иванов «Комбинаторная топология».

Заседание 11 октября 1955 г.

1. И. П. Натансон «Добавление к теоремам Хаусдорфа о моментных последовательностях».

2. И. П. Натансон «Некоторые вопросы теории приближения функций собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля».

В докладе при помощи аналогии, устанавливаемой известными асимптотическими формулами между тригонометрическими функциями и функциями Штурма—Лиувилля, в теорию приближения функций функциями Штурма — Лиувилля переносятся:

а) Теорема Д. Джексона о скорости приближения непрерывных функций.

б) Теорема Д. Джексона о скорости приближения функций, имеющих непрерывную первую производную.

в) Теоремы С. М. Лозинского, обратные а) и б).

г) Теорема А. Зигмунда о скорости приближения гладких функций.

Заседание 25 октября 1955 г.

Р. В. Петропавловская «О колебательности решений дифференциального уравнения».

1. Имеется много различных критериев, гарантирующих колебательность или неколебательность решений линейного дифференциального уравнения

$$u'' + up(t) = 0 \qquad (a \leqslant t < \infty). \tag{1}$$

Большинство из этих критериев не пригодно в случае знакопеременной функции $p(t)$.

2. Автором получены [1] критерии колебательности и неколебательности решений уравнения (1) для знакопеременной функции $p(t)$.

3. Вопрос о колебательности решений нелинейного дифференциального уравнения

$$u'' = f(u, u', t) \tag{2}$$

мало изучен.

4. Получена теорема, которая при некоторых ограничениях, наложенных на функции f и g, позволяет сравнивать абсолютные величины решений уравнений (2) и (3):

$$v'' = g(v, v', t). \tag{3}$$

5. Полученная теорема сравнения позволяет в некоторых случаях делать заключения об интервале существования и нулях решений уравнения (2), а также устанавливать наличие неограниченных решений уравнения (2).

6. В частности, пользуясь теоремой сравнения, можно с помощью любого критерия колебательности линейного дифференциального уравнения (1) получить некоторый критерий колебательности решений нелинейного дифференциального уравнения (2).

7. Однако не всякое нелинейное дифференциальное уравнение вида (2) поддаётся сравнению, основанному на применении теоремы сравнения, с линейным дифференциальным уравнением (1). Например, такому сравнению не поддаётся дифференциальное уравнение типа Эмдена — Фаулера:

$$u'' + u^n t^\alpha = 0, \tag{4}$$

где $n > 1$, $n = \frac{p}{q}$, p, q — нечётные числа и $\alpha \geqslant -2$.

8. Получен критерий, гарантирующий наличие бесконечного числа нулей у каждого решения дифференциального уравнения более общего вида, чем уравнение (4).

9. Область применимости этого критерия может быть расширена с помощью теоремы сравнения.

Заседание 22 ноября 1955 г.

1. Л. Н. Слободецкий «К теории многомерных марковских процессов».

2. А. П. Плехотин «К оценке погрешности приближённого решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 13 декабря 1955 г.

1. В. А. Статулявичус «Предельные теоремы теории цепей Маркова».

2. А. С. Соколин «О некоторых классах методов суммирования расходящихся рядов».

Заседание 27 декабря 1955 г.

1. А. И. Виноградов «Новые результаты по „решету“ Эратосфена».

В переписке Эйлера с Гольдбахом возникли две задачи: тернарная, которая была решена академиком И. М. Виноградовым в 1937 г., и бинарная, которая до сих пор не решена даже условно.

В. Брун в 1920 г. предложил метод «решета» для решения «почти» бинарных задач такого типа: уравнение $2N_1 = Q_1 + Q_2$ разрешимо, если Q_1 и Q_2 имеют не более девяти простых делителей каждый, считая и кратность. Многие математики в последующие годы занимались улучшением этого результата, снижая число простых множителей в Q_1 и Q_2. А. А. Бухштабом к последнему времени это число было сведено к 4.

Мне удалось недавно, соединив некоторые новые идеи А. Сельберга с теорией $\zeta(s)$ Римана, довести число простых множителей до 3.

Первая основная идея работы принадлежит А. Сельбергу и заключается в следующем.

Пусть нам дана некоторая возрастающая последовательность целых чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N \qquad (1)$$

и даны все простые $\leqslant z$. Требуется оценить снизу количество чисел в (1), которые состоят только из простых $> z$. Обозначим эту функцию через $N(z)$.

В таком случае

$$N(z) = \sum_{d} \sum_{d/a_n} \mu(d), \qquad (2)$$

где d пробегает делители произведения $2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p_n$, $p_n \leqslant z$. Заменим в (2) сумму $\sum\limits_{d/a_n} \mu(d)$ некоторой другой суммой $\sum\limits_{d/a_n} \rho_d$ с условием, что всегда выполняется неравенство

$$\sum_{d/a_n} \mu(d) \geqslant \sum_{d/a_n} \rho_d. \qquad (3)$$

Если мы положим

$$\rho_1 = 1,$$

$$\rho_d = -\sum_{d = \frac{d_1 d_2}{h} p/h} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \quad (d > 1),$$

где $k=(d_1, d_2)$, p — максимально простой делитель d, то получим:

$$\sum_{d/a_n} \rho_d = 1-\{\lambda_{p_1}\}^2-\{\lambda_{p_2}+\lambda_{p_1p_2}\}^2-\ldots-\{\lambda_{p_k}+\ldots+\lambda_{p_1p_2\ldots p_k}\}^2,$$

где $d_n=p_1p_2\ldots p_ka'_n$. Положив для всех $p\leqslant z$,

$$\lambda_p=1,$$

получаем [выполнение условия (3), причём λ_d, если $d\neq p$, остаются произвольными вещественными числами; таким образом,

$$N(z)\geqslant \sum_d \sum_{d/a_n} \rho_d. \tag{4}$$

Решая задачу на максимум правой части (4), получим:

$$N(z)\geqslant N\left(1-\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{f(p)}\frac{1}{\sum\limits_{\nu_p\leqslant z^\theta}\frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}}\right)+o\left(z^{2\theta+1}\right), \tag{5}$$

где $f(n)$ — функция плотности последовательности (1), и, полагая $a_n=n(N-n)$, получаем:

$$f(p)=\begin{cases}\dfrac{p}{2}, & \text{если } p\nmid N,\\ p, & \text{если } p/N;\end{cases}$$

$$f_1(n)=f(n)\prod_{p/n}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right).$$

Вторая основная идея состоит в вычислении правой части (5) с помощью $\zeta(s)$ Римана.

С помощью интеграла $\int\limits_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^s}{s}\,ds$ сумму $\sum\limits_{\nu_p\leqslant z}\frac{\mu^2(\nu_p)}{f_1(\nu_p)}$ можно выразить через произведение $\prod\left(1+\frac{1}{f_1(p)}\right)$ с некоторым остатком. Этот остаток оценивается с помощью равенства

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=e^{\gamma(s,x)}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\left(1+o\left(e^{-\sqrt[4]{\ln x}}\right)\right)$$

при некоторых ограничениях на область изменения s. После вычислений находим, что $N(z)>c_0\frac{N}{\ln^2 N}$, если $\theta=1{,}1$, $z=N^{\frac{1}{3,2}-\varepsilon}$. Отсюда улучшение результата А. А. Бухштаба.

2. А. И. Китов (Москва) «Кибернетика».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(Математическая секция Ленинградского дома учёных)

Заседание 14 февраля 1956 г.

1. С. М. Лозинский «О сильной сходимости рядов Фурье в пространствах Орлича».
2. В. Н. Судаков «О компактности в L^p».

В докладе рассматривается вопрос о независимости условий некоторых критериев компактности в пространствах L^p и Орлича.

Относящиеся сюда теоремы (А. Н. Колмогоров [1], J. D. Tamarkin [2], А. Н. Тулайков [3], T. Takahashi [4], И. П. Натансон [5], М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий [6]) формулируются обычно в виде совокупности условий, одним из которых является требование ограниченности рассматриваемого подмножества. Независимость этого условия от остальных ошибочно, как это заметил И. П. Натансон, доказывалась в работе [2]. В действительности же в ряде случаев условие ограниченности является следствием других и может быть опущено.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. H. Kolmogorov, Ueber Kompaktheit der Funktionmengen bei der Konwergenz im Mittel, Göttinger Nachrichten (1931), 60—63.
[2] J. D. Tamarkin, On the compactness of the cpace L^p, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 79—84.
[3] A. Tulaikov, Zur Kompaktheit im Raum L^p für $p=1$, Göttinger Nachrichten (1933), 167—170.
[4] T. Takahashi, On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type, Studia Math. 5 (1934), 141—150.
[5] И. П. Натансон, Некоторые нелокальные теоремы о сингулярных интегралах, ДАН 19, № 5 (1938), 357—360.
[6] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, ДАН 85, № 1 (1952), 33.

Заседание 28 февраля 1956 г.

1. О. А. Ладыженская «О принципе предельной амплитуды».
2. М. И. Клиот-Дашинский «Операторный метод решения первой краевой задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго и четвёртого порядков с постоянными коэффициентами».

Пусть

$$A_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + A_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + A_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + A_4 \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + A_5 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q(x, y) \tag{1}$$

— дифференциальное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения при граничных условиях

$$W(x, y)|_l = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial n} W(x, y)|_l = 0$$

ищется в односвязной конечной области S, ограниченной кусочно-гладким контуром l.

Пусть μ_1, μ_2, μ_1^*, μ_2^* — корни характеристического уравнения $A_1 + A_2\mu + A_3\mu^2 + A_4\mu^3 + A_5\mu^4 = 0$. Введя дифференциальные операторы

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_2^* \frac{\partial}{\partial x}\right); \quad M = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

и операторы L^*, M^*, комплексно сопряжённые с ними, можно представить дифференциальное уравнение (1) в одной из следующих форм:

$$A_5 LL^* W(x, y) = q(x, y); \quad A_5 MM^* W(x, y) = q(x, y).$$

Пусть $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$, а $g(x, y)$ и $h(x, y)$ — произвольные решения уравнений

$$A_5 Lg(x, y) = q(x, y); \quad A_5 Mh(x, y) = q(x, y).$$

Доказывается, что функции $L^*W(x, y)$ и $M^*W(x, y)$ могут быть найдены как пределы последовательностей $L^*W_{2n+1}(x, y)$, $M^+W_{2n+1}(x, y)$, где $L^*W_{2n+1}(x, y)$ и $M^*W_{2n+1}(x, y)$ определяются из условия минимума интегралов:

$$\iint_S |L^*W_{2n+1}(x, y)|^2 dxdy; \quad \iint_S |M^*W_{2n+1}(x, y)|^2 dxdy,$$

если в качестве допустимых брать функции вида

$$L^*W_{2n+1}(x, y) = g(x, y) - \sum_{k=0}^{n} \left(a_k^{(1)} Z_1^k + a_k^{(2)} Z_2^{*k}\right), \tag{2}$$

$$M^*W_{2n+1}(x, y) = h(x, y) - \sum_{k=0}^{n} \left(b_k^{(1)} Z_1^k + b_k^{(2)} Z_2^k\right. \tag{3}$$

Отделив в равенстве (2) вещественную часть, а в равенстве (3) — вещественную и мнимую, получим систему трёх уравнений для определения вторых производных

$$\frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial y^2}.$$

Первые производные $\frac{\partial W_{2n+1}}{\partial x}$, $\frac{\partial W_{2n+1}}{\partial y}$, а также функция W_{2n+1}, могут быть найдены с помощью криволинейных интегралов

$$\frac{\partial W_{2n+1}}{\partial x} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x^2} \partial x + \frac{\partial^2 W_{2n+1}}{\partial x \partial y} \partial y \text{ и т. д.}$$

Так как подинтегральные функции являются полиномами от x и y, криволинейные интегралы вычисляются элементарно.

Особенно прост операторный метод в применении к уравнениям второго порядка, в частности, для уравнения Пуассона $\Delta U(x, y) = q(x, y)$.

Рассматриваемый операторный метод непосредственно связан с методом ортогональных проекций, изложенным в статьях [1], [2], [3].

Преимущество операторного метода перед методом Ритца состоит в следующем. В операторном методе с помощью данного числа параметров аппроксимируются производные от решения, тогда как в методе Ритца—само решение. Кроме того, в отличие от метода Ритца в операторном методе используется аналитический аппарат. Всё это даёт основание считать, что сходимость операторного метода должна быть более быстрой, чем сходимость метода Ритца. Рассмотренный пример ($\Delta U(x, y) = -2\,U(x, y)\,|_l = 0$, S—квадрат со стороной, равной двум единицам) подтверждает это предположение. Погрешность первого приближения при решении задачи операторным методом оказалась в несколько раз меньше, чем погрешность во втором приближении при решении задачи методом Ритца.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Е. Рафальсон, К вопросу о решении бигармонического уравнения, ДАН 64, № 6 (1949).

[2] М. И. Клиот-Дашинский, Решение задачи о статической деформации анизотропной однородной пластины методом ортогональных проекций, Уч. зап. ЛГУ, № 146 (1952).

[3] М. И. Клиот-Дашинский, Об одном способе решения плоской задачи теории потенциала, Сб. научн. трудов Ленингр. инженерно-строительного ин-та, вып. 17 (1954).

Заседание 6 марта 1956 г.

1. В. И. Смирнов «Памяти И. А. Лаппо-Данилевского».
2. Р. Сикорский (Польша) «Определители в пространстве Банаха».

Заседание 27 марта 1956 г.

1. Ю. В. Линник «Об одной теореме из аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений».
2. В. А. Якубович «Условия устойчивости для канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами».

Заседание 10 апреля 1956 г.

Н. К. Бари (Москва) «Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций».

Доклад был посвящён изложению совместной работы докладчика и С. Б. Стечкина. Краткое содержание доклада опубликовано в УМН XI, вып. 2 (заседание Московского математического общества 15 ноября 1955 г.). Полностью доклад опубликован в трудах Моск. матем. о-ва, 5 (1956).

Заседание 24 апреля 1956 г.

1. О. А. Ладыженская «Решение первой краевой задачи в целом для нелинейных параболических уравнений».
2. Г. Ю. Джанелидзе «Магнитная гидродинамика».

Заседание 8 мая 1956 г.

С. М. Лозинский «О численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 22 мая 1956 г.

В. И. Зубов «Некоторые задачи об устойчивости движения».

1. Для системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_s}\left(\sum_{\sum_{i=1}^{h} m_i+\sum_{p=1}^{n} l_p}^{+\infty} p_s^{(m_1,\ldots,m_k,l_1,\ldots,l_n)}(t)\, z_1^{m_1}\ldots z_h^{m_h} x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}\right)=$$

$$=\sum_{\sum_{i=1}^{k} m_i+\sum_{p=1}^{n} l_p=1}^{+\infty} Q_j^{(m_1,\ldots,m_k,l_1,\ldots,l_n)}(t)\, z_1^{m_1}\ldots z_h^{m_h} x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}\ \ (j=1,\ldots,k)$$

приводятся условия существования семейства голоморфных решений, обладающих свойством

$$z_j(x_1,\ldots,x_n,t)\equiv 0\ \ (j=1,\ldots,k)\ \text{при}\ x_1=\cdots=x=0.$$

Полученные результаты применяются к системам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$z\frac{dy_s}{dz}=\sum_{m+\sum_{i=1}^{n} m_i=1}^{+\infty} R_s^{(m,m_1,\ldots,m_n)}(z)\, z^m y_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n}\ \ (s=1,\ldots,n).$$

Полученные здесь результаты являются более общими по сравнению с теми, которые принадлежат Брио и Буке, А. Пуанкаре, Пикару и Хорпу.

2. Исследуется окрестность положения равновесия системы

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(x_1,\ldots,x_n)\ \ (s=1,\ldots,n), \tag{1}$$

где $f(0,\ldots,0)=0$.

Например, получен следующий результат.

Теорема 1. *При выполнении условий существования и единственности решений для системы* (1) *в* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant h$ *для того, чтобы нулевое решение* $x_1=\ldots=x_n=0$ *было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы точка* $x_1=\ldots=x_n=0$ *не была α-предельной ни для какой траектории системы* (1), *отличной от* $x_1=\ldots=x_n=0$. *При этом для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовала достаточно малая окрестность точки* $x_1=\ldots=x_n=0$, *не содержащая целых траекторий системы* (1).

3. Для системы

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{m=\mu}^{+\infty} X_s^{(m)}(x_1,\ldots,x_n,t)$$

$$(s=1,\ldots,n),$$

где

$$X_s^{(m)}=\sum_{m_1+\ldots+m_n=m} A_s^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)\, x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}\ (s=1,\ldots,n),$$

причем $A_s^{(m_1,\ldots,m_n)}$ являются постоянными при $\sum_{i=1}^{n} m_i=\mu$, выведены условия, при которых существуют семейства O-кривых, и дано аналитическое представление этих семейств.

На основе этого получен ряд критериев асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Эта система исследуется также с помощью функции Ляпунова.

Основой этого исследования является

Теорема 2. *Для того чтобы нулевое решение системы*

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{2}$$

было асимптотически устойчивым по Ляпунову и любое решение $X(t, X_0, t_0)$, где $X_0^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^{02}\leqslant\delta^2$, $t_0\geqslant T$, *удовлетворяло неравенству*

$$m_1V_1(X_0)\varkappa(t, t_0, c, l)\leqslant V_1[X(t, X_0, t_0)]\leqslant n_1V_1(X_0)\varkappa(t, t_0, c_2, l),$$

где $c_1=m_2[\varphi(t_0)V_1(X_0)]^{l-1}$, $c_2=n_2[\varphi(t_0)V_1(X_0)]^{l-1}$ $l>1$, m_1, m_2, n_1, n_2 — *некоторые положительные постоянные, необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции* $V(X, t)$ *и* $W(X, t)$ *такие, что*

1) $V(X, t)$ *и* $W(X, t)$ *заданы и непрерывны в области* $X^2\leqslant\delta^2$, $t>T$, $\delta\leqslant\delta_1<r$, $r>0$ — *постоянная*;

2) $a_1\varphi(t)V_1(X)\leqslant V(X, t)\leqslant a_2\varphi(t)V_1(X)$, $-b_1\psi(t)V_1^l(X)\leqslant W(X, t)\leqslant -b_2\psi(t)V_1^l(X)$, *где* a_1, a_2, b_1, b_2 — *положительные постоянные*;

3) $\dfrac{dV(X, t)}{dt}=W$ *в силу системы* (2). *Непрерывные, положительные функции* $\varphi(t)$ $\psi(t)$ *таковы, что величина*

$$\varkappa(t, t_0, c, l)=\varphi(t_0)\varphi^{-1}(t)\sqrt[1-l]{1+c\int_{t_0}^{t}\psi(t)\varphi^{-l}(t)\,dt},$$

где $c>0$, $l>1$, *обладает свойствами:*

1) $\varkappa\to 0$ *при* $t\to+\infty$;

2) $\varkappa(t, t_0, c, l)$ *равномерно ограничена относительно* c *при* $T\leqslant t_0\leqslant t$;

3) *величина* $\vartheta=\int_{t_0}^{t}\psi(t)\varphi^{l}(t)\,dt\to+\infty$ *при* $t\to+\infty$.

4. Рассматривается система

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s=1, \ldots, k), \tag{3}$$

$$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_{ji}y_i+\sum_{i=1}^{k} a_{ji}x_i+Y_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n), \quad (j=1, \ldots, n),$$

где X_s, Y_j голоморфны и в своих разложениях не содержат линейных членов.

Теорема 3. *Если* $X_s\equiv 0$ $(s=1, \ldots, n)$ *в силу системы* $\dfrac{dy_j}{dt}=0$ $(j=1, \ldots, n)$, *то система* (3) *имеет* k *голоморфных интегралов, и в этом случае нулевое решение системы* (3) *устойчиво.*

Общий случай сводится к пункту 3.

Рассматривается также система с несколькими парами чисто мнимых корней, для которой выведены условия существования семейства ограниченных решений (особый случай). При этих условиях нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову. При отсутствии семейства ограниченных решений определенного вида (общий случай) вопрос сводится к пункту 3.

Здесь, как и в системе (3), предполагается, что остальные собственные числа матрицы коэффициентов линейного приближения имеют отрицательные действительные части.

Заседание 5 июня 1956 г.

О. А. Ладыженская «О получении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении „коэффициента вязкости к нулю»".

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА

(математическая секция Ленинградского дома ученых)

Заседание 9 октября 1956 г.

1. О. А. Ладыженская «О малом параметре в линейных и нелинейных уравнениях в частных производных».

2. Ю. Г. Решетняк «О вариационных задачах в параметрической форме».

Заседание 23 октября 1956 г.

С. М. Лозинский «Строгая оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 13 ноября 1956 г.

1. В. А. Якубович «О критических частицах при параметрическом возбуждении колебаний».

2. В. А. Плисс «Проблемы качественной теории систем типа Айзермана».

Заседание 27 ноября 1956 г.

Е. А. Ибрагимов «Теория информации».

Заседание 11 декабря 1956 г.

1. Е. В. Вороновская «О наилучшем приближении полиномов высоких степеней полиномами низких степеней».

2. Г. Ш. Рубинштейн «Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником».

Заседание 27 декабря 1956 г.

Л. В. Канторович «О проведении численных и аналитических вычислений на цифровых машинах».

Заседание 12 февраля 1957 г.

1. А. В. Малышев «О представлении целых чисел суммой четырех квадратов».

Содержание доклада публикуется в виде заметки в ДАН СССР под заглавием «О распределении целых точек на четырехмерной сфере».

2. В. И. Зубов «Об устойчивости инвариантных множеств в метрических пространствах».

Заседание 12 марта 1957 г.

1. Ю. В. Линник «Некоторые новые теоремы метода наименьших квадратов с приложениями к теории локации и определения места».

В схеме уравнения по элементам имеем: $Y=X^{(0)}+XA$; $A=A_{n1}=\left\|\begin{matrix}a_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_n\end{matrix}\right\|$ — матрица неизвестных элементов; $X=X_{N_n}=\|x_{rj}\|$ — матрица известных абсцисс; $X^{(0)}=X^{(0)}_{N_1}$ — заданная матрица. Наблюдается матрица $L=L_{N_1}=Y+\Delta$; $\Delta=\Delta_{N_1}=\left\|\begin{matrix}\Delta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Delta_N\end{matrix}\right\|$ — случайный вектор погрешности (нормальных, независимых, неравноточных):

$$E(\Delta)=0;\quad B_\Delta=E(\Delta\Delta^T)=\sigma^2P^{-1},$$

где P — известная матрица весов, σ — неизвестный параметр точности. Пусть $\widetilde{A}$ — матрица оценок A по методу наименьших квадратов; $\widetilde{V}=X^{(0)}+X\widetilde{A}-L$ — матрица кажущихся поправок; $[p\widetilde{v}\widetilde{v}]=\widetilde{V}^TP\widetilde{V}$. Пусть желательно оценить m линейных функций, выражаемых матрицей $H=H_m=G\cdot A$, где $G=G_{m_n}=\|g_{rj}\|$ — известная матрица; $m\leqslant n$ — ранг $(G)=m$. Для нее можно построить доверительную область.

Теорема. *Пусть* $\widetilde{H}=G\widetilde{A}$; $K=K_{mm}=GC^{-1}G^T$, *где* $C=X^TPX$; $Z=\left\|\begin{matrix}Z_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ Z_m\end{matrix}\right\|$ — *вектор текущих координат* $Z_1, \ldots, Z_m$. *Матрица* K — *неособенная и доверительный эллипсоид* $\mathcal{E}_{\gamma_0}$:

$$(Z-\widetilde{H})^TK^{-1}(Z-\widetilde{H})=\gamma_0\,[p\widetilde{v}\widetilde{v}],$$

накрывает точку $Z=H$ *с вероятностью* γ_0, *причем* $F_{m,N-n}(\gamma_0)=p_0$, *где*

$$F_{m,N-n}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_0^x\frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(1+u)^{\frac{N-n+m}{2}}}\,du$$

(*распределение Фишера с* m *и* $N-n$ *степенями свободы*).

При $m=1$ отсюда получаются описанные в литературе доверительные интервалы для элементов порознь, при $m=n=2$ — случай, например, обработки прямых и обратных засечек на плоскости, имеет место простая формула:

$$\gamma_0=\left(\frac{1}{1-p_0}\right)^{\frac{2}{N-2}}-1.$$

2. Е. В. Вороновская «Оценка тригонометрических полиномов методов функционалов».

Заседание 26 марта 1957 г.

1. В. И. Крылов «По поводу теоремы Бернштейна и квадратурной формулы Чебышева».

2. Т. А. Розет «О методе „склеивания“ в теории волноводов».

Пусть в плоскости $x=0$ расположена конечная область S с границей Γ, а внутри S — область S_1 с границей Γ_1, которую, как и Γ, предполагаем кусочно-гладкой.

Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность собственных значений и $\{\varphi_n(M)\}$ — последовательность соответствующих нормированных собственных функций «мембранной» задачи для области S_1, т. е. задачи

$$\Delta u+\lambda u=0,\quad u|_{\Gamma_1}=0\quad (u=u(M),\ M\in S_1). \tag{1}$$

Аналогично $\{\mu_n\}$ и $\{\psi_n(M)\}$ — последовательности собственных значений и нормированных собственных функций такой же задачи для области S.

Рассмотрим полубесконечные цилиндры: $\Omega_1=S_1\times(-\infty,0)$ с боковой поверхностью σ_1 и $\Omega=S\times(0,\infty)$ с боковой поверхностью σ (последующее изложение охватывает и случай двумерных областей, когда Ω_1 и Ω — полубесконечные полосы, заключенные между прямыми, параллельными оси x; в этом случае $\varphi_n(M)$ и $\psi_n(M)$ — соответствующие собственные функции одномерных краевых задач).

Будем решать задачу о разыскании функции $u(M;x)$, удовлетворяющей:

а) внутри области $\Omega+\Omega_1$ уравнению

$$\Delta u+k^2u=0, \tag{2}$$

где $k>0$ — фиксированное, причем $\lambda_n<k^2$ при $n\leqslant N_1$ и $\lambda_n>k^2$ при $n>N_1$; $\mu_n<k^2$ при $n\leqslant N$ и $\mu_n>k^2$ при $n>N$; N_1 и N — целые $\geqslant 1$;

б) граничным условиям

$$u|_{\sigma_1}=0,\quad u|_{\sigma}=0; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{S-S_1}=0\quad (\text{при } x=+0); \tag{4}$$

в) условиям на бесконечности

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{dv_1}{dx}-\sqrt{\lambda_1-k^2}\,v_1\right)e^{\sqrt{\lambda_1-k^2}\,x}\right]=-2\gamma\sqrt{\lambda_1-k^2}\quad (\gamma=\mathrm{const}), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{dv_n}{dx}-\sqrt{\lambda_n-k^2}\,v_n\right)=0\quad (n=2,3,\ldots), \tag{6}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{dw_n}{dx}+\sqrt{\mu_n-k^2}\,w_n\right)=0\quad (n=1,2,\ldots), \tag{7}$$

где

$$v_n(x)=\int_{S_1}u(M,x)\,\varphi_n(M)\,dS_M,\quad w_n(x)=\int_{S}u(M,x)\,\psi_n(M)\,dS_M;$$

г) условиям «склеивания» в области S_1 (при $x=0$), т. е. требованию, чтобы при приближении к этому сечению стремились к одинаковым пределам, во-первых, значения $u(M,x)$, взятые с обеих сторон от него, во-вторых, значения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Считая $\varphi_n(M)$ продолженными в $S-S_1$ с нулевыми значениями, рассмотрим множество E тех элементов комплексного функционального пространства $L_2(S)$, для которых сходятся ряды $\sum_1^\infty \lambda_n|(f,\varphi_n)|^2$, $\sum_1^\infty \mu_n|(f,\psi_n)|^2$; на этом множестве[1]), плотном в L_2, определены операторы

$$Af=\sum_1^\infty p_na_n\varphi_n,\quad \text{где}\quad p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},\quad a_n=(f,\varphi_n), \tag{8}$$

$$Bf=\sum_1^\infty q_nb_n\psi_n,\quad \text{где}\quad q_n=\sqrt{\mu_n-k^2},\quad b_n=(f,\psi_n), \tag{9}$$

с областью значений в $L_2(S)$.

---

[1]) Если S и $S_1\subset S$ — отрезки, то к этому множеству принадлежат все функции непрерывные на S и обращающиеся в нуль на концах S_1.

Пусть $f(M) \in E$ есть решение функционального уравнения

$$(A+B)f = 2\gamma p_1 \varphi_1, \tag{10}$$

причем

$$Bf = 0 \tag{11}$$

при $M \in S - S_1$. Тогда функция

$$u(M;\ x) = \begin{cases} \sum\limits_{1}^{\infty} a_n e^{p_n x} \varphi_n(M) - 2\gamma \operatorname{sh} p_1 x \cdot \varphi_1(M), & x < 0,\ M \in S_1, \\ \sum\limits_{1}^{\infty} b_n e^{-q_n x} \psi_n(M), & x > 0,\ M \in S \end{cases} \tag{12}$$

служит решением задачи а) — г); при этом условии «склеивания» выполнены в таком смысле:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u(M;\ x_2) - u(M;\ x_1) \|_{S_1} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \| u'_x(M;\ x_2) - u'_x(M;\ x_1) \|_{S_1} = 0, \tag{13}$$

где $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_2 - x_1 = \varepsilon$. Условие (4) выполняется также в смысле сходимости в среднем.

Оператор $A + B$ — неограниченный, он обладает таким свойством:

(A) если $\{f_k\}$ — последовательность элементов из E, для которой $(Af_k + Bf_k, f_k) \to 0$, то и $f_k \to 0$.

В частности, из $(AB + Bf, f) = 0$ следует $f = 0$. Отсюда уравнение $(A+B)f = 0$ имеет единственное решение $f = 0$. Основываясь на этом, можно доказать и единственность решения задачи а) — г), при условиях «склеивания» (13). С этой целью берем функции источника в виде (ср. [1])

$$G_1(M,\ x;\ Q,\ \xi) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_n(M)\varphi_n(Q)}{p_n} [e^{-p_n|x-\xi|} + e^{p_n(x+\xi)}], \qquad M,\ Q \in S_1,\ x,\ \xi < 0,$$

$$G(M;\ x;\ Q,\ \xi) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(Q)}{q_n} [e^{-q_n|x-\xi|} + e^{-q_n(x+\xi)}], \qquad M,\ Q \in S,\ x,\ \xi > 0$$

и применяем формулу Грина к каждому из двух объемов, ограниченных боковыми поверхностями цилиндров и плоскостями $\xi = 0$, $\xi = \xi_0$, с последующим переходом к пределу, соответственно, при $\xi_0 \to -\infty$ и $\xi_0 \to +\infty$.

Введя некоторые ограничения, докажем существование решения задачи а) — г) при условиях «слабого склеивания», а именно второе условие (13) заменим требованием, чтобы для любой функции $g(M) \in E$, равной нулю в $S - S_1$, выполнялось соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (u'_x(M;\ x_2) - u'_x(M;\ x_1),\ g(M)) = 0; \tag{14}$$

аналогично изменим и условие (4).

Теорема. *Пусть собственные функции φ_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ принадлежат области определения оператора B и в подпространстве $L_2(S - S_1)$ существует базис $\{\chi_k\}$, все элементы которого (продолженные в S_1 с нулевыми значениями) принадлежат той же области*[1]; *тогда бесконечная система*

$$(f,\ (A^* + B^*)\varphi_1) = 2\gamma p_1, \quad (f,\ (A^* + B^*)\varphi_n) = 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots), \tag{15}$$

$$(f,\ B^*\chi_k) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{16}$$

имеет решение $f \in L_2(S)$

---

[1]) Указанные условия выполняются, например, если S и $S_1 \subset S$ — отрезки с общим концом, или прямоугольники с общим основанием, концентрические круги и т. п.

Для доказательства заметим, что $A^*\chi_k=0$ $(k=1, 2 \ldots)$ и перепишем уравнения (16) так:

$$(f, (A^*+A^*)\chi_k)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Теперь задача сводится к отысканию элемента $f \in L_2(S)$, имеющего заданную проекцию на $(A^*+B^*)\varphi_1$ и ортогонального замкнутой линейной оболочке множества, состоящего из элементов $(A^*+B^*)\varphi_m$ $(m=2, 3, \ldots)$, $(A^*+B^*)\chi_k$ $(k=1, 2 \ldots)$. Такой элемент наверняка существует, так как $(A^*+B^*)\varphi_1$ не принадлежит указанной оболочке. Это следует, на основании леммы Шефке [2], из линейной независимости множества всех φ_m, χ_k $(m, k=1, 2, \ldots)$ с учетом свойства (A) оператора A^*+B^*.

Если решение $f(M)$ системы (15), (16) использовать для построения $u(M, x)$ в (12), то эта последняя функция и явится решением уравнения (2), удовлетворяющим условиям (3), (5)—(7), (14) и первому условию (13), а также условию

$$\lim_{x\to+0} (u'_x(M; x), h(M))=0, \tag{18}$$

где $h(M)$—любая функция из области определения оператора B, равная нулю в S_1.

Подобным же образом рассматривается аналогичная задача с условием $u|_{S-S_1}=0$ (при $x=+0$) вместо (4). В этом случае становится излишним требование о существовании в $L_2(S-S_1)$ базиса, элементы которого принадлежат области определения оператора B, а упомянутое предельное условие на $S-S_1$ окажется выполненными в смысле сходимости в среднем.

Приближения к функции f получаются путем приближенного построения проекции элемента $(A^*+B^*)\varphi_1$ на подпространство, порожденное остальными $(A^*+B^*)\varphi_m$, в процессе последовательной ортогонализации этих элементов (между ними нет линейной зависимости, в чем легко убедиться с помощью рассуждений, приведенных выше).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 17, № 11 (1947), 1283—1295.
[2] F. W. Schäfke, Math. Nachrichten 3, № 1 (1949), 40—58.

Заседание 9 апреля 1957 г.

С. М. Лозинский «Обратные функции, неявные функции и решение конечных уравнений».

Заседание 23 апреля 1957 г.

1. Д. К. Фаддеев «О некоторых итерационных методах решения систем линейных уравнений».

2. А. Е. Гельман «К вопросу об оценке радиусов сходимости рядов, полученных употреблением малого параметра».

Заседание 14 мая 1957 г.

1. Л. В. Канторович «Математический анализ некоторых планово-производственных задач».

2. Г. Ш. Рубинштейн «Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах».

3. В. Б. Орлов «О пятилетнем плане издания математической литературы Гостехиздатом».

Заседание 28 мая 1957 г.

1. В. П. Басов «Об асимптотическом разложении решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений при наличии кратного корня определяющего уравнения».

2. М. Ш. Бирман «О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных».

Для задач, аналогичных задаче Левинсона [1], предлагается простой метод доказательства сходимости решений к решению некоторой краевой задачи для вырожденного уравнения [1]).

В ограниченной n-мерной области Ω с достаточно гладкой границей S рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения [2]):

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + a(x) u = f(x), \quad u(x)|_S = 0, \quad (\varepsilon > 0) \tag{1}$$

при условии

$$a - \frac{1}{2} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{2}$$

Для решений $u = u_\varepsilon$ легко установить неравенство

$$\int_\Omega \omega A^2 u_A^2 \, d\Omega \leqslant c \int_\Omega f^2 \, d\Omega. \tag{3}$$

Здесь $A = |\mathbf{A}|$, $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, u_A — производная по направлению $\mathbf{A}$, $\omega(x) \geqslant 0$ — функция, равная нулю только на той части S, где $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{n}) > 0$ ($\mathbf{n}$-орт внешней нормали), постоянная c от ε не зависит. Выберем из u_ε слабо сходящуюся (в метрике левой части (3)) подпоследовательность. Предельная функция $u_0(x)$, очевидно, является обобщенным решением вырожденного уравнения (см. [2]). В то же время ограниченность первого интеграла в (3) показывает, что u_0 обращается в нуль (в среднем) на той части S_1 границы S, где $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{n}) < 0$ и $A \neq 0$. Сходимость всей последовательности u_ε к u_0 следует из единственности решения вырожденного уравнения с указанными свойствами. Тем же способом можно рассматривать уравнения высших порядков. Например, предыдущий результат справедлив и для уравнения

$$(-1)^m \varepsilon \Delta^m u + a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + au = f \qquad (\varepsilon > 0) \tag{4}$$

в условиях первой краевой задачи.

Отметим, что условие (2) в задачах (1) и (4) можно заменить более слабым, например, условием $a - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a_k}{\partial x_k} = 0$, но тогда придется требовать, чтобы векторные линии $\mathbf{A}$ покрывали Ω «регулярно» (см. [1] и [2]).

Приведем еще ряд примеров. В задаче

$$\varepsilon \Delta^2 u + a \frac{\partial \Delta u}{\partial x_1} = f, \quad u\Big|_S = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0 \quad (\varepsilon > 0, \ a = \mathrm{const} > 0)$$

исследование проводится на основании неравенства

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_k} \right)^2 \omega \right] d\Omega \leqslant c \int_\Omega f^2 \, d\Omega.$$

Функция $\omega(x)$ обращается в нуль лишь там на S, где $\cos(\mathbf{n}, x_1) < 0$. Более общее уравнение

$$\varepsilon \Delta^2 u + a_r(x) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_r} - a(x) \Delta u = f$$

исследуется также, если только $a(x) \geqslant a_0 > 0$ и a_0 достаточно велико.

---

[1]) Близкие результаты получил в последнее время дипломант Ленинградского университета Солонников, продолжавший исследования О. А. Ладыженской [2].

[2]) По повторяющимся индексам суммирование от 1 до n.

Во всех рассмотренных выше случаях результаты легко переносятся на соответствующую смешанную параболическую задачу. Например, решения u_ε задачи

$$u_t - \varepsilon\,\Delta u + a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + a(x)\,u = f,\ u|_S = 0,\ u|_{t=0} = 0\ (\varepsilon > 0) \tag{5}$$

при условии (2) сходятся к решению уравнения $u_t + a_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + au = f$, обращающемуся в нуль на S_1 и при $t=0$. При этом используется неравенство

$$\int_0^T dt \int_\Omega \left[u^2 + \left(a_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \omega(x)\right] d\Omega \leqslant c(T)\int_0^T dt \int_\Omega f^2\,d\Omega.$$

Рассмотрим еще уравнение

$$-\nu u_{tt} - \Delta u + a_r(x)\frac{\partial u}{\partial x_r} + u_t + a(x)\,u = f$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$ при условиях $u|_\Sigma = 0$ (Σ—поверхность Q_T) и (2). Неравенство

$$\int_{Q_T}\left[u^2 + \sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + (T-t)\,u_t^2\right] d\Omega\,dt \leqslant c\int_0^T dt\int_\Omega f^2\,d\Omega$$

показывает, что u_ν сходятся при $\nu \to +0$ к решению смешанной задачи (5) (при $\varepsilon = 1$). Число подобных примеров можно было бы значительно увеличить. Все результаты остаются справедливыми и для неоднородных граничных условий.

Отметим в заключение, что в ряде задач исследование может быть проведено на основании одной теоремы теории операторов. Соответствующий результат и примеры приведены в [3]. Однако рассмотренные выше случаи не включаются в предложенную в [3] схему.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Levinson, The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε, Ann. of Math. 51, № 2 (1950), 428—445.

[2] О. А. Ладыженская, Об уравнениях с малым параметром при старших производных и линейных дифференциальных уравнениях с частными производными, Вестник ЛГУ, № 7 (1957), 104—120.

[3] М. Ш. Бирман, Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных, Вестник ЛГУ, № 13 (1957).

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ОБЩЕГОРОДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА
(математическая секция Ленинградского дома ученых)

Заседание 22 октября 1957 г.

В. А. Якубович «О нелинейных дифференциальных уравнениях систем непрямого автоматического регулирования с одним регулирующим органом».

Доклад посвящен следующей задаче. Дана система вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + a\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= (b, x) - \rho\varphi(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где A — вещественная постоянная матрица, a, b — вещественные постоянные векторы порядка n, $\rho > 0$; непрерывная функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию $\varphi(0) = 0$, $\sigma\varphi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Требуется установить условия, налагаемые на коэффициенты системы (1), при выполнении которых для любой функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей сформулированным условиям, тривиальное решение $x = 0$, $\sigma = 0$ было бы устойчиво в целом, т. е. чтобы кроме обычной устойчивости «в малом» любое решение $x(t)$, $\sigma(t)$ было продолжимо при $t \to \infty$ и $x(t) \to 0$, $\sigma(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Целый ряд результатов для систем (1) и систем аналогичного вида получили Н. П. Еругин, И. Г. Малкин, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, А. П. Тузов, В. А. Плисс и другие.

Указанная задача поставлена и в определенных весьма широких предположениях решена А. И. Лурье [1]. В работах А. М. Летова [2], П. В. Бромберга [3] и других результаты А. И. Лурье были развиты и обобщены. Докладчиком были получены следующие результаты, дополняющие и продолжающие эти исследования.

1°. Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части.

Система разрешающих уравнений А. И. Лурье, записанная в отличие от [1], [2] и в инвариантной форме, имеет вид

$$UA + A^*U = -uu^*, \quad Ua + \rho u + \frac{1}{2}\rho b = 0. \tag{2}$$

Здесь u — вектор-столбец с компонентами $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, U — симметрическая матрица. Таким образом, уравнения (2) являются системой n квадратных уравнений относительно величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Если эта система имеет вещественное решение $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ для заданного вектора b и всех векторов в достаточно близких к заданному, то тривиальное решение устойчиво в целом.

Аналогичное предложение доказано А. И. Лурье [1] в предположении, что матрица A имеет различные собственные значения; само доказательство в ряде пунктов нуждается в дополнениях.

Достоинство разрешающих уравнений (2) по сравнению с разрешающими уравнениями [1], [2] заключается в том, что они составляются непосредственно по коэффициентам системы (1).

2°. Указано, как в общем случае решать систему (2). Как правило, можно последовательно исключать $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ и для $\zeta_n = \zeta$ получить алгебраическое уравнение четной степени N:

$$P_N(\zeta) = 0, \tag{3}$$

где N имеет значения

n	2	3	4	5
N	2	4	8	12

Коэффициенты уравнения (3) являются многочленами от коэффициентов системы (1). Для устойчивости в целом достаточно, чтобы уравнение (3) имело по крайней мере два вещественных корня.

При некоторых соотношениях на коэффициенты системы (1) условия разрешимости уравнений (2) имеют другой вид. При $n=2$, 3, 4 этих исключительных случаев нет; при $n=5$ при определенных соотношениях на коэффициенты получим вместо уравнения (3) условия вида

$$P_6(\zeta) = 0, \quad Q_6(\zeta) > 0,$$

т. е. некоторое уравнение шестой степени должно иметь по крайней мере два вещественных корня, для которых другой многочлен шестой степени должен принимать положительные значения.

С увеличением n алгебраические выкладки, связанные с вычислением коэффициентов уравнения (3), быстро возрастают.

3°. Если вектор a является собственным вектором матрицы A или b — собственным вектором матрицы A^*, то уравнения (2) решаются в явном виде; необходимым и достаточным условием устойчивости в целом оказывается одно неравенство $\Gamma^2 \equiv \rho + (b, A^{-1}a) > 0$. В частности, это условие является необходимым и достаточным условием положительного решения поставленной задачи в общем случае для $n=1$.

Если минимальный многочлен вектора a относительно матрицы A или вектора b относительно матрицы A^* имеет степень $p < n$, то систему (1) можно свести к системе того же вида, но имеющей порядок $p+1$ вместо $n+1$. В частности, систему (1) можно свести к системе, у которой матрица A обладает тем свойством, что каждому собственному значению отвечает лишь один ящик жордановой формы.

4°. Указано, как несколько усложняя метод А. И. Лурье получить достаточные условия устойчивости в целом, которые охватывают все достаточные условия, получаемые при помощи функции Ляпунова определенного вида («квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности»). Насколько известно автору, в рассматриваемом круге задач только такие функции Ляпунова и применялись.

Эти условия получены для $n=2$. При $(A^{-1}a, b) > 0$ эти условия оказываются и необходимыми.

5°. Все предыдущие результаты распространены на случай, когда матрица A имеет одно нулевое собственное значение.

Показано, что в случае, если собственное значение $\lambda=0$ имеет кратность $k > 1$, сформулированная задача решается в отрицательном смысле.

Получены оценки решения системы (1).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

[2] А. М. Летов, Устойчивость нелинейных регулируемых систем, М.—Л., Гостехиздат, 1954.

[3] П. В. Бромберг, Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования, Оборонгиз, 1953.

Заседание 12 ноября 1957 г.

1. Г. И. Натансон «О сумматорных формулах с узлами Якоби».

2. Л. Н. Котова «Оценка погрешности численного интегрирования системы дифференциальных уравнений внешней баллистики».

Заседание 10 декабря 1957 г.

1. Л. А. Кальниболоцкая «Сумматорный аналог интеграла Джексона».

В качестве аппарата приближения функций рассматривается последовательность тригонометрических полиномов типа Джексона

$$u_n(x)=\frac{3}{(2n+1)\,n(2n^2+1)}\sum_{k=0}^{2n}\varphi_{k,n}\left(\frac{\sin n\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4,$$

где $\varphi_{k,n}$—некоторые вещественные числа, различными способами связанные с функциями, $x_k^{(n)}=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in C_{2\pi}$. *Тогда полиномы*

$$u_n(f;\ x)=\frac{3}{(2n+1)\,n\,(2n^2+1)}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k^{(n)})\left(\frac{\sin n\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4,$$

аналоги сингулярных интегралов Джексона [1],

$$\widetilde{u}_n(f;\ x)=\frac{3}{2\pi n\,(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin n\dfrac{t-x}{2}}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right)^4dt,$$

сходятся к функции $f(x)$ *равномерно на всей оси.*

В последующих четырех теоремах функция $f(x)$ предполагается ограниченной и 2π—периодической.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(\delta)$—*модуль непрерывности* $f(x)$. *Тогда*

$$|u_n(f;\ x)-f(x)|\leqslant M\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где M—*постоянная, не зависящая от* n.

Теорема 3. *Пусть* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *конечную вторую производную* $f''(x_0)$. Тогда

$$u_n(f;\ x_0)-f(x_0)=\frac{3}{2}\,\frac{f''(x_0)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 4. *Пусть в точке x_0 у $f(x)$ существует конечная производная $f'(x_0)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(f;\ x_0) = f'(x_0).$$

Теорема 5. *Если $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную вторую производную, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n''(f;\ x_0) = f''(x_0).$$

Можно снять условие 2π-периодичности функции $f(x)$ и рассматривать функцию, ограниченную в промежутке $[0;\ 2\pi]$. Тогда при выполнении остальных условий теорем 3, 4 и 5 в точке x_0, $0 < x_0 < 2\pi$, верны утверждения этих теорем.

Далее рассматривается суммируемая в промежутке $[0;\ 2\pi]$ функция $f(x)$.

Для нее можно построить полиномы вида

$$\bar{u}_n(f;\ x) = \frac{3}{(2n+1)(2n^2+1)} \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{2n+1}{2\pi} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(t)\,dt\right] \left(\frac{\sin n\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4.$$

Теорема 6. *Если рассматривать $\bar{u}_n(f;\ x)$ как оператор из $L(0;\ 2\pi)$ в $L(0;\ 2\pi)$, то*

$$\|\bar{u}_n\|_{L(0;\ 2\pi)} = 1.$$

Теорема 7. *Пусть $f(x) \in L(0;\ 2\pi)$. Тогда в каждой точке x_0, $0 < x_0 < 2\pi$, в которой $f(x)$ является производной своего неопределенного интеграла, будет*

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(f;\ x_0) = f(x_0).$$

Определение [2]. *Средним метрическим* измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется такое число h, что при любом $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$mE[f(x) \geqslant h] \geqslant \frac{b-a}{2}, \quad mE[f(x) \geqslant h+\varepsilon] < \frac{b-a}{2}.$$

Среднее метрическое обозначается так: $h = m_a^b mf(x)$.

Теорема 8. *Пусть $f(x)$ — измеримая и почти везде конечная в промежутке $[0;\ 2\pi]$ функция. Тогда полиномы*

$$\bar{\bar{u}}_n(f;\ x) = \frac{3}{(2n+1)\,n\,(2n^2+1)} \sum_{k=0}^{2n} \left\{ m_{x_k^{(n)}-3n^{-\frac{1}{3}}}^{x_k^{(n)}+3n^{-\frac{1}{3}}} m\,[f(x)]_n \right\} \left(\frac{\sin n\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}{\sin\dfrac{x_k^{(n)}-x}{2}}\right)^4$$

сходятся к $f(x)$ в каждой точке x_0, $0 < x_0 < 2\pi$, ее аппроксимативной непрерывности.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Jackson, Ueber die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen, Dissertation, Göttingen, 1911.

[2] Л. В. Канторович, Представление произвольной измеримой функции в виде предела последовательности полиномов, Матем. сб. 41: 3 (1934).

[3] М. И. Морозов, К вопросу о приближении периодических квазигладких функций и функций, удовлетворяющих условию Липшица, Моск. авиац. ин-т, 1956.

[4] И. П. Натансон, О точности представления непрерывных периодических функций сингулярными интегралами, ДАН 73, № 2 (1950).

[5] С. И. Рапопорт, О представлении функций некоторыми тригонометрическими полиномами, ЛЭИИЖТ, сб. Научных трудов, вып. IV (1952).

2. В. Р. Петухов «Об устойчивости систем с последействием».

Заседание 24 декабря 1957 г.

1. Э. Б. Быховский «Основная краевая задача для системы уравнений Максвелла».

2. В. А. Солонников «О линейных дифференциальных уравнениях в частных производных с малым параметром при старших производных».

Заседание 14 января 1958 г.

В. А. Якубович «О динамической устойчивости упругих систем с конечным числом степеней свободы».

Заседание 25 февраля 1958 г.

1. Е. В. Вороновская «О чебышевском приближении аналитических функций».

2. В. И. Зубов и В. Хоменюк «О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 11 марта 1958 г.

Г. Ю. Джанелидзе «Высшие технические школы и университеты ГДР» (по личным впечатлениям).

Заседание 25 марта 1958 г.

1. И. П. Натансон «Об одной экстремальной задаче, связанной с возрастающими многочленами».

2. В. И. Зубов «Теория линейных обыкновенных систем с запаздывающим аргументом».

Заседание 1 апреля 1958 г.

Б. Н. Делоне «Теория стереоэдров».

Заседание 22 апреля 1958 г.

Н. Н. Воробьев «Основы теории игр».

Заседание 13 мая 1958 г.

1. В. И. Зубов и В. В. Леонов «Поведение решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки иррегулярного типа».

2. В. П. Хавин «Один аналог ряда Лорана».

ЛЕНИНГРАДСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

29 сентября 1959 г. состоялось учредительное собрание Ленинградского математического общества. Предполагается, что это общество, созданное при Ленинградском университете, объединит всех творчески работающих математиков Ленинграда. Целью общества, как записано в уставе, является «всемерное содействие развитию математических наук в СССР, а также использованию достижений этих наук в смежных научных дисциплинах и в практике социалистического строительства». Намечено систематически ставить и обсуждать научные доклады ленинградских и иногородних ученых, посвященные сообщению новых научных результатов, обзорам состояния отдельных ветвей математики и смежных наук, а также вопросам истории, философии и методологии математических наук. Общество будет активно участвовать в математической жизни страны: устраивать юбилейные и мемориальные заседания; вести работу по популяризации и пропаганде достижений математических наук; содействовать повышению уровня преподавания математики на различных его ступенях; проводить ежегодные школьные математические олимпиады и организовывать школьные математические кружки; участвовать в организации математических съездов, конференций и совещаний; рассматривать тематические планы издательств математической литературы: и т. д. В будущем также предполагается издание при обществе научного журнала.

На учредительном собрании было избрано Правление в составе: Ю. В. Линник (президент); О. А. Ладыженская и С. М. Лозинский (вице-президенты); А. Д. Александров, Б. А. Венков, А. В. Малышев (секретарь), Н. Н. Поляхов, В. И. Смирнов (казначей).

Собрания общества будут, как правило, происходить на математико-механическом факультете Ленинградского университета во второй и четвертый вторник каждого месяца (кроме каникулярного времени) в 19 часов. С созданием Ленинградского математического общества общегородской математический семинар при Доме ученых прекратил свою работу; общество приняло на себя его функции.

А. В. Малышев.

1960 г. май — июнь т. XV, вып. 3 (93)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 29 сентября 1959 г.

Организационное заседание. Отчет о нем см. УМН XIV, вып. 6 (90) (1959), 212[1]).

Заседание 27 октября 1959 г.

1. Ю. В. Линник «Дисперсионный метод для решения некоторых бинарных аддитивных задач и асимптотическая формула в проблеме Гарди—Литтлвуда».

Дисперсионный метод использует аналог понятия дисперсии и неравенства Чебышёва для аддитивных бинарных задач вида

$$n=\varphi+D'\nu,$$

где $\{\varphi\}$ — некоторая «густая» последовательность натуральных чисел; D' пробегает некоторую не слишком редкую систему чисел, а ν — может быть и редкой, но хорошо распределенной в прогрессиях малой разности системой. Если

$$U(m)=\sum_{\varphi=m}1,$$

то дисперсия V' проблемы определяется, как

$$V'=\sum_{D'\in(D)}\Big(\sum_{\nu\in(\nu)}U(n-D'\nu)-A(n,\ D')\Big)^2,$$

где $A(n,\ D')$ — подходящее «среднее значение». Основную роль играет неравенство типа И. М. Виноградова

$$V'\leqslant V=\sum_{D\leqslant D\leqslant D_1+D_2}\Big(\sum_{\nu\in(\nu)}U(n-D\nu)-A(n,\ D)\Big)^2.$$

В применении к проблеме Гарди—Литтлвуда получается асимптотическая формула[2])

$$Q(n=p+\xi^2+\eta^2)=\pi\frac{n}{\ln n}\prod_{p}\Big(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\Big)\prod_{p/n}\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}+O(n(\ln n)^{-1,028}).$$

[1]) В указанной информационной заметке по моему недосмотру вкралась досадная погрешность. Второй ее абзац следует читать так: «На учредительном собрании было избрано Правление в составе: Ю. В. Линник (президент), О. А. Ладыженская и С. М. Лозинский (вице-президенты), А. Д. Александров, Б. А. Венков, А. В. Малышев (секретарь), С. Г. Михлин, И. П. Натансон, Г. И. Петрашень, В. И. Смирнов (казначей)». Прим. А. В. Малышева.

[2]) В моей заметке «Проблема Гарди—Литтлвуда о сложении простых чисел и двух квадратов» (ДАН 124, № 1 (1959), 29—30) ошибочно указан лучший остаточный член.

В доказательстве формулы важную роль играет новая оценка в теории L-рядов:

$$\sum_{\frac{D_1}{2}\leqslant D\leqslant D_1}\ \sum_{\chi \bmod D}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti,\chi\right)\right|^6=O\left(D_1^2(|t|+2)\exp\left(\ln D_1(|t|+2)\right)^{\varepsilon}\right),$$

где $L\left(\frac{1}{2}+ti,\chi\right)$—$L$-ряд по модулю D, $\varepsilon>0$ сколь угодно мало.

2. Ю. Ф. Борисов «О связи внешней и внутренней геометрии поверхности».

1°. Связь пространственной формы поверхности с ее внутренней геометрией существенно зависит от дополнительных условий регулярности, накладываемых на рассматриваемую поверхность. То, что из одних свойств внутренней метрики нельзя вывести сколько-нибудь содержательных утверждений о форме поверхности без предположения ее гладкости, ясно на примере изгибания сферы путем зеркального отражения отдельных ее частей в секущих плоскостях («проламывания» сферы).

Из известных теорем Нэша и Кейпера о гладких погружениях римановой метрики в евклидово пространство вытекает, что столь же произвольные изгибания поверхностей с регулярной метрикой возможны даже в классе гладких поверхностей (класс $C^{1,\alpha}$).

Естественно возникает вопрос: каковы минимальные требования, при которых указанное явление становится невозможным?

Ниже рассматриваются гладкие поверхности, допускающие параметризацию класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$ (первые производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α). Такие поверхности называем поверхностями класса $C^{1,\alpha}$. Степень регулярности таких поверхностей характеризуется показателем α.

2°. Для поверхностей класса $C^{1,\alpha}$, где $\alpha>\frac{2}{3}$, справедлива следующая теорема: поверхность знакопостоянной гауссовой кривизны имеет ограниченную внешнюю кривизну в смысле А. В. Погорелова; если гауссова кривизна положительна, поверхность локально выпукла (доказательство опубликовано в Вестнике Ленинградского университета № 13 (1959), 20—26).

Из этой теоремы вытекает, в частности, что в указанном классе кейперовское изгибание замкнутой выпуклой поверхности невозможно.

3°. Пусть поверхность F задана уравнением $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ определена и голоморфна в гомеоморфной кругу замкнутой области G и равна нулю на границе Γ области. Если $|f_x|$, $|f_y|$ достаточно малы, F допускает непрерывное изгибание в классе $C^{1,\alpha}$, $\alpha<\frac{1}{13}$, при котором граница Γ и касательные плоскости в точках границы остаются неподвижными. Отсюда, в частности, вытекает наличие в названном классе весьма произвольных непрерывных изгибаний замкнутых выпуклых поверхностей с регулярной метрикой. В том же классе возможно непрерывное изгибание плоскости, при котором все получаемые поверхности, кроме исходной, не являются линейчатыми.

4°. Представляется весьма правдоподобным, что обычная для регулярных поверхностей связь внутренней и внешней геометрии, обеспечивающая, в частности, неизгибаемость сферы и линейчатость поверхности, изометричной плоскости, сохраняется для поверхностей класса $C^{1,\alpha}$ при любом $\alpha>\frac{1}{2}$ и нарушается при любом $\alpha<\frac{1}{2}$. Основанием для такой гипотезы служат результаты исследования параллельного переноса вектора на гладкой поверхности (Ю. Ф. Борисов, Параллельный перенос вектора на гладкой поверхности, ч. I, II, III, IV, Вестн. ЛГУ, № 7, 19 (1958), № 1, 13 (1959)), показывающие, что класс $C^{1,\frac{1}{2}}$ является в некотором отношении естественной границей классов поверхностей, для которых сохраняются обычные связи внутренней и внешней геометрии.

Заседание 10 ноября 1959 г.

1. И. А. Ибрагимов «Современное состояние исследований по предельным теоремам теории вероятностей (обзорный доклад)».

2. Информация Б. А. Рымаренко о совещании в г. Ленинграде по конструктивной теории функций.

3. Информация В. А. Солонникова о совещании в г. Баку по функциональному анализу.

Заседание 24 ноября 1959 г.

1. О. А. Ладыженская «Нелинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи (обзорный доклад)».

2. Ревез Пал (Будапешт) «О математической жизни в Венгрии».

Заседание 8 декабря 1959 г.

1. В. П. Хавин «Об основных понятиях теории аналитических функционалов Фантаппие (обзорный доклад)».

2. Е. М. Полещук «Континуальные средние и гармонические функционалы».

1°. Пусть D — некоторое множество функций $\{x(t)\}$, определенных и измеримых на промежутке $0 < t < 1$. Пусть $F = F[x(t)]$ — функционал, заданный на множестве D. Через $\underset{D}{M}F$ обозначаем среднее в смысле Гато — Леви [1], [2] функционала F по множеству D («континуальное среднее»).

Формулируются условия, при которых для функционала вида

$$F[x(t)] = \int_0^1 \ldots \int_0^1 g(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_p); t_1, t_2, \ldots, t_p)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_p \tag{1}$$

имеет место формула

$$\underset{D}{M}F = \int_0^1 \ldots \int_0^1 dt_1 \ldots dt_p \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \ldots, \xi_p; t_1, \ldots, t_p)\, d_{\xi_1}\varphi(\xi_1, t_1) \ldots d_{\xi_p}\varphi(\xi_p, t_p), \tag{2}$$

где $\varphi(\xi, t)$ — функция, определенная в полосе $-\infty < \xi < \infty$, $0 < t < 1$, почти для всех t и для каждого фиксированного t обладающая по ξ свойствами функции распределения. Мы называем φ функцией распределения функциональной области D. Если φ не зависит от t, то говорим, что D — область первого рода.

Частные случаи формулы (2) рассмотрены в [1], [2] (D — сфера $\int_0^1 x^2(t)\,dt = R^2$) и в [3], [4] ($D$ — функциональный параллелепипед $a(t) < x(t) < b(t)$). В [4], кроме того, разъясняется, что функционал F можно рассматривать как случайную величину и при этом с вероятностью единица имеет место равенство

$$F[x(t)] = \underset{D}{M}F, \qquad x(t) \in D \tag{3}$$

Этот результат распространяется на некоторые другие функциональные области D.

Из (3), в частности, следует важное для приложений мультипликативное свойство операции $\underset{D}{M}$:

$$\underset{D}{M}(F_1F_2) = \underset{D}{M}F_1 \cdot \underset{D}{M}F_2. \tag{4}$$

Мы говорим, что функционал F принадлежит классу $\mathfrak{F}_0$, если для любых двух функций $x(t)$ и $y(t)$, имеющих одну и ту же функцию распределения $\eta(u) = \operatorname{mes}_t E\{x(t) < u\}$, выполняется условие $F[x(t)] = F[y(t)]$.

Теорема. *Если D — область первого рода, $\varphi(u)$ — ее функция распределения, $W(t)$ — функция обратная $\varphi(u)$, F — функционал из класса $\mathfrak{F}_0$, непрерывный в «точке» $W(t)$, то $\underset{D}{M}F = F[W(t)]$.*

Поскольку здесь функция $W(t)$ одна и та же для всех функционалов класса $\mathfrak{F}_0$, ее естественно назвать «точкой концентрации массы в области D».

Для более общего класса функционалов, чем $\mathfrak{F}_0$, например функционалов вида (1), имеет место формула $\underset{D}{M}F = F[W(\gamma(t))]$, где $\gamma(t)$ — некоторая обобщенная функция.

2°. Существуют группы двух видов, не меняющие среднего значения функционала по области D: a) непрерывные группы — группы преобразований в себя множества «точек концентрации массы» в области D. Эти группы не меняют свойства и вида функционала; b) дискретные группы, меняющие свойства функционала (частный случай см. в [5]).

3°. Пусть S — замкнутая, выпуклая поверхность в гильбертовом пространстве, которое, например, реализовано как координатное пространство l_2. Пусть x — точка, лежащая внутри S, $x+y$ — точка на единичной сфере с центром в x, $\|y\| = 1$, а z — точка поверхности S, лежащая на одной прямой с x и $x+y$.

Через $d_x[J]$ обозначим функционал от J, определенный равенством $d_x[J] = \|z - x\|$. Пусть $s[x]$ — среднее от $d_x[J]$ по сфере $\|J\| = 1$. Пусть $F[x] = f(x_1, x_2 \ldots)$ — функционал, определенный внутри и на поверхности S, $\mathfrak{M}_{x, s[x]}F$ его среднее по сфере с центром в x, радиуса $s[x]$.

Теорема. *Если $F[x] = \lim_n f_n(x_1, \ldots, x_n)$ и функции $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные производные порядка $2m$ по всем своим аргументам, то*

$$\mathfrak{M}_{x, s[x]}F = F[x] + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{s^2[x]}{2}\right)^k \frac{\Delta^k F[x]}{k!} + \frac{1}{2^m \cdot m!} \int_0^{s[x]} r\,(s^2[x] - r^2)^m \mathfrak{M}\Delta^{m+1}F[x+ry]\,dr, \quad (5)$$

где Δ^k — k-я степень функционального лапласиана Δ (определение и свойства функциональной операции Δ см. в [1] или [2]), $\mathfrak{M}$ (здесь и ниже) — среднее по сфере $\|y\| = 1$.

Можно показать, что $H = \mathfrak{M}_{x, s[x]}F$ — гармонический функционал ($\Delta H = 0$) и что $s[x] \to 0$, если $x \to z$ (z — точка на S).

Поэтому формула (5) дает решение внутренней задачи Дирихле для поверхности S гильбертова пространства l_2. Аналогичная формула имеет место и в координатном пространстве L_2.

Если остаточный член формулы (5) стремится к нулю при $m \to \infty$, то решение H задачи Дирихле для поверхности S можно записать в операторной форме

$$H = \left(\exp \frac{s^2[x]}{2} \Delta\right) F \qquad (\Delta H = 0, \ \lim_{x \to z} H[x] = F[z])$$

(заметим, что для сферы $\|x\| = R$ $s[x] = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}$).

4°. Остаточный член формулы (5) можно рассматривать как оператор, переводящий функционал F в некоторый другой функционал $K_m F = \Phi_m$.

При обращении этого оператора, а также в некоторых других вопросах, возникает задача решения «линейного уравнения в функциональных лапласианах»

$$P_0 \Delta^m F + P_1 \Delta^{m-1} F + \ldots + P_m F = Q,$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_m, Q$ — заданные функционалы, а F — неизвестный функционал.

Теория таких уравнений в своей простейшей части имеет аналогию с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Это позволяет сформулировать ряд теорем, аналогичных классическим, в которых роль произвольных постоянных играют произвольные гармонические функционалы, а операция квадратуры заменяется операцией

$$\Re F = \int_0^{s[x]} r\mathfrak{M}F[x+ry]dr, \text{ где } s[x]=\sqrt{R^2-\|x\|^2}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Levy, Lecons d'analyse fonctionnelle, Paris, 1922.
[2] P. Levy, Les problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951.
[3] Е. М. Полищук, О среднем значении функционала, УМН X (1955), 179—186.
[4] Е. М. Полищук, Среднее значение и интеграл от функционала, Укр. матем, журн. 8:1 (1956), 59—75.
[5] Е. М. Полищук, О группах, не меняющих среднего значения функционала, Вестн. ЛГУ 1:1 (1957), 175—179.

Заседание 22 декабря 1959 г.

1. К. К. Головкин «О теоремах вложения».

Единым методом доказываются теоремы вложения С. Л. Соболева для предельных показателей и ряд родственных им результатов.

Важное эвристическое значение в этом круге вопросов имеют соображения размерности. Все объекты, изучаемые теоремами вложения, т. е. нормы функций и их производных в L_q, нормы в $C^{(\alpha)}$ и в пространствах Липшица, произведения и степени этих норм и ряд других образований являются функционалами, имеющими определенную размерность. Это значит, что

$$f[u(\lambda x)] = \lambda^{-\varkappa} f[u(x)],$$

и число $\varkappa$, которое может быть любого знака, называется размерностью f. Пусть f_1 и f_2—два функционала с размерностями $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Имеет место следующая

Лемма. *Для того чтобы имела место оценка*

$$f_1[u(x)] \leqslant C f_2[u(x)] \tag{1}$$

с одной и той же константой для всех функций, финитных относительно данной области конечного диаметра, необходимо, чтобы $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2$.

Эта лемма позволяет, не прибегая к построению примеров, устанавливать предельный характер показателей в неравенствах типа теорем вложения, если подстановка этих показателей приводит к совпадению размерностей f_1 и f_2 в оценке (1).

Замечательно, что для предельных показателей такое совпадение действительно всегда имеет место. Общая причина всех этих совпадений не выяснена.

Практически отсюда следует необходимость «отбора средств» при доказательстве теории вложения. Именно, в процессе доказательства нужно стремиться к сохранению размерности оцениваемого выражения на каждом этапе. Всякая «потеря размерности» согласно высказанной лемме необратима. Вместе с тем, если оценка f_1 через функционал f_2 данного типа (например, норма в L_q через норму в $W_p^{(l)}$ с каким-то p) осуществлена без потери размерности, то значение параметра f_2 (показателя p) автоматически оказывается предельным.

При доказательстве теорем вложения по новому методу мы использовали только следующие аналитические средства: неравенство Гёльдера, вынесение максимума модуля функции за знак интеграла и неравенства

$$\max_y \int_{E_n} \frac{|u(x)|^p}{r_{xy}^{ep}} dx \leqslant C \|u\|_{W_p^{(e)}} \quad (pl < n).$$

Важную роль в доказательствах играют свободные параметры, которые вводятся в промежуточные рассуждения, а впоследствии определяются из некоторой системы просты уравнений. Например, часто бывают полезны представления $u^q = u^\alpha \cdot u^{q-\alpha}$ и $u^q = (u^\alpha)^{\frac{q}{\alpha}}$, содержащие один свободный параметр.

Приведем некоторые новые результаты, полученные описанным методом.

Теорема 1. *При* $h > 1$, $gh > (h-1)(n-s)$ *и* $p \geqslant \frac{qhn}{qh+n+s(h-1)}$ *имеет место неравенство*

$$\left\{ \int\limits_{E_{n-s}} dx \left(\int\limits_{E_s} u^q(x, y)\, dy \right)^h \right\}^{\frac{1}{qh}} \leqslant C \| u \|_{w_p^{(1)}(E_n)}.$$

Теорема 2. *Если выполняются условия*

$$lp_l < n, \quad 1 \geqslant \alpha \geqslant \frac{lp_l h + r(n - lp_l)}{l[hp_l + n - lp_l]}, \quad 1 \geqslant h > 0,$$

$$p_r > 1, \quad p_l > 1, \quad r < l_l, \qquad \frac{1}{p_r} \geqslant \frac{r-h}{n} + \alpha\left(\frac{1}{p_l} - \frac{l-h}{n}\right),$$

то

$$\| u \|_{w_{p_r}^{(r)}(\Omega)} \leqslant C \| u \|_{w_{p_l}^{(l)}(\Omega)} \| u \|^{1-\alpha}_{Lip_n(\Omega)},$$

если в последнем из условий стоит знак строгого неравенства, то соответствующий оператор вложения вполне непрерывен.

Теорема 3. *Если выполняются условия*

$$n - s < lp, \quad 1 \geqslant \alpha \geqslant \frac{(n-s)p}{(n-s)p + h(lp - n + s)},$$

$$\frac{1}{q} \geqslant \frac{n - lh}{sh} + \frac{n(h-p)}{phs}\alpha,$$

то справедливо

$$\| u \|_{L_q(E_s \cap \Omega)} \leqslant C \| u \|^\alpha_{w_p^{(l)}\Omega} \| u \|^{1-\alpha}_{L_h(\Omega)}.$$

Отметим, что из теоремы 1 можно получить, выполняя предельный переход при $h \to \infty$, одну из теорем С. Л. Соболева.

Теоремы 2 и 3 содержат в себе утверждения о нетривиальном вложении пересечения двух пространств в некоторое третье, когда ни одно из них не может быть вложено в это последнее целиком. Впервые результат такого типа получили Гальярдо и Ниренберг в 1958 г.

2. Г. Ш. Рубинштейн «О равномерном приближении непрерывной функции с помощью обобщенных рациональных функций».

1°. Численным методам равномерного приближения непрерывной функции обычными и обобщенными многочленами (линейными комбинациями фиксированных непрерывных функций) посвящено значительное число работ (в частности, недавно вышедшая большая монография Е. Я. Ремеза [1]). Родственный же вопрос об алгорифмах равномерного приближения рациональными функциями до сих пор остается открытым. Вместе с тем во многих случаях по самому физическому смыслу рассматриваемой функции ее необходимо приближать именно рациональными функциями. С характерным примером такого рода автор встретился недавно при консультации геофизика С. В. Шалаева (Ленингр. горный институт), занимающегося вопросами количественного истолкования результатов магнитной разведки.

Нам представляется, что излагаемые результаты в известной мере восполняют отмеченный пробел

2°. Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{m+n}(t) \tag{1}$$

— фиксированные вещественнозначные непрерывные функции, определенные на некотором метрическом компакте T, причем среди дробей

$$R(x, t)=\frac{P(x, t)}{Q(x, t)}=\frac{x_1\varphi_1(t)+x_2\varphi_2(t)+\ldots+x_m\varphi_m(t)}{x_{m+1}\varphi_{m+1}(t)+\ldots+x_{m+n}\varphi_{m+n}(t)} \tag{2}$$

имеются такие, у которых знаменатель $Q(x, t)>0$ при всех $t\in T$. Совокупность соответствующих векторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ обозначим через X. Отметим, что в важном частном случае, когда $T=[a, b]$ — отрезок вещественной оси, а $P(x, t)$ и $Q(x, t)$ — алгебраические или тригонометрические многочлены, любая ограниченная в T функция вида (2) (в данном случае, алгебраическая или тригонометрическая рациональная функция) может быть сведена к такой, где $x\in X$. Систему (1), обладающую указанным свойством, будем называть *согласованной*.

Основная задача. Для заданной на T непрерывной функции $f(t)$ и данного положительного числа ν найти вектор $x\in X$ такой, что

$$|f(t)-R(x, t)|<\nu, \quad t\in T.$$

Для анализа задачи в $(m+n)$-мерном пространстве рассматривается ограниченное выпуклое замкнутое множество $M(f, \nu)$, представляющее выпуклую оболочку точек

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^+(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t), (-f(t)-\nu)\varphi_{m+1}(t), \ldots, (-f(t)-\nu)\varphi_{m+n}(t)), \\ \alpha^-(t)=(-\varphi_1(t), \ldots, -\varphi_m(t), (f(t)-\nu)\varphi_{m+1}(t), \ldots, (f(t)-\nu)\varphi_{m+n}(t)), \end{array}\right\} t\in T. \tag{3}$$

Вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$, очевидно, тогда и только тогда представляет решение задачи, когда опорная к $M(f, \nu)$ гиперплоскость

$$(x, \alpha)=\eta, \text{ где } \eta=\max_{\alpha\in M(f,\nu)}(x, \alpha),$$

строго отделяет от этого множества точку $\theta=(0, 0, \ldots, 0)$, т. е. $\eta<0$.

Следовательно, задача сводится к разысканию указанной гиперплоскости и имеет решение тогда и только тогда, когда $\theta\overline{\in} M(f, \nu)$.

Если T — конечное точечное множество, то для решения задачи можно предложить ряд эффективных численных методов, которые в принципе не сложнее алгорифмов, применяющихся для решения задачи равномерного полиномиального приближения (на конечном точечном множестве). Действительно, в этом случае для определения положения точки θ и разыскания искомой гиперплоскости можно воспользоваться задачей о крайней точке пересечения некоторой оси (проходящей через фиксированную точку $\alpha\in M(f, \nu)$ и точку θ) с многогранником $M(f, \nu)$, которая была рассмотрена нами в работе [2]. Для решения последней можно применить, в частности, алгорифм, изложенный в [2], а также любой из численных методов линейного программирования (см., например, Л. В. Канторович [3], стр. 272—341).

В случае произвольного компакта T можно рекомендовать решать задачу на достаточно густой конечной ε-сети. При этом, если все рассматриваемые функции удовлетворяют условию Липшица с известными константами, нетрудно дать простые оценки, позволяющие судить о том, будет ли полученное для ε-сети решение являться также решением исходной задачи.

3°. Для простоты изложения будем предполагать здесь систему функций (1) согласованной.

Задача наилучшего приближения. Для заданной на T непрерывной функции $f(t)$ найти вектор $x_0\in X$ такой, что

$$\max_{t\in T}|f(t)-R(x_0, t)|=\inf_{x\in X}\max_{t\in T}|f(t)-R(x, t)|=\nu^*.$$

Из предыдущего ясно, что при $\nu>\nu^*$ точка $\theta\overline{\in} M(f, \nu)$, а при $\nu\leqslant\nu^*$ точка $\theta\in M(f, \nu)$. При сделанном предположении относительно системы (1) нетрудно показать, что θ лежит на границе $M(f, \nu)$ лишь при $\nu=\nu^*$ и по крайней мере одна из гиперплоскостей, проходящих через θ и опорных к $M(f, \nu^*)$, имеет уравнение $(x_0, \alpha)=0$, где вектор $x_0\in X$ и, следовательно, является решением задачи.

Отсюда можно получить ряд результатов, аналогичных известным для случая приближения обобщенным многочленами и частично для случая приближения рациональными функциями. Например, вектор $x \in X$ и тогда и только тогда является решением задачи наилучшего приближения, когда

$$\max_{t \in T} |f(t) - R(x, t)| = \nu$$

достигается при некоторых $t_1, t_2, \ldots, t_r (r \leqslant m+n)$ таких, что 0 принадлежит выпуклой оболочке соответствующих точек (3)

$$\alpha^{\varepsilon_1}(t_1), \alpha^{\varepsilon_2}(t_2), \ldots, \alpha^{\varepsilon_r}(t_r),$$

где ε_s обозначает знак плюс или минус в зависимости от знака величины $R(x, t_s) - f(t_s)$.

Относительно численных методов решения задачи наилучшего приближения укажем, что для случая конечного точечного множества T можно дать конечный алгорифм, в котором, однако, на каждом шаге приходится решать уравнения высших порядков. В связи с этим нам представляется более целесообразным получать приближенное решение путем решения рассмотренной выше основной задачи при нескольких различных ν.

В заключение заметим, что результаты этого пункта в известной мере переносятся и на несогласованные системы (1). При этом, правда, приходится расширить множество векторов X.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышёвского приближения, Изд. АН УССР, 1957.

[2] Г. Ш. Рубинштейн, Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств, ДАН 100, № 4 (1955).

[3] Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН. СССР, 1959.

3. Информация А. А. Иванова о совещании в г. Тбилиси по топологии.

4. Информация Б. Б. Венкова о семинаре в г. Ужгороде по алгебраической геометрии и гомологической алгебре.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 23 февраля 1960 г.

1. Д. К. Фаддеев «О целочисленных представлениях».

Целочисленные представления (с точностью до унимодулярной эквивалентности), даже в простейшей ситуации, когда представляемыми объектами являются конечные группы или кольца конечного ранга над кольцом Z целых чисел, обладают свойствами, резко отличающимися от свойств представлений полупростых алгебр над полем.

Во-первых, неразложимые в прямую сумму представления не обязаны быть неприводимыми. Во-вторых, вообще говоря, отсутствует однозначность разложения любого представления в прямую сумму неразложимых. Поэтому описание всех целочисленных представлений данного кольца должно включать описание абелевой «полугруппы Крулля — Шмидта», образованной целочисленными представлениями, относительно операции прямого сложения. Естественными образующими этой полугруппы являются неразложимые представления. В случае однозначности разложения эти образующие свободны. Соотношения между образующими характеризуют отклонение от однозначности.

Известно очень немного примеров колец, для которых задача описания целочисленных представлений решена до конца. Это, прежде всего, кольца всех целых чисел конечных алгебраических расширений поля рациональных чисел [1]. Здесь неразложимыми являются представления в идеалах, причем эквивалентным идеалам соответствуют одинаковые представления. Полугруппа Крулля—Шмидта погружаема в группу, являющуюся прямой суммой бесконечной циклической группы и группы классов идеалов. Похожий результат имеет место для максимальных колец в простых алгебрах над полем рациональных чисел, причем здесь особое место занимают определенные алгебры кватернионов над вполне вещественными расширениями поля рациональных чисел [2], [3]. Для групповых колец конечных групп результат известен лишь для циклических групп простого порядка [4], [5]. Здесь число неразложимых представлений равно $2h+1$, где h — число классов идеалов кругового поля, а полугруппа представлений погружаема в прямую сумму трех бесконечных циклических групп и группы классов идеалов.

В последнее время получены некоторые новые конкретные результаты. З. И. Боревичем и Д. К. Фаддеевым дано полное описание всех целочисленных представлений квадратичных колец. Здесь все неразложимые представления имеют степень два, но полугруппа Крулля - Шмидта устроена довольно сложно. Она не допускает сокращений, так что не погружаема в группу.

Для конечных групп получены интересные результаты в работах студентов ЛГУ А. В. Ройтера и Л. А. Назаровой. А. В. Ройтер дал описание всех неразложимых представлений для циклической группы четвертого порядка, их оказалось девять (результат, данный по этому вопросу в статье [4], оказался неверен). В работе Л. А. Назаровой дано решение вопроса для четверной группы. Здесь неразложимые представления укладываются в несколько бесконечных серий.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Steinitz, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, M. A. 71 (1912), 328; 72 (1912), 297.

[2] C. Chevalley, L'arithmétique dans les algèbres de matrices, Paris, 1936.

[3] M. Eichler, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren, Journ. reine und angew. Math. 176 (1937), 192—202.

[4] F. Diederiksen, Über die Ausreduction ganz zahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 14 (1938), 357—412.

[5] Reiner, Integral representations of cyclic groups of prime order, Proc. Amer. Math. Soc. 8, № 1 (1957), 146.

2. А. В. Малышев «О квадратичных формах над произвольным полем».

Пусть P — поле характеристики $\neq 2$. Рассматриваем квадратичные формы

$$f=f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}{}' a_{ij}x_ix_j$$

в поле P; $a_{ij}\in P$, $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, \ldots, n)$. Матрица $A=A(f)=(a_{ij})$, ее ранг $r=r(f)$, ее определитель $d=d(f)=\det A$ и $n=n(f)$ называются соответственно *матрицей, рангом, определителем* и *числом переменных формы* f.

Пусть $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ и $g=\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}y_iy_j$ — квадратичные формы в поле P. Матрица $T=(t_{ij})$ размера[1]) $n\times m$ с элементами из поля P называется представлением формы g формой f, если имеет место тождество относительно $y_1, \ldots, y_m$:

$$g(y_1, \ldots, y_m)=f\Big(\sum_{j=1}^{m} t_{1j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} t_{nj}y_j\Big).$$

Ранг $q=q(T)$ матрицы T называется рангом представления T формы g формой f. Говорим, что форма g представима формой f в поле P, $g\subset f(P)$, если в P найдется хотя бы одно представление формы g формой f. Если $g\subset f(P)$ и $f\subset g(P)$, то говорим что формы f и g эквивалентны в поле P, $f\sim g(P)$. Отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема. *Пусть в поле P характеристики $\neq 2$ заданы квадратичные формы $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ ранга r и $g=g(x_1, \ldots, x_m)$ ранга s. Пусть q — заданное целое неотрицательное число. Рассмотрим форму*

$$e=e(u_1, \ldots, u_k;\ v_1, \ldots, v_k)=\sum_{i\leqslant(q-s)-(n-r)} 2u_iv_i$$

(если $n-r\geqslant q-s$, то считаем $k=0$, так что e — «пустая» форма). Тогда для того, чтобы в поле P существовало представление ранга q формы g формой f, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1) $s\leqslant q\leqslant m$,

2) $f\sim g\dot{+}e\dot{+}h(P)$,

где h — некоторая форма поля P; при этом переменные форм g, e и h считаем попарно не пересекающимися.

В частности, при $q=m$, $s=0$, $r=n$ мы получаем известный критерий Витта для m-нулевых форм (см., например, Джонс [1], стр. 50); при $r=n$, $s=m$ получаем теорему Полла о представлении форм формами в произвольном поле (Джонс [1], стр. 11).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. W. Jones, The arithmetic theory of quadratic forms, Math. Ass. Amer., 1950.

---

[1]) Говорим, что матрица T имеет размер $n\times m$, если число ее строк равно n, а число столбцов — m.

Внеочередное заседание 3 марта 1960 г.

Заседание Общества происходило совместно с учителями средних школ г. Ленинграда.

1. Д. К. Фаддеев «О подготовке по элементарной математике учащихся средней школы, поступивших в Университет».

2. А. В. Ширяев «Впечатления о приемных экзаменах в Университет по математике».

3. Прения по докладам.

Заседание 8 марта 1960 г.

Б. Г. Питтель, В. А. Якубович «Применение теории параметрического резонанса к объяснению кручения Такомского моста».

Катастрофа Такомского моста (США, штат Вашингтон) в 1940 г. является одной из крупнейших в истории мостостроения. После четырех месяцев службы мост разрушился под действием ветра в результате интенсивных изгибно-крутильных колебаний.

Имеется большое число работ, посвященных анализу причин катастрофы (см. [1], где указана литература, а также [2], [3], [4]). Некоторые авторы, например, Рокар (1954 г.), Стейнман (1947 г.) считают, что здесь имело место явление нелинейного флаттера. Наиболее последовательно и полно эта точка зрения проведена Рокаром в содержательной книге [1]. Однако метод, применяемый Рокаром, не строг, а рассуждения в ряде пунктов вызывают возражения (сведение к линейной системе, использование сведений об истинной картине разрушения и др.).

В. В. Болотиным [2] указано, что проведенные в последние годы эксперименты по продувке моделей балок жесткости дают основания предполагать, что явление возникновения при этом интенсивных колебаний близко по своему характеру к явлению параметрического резонанса. В [2] выведены также приближенные формулы для областей динамической неустойчивости основного резонанса.

Доклад посвящен анализу устойчивости Такомского моста с точки зрения теории линейного флаттера и теории параметрического резонанса.

При расчете по теории флаттера за исходные взяты линейные дифференциальные уравнения изгибно-крутильных колебаний висящих мостов Власова [5]. Строгий математический анализ этих уравнений показывает, что Такомский мост устойчив под действием постоянной ветровой нагрузки в диапазоне скоростей ветра $V<132$ *км/час* [1]). Неравенство $V<132$ *км/час* получено из оценки снизу минимального собственного значения некоторого самосопряженного дифференциального оператора. Катастрофа произошла при скорости ветра 67 *км/час*. Таким образом, теория линейного флаттера не дает удовлетворительного количественного объяснения крушения моста. Качественная картина колебаний моста также противоречит этой теории, так как известно, что, выдерживая значительные скорости ветра, Такомский мост испытывал интенсивные колебания при некоторых скоростях ветра, начиная с 5—6,5 *км/час*. Подобная картина характерна для параметрического резонанса.

При расчете по теории параметрического резонанса за основу взяты дифференциальные уравнения Власова [5], в которых ветровая нагрузка считается изменяющейся периодически.

---

[1]) Приведенное в [5] значение $V_{кр}=60{,}7$ *км/час* явилось, по-видимому, результатом арифметической ошибки, так как уравнения [5] для определения $V_{кр}$, полученные в результате пестрого расчета, не имеют вещественного корня.

Периодичность ветровой нагрузки объясняется известным в гидромеханике явлением периодического срыва чередующихся вихрей (с частотой θ) с острых кромок обтекаемого поперечного сечения моста (вихревые дорожки Кармана).

Методом Бубнова—Галёркина задача сведена к исследованию устойчивости линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. Результаты расчета по [6], [7] даются в виде схем.

Полученный результат качественно и количественно хорошо согласуется с действительной картиной колебаний моста непосредственно перед катастрофой (скорость ветра 60,5 *км/час*, 8 узлов по длине главного пролета, см. [1], стр. 131).

Получено следующее грубое условие устойчивости висячего моста при параметрическом резонансе для скоростей ветра, не превышающих V_0 *км/час*:

$$\omega_j^{(u)}\omega_h^{(h)}M^{(u)}M^{(h)} > \alpha^2 C_{jh}, \quad \omega_h^{(h)}M^{(h)} > \alpha d.$$

Здесь $\omega_j^{(u)}$, $\omega_h^{(h)}$ — всевозможные собственные частоты, удовлетворяющие условиям

$$\omega_j^{(u)} + \omega_h^{(h)} < 0{,}22V_0, \quad 2\omega_h^{(h)} < 0{,}22V_0.$$

Коэффициенты имеют значения:

$$\omega_j^{(h)} = \frac{(j+1)\pi}{l}\sqrt{\frac{2Hg}{\gamma F}}, \quad \omega_h^{h} = \frac{(h+1)\pi}{l}\sqrt{\frac{\left(\frac{Hb^2}{2}+GJ\right)g}{\gamma J}},$$

$$C_{jh} = 2\,|(-1)^j + (-1)^h|\,\frac{(h+1)(j+1)^3}{(j-h)^2(j+h+2)^2}, \quad j \neq h; \quad C_{jj} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{(j+1)^2\pi^2}{3}\right].$$

$$M^{(u)} = \frac{\gamma F}{g}, \quad M^{(h)} = \frac{\gamma J}{g}, \quad d = \frac{kb^2}{2h}, \quad \alpha = 1{,}25\cdot 10^3 \text{ кг·сек/м}.$$

Численное значение коэффициента α взято из расчета для моста «Золотые ворота». Прочие обозначения—те же, что и в [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Рокар, Неустойчивость в механике, М., ИЛ, 1959.
[2] В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, 1956.
[3] И. И. Гольденблат, Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений, Стройиздат, 1947.
[4] Ф. Д. Дмитриев, Крушения инженерных сооружений, М., ГИЛСА, 1953.
[5] В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, М., Физматгиз, 1958.
[6] В. А. Якубович, О динамической устойчивости упругих систем, ДАН (1959).
[7] В. А. Якубович, Системы линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами, Автореферат диссертации, изд. ЛГУ, 1959.

После доклада был продемонстрирован документальный фильм о гибели Такомского моста.

Заседание 22 марта 1960 г.

Обсуждение работ И. Г. Петровского и Н. Г. Четаева, выдвинутых на соискание Ленинской премии. Обзор работ И. Г. Петровского сделал Д. К. Фаддеев и В. А. Якубович. Обзор работ Н. Г. Четаева сделал Г. Ю. Джанелидзе.

Общество поддержало выдвижение работ И. Г. Петровского и Н. Г. Четаева на соискание Ленинских премий.

Заседание 12 апреля 1960 г.

1. М. Ш. Бирман «О спектре дифференциальных операторов» (обзорный доклад).

2. Р. А. Зайдман «Новейшее развитие математической теории информации и некоторые теоретико-информационные теоремы».

Пусть имеется *алфавит* A из D букв: $\{a_1, \ldots, a_D\}$ и в этом алфавите набор *сообщений* (конечных последовательностей букв).

Сообщение, которое нельзя разбить на два сообщения, назовем *словом*. Потребуем, чтобы любое сообщение однозначно разбивалось на слова и чтобы любой «кусок сообщения», состоящий из слов, был сообщением. (Эти требования будут выполняться, если мы, например, назовем одну из букв «промежутком» и потребуем, чтобы любое сообщение оканчивалось на промежуток, а словом назовем сообщение, не содержащее промежутка внутри.)

Набор сообщений, удовлетворяющий этим требованиям, назовем *языком*.

Обозначим через W_n число сообщений длины n; через w_n — число слов длины n; через V_n — число всех «кусков сообщений» длины n, т. е. всех последовательностей букв длины n, встречающихся в каком-либо сообщении; через v_n — число всех «кусков слов» длины n.

Положим $v_0=w_0=V_0=W_0=1$.

Очевидно, $V_{k+l} \leqslant V_k \cdot V_l$ и, значит, существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{V_n}=d=\inf_n \sqrt[n]{V_n}.$$

Очевидно, далее, что

$$W_n \leqslant \sum_{\substack{\alpha\leqslant k\\ \beta\leqslant n-k}} W_\alpha W_\beta w_{n-(\alpha+\beta)}$$

и

$$V_n \leqslant \sum_{\alpha+\beta\leqslant n} v_\alpha v_\beta W_{n-(\alpha+\beta)}.$$

Отсюда при некоторых естественных предположениях следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{W_n}=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{V_n}=d.$$

Назовем d «эффективным числом букв» языка.

Если на множестве кусков сообщений, рассматриваемых как цилиндры, ввести стационарную вероятностную меру, то язык становится стационарным вероятностным процессом, который мы назовем «источником», с энтропией на символ H.

Назовем кодированием обратимое отображение (вообще говоря, нестационарное одного языка в другой, при котором сообщения отображаются на сообщения.

Если некоторый источник $\mathfrak{M}$ с энтропией на символ H кодируется с помощью языка $\mathfrak{N}$ с эффективным числом букв d, то среднее число букв в $\mathfrak{N}$, приходящееся на одну букву в $\mathfrak{M}$: $L \geqslant \frac{H}{\log d}$, причем всегда можно так закодировать $\mathfrak{M}$ с помощью $\mathfrak{N}$, что будет $L=\frac{H}{\log d}$.

Теорема. *Пусть даны дискретный стационарный канал Ξ без предвосхищения, с конечной памятью (в смысле Хинчина) и с пропускной способностью C. Тогда для любого $H<C$ любой источник можно так закодировать с помощью некоторого языка, что получится источник с энтропией на символ H, при передаче которого через*

канал Ξ вероятность ошибки при приеме любого сообщения длины n будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Если же у полученного после кодирования источника энтропия на символ $H > C$, то вероятность ошибки будет стремиться к 1 при $n \to \infty$.

Заседание 26 апреля 1960 г.

Выдвижение кандидатур в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР. Тайным голосованием Общество выдвинуло в действительные члены АН СССР по специальности «математика»: А. Д. Александрова; в члены-корреспонденты АН СССР по специальности «математика»: Б. А. Венкова, О. А. Ладыженскую, С. М. Лозинского, Д. К. Фаддеева; в члены-корреспонденты АН СССР по специальности «механика»: С. В. Валландера, Г. Ю. Джанелидзе, Л. М. Качанова, Н. Н. Поляхова.

Заседание 10 мая 1960 г.

Л. М. Абрамов «О новых методах в метрической теории динамических систем».

Приводятся некоторые результаты, являющиеся развитием исследований, опубликованных автором в [1], § 1. По поводу используемых здесь понятий теории меры и метрической теории динамических систем см. [2].

1°. Пусть M — пространство Лебега с мерой μ и T — его автоморфизм. Напомним известное определение энтропии автоморфизма. Для любого измеримого, не более чем счетного разбиения ξ пространства M с элементами $C_1, C_2, \ldots$ положим

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu C_k \log \mu C_k.$$

Множество разбиений ξ с $H(\xi) < \infty$ обозначим через Z. Положим

$$\xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^k \xi,$$

$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n),$$

$$h(T) = \sup_{\xi \in Z} h(T, \xi).$$

Число $h(T)$ называется энтропией автоморфизма T (см. [3], [4], [5]).

2°. Пусть X — измеримое множество в M. Для $\xi \in Z$ положим

$$H(\xi \cap X) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu(c_k \cap X) \log \mu(c_k \cap X).$$

Теорема 1. *Для любого $\xi \in Z$ и любого измеримого $X \subseteq M$ существует предел*

$$h(T, \xi, X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n \cap X).$$

Определение. Для любого измеримого $X \subseteq M$ положим

$$h(T, X) = \sup_{\xi \in Z} h(T, \xi, X),$$

$h(T, X)$ назовем энтропией автоморфизма T на множестве X.

3°. Пусть ζ — измеримое разбиение пространства M, все элементы которого инвариантны относительно T. Обозначим через M/ζ фактор-пространство пространства M по разбиению ζ; через μ_ζ — меру Лебега, индуцируемую мерой μ в M/ζ; через $\{\mu_C\}$ — каноническую систему мер на элементах C разбиения ζ; через T_C — автоморфизм пространства Лебега C, индуцируемый в нем автоморфизмом T; через ξ_C — разбиение пространства C, индуцируемое в нем разбиением ξ пространства M.

Теорема 2. *Для любого измеримого $X \subseteq M$ и любого $\xi \in Z$*

$$h(T, \xi, X) = \int_{M/\zeta} \mu_C(C \cap X)\, h(T_C, \xi_C)\, d\mu_\zeta \tag{1}$$

и

$$h(T, X) = \int_{M/\zeta} \mu_C(C \cap X)\, h(T_C)\, d\mu_\zeta. \tag{2}$$

Полагая в формулах (1) и (2) $X = M$ получаем формулы В. А. Рохлина для энтропии неэргодического автоморфизма (см. [5], [2]).

Теорема 3. *Если автоморфизм T эргодичен, то для любого измеримого $X \subseteq M$ и любого $\xi \in Z$*

$$h(T, \xi, X) = h(T, \xi)\, \mu X$$

и

$$h(T, X) = h(T)\, \mu X.$$

Эта теорема была сообщена автору в качестве гипотезы В. А. Рохлиным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Абрамов, Энтропия производного автоморфизма, ДАН 128, № 4 (1959).
[2] В. А. Рохлин, Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, УМН XV, вып. 4 (94) (1960).
[3] А. Н. Колмогоров, Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизма, ДАН 124, № 4 (1959).
[4] Я. Г. Синай, Об энтропии динамической системы, ДАН 124, № 4 (1959).
[5] В. А. Рохлин, Об энтропии метрического автоморфизма, ДАН 124, № 5 (1959).

Заседание 24 мая 1960 г.

1. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Бакельман Илья Яковлевич,
Басов Владимир Петрович,
Боревич Зенон Иванович,
Борисов Юрий Федорович,
Виноградов Аскольд Иванович,
Гавурин Марк Константинович,
Колбина Лениана Ивановна,
Окунев Борис Николаевич,
Скачков Борис Николаевич,
Смирнов Модест Михайлович,
Цейтин Григорий Самуилович,
Юшков Петр Петрович.

2. И. В. Романовский «Информация о совещании по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании».

3. В. А. Булавский, Э. О. Рапопорт, В. Е. Солдатов «Разработка и обоснование новых тарифов на такси».

Изучение вопроса об установлении экономически наиболее обоснованного тарифа на пользование легковыми такси привело к выводу о целесообразности введения тарифа с покилометровой оплатой, понижающейся с увеличением расстояния[1]). Оплата поездки при таком тарифе строится следующим образом:

начальная плата . . . . 1 *руб*,
покилометровая плата . . . . . 1 *руб/км*,
оплата стоянки . . . . 15 *руб/час*.

Предлагаемый тариф отличается следующими особенностями.

1°. Этот тариф означает в целом значительное снижение оплаты (по сравнению с действующим). Однако это снижение дифференцированное: для коротких поездок оно значительно меньше, чем для дальних.

2°. Иная структура тарифа — введение начальной оплаты помимо покилометровой — определяется самой природой затрат по перевозке пассажиров. Помимо затрат, пропорциональных расстоянию, имеются затраты, связанные с каждой отдельной поездкой, вне зависимости от ее длины (затраты на холостой пробег и частично на простои на стоянках).

3°. Указанный тариф делает более доступным использование такси для дальних поездок, в частности для связи с вновь застраиваемыми окраинными районами, что следует считать социально оправданным.

Как известно, в 1954 г. было произведено снижение тарифа. Сведения о работе такси до снижения исчерпывались некоторыми совокупными данными: средняя длина ездки, валовый доход, прибыль и т. д.

В 1959 г. было проведено обследование работы такси в будние и воскресные дни. Интересно отметить, что распределение поездок по длинам подчинено логарифмически нормальному закону.

Чтобы в какой-то мере предсказать изменение показателей работы такси, которое произойдет при изменении тарифа, нужно изучить, как реагирует население на изменение стоимости такси. Здесь нам может помочь изучение данных о работе такси в период снижения тарифа 1954 г.

Введем понятие о коэффициенте эластичности. Назовем коэффициентом эластичности отношение процентного изменения спроса к процентному изменению тарифа.

Естественно, что для поездок разных длин коэффициент эластичности различный. Для расчета коэффициента эластичности разбиваем поездки разной длины на n групп и рассчитаем среднее в группе и долю группы в общем числе поездок за будний день 21.06 и субботний и воскресный (16.05 и 17.05) дни.

Данных о распределении поездок по аналогичным группам за 1954 г. не имелось. Поэтому для расчета такого распределения применялось следующее соображение.

Изменение распределения в будний и субботний день объясняется тем, что население в выходной день чувствует себя «богаче» на $k\%$. Это эквивалентно снижению тарифа на $k\%$. Предполагаем, что при снижении 1954 г. произошел аналогичный сдвиг с коэффициентом пропорциональности χ.

Пусть α_i — средняя длина ездки в группе i, а η_i и ξ_i — соответственно доля группы в общем числе поездок в будний и воскресный дни. Среднюю длину поездки в 1954 г обозначим через γ. Тогда сдвиг χ вычисляется из соотношения

$$\sum_i \alpha_i\,[\eta_i+\chi(\eta_i-\xi_i)]=\gamma.$$

[1]) Постановлением Совета Министров РСФСР предложенные тарифы вводятся с 1 января 1961 г.

После вычисления коэффициенты эластичности оказываются определенными. Предполагаем, что при проектируемом снижении тарифа коэффициенты эластичности остаются прежними.

Результаты дальнейших вычислений сведены в таблицу.

№ п/п	Показатель работы	Действующий тариф	Предлагаемый тариф
1	Валовой пробег за 1 м. ч.[1]	19,9 *км*	23,8 *км*
2	Полезный пробег за 1 м. ч.	14,6 *км*	18,3 *км*
3	Валовой доход за 1 м. ч.	22,8 руб.	22,0 руб.
4	Затраты на 1 м. ч.	12,4 руб.	13,8 руб.
5	Прибыль за 1 м. ч.	10,4 руб.	8,0 руб.
6	Средняя длина поездки	5,5 *км*	6,5 *км*
7	Расчетное число м. ч. на линии за год в тыс. м. ч.	5800	6800
8	Валовой доход в млн. руб.	133	150
9	Расход в млн. руб.	73	94
10	Прибыль в млн. руб.	60	56

[1]) М. ч. — машино-час.

Следует отметить, что даже без учета изменения качественных показателей (повышение пробега на машино-час), а также изменения общего объема работы, прибыль государства уменьшается незначительно, а условный выигрыш населения составляет 43 млн. руб.

4. Обсуждение издательского плана Физматгиза на 1961 г.

С кратким сообщением от имени издательства выступил В. И. Битюцков. Общество одобрило план изданий Физматгиза на 1961 г., а также деятельность издательства в 1959—1960 гг.

Общество подчеркнуло важную роль Физматгиза в издании научной монографической литературы и журналов. Протокол обсуждения, а также развернутая резолюция направлены в Физматгиз.

1961 г. май—июнь т. XVI, вып. 3 (99)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 11 октября 1960 г.

1. И. Я. Бакельман «Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений».

Рассматривается вопрос о существовании решения первой краевой задачи для уравнения

$$A(x,\ y,\ p,\ q)\,r+2B(x,\ y,\ p,\ q)\,s+C(x,\ y,\ p,\ q)\,t=D(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \tag{1}$$

при граничном условии $z|_\Gamma=0$ в области Ω, ограниченной трижды непрерывно дифференцируемой замкнутой кривой Γ, кривизна которой во всех точках не меньше $k_0=\text{const}>0$.

Пусть: 1) A, B, C, D при всех конечных значениях z, p, q и $(x,\ y)\in\Omega+\Gamma$ принадлежат $C^{1,\lambda}$ $(0<\lambda<1)$, 2) при $z^2+p^2+q^2\leqslant m$, $A>0$, $AC-B^2\geqslant R(m)>0$, где $R(m)$ — постоянная, зависящая только от $m>0$, 3) $D_z\geqslant 0$ при всех допустимых значениях x, y, z, p, q.

Тогда, как известно (см. [1], [2]), поставленная выше первая краевая задача будет разрешима, если для предполагаемого решения может быть получена априорная оценка в $C^1(\Omega+\Gamma)$.

Эти оценки были получены С. Н. Бернштейном [1] в случае, когда

$$D_z\geqslant d_0=\text{const}>0, \tag{2}$$

$$\frac{|D|}{Ap^2+2Bpq+Cq^2}\leqslant K=\text{const}<\infty \qquad (p^2+q^2\geqslant 1). \tag{3}$$

Если условие (2) заменить на условие $D_z\geqslant 0$ и снять условие согласования (3) роста коэффициентов уравнения (1) при $p^2+q^2\to+\infty$, то методы С. Н. Бернштейна для получения априорных оценок оказываются неприменимыми.

Для получения априорных оценок используются геометрические методы, связанные с оценками положительной части обобщенной гауссовой интегральной кривизны поверхности, определяемого решением уравнения (1). Как обобщенная интегральная кривизна, так и связанные с ней оценки строятся по коэффициентам уравнения.

Подробные формулировки полученных теорем и краткая схема их доказательства содержатся в работе автора [3].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Собр. сочинений, т. III, 1960.
[2] К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.
[3] И. Я. Бакельман, Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений, ДАН 134, № 5 (1960).

2. Информация Ю. В. Линника о втором венгерском математическом съезде.

3. Информация Ю. В. Линника о всесоюзном совещании по теории вероятностей в г. Вильнюсе.

4. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Абрамов Леонид Михайлович,
Бабич Василий Михайлович,
Баранцев Рэм Георгиевич,
Бирман Михаил Соломонович,
Вержбинский Михаил Львович,
Воробьев Николай Николаевич,
Воробьев Юрий Васильевич,
Егорова Ирина Александровна,
Ильин Валентин Петрович,
Огородников Кирилл Федорович,
Сенькин Евгений Поликарпович.

Заседание 25 октября 1960 г.

1. Л. Д. Фаддеев «О временной теории рассеяния в квантовой механике» (обзорный доклад).

2. В. Л. Файншмидт «Обобщенные циклически монотонные полиномы».

Излагается способ построения одного класса регулярно-монотонных полиномов Эйлера—Бернштейна. Приводятся некоторые экстремальные свойства, которыми эти полиномы обладают. Содержание доклада опубликовано в ДАН 130, № 5 (1960); ДАН БССР, № 9 (1960); Изв. вузов, сер. матем., № 5.

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Амосов Сергей Иванович,
Анфертьева Елена Александровна,
Буров Виктор Николаевич,
Емельянов Георгий Владимирович,
Клиот-Дашинский Михаил Исаакович,
Никитин Алексей Алексеевич,
Николаев Виктор Федорович,
Рохлин Владимир Абрамович,
Рубинштейн Геннадий Соломонович,
Скитович Виктор Павлович.

4. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинской премии 1961 г. в области науки и техники. Тайным голосованием Общество выдвинуло на соискание Ленинской премии: 1) работы Б. А. Венкова по геометрии чисел; 2) работы Л. В. Канторовича по линейному программированию.

Заседание 22 ноября 1960 г.

Заседание, организованное Обществом совместно с математико-механическим факультетом ЛГУ, было посвящено 60-летию со дня рождения и 40-летию научной и педагогической деятельности Бориса Алексеевича Венкова. С докладами о работах Б. А. Венкова по теории чисел выступили Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев. В заключение состоялось чествование юбиляра.

На этом же заседании принята рекомендация о переиздании известной монографии Б. А. Венкова «Элементарная теория чисел» (М.— Л., ОНТИ, 1937).

Заседание 13 декабря 1960 г.

1. М. А. Красносельский (Воронеж) «Положительные решения операторных уравнений» (обзорный доклад).

2. Информация В. Н. Судакова о конференции по функциональному анализу в г. Варшаве.

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Залгаллер Виктор Абрамович,
Ибрагимов Ильдар Абдуллович,
Натансон Гаральд Исидорович,
Соломяк Михаил Захарович,
Судаков Владимир Николаевич.

Заседание 27 декабря 1960 г.

Распорядительное собрание. Отчет Правления был зачитан президентом Общества Ю. В. Линником.

ОТЧЕТ

Правления Ленинградского математического общества о деятельности Общества за период с 29.IX 1959 г. по 27.XII 1960 г.

Ленинградское математическое общество было создано на организационном заседании 29.IX 1959 г. Первоначально оно насчитывало 49 членов, в основном — докторов наук.

За истекший период состоялось 19 заседаний Общества. Подробные отчеты о них публикуются в «Успехах математических наук» (см. УМН 14, вып. 6; 15, вып. 3, вып. 6). Был заслушан 21 научный доклад, в том числе 8 обзорных. Систематически делались краткие информационные сообщения о математической жизни (о состоявшихся съездах, конференциях и т. д.). Состоялось специальное заседание совместно с математико-механическим факультетом ЛГУ и учителями средних школ Ленинграда, на котором обсуждались вопросы школьного математического образования. Одно из заседаний Общества совместно с математико-механическим факультетом ЛГУ было посвящено чествованию проф. Б. А. Венкова в связи с шестидесятилетием со дня рождения и сорокалетием научной и педагогической деятельности.

Общество выдвигало кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты Академии наук СССР. Недавно были выдвинуты работы на соискание Ленинской премии 1961 г. Общество обсуждало ранее выдвинутые на соискание Ленинской премии 1960 г.

работы Петровского и Четаева. Весной этого года обсуждалась издательская деятельность Физматгиза и его план изданий на 1961 г.

Общество на своих заседаниях систематически избирало новых действительных членов. В настоящий момент в Обществе состоит 87 человек.

Были сделаны попытки создать при Ленинградском математическом обществе научный журнал. Эти попытки пока успеха не имели.

Наконец, о финансовой деятельности. Все доходы Общества за истекший период слагались из членских взносов. Общество почти не имело помощи от Ленинградского университета, хотя и создано при нем. Собрано членских взносов — 3250 руб. Потрачено (в основном, на обеспечение рассылки объявлений о заседаниях) — 1732 р. 94 к. Сейчас у Общества в наличии имеется 1517 р. 06 к., не считая задолженности по членским взносам.

Отчет ревизионной комиссии был зачитан В. П. Ильиным.

В прениях по отчетным докладам выступили В. И. Смирнов, О. А. Ладыженская, В. А. Залгаллер, Ю. В. Линник. Выступления были посвящены почти исключительно вопросу о создании в г. Ленинграде математического журнала. Выступавшие подчеркнули ненормальность того положения, когда такой крупный математический центр, как Ленинград, не имеет своего математического журнала. Общество поручило комиссии в составе А. Д. Александрова, О. А. Ладыженской и С. М. Лозинского продолжать хлопоты по созданию научного математического журнала в г. Ленинграде.

Работа Правления была признана удовлетворительной. В результате проведенного затем тайного голосования в состав Правления Общества избраны:

Юрий Владимирович Линник (президент),
Ольга Александровна Ладыженская (вице-президент),
Сергей Михайлович Лозинский (вице-президент),
Александр Данилович Александров,
Борис Алексеевич Венков,
Соломон Григорьевич Михлин,
Николай Николаевич Поляхов,
Борис Александрович Рымаренко (казначей),
Владимир Иванович Смирнов,
Михаил Федорович Широхов (секретарь).

Ревизионная комиссия избрана в следующем составе:

Валентин Петрович Ильин,
Михаил Захарович Соломяк,
Владимир Николаевич Судаков.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 14 февраля 1961 г.

1. В. А. Рохлин «Современное состояние топологии многообразий».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Мельников Илья Григорьевич,

Поволоцкий Абрам Исаакович.

Заседание 28 февраля 1961 г.

1. Обсуждение работ М. М. Постникова, выдвинутых на соискание Ленинской премии. Обзор работ М. М. Постникова сделал А. А. Иванов. В обсуждении приняли участие В. А. Рохлин и Д. К. Фаддеев.

Общество поддержало выдвижение работ М. М. Постникова на соискание Ленинской премии.

2. Г. Ц. Тумаркин «Приближение в среднем на спрямляемых кривых рациональными дробями с заданными полюсами».

Заседание 14 марта 1961 г.

1. С. М. Лозинский «Некоторые вопросы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 28 марта 1961 г.

1. С. С. Кислицин «Современное состояние теории поиска».

Вопросы поиска объекта в плоскости и пространстве рассматриваются в работах [1]—[4]. Представляет интерес статья Гильберта [5].

Ряд задач теории поиска связан с комбинаторикой, динамическим программированием и теорией информации. Пусть, например, имеется N монет, среди которых одна фальшивая, более легкая, чем все остальные. Априорные вероятности для каждой из монет быть фальшивой равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_N$ $\left(\sum_{i=1}^{N} p_i = 1\right)$. Разрешается делить множество монет произвольным образом на n частей и задавать вопрос, в какой из них находится фальшивая монета. Как нужно производить последовательные деления, чтобы выделить фальшивую монету за наименьшее в среднем число вопросов? Эта задача решена Хаффманом [6] (см. также [7]).

Вопрос о величине наименьшего среднего остается открытым. Для случая равных априорных вероятностей минимальное среднее $V_n\left(\left\{\frac{1}{N}\right\},\ N\right)$ равно

$$V_n\left(\left\{\frac{1}{N}\right\},\ N\right)=[\log_n N]+\frac{n\,(N-n^{[\log_n N]})-d_n\,|+n-1}{(n-1)\,N},$$

где $d_n=\left[\frac{N-n^{[\log_n N]}}{n-1}\right]$, а число за чертой добавляется при $d_n\neq 0$.

С частным случаем вышеуказанной ($n=3$) тесно связана задача о выделении более легкой фальшивой монеты с помощью чашечных весов без гирь за наименьшее в среднем число взвешиваний. Однако здесь деления множества монет подчинены дополнительным ограничениям (например, в первом делении должно быть два множества одинаковой численности). В случае равных априорных вероятностей имеет место формула для наименьшего среднего числа взвешиваний, $U\left(\left\{\frac{1}{N}\right\},\ N\right)$:

$$U\left(\left\{\frac{1}{N}\right\},\ N\right)=\begin{cases} V_3\left(\left\{\frac{1}{N}\right\},\ N\right) & \text{при } N\neq 6,\\ V_3\left(\left\{\frac{1}{6}\right\},\ 6\right)+\frac{1}{6} & \text{при } N=6\end{cases}$$

Относительно наименьшего числа взвешиваний, необходимого в самом неблагоприятном случае для выделения фальшивой монеты см. [8], [9]. Кэрнс [10] сообщает о частичном решении минимаксного варианта задачи о выделении двух более легких фальшивых монет.

Автором получена оценка для наименьшего среднего числа испытаний $S(N)$, необходимых для полного упорядочения N предметов с различными весами путем попарных сравнений (все $N!$ возможных расположений по весу предполагаются равновероятными) частичное решение минимаксного варианта задачи имеется в [11]):

$$S(N)<\log_2(N!)+0{,}0773N.$$

Очевидно, снизу $S(N)$ можно оценить так:

$$\log_2(N!)\leqslant V_2\left(\left\{\frac{1}{N!}\right\},\ N!\right)\leqslant S(N).$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. М. Морз и Д. Е. Кимбелл, Методы исследования операций, «Советское радио», 1956.

[2] B. O. Koopman, Kinematic bases, Operations Res. 4, 3 (1956), 324—346.

[3] B. O. Koopman, Target detection, Operations Res. 4, 5 (1956), 503—531.

[4] B. O. Koopman, The optimum distribution of searching effort, Operations Res. 5, 6 (1957), 613—626.

[5] E. N. Gilbert, Optimal search strategies, Journ. Soc. Industr. and Appl. Math. 7, 4 (1959), 413—424.

[6] D. A. Huffman, A method for the construction of minimum-redundancy codes, Proceedings of I.R.E. 40, 9 (1952), 1098—1101.

[7] S. Zimmerman, An optimal search procedure, Amer. Math. Monthly 66, 8 (1959), 690—693.

[8] V. Devidé, Ein Problem über Wagen, Elem. Math. 10, 1 (1959), 11—15.

[9] А. М. Яглом и И. М. Яглом, Вероятность и информация, М., Гостехиздат, 1957.

[10] S. S. Gairns, Balance scale sorting, Bull. of Amer. Math. Soc. 62, 2 (1956), 177.

[11] L. R. Ford, S. M. Johnson, A tournament problem, Amer. Math. Monthly 66, 5 (1959), 387—389.

2. Б. М. Бредихин (Куйбышев) «О некоторых законах распределения образующих элементов в теории упорядоченных полугрупп».

1°. Пусть G — мультипликативно записанная свободная коммутативная полугруппа со счетной системой P образующих элементов. Гомоморфизм полугруппы G в полугруппу положительных вещественных чисел назовем нормой и обозначим $N(\alpha)$, где $\alpha \in G$. Полугруппу G упорядочим по возрастающим нормам ее элементов при условии, что число элементов полугруппы G с условием $N(\alpha) \leqslant x$ конечно для любого $x > 0$.

Пусть, далее,

$$\nu_G(x) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x,\ \alpha\in G} 1 \quad \text{и} \quad \pi_G(y) = \sum_{N(\omega)\leqslant x,\ \omega\in P} 1.$$

В докладе рассматриваются асимптотические взаимоотношения, существующие между функциями $\nu_G(x)$ и $\pi_G(x)$.

2°. Функция $\nu_G(x)$ характеризует рост упорядоченной полугруппы G. Важным примером будет класс полугрупп степенного роста. К этому классу, например, принадлежат полугруппа всех натуральных чисел и полугруппа всех целых идеалов конечного расширения поля рациональных чисел степени n.

3°. С помощью элементарных методов, развитых в работах Эйуба [1] и Шапиро [2], выводится асимптотический закон распределения образующих элементов в упорядоченных полугруппах со степенным ростом, а именно

Теорема. *Если*

$$\nu_G(x) = C_G x^\theta + O\left(\frac{x^\theta}{\ln^{2+\varepsilon} x}\right),$$

где $C_G > 0$, $\theta > 0$ и $\varepsilon > 0$ — *произвольно малое заданное число, то*

$$\pi_G(x) \sim \frac{x^\theta}{\theta \ln x}.$$

Доказательство основано на рассмотрении в частном случае $\theta = 1$, к которому приводится общий случай обобщенного неравенства Сельберга (без остаточного члена)

$$\sum_{N(\omega)\leqslant x} \ln^2 N(\omega) + \sum_{N(\omega_i)N(\omega_j)\leqslant x} \ln N(\omega_i) \ln(\omega_j) \sim 2x \ln x.$$

4°. Распределение элементов в упорядоченных полугруппах с заданными системами образующих элементов изучается в случае, когда

$$\pi_G(x) \sim \frac{a}{\theta} \frac{x^\theta}{\ln x}.$$

С помощью элементарных методов выводится асимптотический закон распределения элементов полугруппы. Конструируются полугруппы со степенной плотностью, для дзета-функций которых имеет место аналог гипотезы Римана. Даются другие приложения теории, связанные с обобщением и уточнением некоторых теорем Ландау [3] и Вирзинга [4]. Основные результаты изложены в [5].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Ayoub, On Selberg's lemma for algebraic fields, Canad. Journ. Math. 7, № 1 (1955), 138—143.

[2] H. Shapiro, Tauberian theorems and elementary prime number theory, Communs Pure and Appl. Math. 12, № 4 (1959), 579—610.

[3] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, т. 2, 1909, 641—669.

[4] E. Wirsing, Über die Zahlen, deren Primteiler einer gegebenen Menge angehören, Arch. Math. 7, № 4 (1956), 263—272.

[5] Б. М. Бредихин, Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп, Матем. сб. 50 (92) : 2 (1960), 221—232.

Заседание 11 апреля 1961 г.

1. Б. Н. Делоне (Москва) «О правильных разбиениях пространств».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран:

Зубов Владимир Иванович.

Заседание 25 апреля 1961 г.

1. Н. Н. Мейман (Москва) «Новые результаты о распределении нулей и экстремальных свойствах целых функций».

2. С. Левшец (США) «О некоторых математических проблемах теории автоматического регулирования».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран:

Реморов Питирим Николаевич.

Заседание 9 мая 1961 г.

1. В. А. Якубович «Строение функционального пространства комплексных канонических уравнений с периодическими коэффициентами».

2. А. Н. Еругин «Асимптотика, асимптотическая структура и свойства интегральных кривых в окрестности особой точки типа фокус».

Рассматривается система $\dot{x}=\sum\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, $\dot{y}=\sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$, где X_i, Y_i — однородные полиномы от x и y и характеристическое уравнение системы имеет чисто мнимые корни. В случае фокуса уравнение интегральных кривых системы приводится к виду

$$\frac{dr}{d\vartheta}=gr^m+\sum_{n=m+1}^{\infty}\Re_n(\vartheta)\,r^{m+n}\quad (m\geqslant 3),$$

где r, ϑ — преобразованные полярные координаты; $\Re_n$ — полиномы от $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$; $g=\mathrm{const}<0$ (для определенности). Доказано, что

$$r=\vartheta_1^{-1}[1+\gamma(\vartheta)];\quad \vartheta_1=\sqrt[m-1]{g(m-1)\vartheta};\quad \gamma(\vartheta)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=r(m-1)}^{k(m-1)+x} h_{r,e}\frac{\ln^r\vartheta}{\vartheta_1^e}+$$

$$+\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{l=m+r(m-1)}^{k(m-1)+x}\mathfrak{X}_{r,e}(\vartheta)\frac{\ln^r\vartheta}{\vartheta_1^e}+o\left(\frac{1}{\vartheta_1^{k(m-1)+x}}\right)\qquad (0\leqslant x\leqslant m-2);$$

$k\geqslant 0$ — любое целое; $h_{r,e}=\mathrm{const}$ $\mathfrak{X}_{r,e}$ — полиномы от $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$; $\left(\int\limits_0^{2\pi}\mathfrak{X}_{r,e}\,d\vartheta=0\right)$;

$o\left(\frac{1}{\vartheta_1^{k(m-1)+x}}\right)$ — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\frac{1}{\vartheta_1^{k(m-1)+x}}$.

Для $h_{r,e}$ и $\mathfrak{X}_{r,e}$ получены рекуррентные формулы. Далее, коэффициенты $h_{r,k(m-1)+x}$ и $\mathfrak{X}_{r,k(m-1)+x}$ являются полиномами относительно произвольной постоянной системы порядка соответственно $k-r$ и $k-r-1$. Нетрудно привести примеры систем, у которых в разложении $\gamma(\vartheta)$ нет членов, содержащих $\ln\vartheta$. Аналогичным образом можно рассмотреть некоторые системы с неголоморфными правыми частями. Множество значений произвольно постоянной (множество S) имеет следующую структуру:

$$S=(-\infty,\ d_0]=\bigcup_{n=0}^{\infty}[d_{n+1},\ d_n];\quad d_n=\mathrm{const};\quad d_{n+1}<d_n;\quad \lim_{n\to\infty} d_n=-\infty,$$

при этом каждый отрезок вида $[d_{n+1},\ d_n]$ отображается взаимно однозначно на множество интегральных кривых системы; $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-d_{n+1})=|2\pi g|$. Из полученных результатов следует, что в случае фокуса существует кривая $r=r_0(\vartheta)=\vartheta_1^{-1}$ такая, что при приближении к началу координат интегральные кривые все меньше и меньше отличаются от $r=r_0(\vartheta)$ в смысле выполнения равенства $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} r(\vartheta,\ C):r_0(\vartheta)$, где $r=r(\vartheta,\ C)$ — уравнение интегральной кривой, соответствующей значению произвольной постоянной, равному C. В случае центра при приближении к началу координат все интегральные кривые все меньше и меньше отличаются от круга радиуса C в смысле выполнения равенства $\lim\limits_{C\to 0} r(\vartheta,\ C)\,C^{-1}$. Подобным же свойством обладает качественная картина системы двух дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями в случае двух одинаковых корней характеристического уравнения. Таким образом, здесь дан метод, позволяющий получить результаты, аналогичные результатам Фроммера [1] в тех случаях, когда метод Фроммера неприменим (метод Фроммера применим в тех случаях, когда имеется исключительное направление.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Фроммер, Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер, УМН, вып. IX (1941).

Заседание 23 мая 1961 г.

1. Н. Н. Воробьев «К аксиоматическому обоснованию теории вероятностей».

2. В. Г. Мазья «Теоремы вложения для произвольных множеств».

Изучаются классы открытых множеств Ω, для которых справедливы различные теоремы вложения, и оценки решений эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами. Некоторые из доказанных результатов имеют характер необходимых и достаточных условий, т. е. не только класс множеств определяет область изменения параметров p, l, q, s и т. п., в которой оператор вложения ограничен или вполне непрерывен, но и обратно, эти показатели определяют класс множеств, в которых заданы функции. Указываются также более легко проверяемые достаточные условия для справедливости теорем вложения. Часть результатов опубликована в [1]—[3].

Сформулируем достаточное условие принадлежности открытого множества Ω классу $J^{(n)}_{\nu(l)}$, определенному в [3]. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое в Ω отображение $\xi_i=\xi_i(x)$ с якобианом $J(x)=\left|\dfrac{\partial(\xi_1\ldots\xi_n)}{\partial(x_1\ldots x_n)}\right|$. Предположим, что существует такая постоянная C, что для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ при $x\in\Omega$ выполняется неравенство

$$\nabla\xi_i\nabla\xi_j(x)\cdot\alpha_1\alpha_2\geqslant CJ^2(x)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть множество Ω есть сумма конечного числа, может быть, пересекающихся открытых множеств $\Omega^{(l)}$, для каждого из которых существует преобразование $\xi_i^{(l)}=\xi_i^{(l)}(x)$ с суммируемым якобианом $J^{(l)}(x)$, удовлетворяющее условию (1) и отображающее $\Omega^{(l)}$ на множество из класса $J^{(0)}_{\frac{n-1}{n}}$ (например, на область, звездную* *относительно шара). Пусть, кроме того, существуют постоянные M и K такие, что для любого измеримого множества $E \subset \Omega^{(l)}$, мера которого не превосходит M, справедливо неравенство*

$$\nu(\mathrm{mes}_n E) \leqslant K\left(\int\limits_F J^{(l)}(x)\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

где $\nu(+)$ — некоторая неотрицательная функция. Тогда множество Ω принадлежит классу $J_{\nu(l)}^{(n)}$.

Сформулируем еще оценку в $L_{\frac{n}{n-1}}$ градиента решения эллиптического уравнения

$$\nabla[A(x)\nabla]+b(x)\ \nabla u+c(x)u=f(x), \tag{2}$$

дополняющую теорему 2 заметки [2].

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы 2 заметки* [2] *имеет место оценка*

$$\|\nabla u\|_{L_{\frac{n}{n-1}}}(\Omega) \leqslant K\left(\int\limits_\Omega |f|\ln+|f|\,dx+1+\|u\|_{L(\Omega)}\right). \tag{3}$$

Заменить выражение $\int\limits_\Omega |f|\ln+|f|\,dx+1$ нормой f в $L(\Omega)$ нельзя. Аналогичный результат получен для второй краевой задачи для областей с нерегулярной границей.

Заметим еще, что в теореме 6 заметки [1] неравенство

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}}(\Omega) \leqslant c\,\{C\,\|\nabla u\|_{L(\Omega)}+D\,\|u\|_{L_{\frac{p(n-1)}{(n-p)\beta}}}(\Gamma\Omega)$$

справедливо для множеств $\Omega \in K_\beta^{(n)}$ не только при $\beta \geqslant 1$, но и при $\beta \geqslant \frac{n}{n-1}$. Пример 3 в [1] при $\beta > \frac{1}{2}$ неверен.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. М а з ь я, Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств, ДАН 133, № 3 (1960).

[2] В. Г. М а з ь я, Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств, ДАН 137, № 5 (1961).

[3] В. Г. М а з ь я, P-проводимость и теоремы вложения функциональных пространств в пространство C, ДАН (1961).

3. Обсуждение издательского плана Физматгиза на 1962 г.

С сообщением от имени издательства выступил В. И. Битюцков. Общество одобрило план издания Физматгиза на 1962 г.

1962 г. июль—август *т. XVII, вып. 4 (106)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 26 сентября 1961 г.

1. В. Н. Чугуева и А. П. Хусу «Обзор исследований по математическим задачам оптимального управления энергоузлами со случайными входами».

2. Ю. В. Линник «О реорганизации национального комитета советских математиков и о международном математическом съезде 1962 г. в Стокгольме».

Заседание 10 октября 1961 г.

1. В. Н. Судаков и А. М. Вершик «Топологические вопросы теории меры в линейных пространствах».

Пусть E и E' — два локально выпуклых линейных топологических пространства в двойственности [1].

Определение 1. Говорят, что в E' задано *слабое распределение* μ, если для каждого замкнутого (в $\sigma(E', E)$) подпространства $F \subset E'$ конечного дефекта на фактор-пространство E'/F задана вероятностная мера μ_F, причем для разных F меры μ_F естественным образом согласованы (ср. [4]).

Задание слабого распределения эквивалентно, очевидно, заданию согласованной системы отображений

$$P_n^{\mu}\colon \overbrace{E \times \ldots \times E}^{n} \to V_n,$$

где V_n — множество всех n-мерных распределений. Достаточно задавать лишь P_1^{μ}.

Всякая вероятностная мера в E', заданная на σ-алгебре, содержащей цилиндрические множества, порождает слабое распределение. Говорят, что слабое распределение продолжается до меры, если существует мера, порождающая это слабое распределение.

Теорема 1 (Колмогоров [2], см. также [3]). *Пусть E^* — пространство всех линейных форм на E. Всякое слабое распределение в E' продолжается (и единственным образом) до меры в E^*.*

Определение 2 ([4], [5]). Пусть (Ω, m) — пространство с мерой, $S_m(\Omega)$ — пространство всех измеримых функций на Ω. *Обобщенным случайным процессом* в E' называется линейное отображение $\Phi\colon E \to S_m(\Omega)$.

Каждому обобщенному случайному процессу на E' отвечает единственное слабое распределение μ в E'.

Теорема 2. *Два предложения эквивалентны:*

1) *При почти всех* $\omega_0 \in \Omega$ $[\Phi(\varphi)](\omega_0) \in E'$.

2) *Слабое распределение, отвечающее* Φ, *продолжается до меры в* E'.

Пусть μ — слабое распределение в E', μ^* — продолжение его до меры в E^*. Тогда очевидное вложение $E \subset S_{\mu^*}(E^*)$ можно рассматривать как один из обобщенных случайных процессов, порождающих μ.

Определение 3 ([16]). *Характеристическим функционалом слабого распределения* μ *в* E' *называется функционал* $f_\mu(\varphi)$ *на* E:

$$f_\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it} d(P_1^\mu \varphi)(t).$$

Характеристический функционал является положительно определенным и непрерывным на каждом конечномерном подпространстве в E. Всякий функционал, обладающий этими двумя свойствами, есть характеристический функционал некоторого слабого распределения.

Пусть теперь τ — некоторая линейная топология на E, μ — слабое распределение в E'.

Теорема 3. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *Отображение* P_1^μ *непрерывно из* τ *в слабую топологию на* V_1.

2) $f_\mu(\varphi)$ *непрерывно в* τ.

3) *Вложение* $E \subset S_{\mu^*}(E^*)$ *непрерывно из* τ *в топологию сходимости по мере в* $S_{\mu^*}(E^*)$.

Будем для краткости говорить, что μ непрерывно в топологии τ, если 1), 2), 3) справедливы. Важная задача теории меры в линейных пространствах заключается в выяснении связей между непрерывностью слабого распределения в той или иной топологии на E и возможностью его продолжения до меры в E'. Решение этой задачи позволяет, например, судить о том, каков запас реализаций данного случайного процесса и т. п.

Обозначим через χ_μ слабейшую линейную топологию на E, в которой μ непрерывно. Из теоремы 3 следует, что топология χ_μ есть ограничение на E топологии $S_{\mu^*}(E^*)$, и поэтому χ_μ метризуема. Поскольку топология сходимости по мере не локально выпукла, то и χ_μ не обязана быть локально выпуклой. Такая возможность действительно реализуется: пусть μ есть счетная степень меры ϱ,

$$\varrho(A) = \int_A h(x)\,dx, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{216}, & |x| \leqslant 36, \\ |x|^{-3/2}, & |x| > 36, \end{cases}$$

топология χ_μ есть топология $l^{1/2}$.

Если слабое распределение μ гауссовское, то χ_μ обязательно гильбертова топология.

Поставим следующий вопрос: какова топология χ на E (если она существует), непрерывность в которой слабого распределения μ была бы необходима и достаточна для того, чтобы μ продолжалось до меры в E'? Этот вопрос решен Р. А. Минлосом и В. Сазоновым для счетно-гильбертовых пространств E.

Теорема 4 ([7] — [9]). *Пусть* E — *счетно-гильбертово пространство. Топология* χ *на* E *определяется системой полунорм* $p_B(\varphi) = (B_\varphi, \varphi)$, *где* B — *произвольный положительно определенный ядерный оператор из* E *в* E'.

Следующая теорема показывает, что в общем случае такой топологии χ может не существовать.

Теорема 5. *Пусть* μ *есть счетное произведение одной и той же меры на* R^1, *у которой существует второй момент. Топология* χ_μ *есть топология* l^2.

Таким образом, все μ указанного вида топологически неразличимы, в то время как их продолжения до меры могут лежать в существенно различных пространствах.

Неизвестно, для каких пар пространств (E, E') топология χ существует. Если E' сепарабельно и метризуемо, то легко показать, что топология χ на E (если она существует) не сильнее топологии равномерной сходимости на компактах из E'. Интересен также вопрос о нахождении топологий χ_1, непрерывности в которых слабого распределения μ достаточно для продолжимости μ до меры в E', и топологий χ_2, непрерывность в которых является необходимой для продолжимости μ до меры. Заметим, что $\chi_2 = \sup\limits_{\mu} \chi_\mu$, где sup берется по всем μ, продолжимым до меры в E'.

Если ограничиться гауссовскими слабыми распределениями, то задача о продолжении слабого распределения до меры в весьма широком классе случаев может быть решена в топологических терминах. Однако отыскание такой топологии для конкретных пространств, как правило, трудная задача.

Невыясненным остается вопрос о характере условий продолжимости (в тех случаях, когда топологических условий недостаточно).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959.
[2] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., ГТТИ, 1934.
[3] Getoor, On characteristic functions of Banach space valued random variables, Pacific Journ. Math. 7, 1 (1957).
[4] И. М. Гельфанд, Обобщенные случайные процессы, ДАН 100, № 5 (1955).
[5] Ито, Стационарные случайные обобщенные процессы, Матем., сб. переводов 1 : 1 (1957).
[6] A. Kolmogorof, La transformation de Laplase dans les linéaires, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 200, (1935).
[7] Р. А. Минлос, Обобщенные случайные процессы и их продолжения до меры, Труды Моск. матем. о-ва 8 (1959).
[8] В. Сазонов, Замечание о характеристических функционалах, Теория вероятн. и ее прим. 3, вып. 2 (1958).
[9] А. Н. Колмогоров, Замечания к работам Р. А. Минлоса и В. Сазонова, Теория вероятн. и ее прим. 4, вып. 2 (1959).

2. Рекомендация докладчиков на международный математический съезд 1962 г. в Стокгольме.

Заседание 24 октября 1962 г.

1. Г. Ш. Рубинштейн «Об одном принципе двойственности и некоторых его приложениях».

2. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1962 г.

Заседание 14 ноября 1961 г.

1. В. М. Бабич «О математических вопросах теории дифракции и распространения волн».

Заседание 28 ноября 1961 г.

1. Н. А. Сапогов «К теории приближения непрерывных функций линейными операторами».

1. Рассматривается пространство $\widetilde{C}$ всех непрерывных, 2π-периодических функций вещественных) с нормой $\|f\|_{\widetilde{C}} = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|$. Пусть $U(f, x)$ — линейный положитель-

ный оператор, заданный в $\widetilde{C}$ и отображающий это пространство в его часть $\widetilde{C}^*\subset\widetilde{C}$. Положительность оператора U означает, что $U(f, x)\geqslant 0$ для любого $x\in[0, 2\pi]$ всякий раз, когда $f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in[0, 2\pi]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $$\|U(1, x)-1\|_{\widetilde{C}}=\eta<\frac{1}{3};\qquad (1)$$

2) $$|f^*(x')-f^*(x'')|\leqslant L|x'-x''|\cdot\|f^*\|_{\widetilde{C}}$$

для любой функции $f^*\in\widetilde{C}$ *и любых вещественных* x', x'', *причем предполагается, что* $3\pi L\geqslant 2(1-3\eta)$.

Тогда найдется точка $x_0\in[0, 2\pi]$, *для которой будет выполняться неравенство*

$$U\left(\sin^2\frac{x-x_0}{2},\ x_0\right)\geqslant H_2\cdot L^{-2},$$

где постоянная $H_2\geqslant(1-3\eta)^2/54\pi^2(1+\eta)^2$.

Из этой теоремы, в частности, выводится оценка приближения непрерывных периодических функций линейными положительными операторами, отображающими $\widetilde{C}$ в его подпространство $\mathcal{T}_n$, элементами которого могут быть лишь тригонометрические полиномы $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$: если $U_n(f, x)$ отображает $\widetilde{C}$ в $\mathcal{T}_n$, причем выполнено условие (1), то найдется точка $x_0\in[0, 2\pi]$, для которой будет выполняться неравенство $U_n\left(\sin^2\frac{x-x_0}{2},\ x_0\right)\geqslant H_2 n^{-2}$.

Этот результат несколько усиливает теорему П. П. Коровкина ([1], стр. 125), гласящую, что не существует последовательности линейных положительных операторов $U_n(f, x)$, отображающих $\widetilde{C}$ в $\mathcal{T}_n$, для которой одновременно выполнялись бы при $n\to\infty$ соотношения

$$n\|U_n(1, x)-1\|_{\widetilde{C}}\to 0,\quad n^2\left\|U_n\left(\sin^2\frac{x-x_0}{2},\ x_0\right)\right\|_{\widetilde{C}}\to 0.$$

Теорема 1 допускает видоизменение, делающее ее удобной для применения к операторам, представляющим собой алгебраические многочлены. Аналогичным образом трактуется случай, когда значениями операторов являются полиномы по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля.

2. Далее под $\widetilde{C}$ понимается пространство всех *комплексноэначных* непрерывных и 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{\widetilde{C}}=\max\limits_{x}|f(x)|$. Через $\mathscr{E}_n$ обозначается подпространство $\widetilde{C}$, элементами которого могут быть лишь тригонометрические полиномы $E_n(x)=\sum\limits_{|k|\leqslant n}c_k\exp(ikx)$.

$U_n(f, x)$ — произвольный линейный оператор, отображающий $\widetilde{C}$ в $\mathscr{E}_n$, причем

$$U_n(\exp(ikx),\ x)=\sum_{|h|\leqslant n}\gamma_{k,h}^{(n)}\exp(ihn),\qquad (2)$$

$(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Далее, $c_k(f)$ обозначает коэффициент Фурье функции f, $f_n(x)=\sum\limits_{|k|\leqslant n}c_k(f)\exp(ikx)$, $f_t\equiv f(x+t)$.

Теорема 2. *Для любой* $f\in\widetilde{C}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_n(f_t,\ x-t)\,dt=U_n^0(f,\ x),$$

где

$$U_n^0(f, x)\equiv\sum_{|k|\leqslant n}c_k(f)\,\gamma_{k,k}^{(n)}\exp(ikx).$$

Теорема 3. *Если*

$$\sup_{\|E_n\|_{\widetilde{C}}\leqslant 1} \| U_n(E_n, x) - E_n(x) \|_{\widetilde{C}} = \Delta_n,$$

где $\Delta_n \leqslant 1$ *и* sup *берется по всем* $E_n \in \widetilde{C}$, $\| E_n \| \leqslant 1$, *то*
то

$$\| U_n \|_{\widetilde{C}} \geqslant \frac{4}{\pi^2} (1-\Delta_n) \ln n + O(1).$$

Из теорем 2 и 3 выводится

Следствие. *Не существует последовательности линейных операторов* $U_n(f, x)$, *отображающих* $\widetilde{C}$ *в* $\mathscr{E}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, *для которой выполнялись бы при любой* $f \in \widetilde{C}$ *соотношения*

$$\| U_n(f, x) - f(x) \|_{\widetilde{C}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

если

$$\left(1 - \sqrt{\sum_{|k|\leqslant n} | \gamma_{k,k}^{(n)} - 1 |^2}\right) \ln n \to \infty \quad при \quad n \to \infty,$$

где числа $\gamma_{k,k}^{(n)}$ *представляют собой диагональные коэффициенты линейного преобразования* (2).

Теоремы 2 и 3 допускают перефразировку на случай, когда вместо тригонометрических полиномов $E_n(x)$ рассматриваются алгебраические многочлены $P_n(x)$. Аналогичные результаты справедливы также и для линейных операторов, заданных в пространствах непрерывных функций на коммутативных бикомпактных группах.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., Физматгиз, 1959.

2. Г. Я. Арешкин «О компактности семейства вполне аддитивных функций множества П».

Пусть E — множество, M — кольцо его подмножеств, содержащее E, $K=K(M)$ — σ-кольцо, порожденное кольцом M. Рассматриваемые функции множества считаются конечными. Вполне аддитивные функции множества называются зарядами, неотрицательные — мерами. $V(\nu, H)$, $V^+(\nu, H)$ и $V^-(\nu, H)$ обозначают соответственно полную, верхнюю и нижнюю вариации заряда ν на множестве $H \in K$.

Пусть $\Phi_M = \{\nu_\alpha\}_{\alpha\in J}$ — семейство зарядов, заданных на M. Рассмотрим следующие типы непрерывности семейства Φ_M.

$(\text{РАН})_M^\mu$ — равностепенная абсолютная непрерывность относительно меры μ на кольце M (Витали).

$(\text{РН})_M$ — равностепенная непрерывность на кольце M (Каччиопполи).

$(\text{РА})_M$ — равномерная аддитивность на M (В. М. Дубровский).

$(\text{РСН})_M$ — равностепенная слабая непрерывность на M (см. [1]).

Очевидно, что $(\text{РСН})_K \rightleftarrows (\text{РА})_K$. Равносильность $(\text{РСН})_K$ и $(\text{РН})_K$ была доказана мною в работе [1]. Очевидно, что $(\text{РАН})_K^\mu \to (\text{РА})_K$. Обратное соотношение было доказано В. М. Дубровским. Таким образом, на σ-кольце K все четыре определения равносильны друг другу. Несколькими годами позже эту равносильность установил Кафиеро [3]. Если же $M \neq K(M)$, то эти определения, вообще говоря, не равносильны друг другу. Можно утверждать:

1. $(\text{РАН})_M^\mu \to (\text{РА})_M \to (\text{РСН})_M$, $(\text{РАН})_M^\mu \to (\text{РН})_M \to (\text{РСН})_M$.
2. $(\text{РА})_{M_\sigma} \to (\text{РСН})_{M_\sigma}$.
3. $(\text{РА})_M \to (\text{РА})_{M_\sigma}$.

4. Для того чтобы Φ_M обладало одним из свойств $(\text{PCH})_M$, $(\text{PH})_M$, $(\text{PA})_M$ или $(\text{PAH})_M^\mu$, достаточно, чтобы соответствующим свойством обладала любая счетная подсистема системы Φ_M.

Далее в работе исследуются различные типы сходимости зарядов и связь между ними. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность зарядов на M.

1. $\{\nu_n\}$ называется сходящейся на M к заряду ν, $\nu_n \underset{M}{\to} \nu$, если для каждого $\mathcal{M} \in M$ $\nu_n(\mathcal{M}) \to \nu(\mathcal{M})$ при $n \to \infty$.

2. $\{\nu_n\}$ сходится на кольце M к заряду ν по вариациям, $\nu_n \overset{V}{\underset{M}{\to}} \nu$, если $\nu_n \underset{M}{\to} \nu$ и если $V(\nu_n, E) \to V(\nu, E)$.

3. $\{\nu_n\}$ сильно сходится на M по вариациям к заряду ν, $\nu_n \overset{cV}{\underset{M}{\to}} \nu$, если $V(\nu_n - -\nu, E) \to 0$ при $n \to \infty$.

4. $\{\nu_n\}$ равномерно сходится на M к заряду ν, $\nu_n \underset{M}{\rightrightarrows} \nu$, если $\nu_n(\mathcal{M}) \to \nu(\mathcal{M})$ равномерно относительно $\mathcal{M} \in M$.

Сходимость $\nu_n \overset{V}{\underset{M}{\to}} \nu$ изучалась мною в [2]. Справедливы также следующие предложения:

I. Если $\nu_n \overset{V}{\underset{K}{\to}} \nu$, то при любом $H \in K$ $V(\nu_n, H) \to V(\nu, H)$.

II. Если $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$, то для того, чтобы $\nu_n \overset{V}{\underset{K}{\to}} \nu$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий $V^+(\nu_n, E) \to V^+(\nu_n, E)$, $V^-(\nu, E) \to V^-(\nu, E)$.

III. Пусть $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$ и $\psi_n = \nu_n - \nu$. Для того чтобы $\nu_n \overset{cV}{\underset{K}{\to}} \nu$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий $\psi_n(E_{\psi_n}^+) \to 0$, $\psi_n(E_{\psi_n}^-) \to 0$, где $E = E_{\psi_n}^+ \cup E_{\psi_n}^-$ — разложение Хана множества E по отношению к заряду ψ_n.

IV. Если $\nu_n \overset{cV}{\underset{K}{\to}} \nu$, то $\nu_n \overset{V}{\underset{K}{\to}} \nu$.

V. $\left(\nu_n \overset{cV}{\underset{K}{\to}} \nu\right) \rightleftarrows (\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu)$ (Кафиеро).

Отсюда вытекает ряд следствий о связях различных типов сходимости мер.

Справедливы следующие признаки сходимости зарядов:

I. Пусть ν_n и ν — заряды на K. Для того чтобы имело место одно из соотношений 1) $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$, 2) $\nu_n \overset{V}{\underset{K}{\to}} \nu$ или 3) $\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu$, достаточно выполнения соответствующего соотношения 1) $\nu_n \xrightarrow[M_{\sigma\delta}]{} \nu$, 2) $\nu_n \xrightarrow[M_{\sigma\delta}]{V} \nu$ или 3) $\nu_n \underset{M_{\sigma\delta}}{\rightrightarrows} \nu$.

II. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность зарядов на K, сходящаяся на каждом множестве $\mathcal{M} \in M$ к конечным пределам. Чтобы существовал заряд ν на K и чтобы $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$, необходимо выполнение условия $(\text{PA})_K$ и достаточно выполнения условия $(\text{PA})_{M_\delta}$.

III. Пусть последовательность зарядов $\{\nu_n\}$ равномерно сходится на каждом множестве кольца M к конечным пределам. Чтобы $\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\nu_n\}$ была $(\text{PA})_{M_\delta}$. В частности, если $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$, то для того, чтобы $\nu_n \underset{K}{\rightrightarrows} \nu$, достаточно $\nu_n \underset{M}{\rightrightarrows} \nu$. В случае, когда $\nu_n \geqslant 0$, в этом предложении можно заменить M_δ на M.

IV. Пусть $\{\nu_n\}$— последовательность зарядов на K. Для того, чтобы на K существовал заряд ν и чтобы $\nu_n \overset{V}{\underset{K}{\to}} \nu$ необходимо и достаточно выполнение условий: 1) последовательности $\{V^+(\nu_n)\}$ и $\{V^-(\nu_n)\}$ сходятся к конечным пределам на каждом множестве $\mathcal{M} \in M$, 2) $\{V(\nu_n)\}$ обладает свойством $(\text{PA})_M$.

Справедливы следующие теоремы о переходе к пределу под знаком производной:

1. *Пусть на σ-кольце K задана ненулевая мера μ и последовательность $\{\nu_n\}$ абсолютно непрерывных относительно μ зарядов. Пусть, далее, $\nu_n \xrightarrow[M_{\sigma\delta}]{} \nu$. Для того чтобы $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$ и чтобы последовательность производных Радона — Никодима $\frac{d\nu_n}{d\mu}$ сходилась по мере μ*

на множестве E к производной Радона—Никодима $\frac{d\nu}{d\mu}$, $\frac{d\nu_n}{d\mu} \overset{\mu}{\Rightarrow} \frac{d\nu}{d\mu}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\nu_n \underset{M_{\sigma\delta}}{\succ} \nu$.

2. *Пусть на σ-кольце K задана ненулевая мера μ и последовательность $\{\nu_n\}$ абсолютно непрерывных относительно μ зарядов. Для того чтобы существовал заряд ν на K такой, что* $\nu_n \underset{K}{\to} \nu$ *и* $\frac{d\nu_n}{d\mu} \overset{\mu}{\Rightarrow} \frac{d\nu}{d\mu}$, *необходимо и достаточно выполнение условий:* 1) $\{\nu_n\}$ *равномерно сходится к конечным пределам на M и* 2) $\{V(\nu_n)\}$ *сходится к конечным пределам на M и обладает свойством* $(\mathrm{PA})_M$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Я. Арешкин, О сходимости по длине и о криволинейном интеграле Лебега, ДАН, 72, № 5 (1950).

[2] Г. Я. Арешкин, О возможности перестановки знаков предела и полной вариации в теории вполне аддитивных функций множества, УМН 4, вып. 3 (1949).

[3] F. Cafiero, Sulle famiglie compatte di funzioni additive di insieme astrato, Atti IV congr. Unione mat. ital. 2 (1953).

Заседание 12 декабря 1961 г.

1. Е. С. Ляпин «Об упорядочиваемости преобразований и функций».
2. Р. А. Зайдман «Случайные блуждания немарковского типа».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 27 февраля 1962 г.

1. В. И. Зубов «Теория рекуррентных (по Биркгофу) движений».

2. А. Н. Андрианов «Новые методы в теории эллиптических модулярных функций».

Заседание 13 марта 1962 г.

1. Б. З. Вулих «О геометрии частично упорядоченных нормированных пространств».

Намечается некоторое объединение теории Л. В. Канторовича линейных структур с монотонной нормой с общей теорией конусов в нормированных пространствах, построенной М. Г. Крейном и дополненной за последнее время М. А. Красносельским. Используется терминология, введенная в [1].

Пусть X — частично упорядоченная линейная система, X_+ — конус ее положительных элементов. Будем говорить, что в $X(X_+)$ выполнен принцип Архимеда, если из того, что для некоторого $x \in X(X_+)$ множество всех его «кратных» $\{nx\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничено сверху, следует, что $x \leqslant 0$ $(x = 0)$. Известно, что если в K-линеале X конус X_+ архимедов, то и сам X тоже архимедов. Однако в общих частично-упорядоченных линейных системах возможно, что конус X_+ архимедов и притом воспроизводящий, а сама система X не архимедова. Пример — двумерная плоскость с открытым «развернутым» конусом: $x = (x_1, x_2) > 0$ означает, что $x_1 > 0$. Та же плоскость, упорядоченная лексикографически, представляет пример линейной структуры (даже цепи), где принцип Архимеда нарушен уже в конусе положительных элементов. Д. А. Владимиров заметил, что нарушение принципа Архимеда в X (соответственно в X_+) равносильно тому, что в X существует двумерная плоскость с «лексикографическим» (т. е. полуоткрытым развернутым) или с открытым развернутым (соответственно только лексикографическим) конусом положительных элементов.

Пусть теперь X — частично упорядоченное нормированное пространство. Если конус X_+ замкнут, то пространство X — архимедово. Обратное неверно, даже если X — структура. Однако докажем, что *если X архимедово, а конус X_+ телесен, то он замкнут.*

Действительно, пусть $x_n \geqslant 0$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$. Если $u \gg 0$, то $x_n - x \leqslant \varepsilon u$, где $\varepsilon_n \to 0$. Отсюда следует, что $x \geqslant -\varepsilon_n u$ при всех n, а тогда $x \geqslant 0$ по принципу Архимеда.

Замкнутость конуса X_+ равносильна возможности перехода к пределу в неравенстве: если $x_n \geqslant y_n$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, $y_n \xrightarrow{(b)} y$, то $x \geqslant y$.

Переходим к рассмотрению нормальных конусов (определение принадлежит М. Г. Крейну и приведено в [1]). Нормальность конуса X_+ также равносильна справедливости одной из классических теорем анализа: если $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $x_n \xrightarrow{(b)} x$, $z_n \xrightarrow{(b)} x$, то $y_n \xrightarrow{(b)} x$.

Нормальность конуса X_+ легче всего проверяется с помощью следующего признака И. А. Бахтина [2]: *для того чтобы конус X_+ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $0 \leqslant y \leqslant x$ влекло $\|y\| \leqslant M\|x\|$, где постоянная M не зависит от x и y.* Из этого признака сразу следует, что *нормальный конус X_+ всегда архимедов.* Однако пространство X может при этом не быть архимедовым (пример: двумерная евклидова плоскость с открытым конусом, угол раствора которого меньше π).

Свойства замкнутости и нормальности конуса X_+ непосредственно друг с другом не связаны. Замкнутый конус может не быть нормальным, а нормальный конус даже в архимедовом банаховом пространстве может не быть замкнутым. Последнее замечание остается в силе и в том случае, когда X — не просто частично упорядочено, а представляет K-линеал. Это подтверждается примером, построенным Г. Я. Лозановским.

Назовем *нормированной (банаховой) структурой* всякое частично упорядоченное нормированное пространство (частично упорядоченное банахово пространство), являющееся K-линеалом (здесь мы отклоняемся от терминологии, принятой в [1]). Норма в структуре называется *монотонной*, если из $|x| \leqslant |y|$ вытекает, что $\|x\| \leqslant \|y\|$. Такое в некотором смысле наилучшее согласование нормы с упорядочением имеет место во многих важных конкретных функциональных пространствах. В теории Л. В. Канторовича рассматривались нормированные структуры только с монотонной нормой (в [1] они называются KN-линеалами; (b)-полные KN-линеалы называются KB-линеалами). Однако при рассмотрении более общих нормированных структур существенный интерес представляют и такие структуры, где норма эквивалентна некоторой монотонной норме. Существование эквивалентной монотонной нормы связано в первую очередь с нормальностью конуса X_+, но одного этого свойства еще недостаточно. Нормальность конуса X_+ позволяет ввести в X монотонную норму, но с более сильной сходимостью. *Для того чтобы в банаховой структуре X норма была эквивалентна некоторой монотонной норме, необходимо и достаточно, чтобы конус X_+ был нормальным и замкнутым* [3]. Для произвольной нормированной структуры и этого условия еще недостаточно, и требование замкнутости конуса X_+ нужно заменить на такое: из $x_n \xrightarrow{(b)} x$ следует, что $x_n^+ \xrightarrow{(b)} x_+$ ((b)-непрерывность структурных операций).

В [4] введены понятия правильного и вполне правильного конуса. Эти понятия также тесно связаны с некоторыми элементами теории Л. В. Канторовича. Так, например, оказывается, что *KB-пространство—это KN-линеал X с вполне правильным конусом X.* Если X — нормированное K_σ-пространство с замкнутым и нормальным конусом X_+, то правильность X_+ равносильна одному из условий, входящих в определение KB-пространства: из $x_n \downarrow 0$ вытекает $x_n \xrightarrow{(b)} 0$.

Наконец, понятие полной правильности конуса X_+ позволяет также сформулировать условие, при котором данная нормированная структура эквивалентна некоторому KB-пространству.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.

[2] И. А. Бахтин, О положительных решениях нелинейных уравнений с вогнутыми операторами, Диссертация, Воронеж. ун-т, 1958.

[3] Б. З. Вулих, О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой, ДАН (1962).

[4] М. А. Красносельский, Правильные и вполне правильные конусы, ДАН 135, № 2 (1960), 255—257.

2. О. М. Калинин «Математическая экология».

Экология изучает жизнь на популяционном уровне ее проявления. Эволюционный процесс, идущий на этом уровне, Дарвин назвал «естественным отбором», а для обозначения взаимоотношения организма и среды, в результате которого происходит естественный отбор, использовал термин «борьба за существование». Математические работы по динамике популяций часто носят название «борьба за существование» [1]—[3].

Важной характеристикой популяции служит численность (иногда рассматривают живую массу, а иногда энтропию). В трудно обозримой литературе по математической экологии можно выделить два основных направления: динамика численности и экспериментальное определение численности.

Первым из известных математиков, занимавшихся изучением моделей динамики нескольких видов, был Вольтерра [4], работавший с помощью дифференциальных уравнений. Изящную разработку математической модели взаимодействия двух видов, исходя лишь из самых естественных гипотез о динамике, произвел Колмогоров в трудно доступной статье [5]. Новые идеи, возникшие на почве математических построений, стимулировали проведение экспериментов по динамике популяций микроорганизмов Г. Ф. Гаузе и нашли отклик в большой исследовательской работе по динамике населения животных С. А. Северцова [6]. В работах Кернера [7] методы дифференциальных уравнений смыкаются с идеями статистической механики и термодинамики необратимых процессов.

Метод марковских процессов в динамике популяции является по сути дела обобщением метода дифференциальных уравнений. При естественных предположениях реализации марковского процесса $x(t)$ удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dx = m(t,\ x)\,dt + \sigma(t,\ x)\,dZ(t),$$

которое при $\sigma \equiv 0$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. С другой стороны, при естественных предположениях об m и σ существует «решение» этого уравнения, являющееся марковским процессом. Кроме общих тенденций процесса, схватываемых дифференциальными уравнениями, уравнение Ито учитывает чисто случайные флуктуации. Краткий и основательный обзор этого направления (и других вопросов математической экологии) содержится в [8].

Скептическое отношение некоторых биологов [9] к работам Вольтерра и его последователей основано на полном непонимании места математики в исследовательской работе. Например, статистическое изучение биоценозов характеризуется в [9] (стр. 291) как бесплодное извращение объективной картины теснейшей связи организмов со средой.

Среди задач количественного учета организмов исключительно интересны в математическом отношении задачи теории мечения [10], [11]. Постановку задач и изложение некоторых результатов теории можно найти в [12].

Замена реальной ситуации некоторой идеализированной гипотетической системой (математической моделью) вызывает пристальное внимание биолога. Но вопрос об отношении модели к действительности не прост. Полезным понятием может служить «универсальность» модели. Например, модель чистого роста популяции более универсальна, чем модель замкнутой популяции, так как логически замкнутость есть частный случай чистого роста. В докладе на примерах теории мечения показано, что с ростом универсальности модели повышается ее «тривиальность» (увеличиваются дисперсии оценок максимального правдоподобия, а в предельно универсальной модели эти оценки совсем исчезают). Грубые модели могут оказаться далеко нетривиальными. Эту мысль подчеркивал Бартлетт [8]. С другой стороны, совершенно адекватная модель может оказаться бесполезной.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Paris, 1935.

[2] G. F. Gause, The struggle for existence, Baltimore, 1934.

[3] T. Neyman, T. Park, E. L. Scott, Struggle for existence. The Tribolium model: diological and statistical aspects, Proc. Third. Berkeley Symposiym on Math. statistics and Probability, California (1956).

[4] V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, Mem. Acad. Lincei (6) 2 (1926), 31—113.

[5] A. Kolmogoroff, Sulla teoria di Volterra della lotta per l'existenza, Giornale dell'Istituto Italiano degli attuari 7 (1936), 74—80.

[6] С. А. Северцев, Динамика населения и приспособительная эволюция животных, М. — Л., 1941.
[7] E. Kerner, On the Volterra — Lotka principle, Bull. Math. Biophys. 23, № 2 (1961), 141—57.
[8] M. S. Bartlett, Stochastic population models in ecology and epidemiology, London, New York, 1960.
[9] Б. Г. Иогансен, Основы экологии, Томск, 1959.
[10] T. N. Darroch, The multiple-recapture census, Biometrika 45 (1958), 343—59; 46 (1959), 336—51.
[11] T. N. Dorroch, The two-sample capture-recapture census rohen tagging and sampling are stratified, Biometrika 48 (1961), 241—60.
[12] О. М. Калинин, Математическая теория мечения, Труды Третьей конференции по применению математики в биологии (1962).

Заседание 20 марта 1962 г.

Обсуждение работ в области математики, выдвинутых на соискание Ленинских премий 1962 г.

Краткие обзоры обсуждаемых работ сделали Ю. Ф. Борисов, В. И. Зубов, О. А. Ладыженская и М. Ш. Бирман.

Заседание 10 апреля 1962 г.

1. В. М. Бабич «Учебники теоретической механики и студент-математик».

Доклад В. М. Бабича вызвал оживленную дискуссию по вопросам преподавания теоретической механики в университетах.

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Векслер Александр Ильич.

Заседание 24 апреля 1962 г.

1. Обсуждение плана работ Физматгиза. С сообщением от издательства выступил А. Т. Цветков.

Общество одобрило план работ Физматгиза.

2. В. А. Якубович «Автоматы».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Болдырев Николай Георгиевич.

Заседание 8 мая 1962 г.

1. Б. Н. Делоне (Москва) «Об одной задаче геометрической теории чисел».

2. Присуждение премии Ленинградского математического общества молодому математику.

Премия Общества за 1962 г. присуждена В. Г. Мазье за работы «Классы множеств и теоремы вложения функциональных пространств. Некоторые вопросы теории эллиптических уравнений».

Представленные на конкурс работы К. Г. Валеева и И. В. Романовского отмечены грамотами Общества.

Заседание 22 мая 1962 г.

1. Президент Общества Ю. В. Линник предлагает избрать действительного члена Общества академика В. И. Смирнова в связи с его семидесятипятилетием почетным членом Общества.

Владимир Иванович Смирнов единогласно избирается почетным членом Ленинградского математического Общества.

2. Обсуждение кандидатов в академики и члены-корреспонденты АН СССР.

3. Ю. Нейман (США) «Основная проблема статистики от С. Н. Бернштейна до наших дней».

4. Вручение премии Ленинградского математического Общества молодому математику. Премия Общества за 1962 г. вручена В. Г. Мазье.

5. В. Г. Мазья «О теоремах вложения».

1963 г. июль — август *т. XVIII, вып. 4 (112)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 25 сентября 1962 г.

1. Ю. В. Линник и Л. Д. Фаддеев сделали сообщение о международном съезде математиков в Стокгольме.

Заседание 9 октября 1962 г.

1. С. М. Лозинский «О некоторых основных понятиях и теоремах теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

Заседание 23 октября 1962 г.

1. М. К. Гаврин «О ценности информации и близости информаций».

1°. Класс рассматриваемых информаций содержательно ограничивается следующими предположениями.

А. Информация служит руководством к действию.

Б. Результат действия может быть оценен числом (существует целевая функция — в терминах теории игр).

Будем предполагать, что имеется некто, мы будем называть его *деятелем*, который может предпринимать действия y из множества действий Y. Деятель получает, перерабатывает и хранит информацию. Накопленная информация называется *представлением* [1]) (деятеля о внешнем мире), порции поступающей информации называются *сообщениями*. Предполагается, что деятель имеет одно представление ξ из множества возможных представлений Ξ.

Выбор действия y осуществляется деятелем на основе имеющегося у него представления ξ, причем зависимость y от ξ целесообразно считать стохастической. Предполагается существование вероятности

$$\mathbf{P}(e \mid \xi)$$

того, что при имеющемся у деятеля представлении ξ, избранное им действие y будет принадлежать множеству $e \subset Y$. Функция P определена для всех $\xi \in \Xi$ и e, принадлежащих некоторому борелевому классу V_Y, не зависящему от ξ.

Примем, что действительное состояние внешнего мира характеризуется некоторым представлением $\xi_0 \in \Xi$, которое мы назовем *верным*.

Результатом действия y, предпринятого при верном представлении ξ_0, является платеж деятеля $\varphi(\xi_0, y)$. Математическое ожидание платежа при представлении

---

[1]) В некоторых работах мы по существу встречаемся с частными случаями представлений. В статье [1] роль представления играет весь накопленный в результате нескольких экспериментов опыт. В книге [3] (гл. XIII) представлением служит распределение вероятностей на множестве возможных состояний природы.

деятеля ξ есть

$$\zeta(\xi_0, \xi) = \int\limits_Y \varphi(\xi_0, y)\, \mathbf{P}(de \mid \xi)$$

(существование интеграла предполагается). Примем, что верна

Аксиома 1. *Для всякого* $\xi_0 \in \Xi$

$$\zeta(\xi_0, \xi_0) = \min_{\xi \in \Xi} \zeta(\xi_0, \xi).$$

Тогда разность

$$\nu(\xi_0, \xi) = \zeta(\xi_0, \xi) - \zeta(\xi_0, \xi_0)$$

характеризует отклонение представления ξ от верного представления ξ_0.

2°. Выдвигается *принцип обоснованности*, согласно которому применение любого критерия $\varkappa(\xi_0, \xi)$, характеризующего близость представлений ξ_0 и ξ, должно быть обосновано связью критерия $\varkappa$ с критерием ν. Для определенности будем считать критерий $\varkappa$ *обоснованным*, если из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa(\xi_0, \xi_n) = 0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(\xi_0, \xi_n) = 0$.

Примем, что Y есть метрический компакт и $\varphi(\xi, y)$ есть полунепрерывная снизу функция y. Тогда $\varphi(\xi, y)$ достигает на Y минимума и множество

$$\Theta(\xi) = \{y_0 : \varphi(\xi, y_0) = \min_{y \in Y} \varphi(\xi, y)\}$$

не пусто. Допустим теперь, что верна

Аксиома 2.

$$\mathbf{P}(\Theta(\xi) \mid \xi) = 1,$$

т. е. что деятель избирает лишь те действия, которые сулят ему минимальный платеж в предположении, что его представление ξ *является верным.*

Легко доказывается, что из аксиомы 2 следует аксиома 1.

Теорема 1. *Метрика* (см. [2])

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sup_{y \in Y} |\varphi(\xi_1, y) - \varphi(\xi_2, y)|$$

является обоснованной. Более того,

$$\nu(\xi_1, \xi_2) \leqslant 2r(\xi_1, \xi_2)$$

и постоянная 2 *не может быть заменена на меньшую.*

Теорема 2. *Если* Ξ *и* Y *суть метрические компакты и* $\varphi(\xi, y)$ *есть непрерывная функция совокупности своих аргументов, то* $\zeta(\xi_0, \xi)$ *непрерывна при* $\xi = \xi_0$, *т. е. метрика пространства* Ξ *является обоснованной.*

3°. Предположим, что и функция платежа φ является переменной. Считая Ξ и Y метрическими компактами, введем пространство $\Phi = C_{\Xi \times Y}$ непрерывных функций $\varphi(\xi, y)$ с метрикой $r_\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_{\xi \in \Xi,\, y \in Y} |\varphi_1(\xi, y) - \varphi_2(\xi, y)|$. Будем писать $\zeta(\xi_0, \xi; \varphi)$ вместо $\zeta(\xi_0, \xi)$ и аналогично введем φ в другие обозначения.

Теорема 3.

$$\varlimsup_{\substack{\varphi \to \bar\varphi \\ \xi \to \bar\xi}} |\zeta(\xi_0, \xi; \varphi) - \zeta(\xi_0, \bar\xi; \bar\varphi)| \leqslant \sup_{y \in \Theta(\bar\xi;\, \bar\varphi)} \bar\varphi(\xi_0, y) - \inf_{y \in \Theta(\bar\xi;\, \bar\varphi)} \bar\varphi(\xi_0, y).$$

Из этой теоремы следует, что $\zeta(\xi_0, \xi; \varphi)$, рассматриваемая как функция переменных (ξ, φ), непрерывна в точке $(\xi_0, \bar\varphi)$, где $\bar\varphi \in \Phi$ — любое. Содержательная интерпретация: руководитель предприятия имеет задачей получение максимальной прибыли; если его представление (о производственных возможностях предприятия, возможностях снабжения, себестоимости изделий и пр.) далеко от верного, небольшие колебания в уровне цен могут вызвать значительные изменения в размере получаемой прибыли, в отличие от случая, когда его представление близко к верному.

4°. Коротко остановимся на роли сообщений. Пусть деятель, имевший представление ξ и получивший сообщение u, вырабатывает новое представление $\bar{\xi}=f(\xi, u)$. Если при этом верным было представление ξ_0, то *ценность* сообщения u (в данной ситуации, характеризуемой заданием ξ_0 и ξ) есть

$$\mu(u;\ \xi_0,\ \xi)=\zeta(\xi_0,\ \xi)-\zeta(\xi_0,\ f(\xi,\ u)) \gtreqless 0^{1)}.$$

5°. Под *дезинформацией* (в широком смысле) понимаем передачу лицом A лицу $Б$ сообщения с целью побудить $Б$ к производству действий, выгодных лицу A. Допустим, что лицом $Б$ является деятель и что при верном представлении ξ_0 и действии y, произведенном деятелем, платеж лица A есть $\varphi_A(\xi_0, y)$. Математическое ожидание платежа при представлении деятеля ξ есть

$$\zeta_A(\xi_0,\ \xi)=\int\limits_Y \varphi_A(\xi_0,\ y)\,\mathbf{P}(de\mid\xi).$$

Ценность сообщения u для лица A есть

$$\mu_A(u;\ \xi_0,\ \xi)=\zeta_A(\xi_0,\ \xi)-\zeta_A(\xi_0,\ f(\xi,\ u)).$$

Если лицу A известны ξ_0, ξ, $\mathbf{P}$, φ, f, то он может решить задачу о максимизации μ_A, т. е. минимизации $\zeta_A(\xi_0, f(\xi, u))$ за счет выбора сообщения u. В противном случае ему приходится иметь дело с той или иной задачей на выбор решения в условиях неопределенности.

Если $\varphi_A=-\varphi$, можно говорить о дезинформации в узком смысле.

6°. Ставится задача о построении ε-сетей в Ξ в смысле критерия ν, т. е. о выборе такого конечного множества $\Xi_1\subset\Xi$, что для любого $\xi_0\in\Xi$ найдется $\xi\in\Xi_1$, так что $\nu(\xi_0, \xi)<\varepsilon$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Вальд, Основные идеи общей теории статистических решений. В кн. «Последовательный анализ», М., Физматгиз, 1960.

[2] A. Wald, Statistical decision function, New York, 1950.

[3] Р. Д. Льюс и Х. Райфа, Игры и решения, М., ИЛ, 1961.

2. Б. А. Рымаренко «О конференции по конструктивной теории функций в Баку».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран Мазья Владимир Гилелевич.

Заседание 13 ноября 1962 г.

1. Н. А. Сапогов «О нормах линейных полиномиальных операторов в связи с задачами приближения функций».

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ — система непрерывных ортонормированных на конечном отрезке $[a, b]$ функций:

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x)\,\overline{\varphi_l(x)}\,dV\ (x)=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

$C=C[a, b]$ обозначает линейное нормированное пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на $[a, b]$ (с нормой $\|f\|=\max|f(x)|$), а $\mathcal{F}_n$ — его подпространство, образованное всеми полиномами $\Phi_n=\sum\limits_1^n c_k\varphi_k(x)$, где c_k — комплексные числа.

1) Нетрудно привести пример, когда даже истинное сообщение имеет отрицательную ценность.

C_Φ пусть обозначает замыкание в C объединения всех $\mathfrak{F}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Вводятся четыре линейных оператора A_t, U_n, $\overline{A_t}$ и Π_n. Оператор $A_t: C_\Phi \longrightarrow C_\Phi$, определен на $\mathfrak{F}_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$ формулами $A_t\Phi_N = \sum\limits_1^N c_k\varphi_k(x)\,\varphi_k(t)$, предполагается, что $\| A_t \|_{\mathfrak{F}_N} \leqslant M$, где M не зависит от N.

Оператор $U_n = U_n(\Phi, x): C_\Phi \longrightarrow \mathfrak{F}_n$, причем

$$U_n(\varphi_k, x) = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{k,l}^{(n)}\varphi_l(x) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

где $\gamma_{k,l}^{(n)}$ — фиксированные коэффициенты.

Оператор $\overline{A}_t: \mathfrak{F}_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$, определен формулой

$$\overline{A}_t\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}.$$

Оператор $\Pi_n(\Phi, x)$: $C_\Phi \longrightarrow \mathfrak{F}_n$, определен формулой

$$\Pi_n(\Phi, x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\gamma_{k,k}^{(n)}\varphi_k(x),$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции Φ относительно $\varphi_k(x)$, а $\gamma_{k,k}^{(n)}$ — диагональные коэффициенты преобразования (1).

Тогда оказывается, что справедливо тождество

$$\int_a^b \overline{A}_t U_n(A_t\,\Phi, x)\,dt = \Pi_n(\Phi, x), \tag{2}$$

какова бы ни была функция $\Phi \in C_\Phi$.

Тождество (1) из [1] содержится в (2), если за $\{\varphi_k(x)\}$ принимается система тригонометрических функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\ ikx)\right\}$ и $a=0$, $b=2\pi$. Специально изучается случай, когда за $\{\varphi_k(x)\}$ принимается система собственных функций $\{v_k(x)\}$ задачи Штурма — Лиувилля:

$$u'' + (\lambda - q(x))\,u = 0, \qquad \left.\begin{aligned} u'(0) - hu(0) &= 0, \\ u'(\pi) + Hu(\pi) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

для которой принято, что существует ограниченная производная $q'(x)$ и h, H — конечны. На этот случай переносятся (и несколько усиливаются) теоремы, опубликованные ранее для тригонометрических и алгебраических операторов в [1] и [2].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Сапогов, Усиление теоремы Лозинского—Харшиладзе о полиномиальных приближениях, ДАН **143**, № **1** (1962), 53—55.

[2] Н. А. Сапогов, О нормах линейных полиномиальных операторов, ДАН 143, № 6 (1962), 1286—1288.

2. В. Л. Файншмидт «О некоторых экстремальных задачах в классе регулярно-монотонных полиномов».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избраны:

Виденский Виктор Соломонович,

Файншмидт Виктор Лейбович.

Заседание 26 ноября 1962 г.

Заседание проводилось совместно с заседанием Ученого совета Ленинградского университета и было посвящено пятидесятилетию со дня рождения и тридцатилетию научной и педагогической деятельности Александра Даниловича Александрова.

1. С. В. Валландер «Вступительное слово».

2. Б. Н. Делоне, Н. В. Ефимов, А. В. Погорелов «Проблемы и достижения современной геометрии».

3. В. И. Свидерский «Связь точных наук и философии».

4. Приветствия юбиляру.

Заседание 11 декабря 1962 г.

1. Н. Г. Чудаков «Современное состояние теории L-функций».

В течение всей первой половины нашего века делались попытки улучшения наших знаний о распределении нулей L-функций в критической полосе и приближения к доказательству гипотезы Римана.

Однако все исследования в этом направлении пока шли путем, который впервые был указан в работах Адамара и Валле-Пуссена еще в конце прошлого века. Идея этого метода состоит в том, что величина $M = \max |L(s, \chi)|$ внутри заданной области влияет на расположение нулей $L(s, \chi)$ в этой области — чем меньше M, тем дальше влево лежат эти нули. Поэтому все усилия были направлены на улучшение оценок тригонометрических сумм, от которых зависит оценка и M. Основные этапы в успехах по исследованию нулей $L(s, \chi)$ сопутствовали новым методам оценок тригонометрических сумм. Таковы были в свое время работы Ландау, Литтлвуда, Н. Г. Чудакова [1]. В настоящее время наиболее точные результаты о нулях L-функций получены в работах И. М. Виноградова и Н. М. Коробова.

Но этот адамаровский путь исследования имеет свои естественные границы; он не может дать доказательства даже квазиримановской гипотезы, т. е. степенного понижения в остаточном члене для числа простых. Это связано с тем, что $M = \infty$ для всей полуплоскости $\sigma \geqslant 1$. Еще большие затруднения встречаются в теории L-функций для действительных характеров, где даже довольно грубые оценки границы нулей содержат постоянные, для численного вычисления которых нет до сих пор алгоритма (теорема Зигеля).

Поэтому в классической теории L-функции мы должны искать принципиально новых путей исследований, используя все известные факты современной математики.

А пока полезно классическую теорию сопоставить с арифметическими объектами, которые ей родственны. Таковыми являются L-функции полей алгебраических функций с конечным числом постоянных.

Здесь исследование аналогичных проблем было продвинуто значительно дальше и аналог гипотезы Римана был доказан. Напомним основные факты этой теории. Пусть K — поле алгебраических функций, содержащее ровно q постоянных,

$$Z(u, K, \chi) = \sum_{\mathfrak{A}} \chi(\mathfrak{A}) u^{d\mathfrak{A}},$$

где $\mathfrak{A}$ пробегает все целые дивизоры поля K, $d\mathfrak{A}$ — степень $\mathfrak{A}$, $\chi(\mathfrak{A})$ — характер группы классов вычетов $\operatorname{mod} \mathfrak{M}$.

Если $\chi(\mathfrak{A}) = 1$, то

$$Z(u) = Z(u, K, 1) = (1-u)^{-1}(1-qu)^{-1} P(u, K),$$

где $P(u, K)$ — многочлен от u, степень которого равна $2g$ (g — род поля K).

Артин (1925) высказал гипотезу, что все нули $Z(u)$ лежат на окружности $|u| = q^{-\frac{1}{2}}$. Это и есть аналог гипотезы Римана в нашем случае. А. Вейль [2] полностью доказал эту гипотезу, опираясь на глубокие факты алгебраической геометрии; теперь обнаружено, что гипотеза Артина эквивалентна проблеме фикспунктов рациональных преобразований [3].

С другой стороны, теория полей классов обнаруживает, что все нули $Z(u, K, \chi)$ для любого χ образуют подмножество нулей некоторой $Z(u, L, 1)$, где L — конечное расширение K (поле классов χ относительно K). Поэтому теорема А. Вейля распространяется и на нули всех $Z(u, K, \chi)$.

Теорема А. Вейля нашла широкое применение в современной аналитической теории чисел. Например, она позволяет хорошо оценивать широкий класс тригонометрических сумм, которые интересны особенно для аддитивных проблем теории чисел, см., например, [4].

Упомянем здесь еще о работе Д. Н. Ленского [5], который использовал вышеупомянутую теорему для оценки числа представлений простого числа значениями многочленов от простых же аргументов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, М., ИЛ, 1953.

[2] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en deduisent, Paris, 1948 (Hermann).

[3] А. Маттук и Дж. Тэт, О неравенстве Кастельнуово—Севери, Математика 4 : 2 (1960).

[4] Г. И. Перельмутер, Оценка одной суммы с простыми числами. ДАН 144, № 1 (1962).

[5] Д. Н. Ленский, К оценке сверху некоторых теоретико-числовых функций в полях алгебраических чисел, ДАН 150, № 2 (1963).

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран:

Берман Давид Львович.

1964 г. январь—февраль *т. XIX, вып. 1 (115)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 12 февраля 1963 г.

Распорядительное собрание. Отчет Правления был зачитан президентом Общества Ю. В. Линником.

Отчет

Правления Ленинградского математического общества о деятельности Общества за период с 27/XII 1960 г. по 12/II 1963 г.

Ленинградское математическое общество было создано на организационном заседании 29/IX 1959 г. Первое распорядительное собрание Общества с отчетом и перевыборами Правления состоялось 17/XII 1960 г. Настоящее заседание является вторым распорядительным собранием Общества.

За отчетный период избрано 10 новых членов Общества и в настоящее время Общество состоит из 92 действительных членов, один из которых — В. И. Смирнов — является почетным членом Общества.

За рассматриваемый период в два года состоялось 27 очередных заседаний, на которых были заслушаны 34 научных доклада, в том числе 8 обзорных докладов.

Систематически делались информационные сообщения о математической жизни (о состоявшихся съездах, конференциях и т. д.).

Выдвигались кандидаты на соискание Ленинских премий; обсуждались работы, выдвинутые на соискание Ленинских премий.

На одном из заседаний была проведена дискуссия по вопросам преподавания теоретической механики в университетах.

Ежегодно весной обсуждался план работы Физматгиза.

Была учреждена премия Ленинградского математического общества молодому математику. Первое присуждение этой премии состоялось в мае 1962 г. Премия Ленинградского математического общества за 1962 г. присуждена В. Г. Мазье.

Одно из заседаний Общества было посвящено юбилею А. Д. Александрова.

Отчеты о заседаниях Общества регулярно публикуются в журнале «Успехи математических наук» (выпуски 93, 96, 99, 103, 106).

Отчет ревизионной комиссии был зачитан М. З. Соломяком.

В прениях по отчетным докладам выступили: О. А. Ладыженская, С. М. Лозинский, Е. С. Ляпин, С. Г. Михлин, М. З. Соломяк, Н. А. Лебедев.

Работа Правления была признана удовлетворительной.

В результате проведенного затем тайного голосования в состав Правления Общества избраны:

Юрий Владимирович Линник (президент),
Ольга Александровна Ладыженская (вице-президент),
Сергей Михайлович Лозинский (вице-президент),
Александр Данилович Александров,
Евгений Сергеевич Ляпин,
Соломон Григорьевич Михлин,
Владимир Абрамович Рохлин,
Борис Александрович Рымаренко (казначей),
Михаил Федорович Широхов (секретарь).

Ревизионная комиссия избрана в следующем составе:

Валентин Петрович Ильин,
Михаил Захарович Соломяк,
Владимир Николаевич Судаков.

Заседание 26 февраля 1963 г.

1. Ю. В. Линник «Новые применения комплексных переменных в математической статистике».

1°. Рассматриваются экспонентные семейства распределений, даются повторные выборки и формулируется нулевая гипотеза в виде ряда однородных полиномиальных соотношений между параметрами. Изучаются подобные (в смысле Ю. Неймана) тесты. В данном случае подобие тестов вытекает из требования их несмещенности.

2°. Производится аналитическое продолжение некоторого линейного функционала функции подобия выборки по параметрам. Существование или несуществование тестов нерандомизированных и зависящих от заданных статистик, как выясняется, зависит от того, как тестовые поверхности расположены по отношению к особым «критическим поверхностям» или «критикам» данного семейства мер.

3°. Простейшим частным случаем получившейся теории является исследование известной проблемы Беренса—Фишера о двух нормальных выборках. Для тестов проблемы Беренса—Фишера, зависящих от 4 достаточных статистик и однородных при достаточно общих условиях, обнаруживается несуществование подобных тестов (и тем самым и несмещенных тестов).

4°. Получившаяся теория применима к исследованию приближенных тестов. Она выдвигает некоторые своеобразные вопросы теории приближений в комплексной области и граничных задач для аналитических функций и связывает их с математической статистикой.

Заседания 12 марта, 26 марта и 9 апреля 1963 г.

1. Н. А. Шанин «О машинном поиске логических доказательств. (Как научить машину доказывать теоремы.)»

Заседание 23 апреля 1963 г.

1. А. М. Вершик «Общая теория гауссовых мер в линейных пространствах».

Нормированная счетно-аддитивная мера μ, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ линейного множества Ω, называется гауссовой, если всякий $\mathfrak{A}$-измеримый линейный функционал имеет в Ω гауссово распределение.

Среди всех других характеристических свойств гауссовых мер следует отметить одно наиболее важное—линейная структура Ω в некотором смысле наиболее тесно согласована с метрической структурой, индуцируемой гауссовой мерой. Дальнейшие результаты с разных точек зрения раскрывают это обстоятельство.

Пусть H_1—пространство линейных измеримых функций на Ω. Если $x \in H_1$, то $x \in L^2_\mu(\Omega)$. Функционал

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_\Omega x_1(\omega)\, x_2(\omega) \ldots x_n(\omega)\, d\mu$$

называется моментом порядка n меры μ. Гауссова мера вполне характеризуется первыми двумя моментами $B_1(x)$—средним и $B_2(x, y)$—корреляционным функционалом Характеристический функционал

$$f(x) = \int\limits_\Omega e^{ix(\omega)} d\mu$$

выражается через них следующим образом:

$$f(x) = e^{iB_1(x) + \frac{1}{2} B_2(x, x)}.$$

Топология сходимости по мере в H_1 совпадает с гильбертовой топологией $L^2_\mu(\Omega)$, и скалярное произведение в последней задается с помощью корреляционного функционала $[x, y]_{H_1} = B_2(x, y)$.

Пространство $L^2_\mu(\Omega)$ допускает разложение, обобщающее результат работы [1]

$$L^2_\mu(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H_n,$$

где

$$H_n = \underbrace{H_1 \otimes \ldots \otimes H_1}_{n}, \quad H_0 = R_1.$$

В этом разложении H_n есть пространство так называемых обобщенных полиномов Эрмита степени n. Приведенное разложение позволяет упростить вывод результатов, относящихся к теории интегрирования в бесконечномерных пространствах относительно гауссовых мер.

Пусть T—некоторое линейное преобразование Ω. Для того чтобы оно сохраняло гауссову меру, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее коммутационное соотношение: $B(T^*x, y) = B(x, T^{*-1}y)$. Такие преобразования будем называть гауссовыми. Они составляют важный модельный класс преобразований с инвариантной мерой. Пусть T—гауссово преобразование, тогда оно индуцирует в $L^2_\mu(\Omega)$ вещественный унитарный оператор U_T: $(U_T f)(\omega) = f(T\omega)$. В силу линейности U_T $(H_1 \to H_1)$ при этом U_T как оператор, действующий в H_1, является также вещественным и унитарным; обозначим его u_T. Оказывается, для гауссовых мер верен обратный факт: всякий унитарный вещественный оператор $u(H_1 \to H_1)$ может быть продолжен до некоторого оператора U_T, порожденного гауссовым преобразованием T. В иной формулировке этот факт содержится в [2]. Более того, приведенное выше свойство является характеристическим: всякая (неразложимая) мера μ в линейном пространстве Ω, обладающая этим свойством с точностью до нормировки, гауссова. Этот результат тесно связан с известной теоремой Шенберга (см., например, [3]).

Приведенные факты показывают, что группа всех унитарных операторов U может быть изоморфно вложена в $\mathcal{T}$ преобразований с инвариантной мерой. Отсюда следует, что отыскание унитарных представлений групп можно свести к отысканию представлений в группу $\mathcal{T}$; в несколько неопределенной форме это соображение высказано недавно в работе [4].

С точностью до линейного изоморфизма гауссово преобразование задается своей спектральной характеристикой—так мы называем спектральный тип оператора u_T. Всякое гауссово преобразование, действующее в сепарабельном (в смысле теории меры) пространстве Ω, линейно изоморфно преобразованию, порожденному гауссовой многомерной стационарной случайной последовательностью, причем спектральной характеристикой в этом случае является тип Хеллингера спектральной меры (матрицы).

Основные вопросы теории гауссовых преобразований сводятся к характеризации их метрических свойств в терминах спектральных характеристик.

Спектром гауссова преобразования называется спектр унитарного оператора U_T. Поскольку $U_T=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{u_T\otimes u_T\otimes\ldots\otimes u_T}_{n}$, то вычисление спектра по спектральной характеристике представляет собой довольно сложную задачу спектральной теории операторов. Приведем некоторые относящиеся сюда результаты.

1°. Если обозначить через $\Phi(V)$ максимальный тип V, то

$$\Phi(U_T)=\sum_{n=0}^{\infty}[\Phi(u_T)]^n \text{ (степень в смысле свертки)}$$

и, следовательно, $\Phi(U_T)\succ[\Phi(u_T)]^2$ (для одномерного случая это доказано в [5]).

2°. Всякое гауссово преобразование T может быть разложено в прямое произведение гауссовых преобразований, спектр которых относится к одному из следующих видов: простой (см. [6]), неограниченно кратный, почти однородный (см. [7]) и однородный. Для первых трех из них спектральный изоморфизм эквивалентен линейному — это означает, что для гауссова преобразования с такими спектрами полная система линейно метрических инвариантов исчерпывается спектром.

3°. Эргодичность гауссова преобразования эквивалентна отсутствию дискретной составляющей в спектральной характеристике и, следовательно, в спектре. Всякое гауссово преобразование T_F со спектральной характеристикой F метрически изоморфно следующему прямому произведению $T_{F'}\times S_{(C_1,C_2,\ldots)}\times E$; здесь $T_{F'}$ — гауссово преобразование со спектральной характеристикой F', F' — непрерывная часть F, $(c_1, c_2, \ldots)$ — дискретная часть F, $S_{(C_1,\ldots)}$ — сдвиг на бесконечномерном торе на элемент $(c_1, \ldots)$ и E — единичное преобразование.

Метрический изоморфизм двух гауссовых преобразований, вообще говоря, отличен от линейного и спектрального изоморфизмов. Однако все три вида изоморфизмов совпадают для случая чисто сингулярного неоднородного спектра. В то же время гауссово преобразование с абсолютно непрерывной спектральной характеристикой (т. е. со счетнократным лебеговским спектром) метрически изоморфны, хотя этот изоморфизм нелинеен и устроен довольно сложно [8].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Винер, Нелинейные задачи теории случайных процессов, М., ИЛ, 1961.
[2] S. Kakutani, Proc. Sixth. Congr. Prob. Theory 2 (1961).
[3] Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, Физматгиз, 1961.
[4] Г. Макки, Бесконечномерные представления групп, Математика 6 : 6 (1962).
[5] С. В. Фомин, О динамических системах в пространстве функций, УМЖ 2, 2 (1950).
[6] И. В. Гирсанов, О спектрах динамических систем, пораждаемых стационарными гауссовыми процессами, ДАН 119, № 5 (1958).
[7] А. М. Вершик, К теории нормальных динамических систем, ДАН 144, № 1 (1962).
[8] А. М. Вершик, О спектральном метрическом изоморфизме некоторых нормальных динамических систем, ДАН 144, № 2 (1962).

2. А. И. Векслер «Векторные цепи и их применение в теории полуупорядоченных пространств».

3. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран Анатолий Моисеевич Вершик.

4. Выдвижение кандидатов на соискание премии Ленинградского математического общества молодому математику в 1963 г.

Заседание 14 мая 1963 г.

1. Б. Б. Венков «Формальная алгебраическая геометрия».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран Борис Борисович Венков.

3. Присуждение премии Ленинградского математического общества молодому математику. Премия общества за 1963 г. присуждена Б. Б. Венкову за работу «О гомологиях групп единиц в алгебрах с делением».

Заседание 28 мая 1963 г.

1. Вручение премии Ленинградского математического общества. Премия за 1963 г. вручена Б. Б. Венкову.

2. Б. Б. Венков «Гомологии групп единиц».

3. Обсуждение плана работ Физматгиза. С сообщением от Издательства выступил В. И. Битюцков.

Общество одобрило план работ Физматгиза.

1964 г. ноябрь—декабрь *т. XIX, вып. 6 (120)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 24 сентября 1963 г.

1. В. А. Солонников «Об общих краевых задачах для линейных параболических систем».

1°. В работе [1] были рассмотрены в ограниченном цилиндре $Q=\Omega\times[0, T]$, где Ω—n-мерная область с гладкой границей S, краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, параболических в смысле Сирота:

$$\left.\begin{aligned} L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u=f,\\ B\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u\Big|_{\Gamma}=\Phi,\\ u\,|_{t=0}=\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $\Gamma=S\times[0, T]$. Предположим, что матрицы L и B удовлетворяют условиям, указанным в работе [1]. Для задачи (1) в этой работе анонсированы априорные оценки и теоремы существования, которые, как выяснилось, мы можем доказать лишь при некотором дополнительном ограничении.

Предполагается, что существует матрица $\widetilde{B}(x, t, i\xi, p)$ размеров $bm\times m$, где $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, со следующими свойствами:

а) Существует набор целых чисел μ_q $(q=1, \ldots, bm)$ таких, что

$$\widetilde{B}_{qj}(x, t, i\xi\lambda, \lambda^{2b}p)=\lambda^{\mu_q+2b-s_j}\widetilde{B}_{qj}(x, t, i\xi, p)$$

(числа b, m, s_j определены в [1])

б) Матрица $\widetilde{B}$ удовлетворяет условию дополнительности [1] вместе с транспонированной матрицей L'.

Это предположение нам нужно для того, чтобы доказать, что решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}, p\right)\widetilde{u}^{(s)}=0,\\ B_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}, p\right)\widetilde{u}^{(s)}\Big|_{x_n=0}=\widetilde{\Phi}^{(s)},\\ |\widetilde{u}|_{x_n\to+\infty}\to 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на полупрямой $x_n\geqslant 0$, где $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$, $\Phi_q^{(s)}=\delta_{qs}$ $(q, s=1, \ldots, bm)$, а L_0 и B_0—матрицы, состоящие только из старших членов, аналитично по переменным ζ_j и p при вещественных ζ_j и $\operatorname{Re} p>-\delta|\zeta|^{2b}$. Доказательство этого факта основано на следующей лемме. *Столбцы матрицы*

$$T(\zeta, x_n, p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^+} \hat{L}_0 (i\zeta, i\tau, p)\, \widetilde{B}' (i\zeta, i\tau, p) \frac{e^{i\tau x_n}}{M^+}\, d\tau,$$

где штрихом обозначена операция транспонирования матрицы (остальные обозначения см. в [1]), *образуют базис в пространстве решений системы* (2), *убывающих при* $x_n \to +\infty$.

Эта лемма позволяет записать условие дополнительности для матриц L_0 и B_0 в удобной форме

$$\det B_0 \left(i\zeta, \frac{d}{dx_n}, p \right) T(\zeta, x_n, p) \Big|_{x_n=0} \neq 0 \quad (\operatorname{Im} \zeta_j = 0,\ \operatorname{Re} p > -\delta\, |\zeta|^{2b}).$$

Дополнительное предположение, очевидно, выполняется, когда система состоит из одного уравнения. Кроме того, как видно из рассуждений С. Д. Эйдельмана [2], оно выполняется для параболических по И. Г. Петровскому систем и $\widetilde{B}$ является матрицей, соответствующей первой краевой задаче. Вместе с тем существуют системы, параболические по Сирота, для которых первая краевая задача плохо поставлена, но существуют другие хорошо поставленные задачи.

2°. Мы можем распространить результаты [1] (при выполнении упомянутого дополнительного условия) на более общие краевые задачи

$$\left.\begin{aligned} &L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = f, \\ &B\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \Big|_{\Gamma} = \Phi, \\ &C\left(x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \Big|_{t=0} = \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Мы не имеем возможности привести здесь подробные определения и ограничимся несколькими замечаниями. Главная часть матриц L и B определяется с помощью наборов целых чисел s_j, t_j, σ_q как для эллиптических по А. Даглису—Л. Ниренбергу систем (см., например, [1]). Никаких ограничений на расположение старших производных функций u_j по t не накладывается, и коэффициенты при них могут зависеть от x и t. При $t=0$ задаются определенные линейные комбинации производных функций u_j по t определенного порядка с коэффициентами, зависящими от x. Задача (1) является частным случаем задачи (3).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Солонников, Об общих краевых задачах для систем дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов, Материал к советско-американскому симпозиуму по теории дифференциальных уравнений в частных производных, Новосибирск, 1963.

[2] С. Д. Эйдельман, К теории общих граничных задач для параболических систем, ДАН 149, № 4 (1963), 792—795.

2. Об организации международного съезда математиков в 1966 г. в Москве.

Заседание 8 октября 1963 г.

1. Н. А. Лебедев «Распространение комплексных функций и некоторые его приложения к конструктивной теории функций».

2. Р. В. Петропавловская «О некоторых классах групп, определяющихся структурой своих подсистем».

Заседание 22 октября 1963 г.

1. Гаральд Крамер (Швеция) «Математики и математические школы Швеции».

2. И. И. Огиевецкий (Днепропетровск) «Тауберовы теоремы для методов суммирования, связанных с аналитическим продолжением».

1°. Рассматриваются методы суммирования, полученные из соответствующих прототипных методов, посредством аналитического продолжения, входящих в определение средних этих методов регулярных элементов той или иной природы. К классу этих методов принадлежат, например, обобщенные («усиленные») методы Абеля для последовательностей и функций, обобщенный экспоненциальный метод B^*, метод (B^*, α) и др. Предлагается некоторый метод доказательства теорем таубера типа для методов суммирования из этого класса, приводящий к своего рода соответствию, позволяющему в ряде случаев тауберовой теореме для прототипного метода суммирования отнести тауберову же теорему для соответствующего ему «аналитически продолженного» метода. Доказательство использует, в частности, известную теорему Адамара и Прингсхейма о расположении особых точек на границе круга сходимости степенного ряда и континуальный аналог этой теоремы относительно расположения особых точек на абсциссе сходимости интеграла Лапласа, установленный Ландау (см. соответственно [1] и [2]).

2°. Пусть $P(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $p_n>0$, сходится в круге радиуса r, $0<r\leqslant\infty$, и степенной ряд $a(x, \{s_n\})=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ ($\{s_n\}$ — некоторая последовательность) сходится по крайней мере для тех же x, $|x|<r$. Если

$$\lim_{x\to r-0}\frac{a(x, \{s_n\})}{P(x)}=s, \tag{1}$$

то последовательность $\{s_n\}$ P-суммируема к s.

Если степенной ряд, определяющий $a(x, \{s_n\})$, сходится в круге радиуса $r^*<r$ и $a(x, \{s_n\})$ аналитически продолжаема для $r^*<x<r$ функцией $a^*(x, \{s_n\})$ и

$$\lim_{x\to r-0}\frac{a^*(x, \{s_n\})}{P(x)}=s, \tag{2}$$

то последовательность $\{s_n\}$ P^*-суммируема к s. Выбор

$$P(x)=(1-x)^{-1},\ e^x,\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}e^t\,dt,\ \alpha>0, -\ln(1-x)$$

приводит соответственно к обобщенным методам суммирования Абеля, методу B^*, методу B^*, α (см. [3] и [4]), обобщенному логарифмическому методу.

Теорема 1. *P^*-метод суммирования сильнее P-метода суммирования.*

3°. Следующая теорема позволяет тауберовой теореме для P-метода суммирования отнести тауберову же теорему для P^*-метода суммирования.

Теорема 2. *Каждой тауберовой теореме для P-метода суммирования вида: «Если последовательность $\{s_n\}$ суммируется P-методом к s и удовлетворяет некоторому тауберову условию Q, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$» — соответствует тауберова же теорема для P^*-метода суммирования вида: «Если последовательность $\{s_n\}$ суммируется P^*-методом к s и удовлетворяет условиям Q*[1] *и условию $s_n>-\varphi(n)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$,*

[1]) Которое, разумеется, может варьироваться в зависимости от рассматриваемого P-метода.

где $\varphi(n)$*—целочисленная неотрицательная функция такая, что* $\lim\sup \sqrt[n]{\varphi(n)} \leqslant 1$, *то* $\lim s_n = s$».

4°. Из теоремы 2 вытекают тауберовы теоремы для методов суммирования обобщенного абелева A^*, обобщенного борелевого B^* и далее к тауберовым теоремам для методов Г. Ф. Вороного, Херлестамма, А. В. Лотоцкого (см. [5], доказательство в [5] проведено независимо от теоремы 2, но тем же методом). Из теоремы 2 вытекает, в частности, следующая тауберова теорема для метода (B^*, α).

Теорема 3. *Если последовательность* $\{s_n\}$ *суммируема к* s *методом* (B^*, α) *и* $\lim\inf\{s_m - s_n\} \geqslant 0$ *при* $n \to \infty$, $n < m$, $\frac{m-n}{\sqrt{n}} \to 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

5°. Последовательность $\{s_n\}$ суммируется методом (B, q_n) Г. Ф. Вороного к s, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} q_{n-k} s_k}{Q_n} = s, \quad q_n > 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad Q_n = \sum_{i=0}^{n} q_i,$$

(B, q_n)-метод регулярен, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0$.

Соображения, аналогичные вышеизложенным, приводят к следующей теореме выпуклости для метода суммирования Чезаро.

Теорема 4. *Пусть* σ_n^α*—чезаровское среднее порядка* $\alpha > -1$, *образованное для последовательности* $\{s_n\}$. *Если последовательность* $\{s_n\}$ *суммируема регулярным методом Г. Ф. Вороного* (B, q_n) *к* s *и* $\lim\inf\{\sigma_m^\alpha - \sigma_n^\alpha\} \geqslant 0$ *при* $n \to \infty$, $n < m$, $\frac{m-n}{n} \to 0$, *то последовательность* $\{s_n\}$ (C, β)*-суммируема к* s *при любом* $\beta \geqslant \alpha - 1$.

6°. Функция $s(x)$ суммируема обобщенным («функциональным») методом Абеля A^* к s, если: (i) абсцисса сходимости α для $\psi(z) = z\int\limits_0^\infty e^{-zt} s(t)\,dt$ положительна; (ii) функцию $\psi(z)$ можно аналитически продолжить на все положительные z; (iii) $\lim\limits_{z\to+0} \psi(z) = s$.

Если $\alpha \leqslant 0$, то обобщенный функциональный метод Абеля A^* переходит в (обычный) метод Абеля A.

Теорема 5. *Обобщенный функциональный метод Абеля сильнее обычного функционального метода Абеля.*

Функция $s(x)$ суммируема методом Г. Ф. Вороного (B, q_n) к s, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x q(x-t)\,s(t)\,dt}{Q(x)} = s, \quad q(x) > 0, \quad Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt,$$

$(B, q(x))$-метод регулярен, если и только если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Q(x-c)}{Q(x)} = 1$, каково бы ни было c.

Теорема 6. *Если функция* $s(x)$ *суммируема обобщенным функциональным методом Абеля к* s *и* $\lim\inf\{s(y) - s(x)\} \geqslant 0$ *при* $x \to \infty$, $y > x$, $\frac{y-x}{x} \to 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Теорема 7. *Если функция* $s(x)$ *суммируется методом Г. Ф. Вороного* $(B, q(x))$ *к* s *и* $\int\limits_0^\infty e^{-zt} s(t)\,dt$ *сходится хотя бы для одного* z *и* $\lim\{s(y) - s(x)\} \geqslant 0$ *при* $x \to \infty$, $y > x$, $\frac{y-x}{x} \to 0$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty} s(x) = s$.

Теорема 8. *Если функция $s(x)$ суммируется регулярным методом Г. Ф. Вороного $(B, q(x))$ к s и*

$$\lim |s(y)-s(x)|=0$$

при $x\to\infty$, $y>x$, $\frac{y-x}{x}\to 1$, *то*

$$\lim_{x\to\infty} s(x)=s.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
[2] G. Doetsch, Theory und Anwendungen der Laplace-transformation, Dover-publication, 1943.
[3] Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.
[4] И. И. Огиевецкий, До теорії сумування ряд і в методом Бореля дробового порядку, ДАН УРСР, № 6, 1962, 719—722.
[5] И. И. Огиевецкий, Некоторые тауберовы теоремы, УМН 19, вып. 4 (118) (1964).

Заседание 29 октября 1963 г.

1. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1964 г.

Заседание 26 ноября 1963 г.

1. В. Г. Спринджук «Современное состояние метрической теории чисел и проблема Малера».

Заседание 10 декабря 1963 г.

1. О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева «О результатах последнего времени по квазилинейным уравнениям эллиптического и параболического типов» (обзорный доклад).

С 1956—1958 гг. начался новый этап в изучении уравнений второго порядка эллиптического и параболического типа, линейных с разрывными коэффициентами и квазилинейных ([1]—[7]), который привел к концу 1959 г. к достаточно полному решению 19-й и 20-й проблем Гильберта в вариационных задачах для функционалов вида

$$\int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\,dx,$$

$x=(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 2$ ([8], [10]—[13]). Несколько позже и для более узкого класса $F(x, u, p)$ подобные результаты были получены в работах Морри (см. [22]). В [8], [10]—[13] одновременно с вариационной задачей был изучен класс уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}(a_i(x, u, u_x))+a(x, u, u_x)=0. \tag{1}$$

Затем в [14]—[16] были исследованы параболические уравнения вида

$$u_t-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}(a_i(x, t, u, u_x))+a(x, t, u, u_x)=0, \tag{2}$$

в том числе и линейные с разрывными неограниченными коэффициентами (частные случаи таких уравнений были предметом исследования многих авторов; см. [7], [23], [24]). Наконец, в [9], [17], [18] были изучены и квазилинейные эллиптические и параболические уравнения общего вида

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ u,\ u_x)\,u_{x_i x_j} + a(x,\ u,\ u_x) = 0, \tag{3}$$

$$u_t - \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ t,\ u,\ u_x)\,u_{x_i x_j} + a(x,\ t,\ u,\ u_x) = 0. \tag{4}$$

Во всех упомянутых работах предполагается, что уравнения (1), (3) равномерно эллиптичны (соответственно параболичны). В [4], [15], [19] построены примеры, показывающие, что полученные в работах [9]—[20] результаты точны.

Центральную часть во всех этих работах занимают априорные оценки норм $|u|_{C_{1,\alpha}}$. В свою очередь, получение оценок норм $|u|_{C_{1,\alpha}}$ разбивается на две группы: на оценки $\max|u|$ и $\max|u_x|$ и на оценки констант Гёльдера $|\cdot|_{(\alpha)}$ для u и u_x. Различные достаточные условия оценки $\max|u|$ даны во многих работах, начиная с работ Пикара и С. Н. Бернштейна и кончая [25], [26], [11], [19].

Оценки $\max|u_x|$ были даны в конце 1955 г. и опубликованы в [1] (подробное изложение имеется в [2] и в [11]), причем если заранее известна оценка нормы Гёльдера $|u|_{C_{0,\alpha}}$ для самого решения u с каким-нибудь $\alpha > 0$, то эти оценки $\max|u_x|$ получены для всего класса равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений (3), (4), удовлетворяющих только так называемым естественным ограничениям на порядки роста функций $a_{ij}(x,\ u,\ p)$, $a(x,\ u,\ p)$ по p при $|p| \to \infty$. Необходимость этих ограничений подтверждается специально построенными примерами [19]. В [9], [18] дан несколько иной вариант оценок $\max|u_x|$, при котором используется существование у $u(x)$ лишь производных, входящих в уравнение. Таким образом, вопрос о получении оценок норм $|u|_{C_{1,\alpha}}$ свелся к получению оценок постоянной Гёльдера $|\cdot|_{(\alpha)}$ для u и u_x. Такие оценки для всего класса уравнений (1) и (2) (в том числе и линейных уравнений с неограниченными коэффициентами) даны в [10], [11], [14]—[16]. Все ограничения, при которых это сделано в [10], [11], [14]—[16], как показано в [15], [19], [4], вызваны существом дела. Этим работам предшествовали работы [6], [7], в которых были даны оценки $|u|_{C_{0,\alpha}}$ для решений простейших уравнений

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_j}\right) = 0, \tag{5}$$

$$u_t - \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\,u_{x_j}\right) = 0. \tag{6}$$

Наконец, в [9], [17], [18] были оценены $|u_x|_{(\alpha)}$ для всего класса уравнений (3) и (4), что дало возможность установить классическую разрешимость в целом основных краевых задач для них и выяснить границы справедливости 19-й проблемы Гильберта.

В [27]—[29] дан новый метод оценки $|u|_{C_{0,\alpha}}$ для решений (5) и (6). В [30] он применен к общим линейным уравнениям вида (2). В работе [20] дан новый метод оценок $|u|_{(\alpha)}$ и $|u_x|_{(\alpha)}$ для решений линейных и квазилинейных уравнений (1)—(4), более простой, чем первоначальный в работах [10]—[19].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений, ДАН **107**, № 5 (1956).

[2] О. А. Ладыженская, Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений, Труды Моск. матем. о-ва **7** (1958), 149—177.

[3] О. А. Ладыженская, О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых вариационных задач, ДАН **120**, № 5 (958), 956—959.

[4] О. А. Ладыженская, О разрешимости в целом краевых задач для уравнений Навье — Стокса и квазилинейных параболических уравнений, Труды IV Всесоюзного матем. съезда, 1963.

[5] H. O. Cordes, Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen, Math. Ann. **130** (1956), 278—312.

[6] E. de Giorgi, Sulla differenziabilitá e l'analiticita delle estremal degli integrali multipli regolari, Memorie delle Acc. Sci. Torino, Ser. 3ª, T. 3º, Parte I (1957), 3—19.

[7] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. Journ. Math. **80**, № 4 (1958), 931—954.

[8] Н. Н. Уральцева, О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач, ДАН **130**, № 6 (1960), 1206—1209.

[9] Н. Н. Уральцева, Общие квазилинейные уравнения второго порядка и некоторые классы систем эллиптического типа, ДАН **146**, № 4 (1962), 778—781.

[10] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О вариационной задаче и квазилинейных уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН **135**, № 6 (1960), 1330—1334.

[11] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными, УМН **16**, вып. 1 (1961), 19—90.

[12] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений, ДАН **140**, № 1 (1961), 45—47.

[13] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva, On the smoothness of weak solutions of quasilinear equations in several variables and of variational problems, Comm. Pure Appl. Math. **14**, № 3 (1961), 481—496.

[14] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ДАН **139**, № 3 (1961), 544—547.

[15] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ч. I, Изв. АН, серия матем. **26**, № 5 (1962), 5—52.

[16] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Первая краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений, ч. II, Изв. АН, серия матем. **26**, № 5 (1962), 753—780.

[17] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений второго порядка общего вида, ДАН **147**, № 1 (1962), 28—30.

[18] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, Краевая задача для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа, ч. III, Изв. АН, серия матем. **27**, № 1 (1963), 161—240.

[19] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О допустимых расширениях понятия решения для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, Вестник ЛГУ, № 1 (1963), 10—25.

[20] О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева, О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов, ДАН **155**, № 6 (1964).

[21] C. B. Morrey, Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, Math. Z. **72**, № 2 (1959).

[22] C. B. Morrey, Quelques resultats recents du calcul des variations, Colloques Internationeaux du Centre National de la Recherche Seient. **117**, Juin (1962), 25—30.

[23] О. А. Олейник, О квазилинейных параболических уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН **138**, № 1 (1961).

[24] О. А. Олейник и С. Н. Кружков, Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН **16**, вып. 5 (1961), 115—155.

[25] А. Г. Сигалов, Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме, Труды Моск. матем. о-ва 2 (1953), 201—233.
[26] G. Stampacchia, Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellitiche, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, ser. 3 12 (1958), 3—24.
[27] J. Moser, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 13, № 3 (1960), 457—468.
[28] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 14, № 3 (1961), 577—591.
[29] J. Moser, Неравенства Гарнака для параболических дифференциальных уравнений, Совместный советско-американский симпозиум по уравнениям в частных производных, Новосибирск, 1963.
[30] С. Н. Кружков, О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, ДАН 150, № 3 (1963).
[31] С. Н. Кружков, Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка, ДАН 150, № 4 (1963).

1965 г. январь—февраль *т. XX, вып. 1 (121)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 11 февраля 1964 г.

1. П. С. Александров (Москва) «О некоторых вопросах топологических пространств» (обзорный доклад).

Заседание 25 февраля 1964 г.

1. В. А. Рохлин «Топология многообразий и многообразие топологий» (обзорный доклад).

Заседание 10 марта 1964 г.

1. С. М. Лозинский «О нормах векторов и матриц».
2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Чудаков Николай Григорьевич.

Заседание 24 марта 1964 г.

1. В. И. Смирнов и Н. А. Лебедев «Конструктивная теория функций комплексного переменного».

Заседание 14 апреля 1964 г.

1. Г. И. Натансон «О работе семинара по конструктивной теории функций».
2. А. И. Векслер «Об операциях частичного умножения и системах операций частичного умножения в полуупорядоченных группах и линейных пространствах».

Доклад состоит из двух частей. Результаты первой части можно найти в [1]. Во второй части речь идет о системах операций частичного умножения в K-линеале X (при этом используется терминология первой части). Системы операций полного умножения рассматривались в упорядоченных и частично упорядоченных группах Е. Габовичем [2], [3] и Д. М. Смирновым [5].

Примерами систем операций частичного умножения являются: система всех частичных умножений, система всех максимальных (т. е. непродолжимых) частичных умножений, система P (в случае архимедова X) всех реализационных частичных умножений, ее подсистема P_1 всех достаточно широких реализационных частичных умножений. Каждая реализация X на каноническом пространстве S вполне определяется выбором того элемента в максимальном расширении $\widetilde{X}$ K-пополнения K-линеала X, которому при этой реализации соответствует функция, тождественно равная единице. Так как в K-пространстве X всякое реализационное частичное умножение определяется в точности одной реализацией, то в этом случае система $P=P_1$ изоморфна системе всех слабых единиц в $\widetilde{X}$; отсюда, в частности, P может быть сделана (при добавлении 0) коммутативной l-полугруппой, в которой все элементы положительны ($\geqslant 0$) и в которой, кроме того, определено произведение элемента на неотрицательное число.

Любая из рассмотренных выше систем определяет порядок в X (в смысле определения, аналогичного данному в [1] для системы, состоящей из одного частичного умножения). Именно, для любой рассмотренной системы множество положительных элементов в X совпадает с множеством всевозможных частичных единиц умножения.

Система H называется *нормальной*, если любой $x>0$ является частичной единицей умножения при некотором $\eta\in H$. Рассмотренные выше системы нормальны.

Линейное подмножество $I\subset X$ называется *идеалом* относительно данной системы H, если из $x\in I$, $y\in X$ и $\eta\in H$ следует $x\eta y\in I$, коль скоро $x\eta y$ существует. Изучение идеалов представляет интерес не для любой системы. Например, если H состоит из одного почти пустого частичного умножения, то множество идеалов совпадает с множеством всех линейных подмножеств X. Ограничимся рассмотрением идеалов в случае архимедова X и нормальной системы H (все рассматриваемые ниже X и H без особых оговорок такими и будут предполагаться). Для сокращения формулировок будем считать, что зафиксирована некоторая реализация X на S, никак не связанная с системой H.

Теорема 1. *Для каждого идеала I (максимального идеала M) найдется замкнутое $F\subset S$ такое, что $I=I_F\equiv\{x\in X\colon x(U_x)\equiv 0$, где U_x — окрестность $F\}$ (соответственно найдется $t\in S$ такая, что $M=I_t\equiv I_{\{t\}}$). Обратно, всякое множество I_F является идеалом в X.*

Следствие. *Все нормальные системы дают одно и то же множество идеалов в X.*

Теорема 2. *Если X — K-линеал с проекциями в любую компоненту, то отображение $F\to I_F$ ($t\to I_t$) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами всех идеалов в X и всех замкнутых подмножеств в S (соответственно между множествами всех максимальных идеалов и всех точек S).*

Следствие 1. *В X всякий идеал погружается в максимальный, т. е. структура $\mathfrak{G}$ всех идеалов в X (если считать $I\geqslant J$, когда $I\supset J$) антиизоморфна атомной.*

Аналогичное утверждение имеет место для произвольного X с единицей (Фрейденталя).

Другие результаты, вытекающие из теоремы 2, сформулируем для простоты лишь для случая K-линеала с единицей.

Следствие 2. *В X с единицей структура $\mathfrak{G}$ изоморфна структуре всех идеалов булевой алгебры компонент X* ([4], № 8). *$\mathfrak{G}$ является структурой Стона* [6], *т. е. дистрибутивной структурой с нулем и единицей 1 с относительными псевдодополнениями, в которой выполняется тождественное соотношение $I^*\vee I^{**}=1$ (I^* — псевдодополнение I).*

Из теоремы 1 видно, что всякий максимальный идеал в произвольном X простой. Можно установить общую форму простого идеала и общую форму максимального идеала в X. В частности, оказывается, что в случае *K-линеала X с проекциями в главную компоненту множество простых идеалов совпадает с множеством максимальных.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Векслер, Операции частичного умножения в векторных структурах, ДАН (1964).

[2] Е. Габович, Частично упорядоченные Ω-группы, Уч. зап. Тартуск. ун-та 102 (1961), 294—300.

[3] Е. Габович, Об архимедовски упорядоченных Ω-группах, Уч. зап. Тартуск. ун-та 129 (1962), 19—22.
[4] R. Sikorski, Boolean algebras, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
[5] Д. М. Смирнов, О приведенно свободных мультиоператорных группах, ДАН 150, № 1 (1963), 44—47.
[6] O. Frink, Pseudo-complements in semilattices, Duke Matn. Journ. 29, № 4 (1962), 505—514.

3. Выдвижение кандидатов на соискание премии Ленинградского математического общества молодому математику в 1964 г.

4. Обсуждение структуры журнала «Успехи математических наук» и рекомендации его редакции.

Заседание 12 мая 1964 г.

1. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

2. Присуждение премии Ленинградского математического общества молодому математику. Премия Общества за 1964 г. присуждена В. С. Буслаеву за исследование коротковолновой асимптотики решения задачи дифракции на выпуклом цилиндре.

3. В. И. Битюцков «О плане выпуска математической литературы издательства «Наука».

1965 г. май — июнь т. XX, вып. 3 (123)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 22 сентября 1964 г.

1. Е. С. Ляпин «Представление полугрупп преобразованиями».

Для произвольного множества Ω обозначим через $\mathfrak{F}_{\Omega}$ совокупность всех преобразований (частичных) Ω. Относительно действия умножения (суперпозиции) преобразований $\mathfrak{F}_{\Omega}$ образует полугруппу. Подполугруппы $\mathfrak{F}_{\Omega}$ называются полугруппами преобразований множества Ω.

Гомоморфизм φ некоторой полугруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{F}_{\Omega}$ называется представлением $\mathfrak{A}$ преобразованиями множества Ω. Если φ является изоморфизмом, то представление называется точным, или реализацией.

Пусть Ξ — некоторый класс полугрупп преобразований. Через $I(\Xi)$ обозначим класс всех полугрупп, реализуемых в Ξ, т. е. изоморфных с какой-либо полугруппой из Ξ.

$A(\Xi)$ — проблема абстрактной характеристики класса Ξ состоит в описании класса $I(\Xi)$, т. е. в нахождении необходимого и достаточного условия, которому должна удовлетворять полугруппа, чтобы реализоваться в Ξ.

R_{Ξ} — проблема реализации в Ξ состоит в нахождении для каждой полугруппы $\mathfrak{A} \in I(\Xi)$ всех ее реализаций в Ξ.

Эти проблемы определяют связь между общей («абстрактной») теорией полугрупп и теорией полугрупп преобразований.

В настоящее время рядом исследований различных авторов указанные проблемы решены для некоторых наиболее важных классов полугрупп преобразований. Ниже указываются некоторые (не все) из этих результатов.

Для класса Ξ_1, состоящего из всех полугрупп преобразований, решение $A(\Xi_1)$ давно известно.

$I(\Xi_1)$ есть класс всех полугрупп. Для проблемы $R(\Xi_1)$ до настоящего времени было предложено три решения. В 1956 г. В. В. Вагнер описал конструкцию, основанную на понятии так называемого репрезентативного гомоморфизма. В 1960 г. Е. С. Ляпин описал всевозможные представления при помощи операции погружения исследуемой полугруппы в некоторую надполугруппу. В 1961 г. Б. М. Шайн построил конструкцию, основанную на объединении представлений.

Пусть Ξ_2 — класс полугрупп взаимно однозначных преобразований, причем полугруппа вместе с каждым преобразованием содержит и обратное к нему преобразование. В. В. Вагнером (1952), а несколько позже независимо Престоном (1954), было дано решение $A(\Xi_2)$. Для того чтобы $\mathfrak{A} \in I(\Xi_2)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a \in \mathfrak{A}$ нашелся $x \in \mathfrak{A}$ такой, что $axa=a$, и чтобы из $u^2=u$, $v^2=v$ $(u, v \in \mathfrak{A})$ всегда следовало $uv=vu$. Впоследствии были обнаружены различные другие эквивалентные характеристики класса таких полугрупп (их называют инверсными, или обобщенными группами Вагнера). Б. М. Шайном (1962) была описана конструкция для решения $R(\Xi_2)$.

Для класса Ξ_3, состоящего из полугрупп взаимно однозначных преобразований, решения для $A(\Xi_3)$ и $R(\Xi_3)$ были даны Б. М. Шайном (1960, 1961). При этом им было использовано введенное ранее П. Дюбрейлем понятие сильного подмножества полугруппы.

Для класса Ξ_4 полугрупп преобразований, осуществляющих взаимно однозначное отображение Ω на себя, $I(\Xi_4)$ есть не что иное, как класс полугрупп, вложимых в группы. Условия этого были исследованы А. И. Мальцевым (1939 1940) и впоследствии не раз привлекали внимание и других исследователей.

Для класса Ξ_5 полугрупп полных преобразований, содержащих все константные (стягивающие) преобразования (т. е. преобразования ранга 1), решение $A(\Xi_5)$ и $R(\Xi_5)$ дано Е. С. Ляпиным (1964). Оказалось, что каждая полугруппа $\mathfrak{A} \in I(\Xi_5)$ имеет с точностью до несущественных различий лишь единственную реализацию в Ξ_5. При этом строение последней может быть ясно описано.

В 1955 г. Е. С. Ляпиным было введено понятие плотно вложенного идеала, использованное им для решения проблемы A для класса полугрупп всех полных преобразований. В последующем оказалось, что этот подход может быть применен к решению проблемы A для ряда классов полугрупп преобразований. Это было осуществлено рядом исследователей, особенно широко Л. М. Глускиным (1959, 1961, 1963).

2. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1965 г.

Заседание 13 октября 1964 г.

1. Б. П. Харламов «О математической теории обучения».

1°. Математическая теория обучения и динамическое программирование. Общность предпосылок двух теорий [1]. Управляемый процесс. Решение выбирается шаг за шагом. Марковость.

2°. Общая математическая схема. $T=\{0, 1, 2, \ldots\}$ — время. $[X, \mathfrak{X}]$ — измеримое пространство (пространство состояний). Исследуются семейства марковских процессов, получаемых по следующему правилу.

а) Задается алгоритм процесса обучения — марковская переходная функция, зависящая от управляющего параметра u, однородная во времени: $A_u(S/x)$, $S \in \mathfrak{X}$, $x \in X$, $u \in U$.

б) Задается закон выбора управляющего параметра (управление). Выбор его на каждом шагу может зависеть от состояния обучаемого объекта x, от момента времени t и от случая. После этого определен марковский процесс (с точностью до начального состояния).

Исследуется семейство процессов, порожденных одним алгоритмом и некоторым классом законов управления. В проблеме обучения алгоритм процесса обучения символизирует обучаемый объект, а управление соответствует обучающему субъекту.

3°. Классификация процессов обучения. По способу задания u:

1) $u=f(x)$, f — детерминированная функция. (Пример. Стохастический поиск максимума детерминированной, постоянной во времени функции.)

2) $u=f(x, t)$, f — детерминированная функция. (Пример: поиск и слежение за максимумом детерминированной функции.)

3) $u=f(x, \omega)$; $u(x)$ — случайная функция. (Пример. Стохастический или детерминированный поиск максимума функции, оцениваемый в среднем на классе данных функций.)

4) $u=f(x, t, \omega)$; $u(x, t)$ — случайная функция. (Пример: схемы обучения Буша и Мостеллера и Саппеса и Аткинсона, задачи стохастической аппроксимации.)

По виду алгоритма:

а) Вырожденное распределение $A_u(S/x)$. $A_u(S/x)=E(S/F(x, u))$, $F(x, u) \in X$ — детерминированный алгоритм.

б) Невырожденное распределение $A_u(S/x)$ — стохастический алгоритм.

Последнее деление с математической точки зрения не существенно. Выбор того или иного варианта зависит от взгляда автора очередной модели на роль случая в проблеме обучения.

4°. Пример 1. Модель обучаемости Буша и Мостеллера [2]. Тип 4а. Терминология и предпосылки. Операторы. Управления. Три частных случая. Вычисление моментов предельных распределений.

5°. Пример 2. Модель индивидуального обучения и обучения при взаимодействии Саппеса и Аткинсона [3]. Тип 4а) или 4б). Терминология и предпосылки. Индивидуальное обучение. Обучение при взаимодействии. Вычисление асимптотических моментов и вероятностей.

6°. Пример 3. Стохастический поиск максимума детерминированной функции (Харламов). Тип 1б). Терминология и предпосылки. Эффективность сравнительная и абсолютная Усиленная абсолютная эффективность. Примеры абсолютно и усиленно абсолютно эффективных алгоритмов на данном классе F детерминированных функций.

7°. Пример 4. Стохастическая аппроксимация. (Тип 4а). (Роббинс и Монро, Кифер и Вольфовиц и др.) Тип 4а. Терминология и предпосылки. Задача Роббинса и Монро. Результаты. Задача Кифера и Вольфовица. Результаты. Неоднородность во времени получаемых марковских процессов.

8°. Проблемы теории обучения.

1) Определить и найти оптимальную процедуру обучения, включая определение момента остановки.

2) Получить результаты, относящиеся к информационному содержанию управляющего параметра (в теории поиска максимума). Другие задачи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Беллман, Динамическое программирование.
[2] Р. Буш и Ф. Мостеллер, Стохастические модели обучаемости, М., ИЛ, 1962.
[3] P. Suppes, R. Atkinson, Markov Learning Models For Multiperson Interactions, Stanford, 1960.

Заседание 27 октября 1964 г.

1. Л. Д. Фадеев «Характеристические определители дифференциальных операторов».

Заседание 10 ноября 1964 г.

1. Группа математической логики ЛОМИ — Н. А. Шанин (руководитель работы), Н. А. Беляева, Г. В. Давыдов, С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, В. П. Оревков, А. О. Слисенко, А. В. Сочилина, «Обзор экспериментов над программой машинного поиска логического вывода, созданной в ЛОМИ».

Заседание 24 ноября 1964 г.

1. В. П. Хавин «Основные понятия теории пучков и их применение в теории функций».

Заседание 8 декабря 1964 г.

1. Д. А. Владимиров «Меры на алгебрах Буля».

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР И ЗА РУБЕЖОМ

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 9 февраля 1965 г.

Заседание проводилось совместно с Ленинградским отделением математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и математико-механическим факультетом Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова и было посвящено шестидесятилетию со дня рождения и тридцатипятилетию научной и педагогической деятельности Николая Григорьевича Чудакова.

1. Ю. В. Линник «О научных трудах Н. Г. Чудакова».
2. Д. Н. Ленской «Педагогическая деятельность Н. Г. Чудакова».
3. Приветствия.

Заседание 1 марта 1965 г.

Распорядительное собрание. Отчет Правления был зачитан президентом общества Ю. В. Линником.

ОТЧЕТ

Правления Ленинградского математического общества о деятельности Общества за период с 12 II 1963 г. по 9 III 1965 г.

Ленинградское математическое общество было создано на организационном заседании 29 IX 1959 г. Распорядительные собрания Общества с отчетами и перевыборами Правления состоялись 27 XII 1960 г. и 12 II 1963 г. Данное заседание является третьим распорядительным собранием Общества.

За отчетный период избрано 5 новых членов Общества, и в настоящее время Общество состоит из 95 действительных членов, один из которых — В. И. Смирнов — является почетным членом Общества.

За рассматриваемый период в два года состоялось 24 заседания, на которых были заслушаны 25 докладов, в основном обзорных. Ряд докладов был прочитан иностранными и иногородними математиками: Г. Крамером (Швеция), П. С. Александровым (Москва), И. И. Огиевецким (Днепропетровск), В. Г. Спринджуком (Минск). Четыре заседания были посвящены машинному поиску логических выводов.

Выдвигались кандидаты на соискание Ленинских премий. Обсуждались работы, выдвинутые на соискание Ленинских премий. Выдвигались кандидаты в академики и члены-корреспонденты АН СССР. Три члена общества — А. Д. Александров, Ю. В. Линник, Л. В. Канторович — избраны академиками АН СССР, один член общества — Д. К. Фаддеев — избран членом-корреспондентом АН СССР.

Ежегодно весной обсуждался план работ Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука».

Ежегодные премии Ленинградского математического общества молодому математику вручены в 1963 г. Б. Б. Венкову и в 1964 г. В. С. Буслаеву.

Одно из заседаний Общества было посвящено юбилею Н. Г. Чудакова.

Отчеты о заседаниях Ленинградского математического общества регулярно (два раза в год) публикуются в журнале «Успехи математических наук» (выпуски 93, 96, 99, 103, 106, 109, 112, 115, 120, 121, 123).

Отчет ревизионной комиссии был зачитан М. З. Соломяком. В прениях по отчетным докладам выступили С. В. Валландер, О. А. Ладыженская, Е. С. Ляпин.

Работа Правления была признана удовлетворительной.

В результате проведенного затем тайного голосования в состав Правления Общества избраны:

Сергей Михайлович Лозинский (президент),
Борис Захарович Вулих (вице-президент),
Дмитрий Константинович Фаддеев (вице-президент),
Ольга Александровна Ладыженская,
Юрий Владимирович Линник,
Евгений Сергеевич Ляпин,
Соломон Григорьевич Михлин,
Владимир Абрамович Рохлин,
Борис Александрович Рымаренко (казначей),
Михаил Федорович Широхов (секретарь).

Ревизионная комиссия избрана в следующем составе:

Валентин Петрович Ильин,
Михаил Захарович Соломяк,
Владимир Николаевич Судаков.

Заседание 23 марта 1965 г.

1. И. И. Пятецкий-Шапиро (Москва) «Геометрия комплексных однородных областей и теория автоморфных функций».
2. Обсуждение работ, выдвинутых на соискание Ленинских премий.

Заседание 13 апреля 1965 г.

1. В. В. Вагнер (Саратов) «Алгебраические вопросы дифференциальной геометрии высшего порядка».
2. Назначение рецензентов работ, представленных на соискание премии Ленинградского математического общества молодому математику.

Заседание 27 апреля 1965 г.

1. Д. К. Фаддеев «О преподавании математики на математических факультетах университетов».

2. Присуждение ежегодной премии Ленинградского математического общества молодому математику.

Премии Общества за 1965 г. присуждены В. И. Дергузову и А. В. Яковлеву.

Заседание 11 мая 1965 г.

1. Вручение премий Ленинградского математического общества. Премии за 1965 г. вручены В. И. Дергузову и А. В. Яковлеву.

2. В. И. Дергузов «Об устойчивости решений операторных гамильтоновых уравнений с периодическими коэффициентами».

3. В. И. Битюцков «О планах издания математической литературы Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 28 сентября 1965 г.

1. Э. И. Нечипорук «Об асимптотических оценках сложности логических сетей».

Заседание 5 октября 1965 г.

1. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1966 г.
2. А. В. Яковлев «Задача погружения полей в терминах гомологической алгебры».

Заседание 26 октября 1965 г.

1. Г. Я. Лозановский «Пространства Канторовича — Банаха».

Заседание 23 ноября 1965 г.

1. Л. А. Золотухина, К. П. Латышев, В. Н. Чугуева «Стохастическая модель слоистой среды и вероятностные свойства отраженных волн».

Модель среды. В сейсмической разведке наибольшую трудность представляет задача интерпретации сейсмограмм. Запись суммарной упругой волны имеет весьма сложный вид в силу того, что суммарная волна помимо полезной информации несет также информацию о неинтерпретируемых объектах среды. В предлагаемой работе неинтерпретируемые объекты рассматриваются с привлечением теории стохастических процессов, что выразилось в создании стохастической модели среды.

Пусть среда состоит из границ параллельных между собой и дневной поверхности. Каждая граница характеризуется началом ξ, протяженностью L, глубиной залегания z, где ξ, L, z — независимые случайные величины, относительно которых сделаны следующие предположения: 1) ξ образуют простейший поток Пуассона с интенсивностью λ, т. е. вероятность того, что в интервале $[0, X]$ появилось n границ, равна

$$P(N(X)=n)=\frac{e^{-\lambda X}(\lambda X)^n}{n!};$$

2) длины границ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием $E(L) = s < \infty$;
3) глубины залегания слоев z — независимые, равномерно распределенные в интервале $(0, H)$ случайные величины.

В работе исследуются отраженные волны, порождаемые некоторым источником, расположенным на дневной поверхности в точке $a > 0$ относительно системы прямоугольных координат (X, Z), и регистрируемые в точках $a + 2bi$ ($i = 1, 2, \ldots, K$) оси OX.

Ось X проходит по дневной поверхности через источник сигналов и сейсмоприемники; ось Z направлена вертикально вниз.

Однократные волны. В условиях приведенной модели изучаются однократные волны, регистрируемые в точке $X = a + 2b$ $(a,\ b > 0)$. Предполагается, что отражение происходит согласно законам геометрической оптики. В силу этого в точку $X = a + 2b$ попадут волны, отраженные от границ, пересекающих прямую $X = a + b$ в системе координат XZ. Считается, что каждая волна является известной функцией времени $f(t - \tau)$ при этом $f(t-\tau) \equiv 0$ при $t - \tau \leqslant 0$ и отлична от нуля для $t > \tau$, где τ — время запаздывания. Тогда в момент времени t волна, отраженная от границы, залегающей на глубине z, будет иметь вид $Af\left(t - \frac{2}{v}\sqrt{b^2 + z^2}\right)$, где A — амплитудный множитель, v — постоянная скорость распространения волны в среде.

Если в точке $X = 0$ системы координат XZ выполняется начальное условие $P\ (N(0) = 0) = 1$, то суммарная волна $V(t,\ b)$, пришедшая в точку $X = a + 2b$ в момент времени t, запишется в виде

$$V(t,\ b) = \sum_{j=1}^{N(X)} A_j W\,(a + b - \xi_j,\ L_j)\cdot f\left(t - \frac{2}{v}\sqrt{b^2 + z_j^2}\right), \tag{1}$$

где $W(x, y)$ — индикаторная функция такая, что $W(x, y) = 1$ при $0 < x < y$ и $W(x, y) = 0$ во всех остальных случаях.

В работе исследуется поведение стохастического процесса $V(t,\ \beta)$ при различных предположениях относительно амплитуды сигнала A.

а) A_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины со средним $EA_j = A$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$. В этом случае одномерной характеристической функцией процесса (1) при $a \to \infty$ (эргодичность) является

$$\varphi(\theta) = \exp\left\{A\lambda s \int_0^1 (e^{i\theta\psi(x)} - 1)\, dx\right\},$$

где $\psi(x) = f\left(t - \frac{2}{v}\sqrt{b^2 + H^2x^2}\right)$. При $\lambda \to \infty$ характеристическая функция $\varphi(\theta)$ стремится к характеристической функции нормального распределения. Аналогичные результаты получены и для многомерных характеристических функций при различных целых R, S и $t_1, \ldots, t_R$ и $b_1, \ldots, b_S$.

б) Если учесть геометрическое расхождение, то амплитуду можно представить в виде $A_j = \frac{B_j}{2\sqrt{b^2 + z_j^2}}$, где B_j $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$ удовлетворяют условиям, накладываемым на амплитуды в п. а). Тогда полученные результаты совпадают с результатами п. а).

в) Пусть $A_j = B_j p^{N_j(X)}\cdot q$, где B_j — множитель, удовлетворяющий условиям п. а), $N_j(X)$ — общее число границ, которые пересечет волна, отразившаяся от j-й границы, прежде чем попадет в сейсмоприемник; p — коэффициент преломления; q — коэффициент отражения, постоянные для всех границ.

Ввиду сильной зависимости слагаемых процесса (1), метод характеристических функций является не эффективным; поэтому вычислены математическое ожидание и дисперсия процессов $V(t,\ b)$.

г) Если заменить введенное $p^{N_j(X)}$ на $E\,\{p^{N_j(X)}\}$, то можно получить одномерную характеристическую функцию процессов $V(t,\ b)$. Однако в этом случае асимптотической нормальности $V(t,\ b)$ при $\lambda \to \infty$ не наблюдается.

Двукратно отраженные волны. Перенумеруем все границы в порядке возрастания глубины залегания: $0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{N(X)} < H$. Для того чтобы в точку наблюдения пришла волна, отраженная от трех границ с глубинами залегания $z_i,\ z_j,\ z_k$, необходимо, чтобы координаты точек отражения $(y_i,\ z_i)$, $(y_j,\ z_j)$, $(y_k,\ z_k)$ были связаны определенными соотношениями.

В этом случае суммарная двукратная волна $V(t, b)$, пришедшая в точку $X = a + 2b$ в момент времени t, имеет вид

$$V(t, b) = \sum_{i, j, k}^{N(X)} W(y_i - \xi_i, L_i) W(y_j - \xi_j, L_j) W(y_k - \xi_k, L_k) \cdot A_i \cdot A_j \cdot A_k \cdot f \times$$
$$\times \left(t - \frac{2}{v} \sqrt{b^2 + (z_i - z_j + z_k)^2} \right) \cdot \varepsilon (H - z_i + z_j - z_k),$$

где $\varepsilon(x) = 0$ при $x < 0$ и $\varepsilon(x) = 1$ при $x > 0$.

Вычислены математическое ожидание и дисперсия $V(t, b)$, и методом моментов показана асимптотическая нормальность $V(t, b)$ при $a \to \infty$ и $\lambda \to \infty$ в условиях пп. а), б).

Заседание 14 декабря 1965 г.

1. Г. С. Пейтин, С. Я. Фитиалов «Математические задачи в лингвистике».

2. Выборы новых членов Общества. В действительные члены Общества избран

Ожегов Вадим Борисович.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 22 февраля 1966 г.

Заседание было посвящено шестидесятилетию со дня рождения Исидора Павловича Натансона.

1. В. Н. Малоземов «Об одновременном приближении функции и ее производных алгебраическими полиномами».

2. С воспоминаниями об И. П. Натансоне выступили: Д. А. Владимиров, Б. З. Вулих, М. И. Клиот-Дашинский, Г. И. Натансон, Б. А. Рымаренко.

Заседание 15 марта 1966 г.

1. Обсуждение работ, выдвинутых на соискание Ленинских премий 1966 г.

2. Выборы новых членов общества. В действительные члены общества избрана

Петропавловская Римма Васильевна.

Заседание 12 апреля 1966 г.

1. Выборы почетных членов общества. Почетными членами общества избраны

Александров Александр Данилович,
Бернштейн Сергей Натанович,
Канторович Леонид Витальевич,
Марков Андрей Андреевич.

2. Б. Н. Делоне, С. С. Рышков (Москва) «К теории кубатурных формул».

3. Назначение рецензентов работ, выдвинутых на соискание премии Общества молодому математику.

Заседание 26 апреля 1966 г.

1. К. К. Головкин «О принципе локальности в теории краевых задач».

2. Присуждение ежегодной премии Ленинградского математического общества молодому математику. Премия общества за 1966 г. присуждена Благовещенскому Александру Сергеевичу.

Заседание 10 мая 1966 г.

1. Вручение премии Ленинградского математического общества. Премия общества за 1966 г. вручена А. С. Благовещенскому.

2. Выборы новых членов общества. В действительные члены общества избран

Головкин Кирилл Капитонович.

3. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

4. А. Т. Цветков «О плане работ Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука».

1967 г. июль-август *т. XXII, вып. 4 (136)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 27 сентября 1966 г.

1. Выдвижение кандидатов на соискание Ленинских премий 1967 г.

Заседание 11 октября 1966 г.

1. А. С. Благовещенский «Корректные характеристические задачи для ультрагиперболического уравнения».

Заседание 25 октября 1966 г.

1. Г. С. Цейтин «О независимости аксиомы выбора и континуум гипотезы».

Заседание 22 ноября 1966 г.

1. В. А. Рохлин «Элементарное преподавание математического анализа и теория пределов».
2. Выдвижение кандидатов на соискание Государственных премий 1967 г.

Заседание 13 декабря 1966 г.

1. Р. И. Пименов «К теории пространства-времени (бескоординатный подход)».

1969 г. июль—август *т. XXIV, вып. 4 (148)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 27 февраля 1968 г.

И. А. Ибрагимов «Стационарные процессы. Наилучший прогноз и регулярность».

Заседание 12 марта 1968 г.

Проводилось секцией втузов ЛМО.

А. И. Кошелев, С. Г. Михлин, В. В. Новожилов «О преподавании математики во втузах».

Заседание 26 марта 1968 г.

В. Р. Петухов «Некоторые аспекты метрической теории управления».

Заседание 9 апреля 1968 г.

С. М. Лозинский «Оценки нормы, логарифмической нормы, спектрального радиуса и спектральной абсциссы матрицы».

Заседание 18 апреля 1968 г.

М. К. Гавурин, И. В. Романовский «Вычислительные машины и общество».

Заседание 14 мая 1968 г.

1. Присуждение ежегодной премии Ленинградского математического общества молодому математику. Премия Общества за 1968 г. присуждена Жуку Владимиру Васильевичу за работы о связи между структурными свойствами функций и функционалами, обладающими свойствами нормы.

2. Вручение премии ЛМО молодому математику. Премия за 1968 г. вручена В. В. Жуку.

3. Н. А. Угарова (Москва) «О плане работ Главной редакции физико-математической литературы Издательства «Наука».

Заседание 28 мая 1968 г.

Проводилось секцией втузов ЛМО.

Д. С. Горшков «О преподавании математики в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина».

П. П. Касенков «О преподавании математики в Ленинградском электротехническом институте им. В. И. Ульянова (Ленина)».

Заседание 10 сентября 1968 г.

1. Выдвижение кандидатов на Ленинские и Государственные премии 1969 г.

2. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

Заседание 24 сентября 1968 г.

Н. Н. Воробьев «Современное состояние теории игр».

Заседание 5 октября 1968 г.

В. В. Жук «Некоторые классы функционалов и модули непрерывности».

Заседание 12 ноября 1968 г.

Заседание было посвящено памяти академика Сергея Натановича Бернштейна.

1. О. А. Ладыженская «Работы С. Н. Бернштейна по теории уравнений в частных производных».

2. С. М. Лозинский «Работы С. Н. Бернштейна по конструктивной теории функций».

3. И. А. Ибрагимов «Работы С. Н. Бернштейна по теории вероятностей».

Заседание 17 декабря 1968 г.

Е. С. Ляпин «Полугруппы преобразований частично упорядоченных множеств».

Заседание 24 декабря 1968 г.

П. С. Александров (Москва) «Существует ли еще теоретико-множественная топология?»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Ленинградское математическое общество создано в 1959 г. На 1 мая 1973 г. оно насчитывало 123 члена. Заседания общества проводятся два раза в месяц. Ежегодно присуждается премия общества молодому математику. Информация о работе общества неоднократно публиковалась в «Успехах»; последняя публикация — в УМН 24:4 (148) (1969), 205—206. В 1970 г. Правление общества решило расширить тематику докладов и организовать цикл «Современные проблемы математики».

Далее приводится повестка дня заседаний Общества за 1969—1973 годы В дальнейшем предполагается регулярная публикация материалов о работе Общества.

Заседание 28 октября 1969 г.

1. Н. Н. Воробьев «Развитие теории игр».

Заседание 23 декабря 1969 г.

Заседание, посвященное 75-летию со дня смерти П. Л. Чебышёва.

1. И. А. Ибрагимов «Работы П. Л. Чебышёва по теории вероятностей и их дальнейшее развитие».

Заседание 10 марта 1970 г.

1. Ю. В. Матиясевич «Диофантовость перечислимых множеств».
2. Обсуждение работ, выдвинутых на соискание Ленинских премий 1970 г.

Заседание 24 марта 1970 г.

1. Б. И. Плоткин (Рига) «Радикалы и многообразия в представлениях групп».
2. Прием в члены общества В. П. Хавина и О. Н. Бондаревой.

Заседание 14 апреля 1970 г.

1. О. Н. Бондарева «Теория кооперативных игр и абстрактные отношения».
2. Выдвижение работ на премию ЛМО молодому математику за 1970 г.

[1]) Предыдущая информация о работе ЛМО см. в УМН 24:4 (1969), 205. Далее даются краткие отчеты о заседаниях Общества, начиная с 1969/70 учебного года.

Заседание 28 апреля 1970 г.

1. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1970 г. Премия присуждена Ю. В. Матиясевичу за работу «Диофантовость перечислимых множеств».

Заседание 12 мая 1970 г.

1. А. М. Вершик и Л. Д. Фаддеев «Неголономная механика в инвариантном изложении».

2. Обсуждение планов издания математической литературы на 1971 г. (сообщение А. З. Рывкина).

Заседание 26 мая 1970 г.

1. В. Н. Судаков «Геометрия гильбертова пространства и теория случайных процессов».

2. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.

3. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление Ленинградского математического общества избраны:

1. С. М. Лозинский (президент).
2. О. А. Ладыженская (вице-президент).
3. Б. З. Вулих (вице-президент).
4. С. Г. Михлин.
5. В. А. Рохлин.
6. Г. И. Натансон (ученый секретарь).
7. А. М. Вершик (программная комиссия).
8. В. П. Хавин (программная комиссия).
9. В. Н. Судаков (казначей).
10. И. А. Ибрагимов.

В состав ревизионной комиссии избраны:

1. В. П. Ильин (председатель).
2. М. З. Соломяк.
3. В. Л. Файншмидт.

Принято решение организовать цикл обзорных докладов о современных проблемах математики.

Заседание 29 сентября 1970 г.

1. Рассказ о Международном математическом конгрессе в Ницце. Выступление участников конгресса — Н. Г. Чудакова, О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой, Л. Д. Фаддеева, Б. Б. Венкова, Ю. В. Матиясевича, А. И. Кошелева.

2. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

Заседание 20 октября 1970 г.

1. Л. И. Розоноэр (Москва) «Применение методов статистической физики к исследованию поведения большого коллектива автоматов».

2. Прием в члены ЛМО Ю. В. Матиясевича.

Заседание 27 октября 1970 г.

1. А. М. Рубинов (Новосибирск) «О некоторых задачах выпуклого анализа и их приложениях в математической экономике».

Заседание 10 ноября 1970 г.

1. М. М. Бонгард и Максимов (Москва) «Проблема распознавания образов».

Заседание 24 ноября 1970 г.

1. С. Б. Стечкин (Москва) «Средние числа».
2. Прием в члены ЛМО — М. Л. Громова, И. К. Даугавета, А. М. Кагана, С. Ю. Маслова, В. Я. Ривкинда, Б. А. Самокиша, Л. Д. Фаддеева.

Заседание 8 декабря 1970 г.

1. О. А. Ладыженская «Нелинейные задачи математической физики».
2. Прием в члены ЛМО — Н. К. Никольского, С. А. Юзвинского, А. В. Руколайне, А. Н. Андрианова, Б. М. Макарова, С. П. Гейсберга, В. В. Жука.

Заседание 22 декабря 1970 г.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Локальные задачи анализа».
2. Прием в члены ЛМО — С. А. Виноградова, Д. А. Владимирова.

Заседание 23 февраля 1971 г.

1. В. А. Рохлин «Нынешнее состояние топологии многообразий».
2. Прием в члены ЛМО — В. С. Буслаева, А. В. Яковлева, Б. З. Мороза, О. В. Шалаевского, Л. А. Халфина, А. И. Скопина, Г. Е. Минца.

Заседание 9 марта 1971 г.

1. Б. Б. Венков «Достижения теории конечных групп».
2. Прием в члены ЛМО — Г. Я. Ротковича.

Заседание 23 марта 1971 г.

1. Н. Г. Чудаков «Аналитическая теория мнимых квадратичных полей».
2. Прием в члены ЛМО — С. М. Ермакова.

Заседание 13 апреля 1971 г.

1. В. Г. Мазья, В. П. Хавин «Теория потенциала с точки зрения теории функций».

Заседание 27 апреля 1971 г.

1. Б. С. Митягин и Г. М. Хенкин (Москва) «Линейные задачи комплексного анализа».

2. Прием в члены ЛМО — Л. М. Брэгмана, В. Ф. Демьянова, В. Ф. Лазуткина, В. Н. Малоземова.

Заседание 11 мая 1971 г.

1. Н. А. Лебедев и Н. А. Широков «Прямые теоремы В. К. Дзядыка о равномерном приближении в комплексной области и некоторые их обобщения».
2. Выдвижение работ на премию ЛМО молодому математику.

Заседание 25 мая 1971 г.

1. Р. А. Минлос (Москва) «Статистическая теория бесконечных систем».
2. Прием в члены ЛМО — В. А. Солонникова.
3. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1971 г. Премия присуждена С. А. Виноградову за работы по интерполяционным теоремам.

Заседание 28 сентября 1971 г.

1. С. А. Виноградов «Интерполяционные теоремы типа Неванлинны — Пика — Банаха — Рудина — Карлесона».

Заседание 12 октября 1971 г.

1. Г. Е. Минц «Современное состояние проблемы Гильберта в области оснований математики».
2. Выдвижение работ на соискание Ленинских премий 1972 г.

Заседание 26 октября 1971 г.

1. Е. А. Горин, В. Я. Лин (Москва) «Группа кос, алгебраические уравнения, теоорема Пикара».

Заседание 23 ноября 1971 г.

1. А. А. Каган «Некоторые задачи математической статистики».

Заседание 14 декабря 1971 г.

1. М. Л. Громов «Многообразия Штейна».

Заседание 21 декабря 1971 г.

Заседание памяти Н. М. Гюнтера.

1. О. А. Ладыженская «О научных работах Н. М. Гюнтера».
2. Выступления С. М. Лозинского, Д. К. Фаддеева с воспоминаниями о Н. М. Гюнтере.

Заседание 1 марта 1972 г.

1. М. И. Кадец (Харьков) «Пространствам Банаха 50 лет».
2. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

Заседание 28 марта 1972 г.

1. Н. К. Никольский «Как устроен линейный оператор».

Заседание 11 апреля 1972 г.

1. Г. С. Цейтин «Сложность алгорифмов и вычислений».
2. Выдвижение работ на премию ЛМО молодому математику за 1972 г.

Заседание 25 апреля 1972 г.

1. С. М. Лозинский «Некоторые вопросы общего курса математического анализа (неопределенный интеграл, кривизна кривой, общий интеграл дифференциального уравнения, некоторые интегрируемые типы дифференциальных уравнений)».

Заседание 30 мая 1972 г.

1. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.
2. Выборы правления и ревизионной комиссии.
3. Прием в члены ЛМО — Ю. К. Демьяновича.

В правление Ленинградского математического общества избраны:

1. С. М. Лозинский (президент).
2. О. А. Ладыженская (вице-президент).
3. Б. З. Вулих (вице-президент).
4. С. Г. Михлин.
5. Г. И. Натансон (ученый секретарь).
6. А. М. Вершик (программная комиссия).
7. В. П. Хавин (программная комиссия).
8. М. Л. Громов (программная комиссия).
9. В. Н. Судаков (казначей).
10. И. А. Ибрагимов.

В состав ревизионной комиссии избраны:

1. В. П. Ильин (председатель).
2. М. З. Соломяк.
3. В. Л. Файншмидт.

На 30 мая 1972 г. в ЛМО состояло 119 членов.

Заседание 26 сентября 1972 г.

1. М. И. Башмаков (Москва) «Арифметика алгебраических кривых».

Заседание 10 октября 1972 г.

1. Г. Я. Лозановский «Банаховы пространства измеримых функций».

2. Выдвижение кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР.

Заседание 24 октября 1972 г.

Заседание памяти академика Ю. В. Линника.

1. Доклады о научных трудах Ю. В. Линника: Н. А Сапогова, А. В. Малышева, А. М. Кагана.

2. Выступления С. М. Лозинского, Д. К. Фаддеева, В. В. Петрова и А. А. Киселева с воспоминаниями о Ю. В. Линнике.

Заседание 14 ноября 1972 г.

1. В. Ф. Демьянов и В. Н. Малоземов «О минимаксе».
2. Прием в члены ЛМО — Ю. А. Волкова и В. В. Петрова.

Заседание 28 ноября 1972 г.

1. В. А. Рохлин «Нынешнее состояние 16 проблемы Гильберта».
2. Выдвижение работ на соискание Государственной премии за 1973 г.
3. Прием в члены ЛМО — С. С. Лаврова.

Заседание 12 декабря 1972 г.

1. Д. Б. Фукс (Москва) «Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений».

Заседание 26 декабря 1972 г.

1. А. А. Кириллов (Москва) «Современное состояние теории представлений групп Ли».

Заседание 20 февраля 1973 г.

1. Б. С. Митягин (Москва) «Кратные ряды Фурье и сходимость спектральных разложений».

Заседание 13 марта 1973 г.

1. В. М. Бабич «Математический аппарат теории дифракции (лучи, пограничные слои, нормальные расслоения, замыкающиеся конгруэнции и др.)».

Заседание 27 марта 1973 г.

1. А. В. Малышев «Эргодический метод Ю. В. Линника в теории чисел».

Заседание 10 апреля 1973 г.

1. Ю. И. Манин (Москва) «Континуум-гипотеза и случайные числа».

Заседание 24 апреля 1973 г.

1. В. А. Якубович «5-й Всемирный конгресс по управлению. Париж, июнь 1972 г.».

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1])

Заседание 9 октября 1973 г.

1. Л. Н. Васерштейн (Москва) «Алгебраическая K-теория».

2. Присуждение премии ЛМО за 1973 г. молодому математику. Премия присуждена Я. М. Элиашбергу за работы по глобальной теории особенностей.

Заседание 23 октября 1973 г.

1. А. В. Яковлев «Матричные задачи и их применение в теории представлений».

Заседание 13 ноября 1973 г.

1. М. З. Соломяк «Интерполяция линейных пространств и линейных операторов».

Описаны конструкции, позволяющие строить серии пространств, промежуточных между двумя заданными банаховыми пространствами, и о применении этих конструкций при исследовании линейных операторов.

2. Прием в члены ЛМО — В. Ф. Осипова.

Заседание 27 ноября 1973 г.

1. Я. М. Элиашберг «Глобальная теория особенностей гладких отображений и ее применение».

Рассказано о применении глобальной теории особенностей в геометрии, топологии, механике и др.

Заседание 11 декабря 1973 г.

1. С. С. Лавров «Некоторые вопросы теории программирования».

На основе понятия операторной схемы алгоритма изучаются задачи об оценке трудоемкости алгоритмов, об экономии памяти и об эквивалентности схем.

Заседание 25 декабря 1973 г.

1. М. А. Евграфов и М. М. Постников (Москва) «Асимптотика функции Грина для параболических уравнений».

Асимптотика функции Грина, метод перевала, существование паразитных точек перевала, сильно выпуклые формы, уравнения с переменными коэффициентами.

---

[1]) Предыдущая информация в УМН 28:4 (1973), 229.

Заседание 26 февраля 1974 г.

1. В. П. Паламодов (Москва) «Проблема моделей в аналитической геометрии».

Для одномерных компактных многообразий эта проблема далеко продвинута: пространство модулей есть фактор многообразия Фрикке — Тейхмюллера по дискретной группе, метрике Тейхмюллера посвящены классические работы Альфорса и Берса, в сравнительно недавней работе Ройдена обнаружены ее новые замечательные свойства. Кодаира и Спенсер нашли, что для многомерных многообразий пространство модулей, вообще говоря, не существует в том смысле, как это понималось раньше. Вместо локального пространства модулей Гротендик предложил искать версальные семейства деформаций комплексных пространств. В работах Кодаира — Ниренберга — Спенсера и Кураниши версальное семейство было построено для любого компактного многообразия, для любого компактного пространства аналогичный результат был получен лишь совсем недавно.

Очень интересен топологический аспект теории деформаций: связность Гаусса — Манина и вариации фильтрации Ходжа зависят от характеристического отображения Кодаира — Спенсера, эта связь ведет к локальным теоремам Торелли. Деформация ростка аналитической функции связана с топологией ее неособой гиперповерхности уровня, в частности, ее гомотипический тип выражается через версальную деформацию (формула Милнора). Делинь нашел аналог этой формулы в случае характеристики $p \neq 0$. С другой стороны, инфинитезимальные деформации комплексных пространств естественно трактовать в чисто алгебраических терминах. При этом возникают интересные структуры: кокасательный и касательный комплексы, выражающиеся через гомологии и когомологии аналитических алгебр. Эти конструкции имеют глубокую, не вполне понятую, связь с общей теоремой Римана — Роха.

Заседание 12 марта 1974 г.

1. Л. Д. Фаддеев. «Метод обратной задачи рассеяния для решения нелинейных эволюционных уравнений».

Обзор приложений нового метода решения нелинейных уравнений для функций от двух переменных, впервые использованный на примере уравнения Кортевега — Де-Фриза из гидродинамики, интерпретация метода в терминах теории гамильтоновых систем.

Заседание 26 марта 1974 г.

1. Д. А. Каждан (Москва). «Гипотеза Римана — Вейля для алгебраических многообразий над конечным полем».

Недавно французский математик П. Делинь решил знаменитую проблему Римана — Вейля, дав неулучшаемые оценки для числа точек на алгебраическом многообразии над конечным полем. Для кривых соответствующий результат был получен А. Вейлем в 1940 г. В докладе рассказано об этих результатах.

Заседание 9 апреля 1974 г.

1. Д. К. Фаддеев «Комплексные представления полной линейной группы над конечным полем».

В докладе рассказано о новом методе описания всех комплексных представлений полной линейной группы над конечным полем.

Заседание 18 апреля 1974 г.

Заседание, посвященное памяти академика Владимира Ивановича Смирнова (1887—1974). С сообщениями о научной, педагогической и организационной деятельности В. И. Смирнова выступили С. Л. Соболев, А. Д. Александров, С. В. Валландер, О. А. Ладыженская, С. Г. Михлин, Н. К. Никольский, Н. Н. Поляхов, В. П. Хавин, В. А. Якубович.

Заседание 14 мая 1974 г.

1. Отчеты правления ЛМО и ревизионной комиссии.
2. Выборы правления ЛМО и ревизионной комисии.

В правление Ленинградского математического общества выбраны:

1. С. М. Лозинский (президент).
2. Б. З. Вулих (вице-президент).
3. О. А. Ладыженская (вице-президент).
4. А. М. Вершик.
5. И. А. Ибрагимов.
6. С. Г. Михлин.
7. Г. И. Натансон (ученый секретарь).
8. В. Н. Судаков (казначей).
9. В. П. Хавин.
10. А. В. Яковлев.

В состав ревизионной комиссии избраны:

1. В. П. Ильин (председатель).
2. М. З. Соломяк.
3. В. Л. Файншмидт.

3. Присуждение премии ЛМО за 1974 г. молодому математику. Премия присуждена Ю. А. Давыдову за работы по предельным теоремам для марковских случайных процессов.

4. Прием в члены ЛМО — Н. Н. Петрова.

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1]

Заседание 24 сентября 1974 г.

1. Математические впечатления о поездках в США. Рассказы И. А. Ибрагимова и В. В. Петрова.

2. Доклад лауреата премии ЛМО молодому математику за 1974 г. Ю. А. Давыдов «Предельные теоремы для марковских случайных процессов».

В докладе рассматриваются функционалы интегрального вида: $\int\limits_0^T h(\xi_t)dt$, где ξ_t — устойчивый процесс в R^n или случайное блуждание из области притяжения этого устойчивого процесса, а h — некоторая ограниченная измеримая функция на R^n. Даются достаточные условия для существования предельных распределений таких функционалов, нормализованных подходящим образом. В одномерном случае, с использованием тауберовой теоремы Винера, получены и необходимые и достаточные условия. Приводится интегральное представление для предельных распределений.

Заседание 22 октября 1974 г.

1. С. Ю. Маслов «Современная теория поиска вывода».

Проблема выявления по гипотезе ее возможных доказательств. Стандартизация выводов. Современные методы поиска вывода. Поиск вывода в исчислениях общего вида. Проблема моделирования творческой деятельности.

Заседание 12 ноября 1974 г.

1. В. А. Плисс «Инвариантные множества периодических диссипативных систем».

Изучается характеристическое инвариантное множество (стержень) периодической диссипативной системы. Особое внимание уделяется грубым системам.

Заседание 26 ноября 1974 г.

1. Р. Л. Добрушин, Р. А. Минлос (Москва) «Вероятностные методы в квантовой теории поля».

В докладе рассказано о развитых в последние годы конструктивных методах в квантовой теории поля, основанных на изучении марковских полей («Марковская революция конструктивной квантовой теории поля»).

2. В члены Общества приняты: Ю. А. Давыдов, В. А. Егоров, В. Б. Невзоров, Я. Ю. Никитин, Л. В. Осипов, Б. А. Пламеневский.

---

[1]) Предыдущая информация опубликована в УМН 29:5 (179)(1974) 247—249.

Заседание 10 декабря 1974 г.

1. С. Г. Гиндикин (Москва) «Характеристики, бихарактеристики, старшие части дифференциальных операторов».

Для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами известны общие конструкции конусов бихарактеристик (Л. Хёрмандер, И. Бернштейн). В некоторых содержательных ситуациях удается совершить переход к переменным коэффициентам; при этом важно выделить старшие части оператора, отвечающие за характеристики и бихарактеристики; старшая часть не всегда совпадает со старшей однородной частью оператора.

2. В члены Общества приняты: Ю. Н. Бибиков, М. И. Гордин.

Заседание 17 декабря 1974 г.

1. С. П. Новиков (Москва) «Методы качественной теории динамических систем в релятивистской космологии».

В докладе изложены основные результаты статьи О. И. Богоявленского и С. П. Новикова «Качественная теория однородных космологических моделей», печатающейся в «Трудах семинара им. И. Г. Петровского», т. 1.

Заседание 4 марта 1975 г.

1. Дж. Кинг (США) «Отрицательная кривизна и голоморфные отображения нескольких переменных».

Обобщение на случай многих переменных теорем Пикара, Шоттки — Ландау, а также теория Неванлинны распределения значений для отображений проективных алгебраических многообразий. Основной метод заключается в подходящем определении отрицательной кривизны в многомерных пространствах и использовании принципа максимума.

Заседание 25 марта 1975 г.

1. Н. А. Шанин «Об особенностях конструктивной математики» (обзорный доклад).

2. В члены Общества приняты: Е. Л. Аренсон, Е. М. Дынькин, А. А. Зингер, А. И. Плоткин, С. Ю. Ротфельд.

Заседание 8 апреля 1975 г.

Совместное заседание Ленинградского математического общества и Института истории естествознания АН СССР, посвященное 125-летию со дня рождения С. В. Ковалевской.

1. Г. И. Натансон «Жизненный путь С. В. Ковалевской».
2. В. М. Бабич «Работы С. В. Ковалевской по математике».
3. Н. Н. Поляхов «Работы С. В. Ковалевской по механике».

Заседание 22 апреля 1975 г.

1. Я. Г. Синай (Москва) «Автомодельные распределения вероятностей».

В статистической механике часто возникают семейства случайных величин, которые нельзя ни в какой степени считать слабо зависимыми. Доказательство предельных теорем требуют привлечения новых методов из теории фазовых переходов и квантовой теории поля. В докладе будет рассказано о нескольких, относящихся сюда результатах.

Заседание 6 мая 1975 г.

1. Б. М. Макаров «Некоторые идеалы операторов в банаховых пространствах».

Доклад посвящен обзору результатов, относящихся к теории введенных А. Пичем p-абсолютно суммирующих операторов. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется p-абсолютно суммирующим, если существует такое число $C > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{N} \| Tx_k \|^p \leqslant C^p \sup \left\{ \sum_{k=1}^{N} | \langle x_k, x' \rangle |^p \,|\, x' \in X^*, \quad \| x' \in X^*, \| x' \| \leqslant 1 \right\},$$

где $\{x_k\}_1^N$ — произвольный конечный набор векторов пространства X. Множество таких операторов обозначается символом $\Pi_p(X, Y)$. Представляет большой интерес описание пространств, для которых при некотором $p \in (0, +\infty)$ имеет место равенство $\Pi_p(X, Y) = L(X, Y)$. Как вытекает из теоремы Дворецкого, оно наиболее вероятно в том случае, когда Y — гильбертово пространство. В работах Гротендика, Линденштраусса, Пельчинского и Квапинь доказано, что $\Pi_1(L^1, L^2) = L(L^1, L^2)$; $\Pi_2(C, L^2) = L(C, L^2)$; $\Pi_p(X, L^r) = \Pi_2(X, L^r)$ при $p \in [2, +\infty)$, $r \in [1, 2]$. Можно показать, что равенства $\Pi_2(X, L^2) = L(X, L^2)$ и $\Pi_2(X^*, L^2) = L(X^*, L^2)$ эквивалентны. Отметим еще следующее утверждение (Б. М. Макаров, Нашат Фарид): если существуют последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$; $A_n\colon l_n^2 \to X$, $B_n\colon X \to l_n^2$ со свойствами: $B_n A_n = \mathrm{id}_{l_n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mathrm{ikf}\{n^{-1/2} \| A_n \| \cdot \| B_n \| \,|\, n = 1, 2, \ldots\} = 0$, то найдется вполне непрерывный оператор из X в L^2, не входящий в $\Pi_p(X, L^2)$ ни при каком $p \in (0, +\infty)$. Для равномерно выпуклых пространств этот результат установлен недавно Дави и Джонсоном.

Этот круг вопросов связан с геометрическими проблемами теории банаховых пространств, их изоморфной классификацией и некоторыми задачами теории вероятностей.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1975 г. Премии присуждены О. Я. Виро за цикл работ по топологии коразмерности два и Н. А. Широкову за цикл работ по равномерному приближению функций на замкнутых множествах без угловых точек.

3. В члены Общества принят Н. А. Широков.

1977 г. январь — февраль *т. XXXII, вып. 1 (193)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 23 сентября 1975 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1975 г.

2. Доклады лауреатов премии ЛМО молодому математику:

О. Я. Виро «Топология узлов».

Н. А. Широков «Приближение непрерывных аналитических функций на компактах».

Заседание 14 октября 1975 г.

1. А. Н. Андрианов «Автоморфные формы и операторы Гекке».

Обзор (для неспециалистов) теории дзета-функций с эйлеровым произведением, отвечающих автоморфным формам, главным образом,— модулярным формам Зигеля.

2. Прием в члены Общества — Виро О. Я.

Заседание 28 октября 1975 г.

1. Б. Б. Венков «Коды и решетки».

В докладе рассказано о связи алгебраической теории кодирования с теорией целочисленных квадратичных форм и матриц.

Заседание 11 ноября 1975 г.

1. Э. Б. Винберг (Москва) «Инварианты и орбиты».

В докладе изложена конструкция фактор-пространства для любой редуктивной линейной группы (Гильберт — Нагата — Мамфорд) и другие результаты об орбитах таких групп. Выделен также широкий класс групп, для которых описание орбит и инвариантов может быть проделано эффективно.

Заседание 25 ноября 1975 г.

1. Ф. А. Березин (Москва) «Квантование».

В докладе сообщена общая концепция квантования классической механики с произвольным фазовым пространством. Удается проквантовать механики, фазовые пространства которых есть однородные келеровы многообразия, например, двумерная сфера, плоскость Лобачевского. Результаты применяются в физике, теории операторов, теории представлений групп Ли.

Заседание 9 декабря 1975 г.

1. Л. Д. Фаддеев «Влияние солитонов на математическую физику и математиков».

Солитонами называются локализованные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Теория солитонов оказалась в тесной связи с методами

[1]) См. УМН 30:5 (1975).

обратной задачи теории рассеяния, о чем рассказывалось на заседании ЛМО в 1973 г. Сейчас «солитонная» проблематика значительно расширилась; ею занимается широкий круг лиц. В ней используются понятия и методы многих областей: от алгебраической геометрии до квантовой механики. В докладе рассказано о стимулирующем влиянии теории солитонов.

Заседание 23 декабря 1975 г.

1. «Некоторые проблемы комплексного анализа».

В теории аналитических функций с давних пор в центре внимания были следующие три группы вопросов: проблема единственности для классов функций, принцип максимума и компактность семейств функций и вопросы аппроксимации. В последние годы были развиты новые подходы к этим классическим задачам ($\bar{\partial}$ — проблематика, переход к многим переменным, новые аналитические методы) и получен ряд интересных результатов. О некоторых из них рассказано в сообщениях В. П. Хавина, Е. М. Дынькина, С. В. Хрущева, В. Н. Сеничкина.

Заседание 24 февраля 1976 г.

1. В. С. Буслаев «Асимптотические формулы на непрерывном спектре дифференциальных операторов».

Рассматривались некоторые асимптотические вопросы спектральной теории для эллиптических дифференциальных операторов вида

$$\mathscr{L}u=\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}+\sum_i b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+c(x)\,u$$

в областях Ω пространства R^n с классическими граничными условиями на границе $\partial\Omega$. Была описана связь асимптотических вопросов с задачами геометрии геодезических метрик $ds^2=\sum_{i,j}a_{ij}(x)dx^idx^i$ и обсуждены механизмы формирования асимптотических серий в спектре внутренних задач. Более подробно для внутренних задач были рассмотрены геометрические основания известных асимптотических разложений вида

$$\mathscr{D}(z)\sim\sum_{p\geqslant 0}d_p\left(e^{-i\pi}z\right)^{\frac{h}{2}-l-1-\frac{p}{2}},\qquad \mathscr{D}(z)=\operatorname{Tr}R^{l+1}(z), \tag{1}$$

где $R(z)=(-\mathscr{L}-z)^{-1}$, $l=[n/2]$, при $z\to\infty$ вне спектра оператора $\mathscr{L}$: $\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\leqslant 2\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Если Ω — внешность ограниченной замкнутой строго выпуклой гладкой гиперповерхности, коэффициенты a^{ij} постоянны, а b^i и c достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, то подобным же разложением обладает регуляризованный след

$$\mathscr{D}(z)=\operatorname{Tr}\left[R^{l+1}(z)-R_0^{l+1}(z)\right],$$

в котором $R_0(z)$ — резольвента оператора $\mathscr{L}_0=\sum_{i,j}a^{ij}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^i\partial x^j}$ на R^n. Операторы $R(z)$ и $R_0(z)$ действуют в разных пространствах. След Tr следует истолковывать как след интегрального оператора, в первом члене следует интегрировать по Ω, во втором — по R^n, вне какого-либо компакта интегралы следует объединить. Функция $\mathscr{D}$ на этот раз имеет гладкие предельные значения на непрерывном спектре, т. е. при $z\to\lambda\pm i0,\lambda>0$; асимптотическое разложение вида (1) при $z\to\infty$ справедливо плоть до непрерывного спектра: $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi-0$. Хотя процедура последовательного построения коэффициентов d_p для внешних областей остается, так же как и для внутренних, локальной, доказательство того, что в асимптотике вида (1) можно выйти на непрерывный спектр, по своему характеру существенно нелокально.

В качестве следствия обсуждались спектральные тождества

$$\sum_m \lambda_m^p - \frac{p}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma(\lambda) - \sum_{q=0}^{2l+2p+1} \sigma_q \lambda^{l+\frac{1}{2}-\frac{q}{2}}\right] \lambda^{p-1}\, d\lambda = t_p,$$

λ_m — собственные значения оператора $\mathscr{L}$, $\sigma(\lambda) = -i \ln \det s(\lambda)$, $s(\lambda)$ — матрица рассеяния, p — произвольное натуральное число, коэффициенты σ_q и t_p выражены явно через d_p и число N собственных значений оператора $\mathscr{L}$. Функцию σ можно при некоторых оговорках нормировать условием $\sigma(+0) = 0$. Тогда, в частности, при $\Omega = R^n$, $b^i = 0$, $p=1$ и $n=2$

$$\sum \lambda_m - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma(\lambda) + 2\pi N + \frac{1}{2}\int dx\, c(x)\right] d\lambda = -\frac{1}{8\pi}\int dx c^2(x),$$

при $n=3$

$$\sum \lambda_m - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\sigma(\lambda) + 2\pi N + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int dx c(x) - \frac{1}{8\pi\sqrt{\lambda}}\int dx c^2(x)\right] d\lambda = 0.$$

Заседание 9 марта 1976 г.

1. Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллер «Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны».

Строение в целом римановых многообразий неотрицательной кривизны изучено неполно. Для замкнутых многообразий существуют лишь отдельные важные результаты. Для полных незамкнутых многообразий в последние годы получены существенные продвижения, опирающиеся на изучение выпуклых множеств в таких пространствах. В докладе изложены результаты и описаны конструкции, которые позволили это сделать.

2. Обсуждение работ по математике, выдвинутых на соискание Ленинской премии 1976 г.

Заседание 23 марта 1976 г.

1. С. М. Ермаков «О математических задачах, связанных с методом Монте-Карло».

Пусть $\mathscr{E} = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел из $(0, 1)$, определяемых равенством $\varepsilon_{n+1} = \text{Др}(M\varepsilon_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где Др(a) означает дробную долю числа a, $M \gg 2$ целое. Пусть также $\mathscr{N}$ — конечное множество из k натуральных чисел, превосходящих натуральное N_0, а $\mathscr{F}$ — конечное множество из m интегрируемых по Риману в единичном s-мерном гиперкубе K_s функций. Обозначим через $X_i = (\varepsilon_{is}, \ldots, \varepsilon_{i(s+1)})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. На основе предельных теорем для сумм вида $N^{-1}\sum_{i=0}^{N-1} f(X_i)$, $f \in \mathscr{F}$ можно доказать следующее утверждение.

При достаточно больших фиксированных N_0 и M и любых фиксированных $\mathscr{N}$ и $\mathscr{F}$ существует такое ε_0, что для каждой f из $\mathscr{F}$ и каждого N из $\mathscr{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{K_s} f(X)\, dX - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(X_i)\right| \leqslant \frac{c\sigma_f}{\sqrt{N}},$$

где $\sigma_f = \left(\int_{K_s} f^2(x)\, dx - \left(\int_{K_s} f(x)\, dx\right)^2\right)^{1/2}$, $c > 0$ — константа, зависящая лишь от k и m.

Можно показать также, что этот результат остается справедливым, когда вычисления по формуле $\varepsilon_{n+1} = \text{Др}(M\varepsilon_n)$ производятся с конечным фиксированным, но достаточно большим числом знаков. В этом последнем случае последовательность $\mathscr{E}$ будет последовательностью псевдослучайных чисел, получаемых с помощью так называемого «метода сравнений» и полученный результат является детерминистским обоснованием метода Монте-Карло для конкретного способа построения псевдослучайных чисел.

Значительный интерес представляет задача конструирования ε_0 по заданному $\mathcal{N}$ и $\mathcal{F}$ и задача изучения с этой точки зрения других методов конструирования псевдослучайных последовательностей.

2. Прием в члены Общества — Андреев А. Ф., Лодкин А. А., Пилюгин С. Ю., Суслин А. А., Чернышев В. Е.

Заседание 13 апреля 1976 г.

1. Б. А. Розенфельд (Москва) «150 лет геометрии Н. И. Лобачевского».

Заседание 27 апреля 1976 г.

1. А. С. Дынин (Москва) «Псевдодифференциальные операторы на группах Ли».

С помощью группового преобразования Фурье и метода квантования Г. Вейля удается построить теорию псевдодифференциальных операторов на нильпотентных группах Ли. В случае группы Гейзенберга эти построения позволяют развить специальную «эллиптическую» теорию для многообразий с контактной структурой, в частности, для строго псевдовыпуклых многообразий.

2. Прием в члены Общества — Жубр А. В., Элиашберг Я. М.

Заседание 11 мая 1976 г.

1. О плане выпуска математической литературы издательством «Мир» на ближайшие годы. Сообщение представителя издательства «Мир» А. С. Попова (Москва).

2. Присуждение премий ЛМО молодому математику за 1976 г.

Премии присуждены: 1) Цирельсону Борису Симоновичу за цикл работ по теории вероятностей и смежным вопросам, 2) Дынькину Евсею Мордуховичу за цикл работ, посвященный свойствам решений неоднородной системы Коши — Римана.

3. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.

4. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление Ленинградского математического общества выбраны:

1. С. М. Лозинский (президент).
2. Б. З. Вулих (вице-президент).
3. О. А. Ладыженская (вице-президент).
4. А. М. Вершик (председатель программной комиссии).
5. И. А. Ибрагимов.
6. С. Г. Михлин.
7. Г. И. Натансон (ученый секретарь).
8. М. З. Соломяк.
9. В. Н. Судаков (казначей).
10. В. П. Хавин.

В состав ревизионной комиссии избраны:

1. В. П. Ильин (председатель).
2. Н. К. Никольский.
3. В. Л. Файншмидт.

1978 г. январь — февраль т. XXXIII, вып. 1 (199)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ[1])

Заседание 28 сентября 1976 г.

1. Вручение премий ЛМО молодому математику за 1976 г.
2. Доклады лауреатов премии:

1°. Б. С. Цирельсон «Может ли случайное локальное взаимодействие приводить к коллективному поведению». (О новых результатах в теории случайных автоматов.)

Рассматриваются сети стохастических автоматов или, в другой терминологии, системы взаимодействующих марковских процессов, каждый — с конечным числом состояний и дискретным временем. Определения можно найти в [1] или [2]. Как в [2], и в отличие от [1], мы не предполагаем, что все автоматы устроены одинаково; но, в отличие от [2], здесь предполагается однородность по времени. Центральную роль здесь (как и в [1], [2]) играет условие, что все переходные вероятности (для отдельного автомата, на единицу времени) больше некоторого положительного числа α, которое мы называем показателем невырожденности данной сети. Как показано в [1], такие сети могут быть неэргодичны, если размерность сети $d \geqslant 2$; для $d = 1$ вопрос остается открытым. В теореме, сформулированной ниже, рассматриваются конечные сети размерности 2; автоматы размещены не на всей двумерной решетке, а лишь на квадрате размера $N \times N$. Сеть из конечного числа автоматов, разумеется, эргодична (при $\alpha > 0$); но ее время релаксации может быть экспоненциально большим по $N \to \infty$ при фиксированном α, фиксированном числе состояний автомата n и фиксированном радиусе взаимодействия r. Это, конечно, свидетельствует о коллективном поведении автоматов. Следующая теорема показывает, что у такой сети метастабильные состояния не только могут существовать, но их может быть много. Сети, существование которых утверждается в теореме, имеют $r = \sqrt{2}$, $n = 2$, т. е. каждый автомат имеет два состояния — 0 и 1, и переходные вероятности инвариантны относительно замены состояний — 0 на 1, а 1 на 0. (К сожалению, в [2] автор не указал, что в теоремах 1 и 2 имеются ввиду сети, обладающие такой инвариантностью, из-за чего теорема 1 из [2] оказалась тривиальной.)

Теорема. *При любом N существует система $\mathcal{A}_N$ вышеописанного вида, размера $N \times N$, с показателем невырожденности $\alpha \geqslant c_0$, которая может надежно хранить $c_1 N$ единиц информации в течение времени* $\exp\,(c_2 N^{c_3})$; *здесь c_0, c_1, c_2, c_3 — положительные абсолютные константы. Более точно, выполнено следующее. Пусть S обозначает множество всех состояний системы $\mathcal{A}_N$, и пусть K — конечное множество, содержащее не более чем* $\exp(c_1 N)$ *элементов. Тогда существуют отображение $\mathcal{C}\colon K \to S$ (кодирование) и набор отображений $\mathcal{D}_t : S \to K$ (декодирование) такие, что*

$$\mathrm{P}\{\mathcal{D}_t(s(t)) = k \,|\, s(0) = \mathcal{C}(k)\} \geqslant 1 - t\exp\,(-c_2 N^{c_3})$$

для любых $k \in K$ и $t = 1, 2, \ldots$; здесь $s(t)$ обозначает состояние системы $\mathcal{A}_N$ в момент t. Кроме того, $\mathcal{D}_{t+N} = \mathcal{D}_t$ при всех t.

---

[1]) См. УМН 32:1 (1977).

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Тоом, Неэргодичные многомерные системы автоматов, Проблемы передачи информации 10:3 (1974), 70—79.

[2] Б. С. Цирельсон, Неоднородное локальное взаимодействие может создать «дальний порядок» в одномерной системе, Резюме доклада, Теория вероятн. и ее применения 21:3 (1976), 681—683.

2°. Е. М. Дынькин «Оператор Фабера». (Сохранение гладкости при конформном отображении.)

Пусть G_1, G_2 — две плоские области с достаточно регулярной (например, кусочно-гладкой) границей, φ: $C\setminus G_2 \to C\setminus G_1$, $\varphi(\infty) = \infty$,— конформное отображение, w — аналитическая функция в $C\setminus G_2$. Оператор Фабера $T(\varphi, w)$ переводит функцию f, аналитическую и (например) ограниченную в G_1 в функцию Tf, аналитическую в G_2, по формуле

$$Tf(z) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial G_2} f[\varphi(\zeta)]\, w(\zeta)\, (\zeta - z)^{-1}\, d\zeta, \qquad z \in G_2.$$

Обсуждается свойство оператора T сохранять гладкость вплоть до границы функции f почти при любых φ, w. Например, многочлены всегда переходят в многочлены той же степени. Если G_1 и G_2 совпадают с единичным кругом D, а w — «внутренняя» функция, то это свойство оператора T означает сохранение гладкости при канонической факторизации функций.

Рассматривается связь оператора Фабера с псевдоаналитическим продолжением гладких функций. Такая связь позволяет полностью описать действие оператора на различные классические функциональные пространства. Следующие три примера рассмотрены более подробно.

1) При $w = \varphi'^{-s}$, $s > 0$, оператор T переводит пространство $A^s(G_1)$ в $A^s(G_2)$, где $A^s(G)$ — пространство аналитических в G функций, удовлетворяющих в $\overline{G}$ условию Гёльдера порядка s (с обычной модификацией при $s \geqslant 1$). В частности, банаховы пространства $A^s(G)$ при разных G изоморфны.

2) При $w = \varphi'^{\frac{1}{p} - l}$, l — целое, $1 < p < \infty$, оператор T переводит пространство $E_p^l(G_1)$ в $E_p^l(G_2)$, где $E_p^l(G)$ — пространство аналитических в G функций, у которых производная порядка l входит в класс Смирнова $E^p(G)$. В частности, и эти пространства при разных G изоморфны.

3) Образ пространства $A^s(D)$ под действием классического оператора Фабера ($w = 1$) может быть описан с помощью наилучших приближений многочленами или локальных модулей гладкости.

В заключение обсуждалась гипотеза о том, что зависимость изоморфизмов от s и l в примерах 1) и 2) не случайна и что шкалы банаховых пространств $\{A^s(G)\}_{s<0}$ уже не являются изоморфными в целом в существенно разных областях, например, в треугольнике и в круге.

3. Прием в члены ЛМО — Б. С. Цирельсон.

Заседание 12 октября 1976 г.

1. С. С. Кутателадзе (Новосибирск) «Полуупорядоченные пространства в выпуклом анализе».

В докладе на примере теории выпуклых экстремальных задач пояснено, почему теория полуупорядоченных векторных пространств служит технической базой развития выпуклого анализа. В частности, выведена новая основная формула для вычисления субдифференциалов суперпозиций выпуклых операторов, играющая в выпуклом анализе роль, аналогичную роли формулы для дифференциала суперпозиции в дифференциальном исчислении. Полученная формула применялась к нахождению критериев оптимальности по Парето и критериев идеального оптимума в задачах многоцелевого программирования.

2. Прием в члены ЛМО — С. В. Керов, А. Н. Лившиц.

Заседание 16 ноября 1976 г.

Математический лекторий для студентов.

1. В. П. Хавин «Что такое проблема короны?».

Проблема короны состоит в том, чтобы доказать плотность круга в некотором специальном топологическом пространстве. Возникнув в связи исследованием алгебр аналитических функций, она потребовала разработки новых средств анализа. Решение ее было дано Л. Карлесоном 15 лет назад но некоторые связанные с ней вопросы остаются открытыми.

Заседание 30 ноября 1976 г.

1. Ч. Стейн (США, Станфорд) «Метод аппроксимации вероятностных распределений».

Рассматривается аппроксимация вероятностных распределений, связанная с новым способом обработки наблюдений стационарной случайной последовательности. Полученные результаты применяются к комбинаторной задаче об асимптотике числа латинских прямоугольников; рассказано об обобщениях теорем Эрдеша и Капланского.

2. Прием в члены ЛМО — А. В. Бухвалов, А. М. Рубинов.

Заседание 14 декабря 1976 г.

1. А. А. Суслин «Проблема Серра и близкие вопросы».

Поставленный в 1955 г. Ж. П. Серром вопрос о структуре некоторых модулей над кольцом многочленов оказался тесно связанным со многими интересными проблемами алгебры, алгебраической геометрии, К-теории и др. В докладе рассказано о решении проблемы Серра, данным в 1976 г. независимо Д. Квилленом и докладчиком, и о ее связях.

Заседание 28 декабря 1976 г.

1. А. Д. Александров (Новосибирск) «Относительность, причинность, конформность».

Общий взгляд на хроногеометрию; основы теории относительности и конформные отображения областей псевдоевклидовых и конформных пространств.

Заседание 15 марта 1977 г.

1. В. А. Солонников «Математический анализ некоторых задач гидродинамики».

Математический анализ краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Навье — Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости, является одним из актуальных и интенсивно развивающихся направлений современной математической физики и опирается на самые современные математические методы. В докладе рассказано о некоторых работах последнего времени в этой области.

Заседание 29 марта 1977 г.

Математический лекторий для студентов.

1. С. Г. Михлин «Сингулярные интегральные операторы».

Сингулярные интегральные операторы (СИО) первоначально появились в теории функций комплексной переменной. С теорией СИО связана интересная и разнообразная проблематика. Исследование этой проблематики потребовало применения современных средств функционального анализа и топологии и в большой степени стимулировало их развитие. Синтез двух теорий — дифференциальных операторов и СИО — привел к созданию новой, богатой идеями и результатами, теории псевдодифференциальных операторов.

Заседание 12 апреля 1977 г.

1. Б. С. Павлов «Функциональная модель и спектральное разложение диссипативного оператора».

Оператор в гильбертовом пространстве называется диссипативным, если его мнимая компонента отрицательна. Любой такой оператор можно продолжить до самосопряженного оператора в более широком пространстве. Во многих интересных случаях такое продолжение («дилатация») строится явно, что позволяет провести полный спектральный анализ исходного оператора средствами теории функций.

Заседание 26 апреля 1977 г.

Заседание посвящено памяти Григория Яковлевича Лозановского (29.11.1937 — 17.11.1976).

1. Ю. А. Абрамович, А. В. Бухвалов, А. И. Векслер «О научных работах Г. Я. Лозановского».

2. Выступления с воспоминаниями о Г. Я. Лозановском.

Заседание 17 мая 1977 г.

1. С. А. Молчанов (Москва) «Спектральные свойства случайных операторов Шрёдингера».

В докладе изложены основные факты спектральной теории одномерных операторов Шрёдингера со случайным стационарным потенциалом и сделан обзор примыкающих сюда результатов. В частности, рассказано о некоторых приложениях к изучению физических свойств неупорядоченных структур.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1977 год.

Премия присуждена:

1) А. А. Суслину за цикл работ, посвященных решению проблемы Ж. П. Серра

2) М. Д. Стерлину за цикл работ по оценкам постоянных в обратных теоремах конструктивной теории функций.

3. Прием в члены ЛМО — Ю. А. Абрамович.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Заседание 27 сентября 1977 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1977 г.
2. Доклады лауреатов премии ЛМО молодому математику за 1977 г.

1°. А. А. Суслин «О сокращении для проективных модулей».

Рассматривается, каким условиям должно удовлетворять поле, чтобы конечно порожденные проективные модули над аффинными алгебрами над этим полем удовлетворяли усиленному условию сокращения.

2°. М. Д. Стерлин «Об экстремальных задачах, связанных с обратными теоремами теории приближения».

Рассматривается поставленный С. Н. Бернштейном в 1912 г. вопрос уточнения обратных теорем. Пусть μ — положительная борелевская мера на оси; пространства $\hat{L}^p_\mu$, модули гладкости $\omega_k(h, f)$ и наилучшие приближения $A_\sigma(f)$ определены в [1], с. 547, $0 \leqslant \gamma(\sigma) \downarrow$,

$$\mathfrak{N}(\gamma) = \{f \in \hat{L}^p_\mu \mid A_\sigma(f) \leqslant \gamma(\sigma),\ \sigma > 0\};\ h > 0.$$

Теорема 1. $$\sup_{f \in \mathfrak{N}(\gamma)} \omega_k(h, f) = 2^h \left[\int_0^{\pi/2} \gamma^p(2t/h)\, d \sin^{pk} t\right]^{1/p}.$$

Приведен аналог для полиномиальных приближений. Описаны экстремальные функции. Указаны следствия для степенных мажорант.

Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ — его подпространства $\overline{\bigcup X_n} = X$; наилучшие приближения $E_n(f) = \inf_{f_n \in X_n} \|f - f_n\|$; $0 \leqslant \alpha_n \downarrow$, $\mathfrak{M}(\alpha) = \{f \in X \mid E_n(f) \leqslant \alpha_n\}$.

Теорема 2. *Для $F \in X^*$, $F(X_0) = \{0\}$ справедливы оценки:*

$$\Sigma \leqslant \sup_{f \in \mathfrak{M}(\alpha)} |F(\alpha)| \leqslant (1 + \sqrt{2})^2\, \Sigma,$$

где

$$\Sigma = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (N_{n+1} - N_n) \qquad N_n = \| F|_{X_n} \|_{X_n^*}.$$

Оценка снизу при $\alpha_n \equiv \alpha_0$ обращается в тождество. Константа $(1 + \sqrt{2})^2$ не может быть уменьшена.

Дано обобщение на полуаддитивные положительно однородные функционалы F. Приведен континуальный вариант. В пространстве функций на оси вычислены с

[1]) См. УМН 33:1 (1978).

точностью до множителя $(1+\sqrt{2})^2$ величины типа $\overline{\omega}_k(\alpha, h)_X = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}(\alpha)} \omega_k(h, f)_X$. Среди содержащих тригонометрические полиномы пространств функций периода 2π с трансляционно инвариантной нормой найдены экстремальные: $\overline{\omega}_k(\alpha, h)_{\hat{l}^\infty} \leqslant \overline{\omega}_k(\alpha, h)_X \leqslant \leqslant \overline{\omega}_k(\alpha, h)_{\widetilde{C}}$ ($\hat{l}^\infty$ — пространство функций с ограниченной последовательностью коэффициентов Фурье, $\widetilde{C}$ — пространство непрерывных функций). Такие оценки характерны для большинства рассматриваемых задач и для точных констант в обратных теоремах. Вычислены нижние границы оценок. Результаты перенесены на $\omega_k(h, f^{(r)})$ ($r > 0$, $k = 0, 1, \ldots$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Д. Стерлин, Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений, ДАН 202:3 (1972), 545—547.

Заседание 11 октября 1977 г.

1. А. Г. Кушниренко (Москва) «Многогранники Ньютона».

Последние работы участников и руководителя семинара В. И. Арнольда подтверждают справедливость следующего принципа: всякий разумный инвариант одного или нескольких многочленов от многих переменных достаточно просто выражается через многогранники Ньютона этих многочленов.

В докладе рассказано о нескольких теоремах, ярко иллюстрирующих этот принцип, в частности о «многогранной» теореме Безу.

Заседание 25 октября 1977 г.

Математический лекторий для студентов.

1. О. Я. Виро «Элементарные проблемы о вещественных алгебраических кривых».

Как может выглядеть кривая, определяемая на плоскости алгебраическим уравнением степени M? Полный ответ на этот классический вопрос известен лишь для M, не превосходящих шести. В недавних работах Арнольда, Рохлина и Харламова средствами алгебраической топологии были получены сильные результаты о том, какими не могут быть кривые данной степени. Насколько полны эти ограничения, неизвестно. Все имеющиеся примеры построены элементарными методами.

Заседания 22 ноября и 6 декабря 1977 г.

Заседание Ленинградского математического общества, посвященное тридцатилетию работы общегородского научно-исследовательского семинара по математической физике имени В. И. Смирнова.

1. О. А. Ладыженская «Об истории семинара им. В. И. Смирнова».
2. Г. И. Петрашень, В. М. Бабич «Математическая теория дифракции».
3. М. Ш. Бирман «Спектральные задачи математической физики».
4. В. Г. Мазья «Теория псевдодифференциальных операторов».
5. О. А. Ладыженская «Нелинейные задачи математической физики».
6. Прием в члены ЛМО — Булдырев В. С., Павлов Б. С., Харламов В. М., Стерлин М. Д., Благовещенский А. С., Иванов А. В., Дейч В. Г., Розенблюм Г. В., Яфаев Д. Р., Коплиенко Л. С.

Заседание 13 декабря 1977 г.

1. А. Н. Тюрин (Москва) «Обобщенные π-функции Вейерштрасса и многообразие модулей оснащенных римановых поверхностей».

Рассказано о применении алгебраической геометрии к теории интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений на римановых поверхностях.

Заседание 27 декабря 1977 г.

1. Ю. И. Манин (Москва) «Поля Янга — Миллса и алгебраическая геометрия».

Доклад посвящен полученным недавно результатам по применению алгебро-геометрических методов к уравнениям теоретической физики. Эти методы позволили полностью описать так называемые многоинстантонные решения уравнений Янга — Миллса.

Заседание 14 февраля 1978 г.

Математический лекторий для студентов.

1. Д. К. Фаддеев «Соответствия Галуа».

Абстрактная форма соответствий Галуа описана Г. Биркгофом в связи с теорией структур. Цель лекции — рассказ о различных ситуациях, в которых возникают соответствия Галуа, главным образом в связи с теорией выпуклых тел и выпуклых многогранников.

Заседание 21 февраля 1978 г.

1. М. А. Шубин (Москва) «Новые аспекты теории индекса эллиптических операторов».

Классическая теория индекса состоит в вычислении разности размерностей ядра и коядра эллиптического оператора на компактном многообразии. В последние годы она была распространена на ряд ситуаций, когда индекс естественно считать вещественным числом, функцией или даже обобщенной функцией (операторы с почти периодическими и случайными коэффициентами, трансверсально эллиптические операторы и т. п.). В докладе рассказано об этих обобщениях в основном с аналитической точки зрения.

2. Прием в члены ЛМО — В. М. Рябов.

Заседание 14 марта 1978 г.

1. Л. А. Халфин «Современное состояние проблемы математического обоснования статистической физики».

Обсуждается классическая проблема (она была поставлена Л. Больцманом более 100 лет тому назад): можно или нет получить из обратимых во времени уравнений динамической теории описание согласно аксиом статистической физики, т. е. получить описание необратимых во времени кинетических процессов с характерным монотонным (закон возрастания энтропии) стремлением к равновесному состоянию. При этом, в случае положительного решения проблемы, необходимо также вычислить из динамических уравнений кинетические коэффициенты переноса, т. е. константы необратимых уравнений статистической физики (такие, как коэффициент теплопроводности, коэффициент вязкости (в уравнении Навье — Стокса) и так далее).

В отличие от эргодической теории, которая исследует эту проблему с точки зрения классической механики, обсуждается исследование проблемы обоснования статистической физики, исходя из квантовой теории (это направление ведет свое начало с известных работ В. Паули, Л. Ван-Хова, И. Пригожина и других). В частности, обсуждается предложенное автором (Л. Халфин, 1963 г.) исследование этой проблемы с помощью методов квантовой теории распада, которая указывает способ описания необратимых эффектов в рамках обратимой во времени квантовой теории.

Оказывается, что, строго говоря, предсказания статистической физики из квантовой теории не следуют (несправедлива эргодическая теорема, имеются эффекты «бесконечной» памяти, несправедливо марковское master-equation, Ван-Хова и т. п.). Однако главный член эволюции во времени, который следует из квантовой теории, приводит к предсказаниям статистической физики. Таким образом, статистическая физика является достаточно хорошим приближением в рамках квантовой теории. Члены в эволюции, которые обусловливают отклонения в рамках квантовой теории от предсказаний статистической физики, соответствуют неэкспоненциальным членам квантовой теории распада, обнаруженным автором более 20 лет тому назад (Л. Халфин, 1957 г.). Приводится первое доказательство знаменитой H-теоремы Л. Больцмана непосредственно в терминах квантовой динамической системы (Л. Халфин, 1977 г.). Обнаружено, что при достаточно произвольных начальных условиях существует конечный интервал времени (при достаточно больших временах, близких к равновесию), в котором нарушается H-теорема Л. Больцмана, так что в этом конечном интервале времени производная по времени энтропии меняет знак. Этот эффект приводит к образованию на конечное время «порядка» из «хаоса».

Обнаруженные недавно расходимости кинетических коэффициентов (так, например, не существует коэффициента вязкости для двумерного уравнения Навье — Стокса) соответствуют обнаруженным ранее неэкспоненциальным членам в асимптотике (при больших временах) функций корреляции.

2. Прием в члены ЛМО — С. В. Хрущев.

Заседание 28 марта 1978 г.

1. Л. Н. Гордеев «О предикативных и конструктивных вариантах теории множеств».

Рассказана история развития предикативных вариантов теории множеств, восходящих к Б. Расселу и Г. Вейлю (в них рассматриваются лишь множества, индивидуально описываемые выражениями некоторого языка). После этого изложен новый предикативный вариант канторовской теории множеств, согласованный с принципами конструктивного направления в математике и обладающий рядом преимуществ перед известными.

2. Прием в члены ЛМО — А. О. Слисенко.

Заседание 11 апреля 1978 г.

1. Г. А. Маргулис (Москва) «Дискретные подгруппы групп Ли».

В докладе рассказано о некоторых новых результатах в теории дискретных подгрупп, в частности, теорема о конечности для широкого класса фактор-групп дискретных подгрупп. Доказательство этой теоремы основывается на результатах из теории меры и из теории представлений. Рассказано также о применении полученных результатов к изучению «абстрактных» алгебраических групп над числовыми полями и других приложениях.

Заседание 25 апреля 1978 г.

1. С. И. Адян (Москва) «Классификации периодических слов и их приложения».

Классификации периодических слов по рангам вместе с сопровождающей их теорией преобразований периодических слов впервые появились в 1968 г. в совместной работе П. С. Новикова и докладчика по проблеме Бернсайда. Различные модификации этой теории были использованы как для изучения свойств периодических групп, так и для построения новых групп с теми или иными интересными свойствами.

В докладе дан обзор результатов, полученных в этом направлении.

2. Прием в члены ЛМО — В. П. Оревков.

Заседание 16 мая 1978 г.

Математический лекторий для студентов.

1. Ю. В. Матиясевич «О работе по проблеме 4-х красок».

Рассказано о недавней работе американских математиков К. Аппеля и В. Хакена, которые, используя ЭВМ, дали положительное решение известной проблемы четырех красок.

1980 г. январь—февраль т. 35, вып. 1(211)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ [1])

Заседание 31 октября 1978 г.

1. Информация издательства «Мир» о планах на 1979—1980 гг.
2. Присуждение премий ЛМО за 1978 г. молодому математику.

Премии присуждены Л. Н. Гордееву за цикл работ по конструктивным моделям классической теории множеств; С. В. Хрущёву за цикл работ по теории функций.

3. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.
4. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление Ленинградского математического общества избраны: С. М. Лозинский — президент, О. А. Ладыженская — вице-президент, А. М. Вершик — вице-президент.

Члены правления ЛМО:

З. И. Боревич, О. Я. Виро — математический лекторий для студентов, С. М. Ермаков, И. А. Ибрагимов, С. Г. Михлин, Г. И. Натансон — ученый секретарь, М. З. Соломяк — програмная комиссия, В. Н. Судаков — казначей, С. В. Хрущёв.

Члены ревизионной комиссии:

В. П. Ильин — председатель, Н. К. Никольский, В. Н. Фомин, В. П. Хавин.

Заседание 14 ноября 1978 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1978 г.
2. Доклады лауреатов премии

а) Л. Н. Гордеев «О конструктивных моделях классической теории множеств»;
б) С. В. Хрущёв «Старые и новые теоремы о рядах Фурье».

Заседание 28 ноября 1978 г.

1. В. Я. Иврий (Магнитогорск) «Распространение особенностей решений волнового уравнения вблизи границы».

Распространение особенностей вблизи границы, на которой заданы условия, удовлетворяющие критерию Шапиро — Лопатинского, происходит по оптическим путям. При нарушении этого критерия появляются новые возможности для распространения особенностей. При дифракции на угловых точках гладкость решений повышается на 1/2.

Заседание 12 декабря 1978 г.

Математический лекторий для студентов.

1. В. А. Рохлин «Целочисленные квадратичные формы и четырехмерные многообразия».

Заседание 26 декабря 1978 г.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Краевые особенности».

Классификация простейших критических точек функций связана с простыми алгебрами Ли типа A, D, E. Оказывается, классификация критических точек функций на многообразиях с краем связана алгебрами Ли серий B, C, F, т. е. с диаграммами Дынкина с кратными ребрами.

[1]) См. УМН 33:6 (1978), 241—244.

В докладе рассказано об этой связи и о ее применении, в частности, в задачах геометрической оптики.

Заседание 27 февраля 1979 г.

1. В. Ф. Лазуткин «Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа».

1°. Рассмотрим оператор Бельтрами — Лапласа на компактном римановом многообразии M. Если у M есть край, то поставим на нем для определенности нулевые граничные условия. Как выглядят собственные функции оператора, отвечающие бо́льшим собственным числам? Можно ли приближенно вычислить их и бо́льшие собственные числа, зная геометрию многообразия M? Эта задача тривиальна в случае $\dim M = 1$. Однако уже в случае $\dim M = 2$ возникают значительные трудности. Цель доклада — дать представление о возникающих здесь проблемах на примере оператора Лапласа Δ в выпуклой области $M \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей.

2°. Квазимодами порядка ν называются последовательности пар $\{U_k, \lambda_k\}$, где функции U_k принадлежат области определения оператора Δ, λ_k — числа, $\lambda_k \to +\infty$ такие, что: 1) $\| U_k \| \geqslant c^{-1}$, 2) $\| \Delta U_k + \lambda_k U_k \| \leqslant c\lambda_k^{-\nu/2}$.

Если $\{U_k, \lambda_k\}$ — квазимоды, то можно сделать определенные заключения о близости чисел λ_k к собственным числам $-\Delta$ и функций U_k к собственным функциям $-\Delta$. В частности, существует собственное число $\widetilde{\lambda}_{n_k}$ такое, что $| \lambda_k - \widetilde{\lambda}_{n_k} | \leqslant c^2\lambda_k^{-\nu/2}$.

3°. Строить квазимоды можно, опираясь на изучение геодезического потока на M. В случае выпуклой области в $\mathbb{R}^2$ — это биллиард в области M.

4°. Периодической траектории общего эллиптического типа биллиарда сопоставляются квазимоды, сосредоточенные в окрестности этой траектории. В области общего вида существует бесконечное число таких периодических траекторий.

5°. Помимо периодических траекторий в фазовом пространстве произвольного выпуклого биллиарда всегда есть инвариантные множества положительной меры, называемые «семействами инвариантных торов» (далее с. и. т.). С. и. т. гомеоморфно $S^1 \times S^1 \times E$, где S^1 — окружность, E — канторово множество положительной меры, получающееся из отрезка выбрасыванием окрестностей рациональных точек. Геодезический поток на с. и. т. сопряжен потоку $\xi = \omega_1 t$, $\eta = \omega_2 t$, $\zeta = \mathrm{const}$, $\omega_1/\omega_2 = \zeta$ на $S^1 \times S^1 \times E$.

С. и. т. возникают в окрестности периодической траектории общего эллиптического типа и в окрестности периодической траектории, соответствующей движению точки по краю M.

6°. С с. и. т. можно связать квазимоды $\{U_{pq}, \lambda_{pq}\}$, где пара (p, q) пробегает некоторое бесконечное подмножество Λ целочисленной решетки $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, отбираемое с помощью приближенных условий квантования. Обозначим через $N^*(\lambda)$ число собственных чисел аппроксимируемой этими квазимодами части спектра оператора Лапласа в интервале $(0, \lambda)$. Имеет место формула

$$N^*(\lambda) = \frac{\text{Инвариантная мера с. и. т.}}{8\pi^2}\lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Число $\varepsilon > 0$ зависит от с. и. т. и может быть сделано сколь угодно малым за счет увеличения с. и. т.

7°. Нерешенной задачей является исследование инвариантных множеств в щелях с. и. т. и построение квазимод, им отвечающих.

2. Прием в члены ЛМО — Востоков С. В., Кисляков С. В., Пеллер В. В.

Заседание 27 марта 1979 г.

1. М. И. Кадец (Харьков) «Лемма Штейница и ее применения».

В конечномерном пространстве рассматривается задача о минимизации диаметра замкнутой векторной ломаной за счет перестановки ее звеньев (лемма Штейница). Традиционное применение леммы — к условно сходящимся рядам. Новое применение — к задачам календарного планирования.

Заседание 10 апреля 1979 г.

1. Ю. А. Брудный (Ярославль) «Интерполяционные функторы».

В теории интерполяции линейных пространств важное место занимает задача конструктивного описания интерполяционных функторов (методов интерполяции). В докладе рассказано о результатах, дающих полное описание функторов нелинейной интерполяции и частичное описание — в линейном и квазилинейном случаях. Следствия этих результатов охватывают обширную часть интерполяционной теории.

Заседание 17 апреля 1979 г.

1. А. В. Ройтер (Киев) «Классификационные задачи линейной алгебры».

Линейные классификационные задачи, возникающие в самых разнообразных областях математики, имеют много общих черт. В зависимости от мощности множества неразложимых решений они разбиваются на задачи конечного и бесконечного типов. В свою очередь среди задач бесконечного типа выделяются «ручные», для которых удается описать все неразложимые решения, и «дикие», для которых решение было бы равносильно решению классической проблемы о приведении пары квадратных матриц к диагональному виду одним и тем же преобразованием подобия.

Заседание 22 мая 1979 г.

1. А. В. Бухвалов «Банаховы пространства измеримых векторнозначных функций».

Доклад посвящен изложению последних результатов о геометрической структуре пространств функций со значениями в банаховом пространстве (БП) X и о непрерывности операторов (в частности, сингулярных интегральных операторов) в пространствах вектор-функций. Были указаны приложения к векторнозначным аналогам пространств Соболева. Приведен ряд нерешенных проблем. Сформулируем их.

Пусть E — банахово идеальное пространство на пространстве с мерой (T, Σ, μ) (т. е. $(|e_1| \leqslant |e_2|,\ e_1 \in S(T, \Sigma, \mu),\ e_2 \in E) \Rightarrow (e_1 \in E,\ \|e_1\| \leqslant \|e_2\|)$. Через $E(X)$ обозначается БП всех измеримых функций $z\colon T \to X$ таких, что $\|r(\cdot)\|_X \in E$, с нормой $\|z\| = \|\,\|z(\cdot)\|_X\|_E$.

1) Верно ли, что $E(X)$ слабо секвенциально полно тогда и только тогда, когда E и X слабо секвенциально полны? Ответ неизвестен и при $E = L^p$, $1 \leqslant p < \infty$.

2) Верно ли, что l^1 нельзя изоморфно вложить в $E(X)$ тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладают E и X? При $E = L^p$ — ответ положительный (Ж. Пизье, 1978 г.). Аналогичный вопрос открыт для свойства Банаха — Сакса.

3) В 1979 г. Р. Алдаус доказал, что если в $L^p((0, 1), X)$ есть безусловный базис, то на X существует эквивалентная равномерно выпуклая норма. Каковы необходимые и достаточные условия существования безусловного базиса в $L^p((0, 1), X)$?

4) Пусть H — одномерный сингулярный интегральный оператор Гильберта в $L^p(-\infty, +\infty)$. Каковы необходимые и достаточные условия непрерывности векторнозначного расширения $\widetilde{H}$ оператора H на $L^p(X)$? Если $\widetilde{H}$ непрерывен, то X B-выпукло (А. В. Бухвалов), т. е. в X нельзя равномерно вложить пространства l^1_n. Верно ли, что из равномерной выпуклости X вытекает непрерывность $\widetilde{H}$?

1980 г. ноябрь-декабрь *т. 35, вып. 6(216)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ[1]

Заседание 2 октября 1979 г.

Совместное заседание Ученого Совета математико-механического факультета ЛГУ и Ленинградского математического общества, посвященное памяти заведующего кафедрой математического анализа, вице-президента ЛМО Бориса Захаровича Вулиха.

1. Д. А. Владимиров «О педагогической деятельности Б. З. Вулиха».
2. А. И. Векслер «О научной деятельности Б. З. Вулиха».
3. Выступления с воспоминаниями о Б. З. Вулихе (С. М. Лозинский, Л. В. Канторович, А. Г. Пинскер, И. А. Егорова).

Заседание 16 октября 1979 г.

1. А. Пелчинский (Варшава) «Свойства аппроксимации, базисы, биортогональные системы и другие аппроксимативные структуры в банаховых пространствах».

Обзор современного состояния проблематики, связанной с различными аппроксимационными структурами банаховых пространств. Обсуждение нерешенных вопросов.

Заседание 30 октября 1979 г.

1. О. Я. Виро «Алгебраические многообразия с предписанными топологическими свойствами».

Изучение топологии вещественных алгебраических многообразий проводилось в двух естественных направлениях: доказывались ограничения на топологию многообразий и существование многообразий, удовлетворяющих этим ограничениям. В последние годы были достигнуты значительные успехи в обоих направлениях. Доклад посвящен обзору результатов, относящихся ко второму из них.

Заседание 20 ноября 1979 г.

1. А. М. Вершик «Функциональные группы Ли: геометрия, анализ, представления».

Теория групп функций со значениями в группах Ли фактически изучалась еще в XIX в. (матрицант — мультипликативный интеграл Вольтерра). Последние 10 лет в основном в связи с задачами теоретической физики (калибровочные поля, группы токов и др.) встал вопрос об изучении нелокальных представлений функциональных групп и, в первую очередь, построения мультипликативного интеграла представлений. Простейший ранний пример такого интеграла в нетривиальной ситуации — фоковское представление функциональной группы Гейзенберга (30-е годы). Переход к нильпотентным и разрешимым группам намечен Араки (1970), который связал этот вопрос с обобщением формулы Леви—

[1]) См. УМН, 1980, 35 : 1, с. 233—235.

Хинчина для положительно определенны функций и с когомологиями группы коэффициентов.

В работах А. М. Вершика, И. М. Гельфанда, М. А. Граева (1973—1974) впервые рассмотрены полупростые группы и проблема неприводимости представления — основная для приложений. Оказалось, что для некоторых полупростых групп ранга 1 (SO $(n, 1)$ и SU $(n, 1)$), в частности $SL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{C})$, можно построить по существу единственный неприводимый инвариантный мультипликативный интеграл представлений, заданный на всех ограниченных измеримых функциях на многообразии со значениями в такой группе. Имеется много реализаций этого представления, наиболее продуктивное — в пространстве L^2-функционалов по гауссовской мере. Основной метод авторов состоит в изучении геометрии окрестности единичного представления (каноническое состояние, когомологии и деформации единичного представления) и применении техники гауссовских мер, что широко использовалось в последующих работах (Гишарде, Делорм, Партасарати — Шмидт, Исмагилов, 1974—1976).

Вложение группы 1-струй функций на римановом многообразии со значениями в компактной простой группе Ли в соответствующее полупрямое произведение и ограничение на образ мультипликативного интеграла, построенного для полупрямого произведения по упомянутому выше образцу, позволяет включить в эту теорию и группы (гладких) функций с компактными коэффициентами и построить для них нелокальные представления (Вершик — Гельфанд — Граев, Исмагилов — 1976). Изучение неприводимости этих представлений оказалось более трудной и интересной задачей, связанной с теорией оператора Лапласа — Бельтрами, тонкими вопросами эквивалентности мер в функциональных пространствах, конструктивной теорией поля. В настоящее время доказана неприводимость этого представления для групп $C^\infty(X; G)$, где G — компактная простая группа Ли и $\dim X = n \geqslant 3$ (Исмагилов: $n \geqslant 5$, Вершик, Гельфанд, Граев: $n \geqslant 4$, Альбеверис — Хег — Крон: $n \geqslant 3$). Последние два автора дали для $n = 1$ реализацию представления, связанную с броуновским движением на группе, и показали недавно его приводимость. По-видимому, это представление при $n = 1$ — фактор-представление типа III_1! Недавно установлена связь этой проблематики с представлениями аффинных алгебр Ли (Леповски — Вильсон, Вершик, Кац — Френкель), а несколько ранее с представлениями групп диффеоморфизмов. Можно ожидать, что построенные представления будут полезны и в физике (киральные поля, модель струны, токи, калибровочные теории), поскольку они являются нетривиальными обобщениями на неабелев случай процедуры вторичного квантования.

Заседание 18 декабря 1979 г.

1. А. Ю. Ольшанский (Москва) «Геометрия определяющих соотношений».

Рассказано о предложенной в 1933 г. ван Кампеном геометрической интерпретации выводимости произвольного соотношения между порождающими элементами группы из соотношений, определяющих эту группу. Такой подход был, в частности, использован недавно докладчиком при решении проблемы О. Ю. Шмидта о существовании бесконечной неабелевой группы, все собственные подгруппы которой конечны, и ряда других задач теории групп.

2. Прием в члены Общества — И. П. Мысовских, А. Х. Гелиг, М. И. Башмаков, Л. Б. Клебанов, Г. А. Леонов.

Заседание 26 февраля 1980 г.

1. С. В. Востоков «Закон взаимности в арифметике числовых полей».

В сообщении дан исторический обзор и современное состояние проблемы закона взаимности, а также ее связь с арифметикой полей алгебраических чисел.

Проблема закона взаимности состоит в определении явного выражения произведения m-х степенных вычетов $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$ через числа α и β поля алгебраических чисел k и сводится к явному заданию символа норменного вычета Гильберта (α, β) степени p^n

(p^n — максимальная степень простого числа p, делящая m) в пополнении $k_\wp$ поля k по $\wp$-адической метрике ($\wp$ — простой дивизор поля k, делящий p).

Пусть ζ — первообразный корень степени p^n из 1, содержащийся в $k_\wp$, и $z(X)$ — степенной ряд, полученный из разложения корня ζ по степеням локальной униформизирующей π поля $k_\wp$ с коэффициентами из кольца целых подполя инерции T поля $k_\wp$. Пусть, далее, tr — оператор следа в $k_\wp/T$.

Теорема. *Для символа Гильберта имеет место следующее выражение:*

$$(\alpha, \beta) = \zeta^{\mathrm{tr}\,\gamma},$$

где $\gamma = \mathrm{res}\,\Phi_{\alpha,\beta}(X)/s(X)$. При этом степенной ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ получен из разложения элементов α и β по степеням π[1]). Ряд $s(X)$ при $p \neq 2$ равен $z^{p^n} - 1$, а в случае $p = 2$ равен $(z^{2^{n+1}} - 1)/2$.

Во второй части сообщения изложены различные применения закона взаимности к арифметике полей алгебраических чисел и эллиптических кривых.

Заседание 11 марта 1980 г. и 18 марта 1980 г.

Заседание посвящено 100-летию со дня рождения академика С. Н. Бернштейна.

1. С. М. Лозинский. Вступительное слово.
2. В. С. Виденский «Публичные выступления С. Н. Бернштейна».
3. А. Т. Фоменко (Москва) «Проблемы Бернштейна и метод многомерной задачи Плато».
4. О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева «Идеи Бернштейна и новые результаты в теории квазилинейных уравнений».
5. И. А. Ибрагимов «Слабая зависимость случайных величин в работах С. Н. Бернштейна и его последователей».
6. Ю. И. Любич (Харьков) «Работы С. Н. Бернштейна по генетике и генетические алгебры».
7. В. В. Жук, Г. И. Натансон «Проблемы конструктивной теории функций в работах С. Н. Бернштейна».

Заседание 8 апреля 1980 г.

1. С. А. Евдокимов «Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм и положительно определенные квадратичные формы».

В докладе дан обзор современного состояния арифметической теории модулярных форм Зигеля рода m, включая изложение последних результатов, полученных в этом направлении. Рассказано также о приложениях указанной теории к арифметике положительно определенных целочисленных квадратичных форм, в частности к знаменитой теореме Зигеля.

2. Прием в члены ЛМО — М. А. Семенов-Тянь-Шанский, В. Е. Корепин, А. А. Лаптев, Д. Ю. Григорьев, Г. М. Тащиян, О. И. Рейнов, И. Л. Братчиков.

Заседание 22 апреля 1980 г.

1. С. Г. Гиндикин (г. Москва) «Твисторы Пенроуза, уравнение Эйнштейна и интегральная геометрия».

Классический результат Плюккера — Клейна состоит в том, что многообразие прямых в CP^3 канонически изоморфно квадрике в CP^5. Среди вещественных форм квадрики, помимо многообразия вещественных прямых в RP^3 имеются сфера S^4 и конформная компактификация пространства Минковского M^4. Тем самым оба эти многообразия реализуются как некоторые подмногообразия прямых в CP^3. На этой реализации основывается теория твисторов Пенроуза, в которой различным аналитическим объектам на S^4 и M^4

[1]) Явное выражение для ряда $\Phi_{\alpha,\beta}$ см. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, 148, с. 80.

ставятся в соответствие их эквиваленты в CP^3. При этом безмассовым уравнениям (Максвелла, Дирака — Вейля, линеаризованному уравнению Эйнштейна) отвечают уравнения Коши — Римана, инстантонам — некоторые классы комплексных расслоений и так далее. Указанная реализация обобщается на некоторые четырехмерные метрики переменной кривизны и на этом пути строятся комплексные решения уравнения Эйнштейна. Эти конструкции тесно связаны с интегральной геометрией.

Заседание 13 мая 1980 г.

1. Р. Л. Добрушин (г. Москва) «Кинетические уравнения статистической механики».

Кинетические уравнения — это различные варианты уравнений для статистических характеристик эволюции системы n механических частиц при $n \to \infty$. К ним принадлежат такие известные уравнения, как уравнения Больцмана, Власова, уравнения гидродинамики.

В последние годы началось изучение соответствующих предельных переходов на математическом уровне. Возникающие здесь трудные математические проблемы тесно связаны с проблемой существования и единственности решения этих уравнений.

В докладе будет дан обзор результатов, полученных в этом направлении. В частности, будет рассказано о предложенной недавно докладчиком совместно с К. Болдригини и Ю. Суховым карикатуре на гидродинамику, возникающей при применении гидродинамического предельного перехода к системе одномерных упругих твердых стержней.

1982 г. январь — февраль *т. 37, вып. 1(223)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

В ЛЕНИНГРАДСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ[1]

Заседание 21 октября 1980 г.

1. Д. Ю. Григорьев, А. О. Слисенко «Что такое теория сложности вычислений»?

Теория сложности вычислений возникла около двадцати лет назад как теория, призванная дать инструмент для оценки вычислительных ресурсов (времени, памяти и т. п.), требуемых для решения конкретных задач на цифровых вычислительных машинах. Проблема нахождения точных оценок вычислительной сложности оказалась очень трудной, и несмотря на обширные исследования, особенно интенсивные в США, не решена в наиболее интересных ситуациях. Наряду с развитием своеобразной техники, восходящей к теории алгоритмов и несвойственной традиционной математике, теория сложности выявила подчас неожиданные связи алгоритмических вопросов с классической математикой. В докладе рассказано о ряде ярких достижений современной теории сложности вычислений.

1. Для распознавания простоты числа (проблема Гаусса) возможен весьма быстрый детерминированный алгоритм в предположении расширенной гипотезы Римана (Г. Миллер, США).

2. Умножение двух двоичных чисел длины n выполняется на основе преобразования Фурье за линейное время, т. е. время $O(n)$ (А. Шёнхаге, ФРГ).

3. При рассмотрении алгоритмов (типа комбинационных схем), состоящих лишь из арифметических операций, интересна оценка числа нелинейных операций, т. е. умножений и делений. Для задачи умножения двух полиномов над конечным полем Д. Ю. Григорьевым получена оценка близкая к линейной (для бесконечного поля задача значительно проще и оценка линейна).

4. Для умножения двух $n \times n$-матриц наилучшая известная оценка числа операций принадлежит А. Шёнхаге и составляет $O(n^{2,52})$.

Для получения этой оценки ключевую роль сыграло явление, обнаруженное группой итальянских математиков и состоящее в том, что для ряда задач достаточно уметь производить быстрые приближенные вычисления, чтобы быстро получить точный результат.

5. Вопрос о сложности поиска вхождения одного слова в другое решен полностью — здесь возможен максимально быстрый алгоритм, работающий в реальное время (А. О. Слисенко).

Выше речь шла в основном о верхних оценках сложности, т. е. о построении конкретных «быстрых» алгоритмов. С математической точки зрения более интересно получение нижних оценок. В этой области, если не считать экспоненциальных и более высоких оценок, получение которых по методам близко к доказательству алгоритмических неразрешимостей, и которые касаются отнюдь не самых интересных задач, мало значительных

[1]) См. УМН, 1980, 35 : 6, с. 181—184.

результатов. Пожалуй, наиболее впечатляющим результатом здесь являются нелинейные оценки Ф. Штрассена (Швейцария) для задачи интерполяции и некоторых других, относящиеся к числу арифметических операций. Для получения этих оценок Штрассен использовал понятие степени алгебраического многообразия; причем для случая конечных полей он развил технику, не традиционную для алгебраической геометрии.

2. Присуждение ЛМО премий молодому математику за 1980 г. (премии присуждены Н. Е. Барабанову, Н. Л. Гордееву, О. И. Рейнову).

3. Прием в члены общества.— В члены общества избраны: И. Л. Братчиков, И. П. Мысовских, А. Х. Гелиг, М. И. Башмаков, Г. А. Леонов, Л. Б. Клебанов.

Заседание 11 ноября 1980 г.

1. Вручение премий ЛМО молодым математикам за 1980 г.

2. Н. Е. Барабанов «Существование периодических решений в нелинейных системах регулирования и гипотеза Калмана».

Доклад посвящен проблеме асимптотической устойчивости в целом систем регулирования с одной дифференцируемой нелинейностью в случае, если соответствующие линеаризованные системы асимптотически устойчивы. В 1956 г. известный специалист по теории управления Р. Е. Калман (США) выдвинул гипотезу о том, что такие нелинейные системы регулирования асимптотически устойчивы. В докладе дан краткий обзор некоторых известных, наиболее важных критериев, выделяющих классы систем регулирования, удовлетворяющих гипотезе Калмана. Кроме того, приведены новые, более сильные результаты. В частности, показано, что гипотеза Калмана верна для систем не выше третьего порядка.

В 1966 г. Р. Е. Фиттс (США) опубликовал примеры систем четвертого порядка, противоречащие гипотезе Калмана. Они были получены численным интегрированием с использованием ЭВМ. Контрпримеры Фиттса вошли в ряд известных монографий по теории регулирования. Как показано в докладе, некоторые из этих контрпримеров неверны.

Описан новый метод обнаружения периодических решений в системах регулирования. В качестве примера использования этого метода построена система четвертого порядка, удовлетворяющая условиям гипотезы Калмана и имеющая нетривиальное периодическое решение.

3. Н. Л. Гордеев «О некоторых арифметических вопросах теории Галуа».

Содержание доклада изложено в работах [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Л. Гордеев. Задача погружения с данными локализациями и ограниченным ветвлением.— Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР, 1976, с. 85—99.

[2] Н. Л. Гордеев. Бесконечность числа соотношений в группе Галуа максимального p-расширения с ограниченным ветвлением локального поля.— ДАН, 1977, **233** : 6, с. 1031—1034.

4. О. И. Рейнов «Свойства аппроксимации порядка p пространств Банаха».

Построены контрпримеры к ряду проблем А. Пелчинского, А. Пича и др., относящихся к условиям аппроксимаций, связанным с теорией абсолютно суммирующих операторов.

Заседание 9 декабря 1980 г.

1. С. Ю. Пилюгин «Притягивающие множества грубых систем».

Излагаются некоторые новые результаты по структуре притягивающего (т. е. асимптотически устойчивого компактного инвариантного [1]) множества I для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{1}$$

в $\mathbb{R}^n$. Особое внимание уделяется границе J множества I. Пусть Ω — множество неблуждающих траекторий системы (1) в J. Предполагается, что множество Ω гиперболично и на Ω выполнено строгое условие трансверсальности [2].

Теорема 1. 1°. *Любая точка $x \in J$ лежит на неустойчивом многообразии $W^u(p)$ траектории $p \in \Omega$.*

2°. *J — притягивающее множество.*

3°. *$W^u(p) \subset J$ для любой траектории $p \in \Omega$.*

4°. *В множестве Ω плотны замкнутые траектории (допускаются вырожденные замкнутые траектории, являющиеся точками покоя).*

Если множество Ω состоит из конечного числа гиперболических траекторий (и по-прежнему выполнено условие трансверсальности), то структуру J можно описать более точно. В этом случае для траектории $p \in \Omega$ многообразие $W^u(p)$ есть вложенное в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$, $S^1 \times \mathbb{R}^k$ или неориентируемое расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}^k$. Будем говорить, что для траектории $p \in \Omega$ многообразие $W^u(p)$ регулярно расположено в J, если

$$(\overline{J \setminus \overline{W^u(p)}}) \cap W^u(p) = \varnothing.$$

Теорема 2. *Существуют такие траектории $p_1, \ldots, p_m \in \Omega$, что многообразия $W^u(p_1), \ldots, W^u(p_m)$ регулярно расположены в J и*

$$J = \overline{W^u(p_1)} \cup \ldots \cup \overline{W^u(p_m)}.$$

Рассмотрен, кроме того, вопрос о том, когда фазовая диаграмма в смысле Смейла [3] определяет систему (1) с точностью до топологической эквивалентности в классе грубых диссипативных систем без замкнутых траекторий [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Барбашин. Метод сечений в теории динамических систем.— Матем. сб., 1951, **29** : 2, с. 233—280.

[2] З. Нитецки. Введение в дифференциальную динамику.— М.: Мир, 1975.

[3] С. Смейл. Дифференцируемые динамические системы.— УМН, 1970, **25** : 1, с. 113—185.

[4] С. Ю. Пилюгин. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса — Смейла без периодических траекторий на сферах.— Дифф. уравнения, 1989, **14** : 2, с. 245—254.

Заседание 23 декабря 1980 г.

1. А. Г. Хованский (Москва) «Об оценке числа вещественных корней малочленов».

Известно [1], что число вещественных корней полиномиальной системы уравнений оценивается сверху (вне зависимости от степени уравнений) через число мономов, фигурирующих в системе уравнений. В докладе дана аналогичная оценка для числа комплексных корней, аргументы которых лежат в любой достаточно малой области, величина которой оценивается по многогранникам Ньютона системы. Дана также асимптотика распределения корней экспоненциальной системы уравнений и обсуждены другие применения вещественного анализа в комплексном.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Хованский. Об одном классе систем трансцендентных уравнений, ДАН, 1980, **255** : 4, с. 804—807.

Заседание 24 февраля 1981 г.

1. Ю. В. Матиясевич «Простые числа, ЭВМ и криптография».

Рассказано о современных возможностях ЭВМ по проверке простоты и разложению на множители больших чисел, а также о связи этих вопросов с криптографией.

Заседание 10 марта 1981 г.

1. И. Л. Братчиков «Основные направления развития математического обеспечения ЭВМ».

В обзорном докладе рассказано о современном состоянии и перспективах развития ЭВМ и некоторых областей их математического обеспечения: языков программирования и методов трансляции, операционных систем, баз данных, автоматизированных обучающих систем.

Заседание 24 марта 1981 г.

1. И. М. Кричевер (Москва) «Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений».

Рассказано, как с помощью методов алгебраической геометрии находить точные решения нелинейных уравнений типа КдФ. Эти уравнения эквивалентны условиям совместности вспомогательных задач, собственные функции которых определены на римановой поверхности конечного рода, накрывающей плоскость спектрального параметра, и образуют l-мерное векторное голоморфное расслоение над римановой поверхностью. В случае ранга $l = 1$ в общем положении полученные решения оказываются квазипериодическими и могут быть выражены через тэта-функции Римана.

Заседание 14 апреля 1981 г.

1. Ю. С. Ильяшенко (Москва) «Слабо сжимающие динамические системы и аттракторы».

Первая часть доклада посвящена определению и свойствам слабо сжимающих систем и их применению к уравнениям Навье—Стокса. Этот материал содержится в заметке [1]. Вторая часть посвящена обобщениям и дальнейшим применениям слабо сжимающих систем.

1. Область B называется обобщенной глобально поглощающей для системы $\dot{x} = v(x)$, с периферией B_1 и запаздыванием T, если: 1°. всякая фазовая кривая системы с началом в B, не позже, чем за время T, вернется в B, не покидая при этом области B_1; 2°. каждая фазовая кривая за положительное время попадает в B; 3°. замыкания $\overline{B}$ и $\overline{B_1}$ компактны.

Обобщенно слабо сжимающие системы и их характеристика определяются так же, как слабо сжимающие системы и их характеристика [1], только в определении системы глобально поглощающая область должна быть заменена на обобщенную глобально поглощающая область, а в определении характеристики — на периферию B_1.

Теорема. *Хаусдорфова размерность аттрактора обобщенной слабо сжимающей системы не превосходит ее характеристики.*

2. В химической кинетике рассматривается уравнение

$$u_t = u_x^2 - u_{xx} - \nu u_{xxxx}, \quad x \in R^1/\mathbb{Z}, \quad \nu \ll 1, \tag{1}$$

галеркинские приближения к которому обладают «турбулентными» свойствами, как показывает численный анализ [2]. Сходное уравнение возникает в теории двумерного течения по наклонной плоскости [3]:

$$u_t = u_x u - u_{xx} - \nu u_{xxxx}, \; x \in R^1/\mathbb{Z}, \; \nu \ll 1. \tag{2}$$

Фазовым пространством N-го галёркинского приближения к уравнениям (1) и (2) является пространство тригонометрических многочленов степени не выше N.

Теорема. *N-е галёркинское приближение к уравнению* (1) *или* (2) *при достаточно большом N является обобщенной слабо сжимающей системой, хаусдорфова размерность аттрактора которой оценивается сверху константой, зависящей только от ν и не зависящей от номера N.*

3. Пусть M — компактное двумерное риманово многообразие, D — ковариантная производная на M. Уравнение Навье — Стокса на M имеет вид

$$u_t = -D_u u + \nu\Delta u + f, \quad \operatorname{div} u = 0. \tag{3}$$

Фазовое пространство N-го галёркинского приближения к уравнению (3) натянуто на бездивергентные векторные поля собственные для оператора $-\Delta$, соответствующие N наименьшим собственным значениям этого оператора.

Теорема. *Галёркинское приближение к уравнению* (3) *является слабо сжимающей системой, хаусдорфова размерность аттрактора которой оценивается сверху величиной, зависящей только от ν и M и не зависящей от N.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. С. Ильяшенко. Слабо сжимающие системы и аттракторы галёркинских приближений уравнения Навье — Стокса.— УМН, 1981, **36** : 3.

[2] T. Yamada, Y. Kuramoto, A Reduced Model Showing Chemical Turbulence, Prog. Theor. Phys., 1976, **56**, с. 681—683.

[3] А. В. Петвиашвили. Неодномерные солитоны.— В. кн.: Нелинейные волны.— М.: Наука, 1979.

Заседание 28 апреля 1981 г.

1. А. Б. Александров, В. П. Хавин «Классы Харди и *BMO*».

Многие линейные операторы, отображающие каждое из пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$ в себя при конечных p, больших единицы, плохо ведут себя в L^1 и в L^∞. Важным достижением анализа в 70-х годах явилось осознание того, что «истинным» правым концом шкалы L^p служит не L^∞, а пространство *BMO*, «истинным» же левым — пространство Харди H^1. В докладе рассказано об этих пространствах, которые уже прочно вошли в быт и без которых трудно представить себе современный анализ; это относится и к замечательной «атомной технике» оценок линейных операторов, о которой также шла речь; рассмотрена связь «шкалы Харди» с обычной шкалой гладких функций и с теорией гармонических векторных полей (эта последняя связь была обнаружена методами броуновского движения, и лишь позднее была понята на «детерминистском» уровне).

2. Прием в члены ЛМО. В члены общества избраны: Н. Е. Барабанов, С. С. Валландер.

Заседание 26 мая 1981 г.

1. О планах издательства «Мир» на 1982—83 гг. Сообщения заместителя заведующего редакцией А. С. Попова.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1981 г. Премии присуждены

а) А. Р. Итсу за цикл работ «Конечнозонные и изомонодромные решения уравнений типа НШ».

б) Е. Д. Глускину за цикл работ по геометрии пространств Минковского.

3. Отчет правления ЛМО и ревизионной комиссии.

4. Обсуждение планов работы Общества на ближайшие годы.

Принято к сведению, что с сентября 1981 г. создается секция математики при Ленинградском Доме ученых, которая будет работать в тесном контакте с ЛМО.

5. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

В правление выбраны:

С. М. Лозинский — президент Общества;

А. М. Вершик — вице-президент Общества,

О. А. Ладыженская — вице-президент Общества,

Члены правления:

В. С. Буслаев, О. Я. Виро, В. Ф. Демьянов, С. М. Ермаков, Г. И. Натансон — секретарь Общества, Б. С. Павлов, М. З. Соломяк, В. Н. Судаков — казначей Общества.

Члены ревизионной комиссии:

Н. К. Никольский, В. Н. Фомин — председатель, В. П. Хавин.

1983 г. январь—февраль *т. 38, вып. 1 (229)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1]

Заседание 29 сентября 1981 г.

1. Вручение премий ЛМО молодым математикам за 1981 г.

2. Доклады лауреатов.

Е. Д. Глускин «Геометрия пространств Минковского».

Совокупность $\mathfrak{M}_n$ всех n-мерных нормированных пространств, снабженная метрикой Банаха — Мазура, превращается в метрический компакт (компакт Минковского). Последние годы значительно возрос интерес к изучению асимптотического поведения различных геометрических функционалов на $\mathfrak{M}_n$ с ростом n. О вопросах такого рода и шла речь. В частности было рассказано о диаметре компакта Минковского и о конечномерных аналогах банахова пространства без базиса.

А. Р. Итс «О некоторых новых методах в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных».

В рамках интенсивно развивающегося в последнее время направления в теории нелинейных уравнений математической физики, известного под названием «метод обратной задачи теории рассеяния», излагаются те возможности, которые открываются благодаря привлечению нетрадиционных для нее методов алгебраической геометрии и идей классического анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заседание 13 октября 1981 г.

1. А. Б. Венков «Теория неаналитических автоморфных функций А. Сельберга и ее приложения».

Формула следа Сельберга на компактной римановой поверхности. Элементы теории дзета-функции Сельберга. Доказательство аналога гипотезы Римана о нулях дзета-функций Сельберга. Элементы спектральной теории автоморфных функций. Ряды Эйзенштейна и соотношения Масса — Сельберга. Арифметические и геометрические приложения.

Заседание 27 октября 1981 г.

1. Г. Г. Каспаров «Что такое операторная K-теория?».

Операторная K-теория возникла как дальнейшее развитие топологической K-теории в связи с задачами расширения операторных алгебр. Основной объект этой теории — серия абелевых групп, сопоставляемых одной или нескольким операторным алгебрам (K-функторы). Эти группы отвечают за важнейшие свойства алгебр, связанных с расширениями, теорией возмущений, классификацией и др. Топологическая K-теория и общая теория индекса Атьи — Зингера укладываются в операторную K-теорию как частный случай. В докладе рассказано об основных понятиях и приложениях.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран А. А. Иванов.

---

[1]) См. УМН, 1982, **37**:1 (223), с. 163—167.

Начиная с 1981—82 учебного года часть заседаний ЛМО проводится совместно с вновь созданной секцией математики Ленинградского Дома ученых им. А. М. Горького.

Заседание 27 октября 1981 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Л. Д. Фаддеев «Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна».

В гамильтоновой формулировке теории поля энергия определяется как генератор сдвига по времени. В общековариантной теории тяготения это определение является наиболее подходящим, хотя и нуждается в уточнении, которое и обсуждалось в докладе. Приводится также доказательство положительности полной энергии поля тяготения и полей материи.

Содержание доклада подробно изложено в статье автора в УФН т. 136, вып. 3, с. 435.

Заседание 15 декабря 1981 г.

1. А. М. Рубинов «О некоторых задачах экономической динамики».

Доклад посвящен моделям экономической динамики неймановского и рамсеевского типов. Дано определение этих моделей, указаны основные задачи, приведены типичные результаты (см. обзор [2]). Основное внимание уделено неймановским моделям, в которых динамика задается многозначным отображением a, определенным на R_+^n, причем $a(0) = \{0\}$ и a суперлинейно, т. е. его график является выпуклым замкнутым конусом. Траектория x_t определяется соотношением $x_{t+1} \in a(x_t)$. Одна из задач, здесь возникающих, заключается в изучении асимптотики различных классов траекторий. Ответ дается с помощью понятия магистрали — множества, к которому в том или ином смысле близки изучаемые траектории. Методы экономической динамики иногда пригодны и для описания асимптотики траекторий, порождаемых непрерывным многозначным отображением метрического компакта в себя (см. [1]). Интересные результаты получены недавно в этом направлении А. Я. Заславским, Г. А. Ларичевой и др.

В последнее время становится все более ясным, что одна из основных задач экономической динамики заключается в эндогенном (внутримодельном) определении критериев оптимальности (в отличие от теории экстремальных задач, где указанные критерии задаются извне). В решении этой задачи, сближающей экономическую динамику с теорией игр, делаются лишь первые шаги.

Оставшаяся часть доклада посвящена простейшей однопродуктовой модели неймановского типа N_1 и ее обобщениям, активно изучаемым в последние два года участниками семинара по экономической динамике ИСЭП АН СССР (К. Ю. Борисовым, В. Н. Воробьевой, В. Д. Матвеенко и докладчиком). Состоянием модели N_1 является вектор $x = (K, L) \in R_+^2$, где K — фонды, L — рабочая сила. Модель задается производственной функцией F: $R_+^2 \to R_+$ (она суперлинейна, т. е. вогнута и положительно однородна; $F(0, 1) = F(1, 0) = 0$), коэффициентом выбытия фондов $\mu \in (0, 1)$ и ставкой заработной платы $\omega > 0$. Производственное отображение a этой модели определено так: $(K', L') \in a(K, L)$, если найдется число $I \geqslant 0$ (инвестиции), при котором $\omega L' + I \leqslant F(K, L)$, $K' = (1 - \mu)K + I$, $L' \geqslant 0$. Траектория x_t модели N_1 называется пошагово оптимальной относительно функционала p, если $p(x_{t+1}) \geqslant p(y)$ при всех t и $y \in a(x_t)$. Траектория x_t эффективна, если для каждого t найдется вектор $f_t \geqslant 0$ (цены), при котором $(f_t, x_t) \geqslant (f_t, y)$ для любого y, достижимого из начального состояния x_0 за t шагов. Одна из задач, относящихся к N_1 и ее обобщениям, заключается в следующем: описать все функционалы p, пошаговая оптимизация которых приводит к эффективной траектории. Существование такого p доказано в [1] для любого суперлинейного отображения. Там же дан способ построения, однако непосредственная экономическая интерпретация получающегося функционала неясна. В то же время в модели N_1 удалось показать, что пошаговая оптимизация «национального богатства» $q(K, L) = \nu K + F(K, L)$ приводит к эффективности. Есть ли еще функционалы, обладающие нужным свойством? Какова их интерпретация? Существенно сложнее, чем N_1 модели, в которых производственная функция зависит от времени или состояния (учет научно-технического прогресса) или не однородна, а также модели, в которых фонды различаются по сроку службы. Полученные здесь результаты (в частности, магистрального характера) и возникающие задачи тоже обсуждены в докладе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Рубинов. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам.— Л.: Наука, 1980.
[2] А. М. Рубинов. Экономическая динамика.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 19, М.: ВИНИТИ, 1982, 58—110.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избраны А. Итс, Н. А. Вавилов, А. Меркурьев, Е. Д. Глускин, А. Черняков.

Заседание 21 декабря 1981 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. И. В. Романовский «Математическая полиграфия».

В докладе рассказано о новом направлении в прикладном программировании: математическая теория и использование ЭВМ в типографии.

Заседание 16 февраля 1982 г.

1. В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв «Операторы Ганкеля и их приложения (наилучшие приближения, стационарные гауссовские процессы)».

В докладе приводятся новые результаты об операторах Ганкеля и рассматриваются многочисленные приложения этих операторов.

Оператор Ганкеля H_φ, $\varphi \in L^\infty$, определяется на классе Харди H^2 равенством $H_\varphi f = f - \mathrm{P}_+ f$, где P_+— ортогональный проектор пространства L^2 на H^2. Операторы Ганкеля можно также определить как операторы в пространстве l^2, атрицы которых имеют вид $\{\gamma_{m+k}\}_{m,k\geqslant 0}$. Приводится критерий принадлежности оператора Ганкеля H_φ классам Шаттена — фон-Неймана (в частности критерий ядерности оператора H_φ) в терминах его символа φ. В качестве приложений операторов Ганкеля получены следующие результаты:

1) Для широкого класса пространств X на единичной окружности $\mathbf{T}$ решается задача наилучшего приближения аналитическими функциями в равномерной метрике, т. е. показано, что если $f \in X$ и g — аналитическая в единичном круге функция, минимизирующая норму $\| f - g \|_{L^\infty \mathbf{T}}$, то $g \in X$.

2) Найдены условия на пространство X и унимодулярную функцию u (т. е. $| u(\zeta) | = 1$ п. в. при $\zeta \in \mathbf{T}$), при которых $\sum\limits_{n<0} \hat{u}(n)\zeta^n \in X \Rightarrow u \in X$.

3) Получены теоремы о восстановлении в пространствах мер, т. е. указаны классы распределений X таких, что если μ — борелевская мера на $\mathbf{T}$ и $\sum\limits_{n>0} \hat{\mu}(u)\zeta^n \in X$, то $\mu \in X$.

4) Описаны интерполяционные подмножества на окружности в некоторых классах аналитических функций (в частности в классе функций с конечным интегралом Дирихле, непрерывных вплоть до границы).

5) Получены новые простые доказательства всех известных ранее результатов, описывающих в терминах спектральной плотности стационарные гауссовские процессы, удовлетворяющих различным условиям регулярности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Пеллер. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов).— Матем. сб., 1980, **113**:4, с. 538—581.
[2] В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы.— УМН, 1982, 37:1, с. 53—124.

Заседание 16 марта 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от ЛМО О. А. Ладыженской в связи с ее 60-летием.

2. С. П. Новиков. «Теория Морса для многозначных функций».

В ряде задач математической физики в качестве функционалов действия возникают многозначные или неположительные функционалы. Классическое вариационное исчисление «в целом» (Пуанкаре — Биркгоф — Люстерник — Шнирельман — Морс) к ним неприменимо. В докладе рассказано о недавних работах, в которых строится соответствующее обобщение теории Морса. «Конечномерный» аналог теории связан с новыми задачами гомологической алгебры.

Подробно содержание доклада опубликовано в работах автора (см. Функц. анализ и его прилож., 1981—82 гг.).

Заседание 30 марта 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. В. И. Зубов «Квантование орбит».

Содержание доклада публикуется в ДАН СССР.

Заседание 13 апреля 1982 г.

1. А. С. Меркурьев, А. А. Суслин. «K — когомологии многообразий Севери — Бауэра и гомоморфизм норменного вычета».

В докладе рассказано о решении проблемы биективности гомоморфизма норменного вычета [1], [2], [3].

Теорема 1. *Пусть n — натуральное число, F — произвольное поле, характеристика которого не делит n. Тогда гомоморфизм норменного вычета*

$$R_{F,\,n}\colon K_2(F)/nK_2(F) \longrightarrow H^2(F,\ \mu_n^{\otimes 2})$$

является изоморфизмом.

Приведены следствия из теоремы 1:

Теорема 2. *Если $\mu_n \subset F$, то любая центральная простая алгебра экспоненты n подобна тензорному произведению циклических алгебр экспоненты n и, следовательно, имеет абелево поле расщепления. В общем случае каждая центральная простая алгебра имеет разрешимое поле расщепления.*

Теорема 3 (аналог теоремы Гильберта 90 для функтора K_2). *Пусть E/F — циклическое расширение, σ — образующая группы $\mathrm{Gal}(E/F)$. Тогда*

$$\ker (K_2(E) \xrightarrow{N} K_2(F)) = K_2(E)^{1-\sigma}.$$

Теорема 4 (о кручении в K_2). *Если $\mu_n \subset F$, то ${}_nK_2(F) = \{\mu_n,\ F^*\}$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Меркурьев. О символе норменного вычета степени два.— ДАН, 1981, 261:3, с. 542—547.

[2] А. С. Меркурьев, А. А. Суслин. K-когомологии многообразий Севери — Брауэра и гомоморфизм норменного вычета.— ДАН, 1982, 264:3, с. 555—559.

[3] А. С. Меркурьев, А. А. Суслин. Гомоморфизм норменного вычета.— Препринт ЛОМИ, Р—6—82, 1982.

Заседание 27 апреля 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. М. И. Башмаков «О преподавании математики будущим инженерам».

Задача построения курса математики для будущих инженеров еще не нашла, по мнению докладчика, удовлетворительного решения.

В докладе обсуждались имеющиеся трудности и намечались некоторые пути их преодоления.

Заседание 18 мая 1982 г.

1. Я. Б. Песин «Гиперболические явления в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

Начало гиперболической теории восходит к трудам Адамара, Морса, Хедлунда, Хопфа; в настоящее время она является одним из основных аппаратов качественного исследования неинтегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений. В докладе приведены определения различных уровней гиперболичности и отвечающих им классов динамических систем. Описаны топологические и стохастические свойства этих систем обрисованы современные проблемы гиперболической теории (странные аттракторы, хаусдорфова размерность и др.).

2. Прием в члены общества.— В члены общества избраны В. М. Цветков, Ю. Д. Бураго, Е. К. Склянин, А. Ю. Зайцев, А. Г. Рейман.

Заседание 8 июня 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено памяти академика Ю. В. Линника (1915—1972).

1. Вступительное слово Президента Ленинградского математического общества С. М. Лозинского.

Уже вступает в науку поколение ученых, не знавших Ю. В. Линника лично и воспринимающих его только как автора классических математических трудов. Лиц, помнящих Ю. В. Линника молодым, становится все меньше.

Во вступительном слове докладчик говорил главным образом о студенческих и первых годах научной работы Юрия Владимировича; сообщены различные факты из биографии Юрия Владимировича, которые помогают лучше представить себе и оценить его исключительную личность.

2. А. В. Малышев «Дискретный эргодический метод Ю. В. Линника и его дальнейшее развитие».

В докладе изложена история развития метода, его основные черты. Дан обзор современных результатов и перспектив развития.

3. И. В. Островский «Теория разложения вероятностных распределений».

Совокупность **P** всех вероятностных распределений в $\mathbb{R}$ является полугруппой относительно операции свертки. Арифметика вероятностных распределений занимается изучением делимости и факторизации в этой полугруппе и в некоторых чертах сходна с мультипликативной теорией чисел.

Первым результатом была теорема Крамера 1936 г.: все делители в **P** распределения Гаусса — также распределения Гаусса (быть может, вырожденные). Ряд важных результатов был получен в предвоенные годы А. Я. Хинчиным, П. Леви, Д. А. Райковым. После почти двадцатилетнего перерыва дальнейшее развитие возобновилось благодаря работам Ю. В. Линника 1957—1961 годов, где был предложен новый подход к изучению делителей в **P**, основанный на глубоких фактах теории целых функций.

В докладе рассмотрены наиболее важные результаты и методы Ю. В. Линника и их влияние на современные исследования по арифметике вероятностных распределений и различным ее обобщениям. Изложение основано на соответствующих частях статей [1] и [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Ибрагимов, И. В. Островский, В. В. Петров. О работах Ю. В. Линника по теории вероятностей.— В кн.: Ю. В. Линник. Избранные труды. Теория вероятностей, Л.: Наука, 1981.

[2] I. V. Ostrovskii. The arithmetic of probability distributions.— J. Multivar. Anal., 1977, 7:4, p. 475—490.

4. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1982 г. Премия присуждена А. С. Меркурьеву за цикл работ по алгебраической K-теории и В. В. Пеллеру за цикл работ по ганкелевым операторам.

1984 г. январь—февраль т. 39, вып. 1(235)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1)]

Заседание 21 сентября 1982 г.

1. Вручение премий ЛМО молодым математикам за 1982 г.

2. В. В. Пеллер «Что мы знаем об операторах Тёплица и Ганкеля?»

Этот обзорный доклад представляет собой введение в теорию операторов Тёплица и Ганкеля; в нем также уделяется значительное внимание многочисленным приложениям этих операторов в различных областях анализа и теории вероятностей.

Пусть H^2— класс Харди, $H^2_- = L^2 \ominus H^2$, $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$— ортопроекторы в L^2 на подпространства H^2 и H^2_-. Тогда для функции φ из L^∞ на единичной окружности операторы Ганкеля и Тёплица H_φ и T_φ на классе H^2 с символом φ определяются равенствами

$$H_\varphi f = \mathbf{P}_-\varphi f, \quad f \in H^2; \qquad T_\varphi f = \mathbf{P}_+\varphi f, \quad f \in H^2.$$

Рассматриваются многочисленные задачи, в которых возникают эти операторы и для решения которых они используются. К таким задачам относятся: проблемы моментов, различные интерполяционные задачи, ортогональные полиномы, краевые задачи теории функций комплексной переменной, сингулярные интегральные уравнения, уравнения Винера — Хопфа, функциональная модель Сёкефальви-Надя — Фойаша, стационарные процессы, рациональная аппроксимация, равномерные приближения аналитическими функциями, базисы из экспонент и другие. Причем в последнее время круг задач, для решения которых используются операторы Тёплица и Ганкеля заметно расширяется (см. [1], [4]), и хотя свойства операторов Тёплица и Ганкеля, очень непохожи, во многих вопросах применяются одновременно и операторы Тёплица, и операторы Ганкеля и большую роль играют различные алгебраические соотношения между этими операторами.

В докладе излагаются следующие результаты об операторах Ганкеля: приводятся теорема Нехари, описывающая норму операторов Ганкеля, обсуждается связь с пространством BMO функций ограниченной средней осцилляции, критерий Хартмана компактности операторов Ганкеля, описание операторов Ганкеля класса Шаттена — фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, принадлежащее автору [2], теорема В. М. Адамяна, Д. З. Арова, М. Г. Крейна об s-числах операторов Ганкеля; показано, как эти результаты применяются в различных вопросах.

Одним из основных вопросов в теории операторов Тёплица является проблема обратимости и вычисления спектра. Приведен общий критерий Девинаца — Уидома обратимости операторов Тёплица и продемонстрировано на примере операторов Тёплица с кусочно-непрерывными символами, как этот критерий можно применять для геометрического описания спектра. Приведены также известные описания спектров операторов Тёплица с почти периодическими символами, и с символами из $H^\infty + C$.

Много внимания уделяется локальным принципам в теории операторов Тёплица и алгебраическому подходу к этой теории. Локальный принцип, грубо говоря, заключается в том, что если символ оператора Тёплица локально (в том или ином смысле) совпадает с символами фредгольмовых операторов Тёплица, то этот символ является символом фредгольмова оператора Тёплица. Излагаются локальные принципы И. Б. Симоненко и Р. Дугласа и демонстрируются применения этих принципов для вычисления спектров.

1) См. УМН, 1983, 38:1(229) с. 217—221.

Алгебраический подход заключается в том, что вместе с операторами Тёплица, символы которых принадлежат тому или иному классу, рассматривается алгебра, порожденная этими операторами, и проблема обратимости (фредгольмовости) изучается сразу для всех операторов из этой алгебры. Этому подходу посвящено множество работ (см. обзор [1]). При этом оказывается существенным знать, насколько отличаются между собой операторы $T_\varphi \cdot T_\psi - T_{\varphi\psi}$. Приводится критерий компактности этого оператора, принадлежащий Ш. Аклеру, С. Ю. А. Чанг, Д. Сарасону и А. Л. Вольбергу (см. об этом [1]).

В заключение рассматриваются более тонкие свойства операторов Тёплица. Приводятся результаты М. Розенблюма и Р. Исмагилова об унитарной классификации самосопряженных операторов Тёплица, теоремы Д. Кларка и Д. Ванга о классификации с точностью до подобия операторов Тёплица с рациональными (и с некоторыми другими) символами (см. [1]) и одна теорема автора [3], утверждающая существование нетривиальных инвариантных подпространств для операторов Тёплица с непрерывными символами φ, для которых модуль непрерывности ω_φ удовлетворяет соотношению $\int\limits_0 \frac{\omega_\varphi(t)}{t \log 1/t}\, dt$ и в некотором круге $\mathscr{D}$ на плоскости функция φ принимает значения в $\mathscr{D} \cap \Gamma$ для липшицевой дуги Γ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Никольский. Операторы Ганкеля и Тёплица.— Препринты ЛОМИ, Р-1-82, Р-2-82, Р-5-82.

[2] В. В. Пеллер. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов).— Матем. сб., 1980, 113:4, с. 538—581.

[3] В. В. Пеллер. Инвариантные подпространства операторов Тёплица.— Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, 126, с. 170—179.

[4] В. В. Пеллер, С. В. Хрущёв. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы.— УМН, 1982, 37:1, с. 53—124.

3. Прием в члены Общества.— В члены Общества избран А. Н. Бородин.

Заседание 12 октября 1982 г.

1. А. М. Виноградов (Москва) «Высшие симметрии и законы сохранения общих систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными».

Классическая теория симметрий общих систем нелинейных дифференциальных уравнений (н. д. у.) в частных производных была создана С. Ли примерно 100 лет тому назад. Преобразование $(x, u) \mapsto (x', u')$ совокупности зависимых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и независимых $u = (u^1, \ldots, u^m)$ переменных порождает естественным образом преобразование производных любого порядка функции $u = u(x)$. Если такое преобразование сохраняет форму рассматриваемой системы н. д. у., то оно по С. Ли называется ее симметрией. Аналогично определяются бесконечно малые (инфинитезимальные) симметрии системы н. д. у. В последнее время Л. В. Овсянниковым и его учениками теория Ли была с успехом применена для решения многих задач механики и математической физики. Однако теория Ли оказывается недостаточной для объяснения многих важных эффектов, обнаруженных в последнее время, например, в теории уравнений Лакса и т. п. Необходимое расширение понятия симметрии системы н. д. у. осуществляется следующим образом.

Всякую систему н. д. у. порядка k, заданную на «многообразии независимых переменных» M, можно трактовать как подмногообразие $\mathcal{Y} \subset J^k(\pi)$, где π — некоторое гладкое расслоение и $J^k(\pi)$ — многообразие k-джетов этого расслоения, $k = 0, 1, \ldots, \infty$. На бесконечномерном многообразии $J^\infty(\pi)$ имеется естественное n-мерное распределение, которое индуцирует n-мерное распределение на бесконечном продолжении $\mathcal{Y}_\infty \subset J^\infty(\pi)$ системы $\mathcal{Y}$. Высшей симметрией (соответственно инфинитезимальной симметрией) системы $\mathcal{Y}$ мы называем гладкое преобразование $\mathcal{Y}_\infty \to \mathcal{Y}_\infty$ (соответственно векторное поле на $\mathcal{Y}_\infty$), сохраняющее это распределение. Совокупность $\mathrm{Sym}\, \mathcal{Y}$ всех высших инфинитезимальных симметрий системы $\mathcal{Y}$ естественным образом является алгеброй Ли. Ее аналитическое описание состоит в следующем.

Введем на $J^\infty(\pi)$ локальные координаты x, u_1, ..., u_σ, ..., где u_σ — производная функции $u = u(x)$, отвечающая мультииндексу σ. Если система $\mathcal{Y}$ имеет вид $F = 0$, $F = (F_1, \ldots, F_l)$, $F_i = F_i(x, \ldots, u_\sigma, \ldots)$, $|\sigma| \leqslant k$, то соответствующий ей оператор универсальной линеаризации l_F имеет вид $l_F = \sum\limits_\sigma \partial F/\partial u_\sigma D_\sigma$, где $D_\sigma = D_1^{i_1} \circ \ldots \circ D_n^{i_n}$, если $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$, и $D_i = \partial/\partial x_i + \sum\limits_\sigma u_{\sigma+1_i} \partial/\partial u_\sigma$.

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм* $\mathrm{Sym}\, \mathcal{Y} = \ker \overline{l}_F$, *где* $\overline{l}_F$ — *ограничение оператора* l_F *на* $\mathcal{Y}_\infty$.

Для того чтобы инвариантным образом ввести понятие закона сохранения для системы $\mathcal{Y}$ рассмотрим фактор-комплекс $\{\overline{\Lambda}^i, \overline{d}\}$ комплекса де Рама $\{\Lambda^i, d\}$ на $\mathcal{Y}_\infty$, где $\overline{\Lambda}^i = \Lambda^i/\mathscr{C}\Lambda^i$, а $\mathscr{C}\Lambda^i$ состоит из всех i-форм, которые имеют тривиальные ограничения на все интегральные многообразия в $\mathcal{Y}_\infty$. Обозначим через $\overline{H}^i$ i-ю группу когомологий комплекса $\{\overline{\Lambda}^i, \overline{d}\}$. Законами сохранения системы $\mathcal{Y}$ будем называть элементы группы $\overline{H}^{n-1}$.

Теорема 2. *Пусть система* $\mathcal{Y}$ *определена и регулярна. Тогда существует такой дифференциальный оператор* A, *что группа* $\overline{H}^{n-1}$ *изоморфна* $\ker \overline{l}_F^* \cap \ker A$. *В частности,* $\overline{H}^{n-1} \subset \ker \overline{l}_F^*$, *где* $\overline{l}_F^*$ — *оператор, формально сопряженный с* $\overline{l}_F$.

Теоремы 1 и 2 непосредственно приводят к эффективным процедурам, позволяющим полностью вычислить алгебру $\mathrm{Sym}\, \mathcal{Y}$ и группу $\overline{H}^{n-1}(\mathcal{Y})$ для конкретных систем дифференциальных уравнений (см. [1]).

Замечание. Ввиду того, что для систем Эйлера — Лагранжа $l_F = l_F^*$, теорема Нётер, обобщенная на высшие симметрии, является непосредственным следствием теорем 1 и 2.

Пусть N — n-мерный объект категории дифференциальных уравнений в смысле [2] и f: $N \to \mathcal{Y}_\infty$ — сюръективный невырожденный морфизм, т. е. накрытие в этой категории. Нелокальной симметрией (законом сохранения) типа f для системы $\mathcal{Y}$ назовем автоморфизм (закон сохранения) для объекта N. Для нелокальных симметрий и законов сохранения имеют место аналоги теорем 1 и 2.

Гипотеза. *Всякая «достаточно регулярная» система н. д. у.* $\mathcal{Y}$ *обладает бесконечным запасом нелокальных симметрий и законов сохранения.*

Приведенные выше результаты являются следствием теории «многообразий» вида $\mathcal{Y}_\infty$ (см. обзор [3], где указана дальнейшая литература).

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Vinogradov. Local symmetries and conservation laws of systems of partial differential equations.— Acta Appl. Math., 1984, 2:1.

[2] А. М. Виноградов. Категория нелинейных дифференциальных уравнений.— В сб.: Уравнения на многообразиях. Воронеж: ВГУ, 1982, с. 26—51.

[3] А. М. Виноградов. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений.— В сб.: Проблемы геометрии (сер. «Итоги науки и техники»).— М.: ВИНИТИ, 1980, 11, с. 89—134.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран О. М. Фоменко.

Заседание 26 октября 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от Общества члену-корреспонденту АН СССР Дмитрию Константиновичу Фаддееву в связи с его 75-летием.

2. И. Р. Шафаревич (Москва) «Алгебраические поверхности типа К3 над полями конечной характеристики».

Самый естественный способ изучения алгебраических поверхностей типа К3 над полями комплексных чисел основывается на рассмотрении интегралов от (единственной с точностью до постоянного множителя) голоморфной дифференциальной формы на такой поверхности. В последнее время выяснилось, что в некоторых случаях аналоги этих интегралов могут быть определены и для поверхностей, заданных над полями конечной характеристики. Доклад содержит обзор результатов, полученных докладчиком совместно с А. Н. Рудаковым в этом направлении.

Заседание 16 ноября 1982 г.

1. Л. А. Бунимович «Динамические системы с упругими отражениями».

Системы с упругими отражениями, или, как их принято называть, биллиарды, возникают во многих задачах теории динамических систем и ее приложений. С общей точки зрения биллиарды представляют собой геодезические потоки на римановых многообразиях с краем. В частности, к таким системам относятся наиболее популярные модели статистической механики — газ Лоренца и газ твердых сфер.

Пусть Q — компактное риманово многообразие размерности d с кусочно-гладкой границей ∂Q. Обозначим через M многообразие касательных векторов к Q единичной длины. Многообразие M также имеет границу ∂M, которая образована единичными векторами с носителями на ∂Q.

Биллиардом в Q называется динамическая система в M, порожденная движением вектора $\mathbf{x} = (q, \mathbf{v}) \in M$, где $q \in Q$, $\mathbf{v} \in T_qQ \cap M$, по определяемой им геодезической с единичной скоростью, причем при попадании носителя линейного элемента на границе ∂Q происходит мгновенное отражение от нее, при котором касательная составляющая вектора $\mathbf{v}$ сохраняется, а нормальная меняет знак. Если траектория попадает в множество сингулярных точек границы, то считается, что дальнейшее движение не определено. Биллиард является гамильтоновой системой и имеет естественную инвариантную меру $d\mu = dq\, d\omega$, где $d\omega$ — мера Лебега на $(d-1)$-мерной единичной сфере, dq — мера на Q, порожденная римановой метрикой. Можно показать, что множество траекторий, попадающих в особые точки границы, имеют меру нуль.

Динамическая система, отвечающая равномерному движению n материальных точек на отрезке, упруго отражающихся друг от друга и от концов отрезка, сводится к биллиарду в n-мерном симплексе. Движение n упругих шаров в трехмерном кубе сводится к биллиарду в $3n$-мерном кубе, из которого вырезано $n(n-1)/2$ цилиндров.

Рассмотрим в d-мерном евклидовом пространстве бесконечное множество непересекающихся между собой шаров (рассеивателей). На дополнении к множеству рассеивателей разбросано по закону Пуассона бесконечное число точечных частиц. Каждая из этих частиц движется с постоянной скоростью и при столкновении с любым рассеивателем отражается от него по закону «угол падения равен углу отражения». Газом Лоренца называется динамическая система, отвечающая движению этого бесконечного ансамбля частиц.

Эргодические свойства биллиардов существенно зависят от вида границы ∂Q. Например, у биллиарда внутри достаточно гладкой выпуклой кривой существует бесконечное число каустик. Условие гладкости границы существенно, так как имеются примеры выпуклых областей, биллиарды в которых являются K-системами и изоморфны сдвигу Бернулли.

Если граница является всюду выпуклой внутрь области Q, то такие биллиарды называются рассеивающими. В частности, к рассеивающим биллиардам относится газ Лоренца. Математическое изучение эргодических свойств рассеивающих биллиардов началось с работы [1], в которой, в частности, было показано, что такие системы обладают гиперболической структурой.

Для гиперболических динамических систем с помощью специальной геометрической конструкции — марковского разбиения фазового пространства — многие важные с точки зрения физики проблемы сводятся к задачам теории вероятностей.

Пусть μ_0 — вероятностная мера на M, абсолютно непрерывная по отношению к μ, так что соответствующая плотность непрерывно дифференцируема. Для любого $t > 0$ положим $q_t(s) = \frac{1}{\sqrt{t}} q(st)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Мера μ_0 индуцирует распределение вероятностей μ_t на множестве всех траекторий $q_t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, являющихся элементами пространства $C_{[0,1]}(R^d)$. В [2], [3] для двумерного периодического газа Лоренца с ограниченной длиной свободного пробега и при некоторых дополнительных ограничениях на конфигурацию рассеивателей был доказан принцип инвариантности Донскера. Новая конструкция марковского разбиения позволяет обобщить этот результат для произвольной периодической конфигурации рассеивателей в любой размерности.

Теорема. *Для любой периодической конфигурации рассеивателей последовательность мер μ_t при $t \to \infty$ слабо сходится к мере Винера.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Г. Синай. Динамические системы с упругими отражениями.— Эргодическая теория рассеивающих биллиардов.— УМН, 1970, 25:2, с. 141—192.

[2] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai. Markov partitions for dispersed billiards.— Commun. Math. Phys., 1980, 77, p. 247—280.

[3] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers.— Commun. Math. Phys., 1981, 78, p. 479—497.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран В. Б. Матвеев.

Заседание 23 ноября 1982 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от ЛМО Александру Даниловичу Александрову в связи с его 70-летием.

2. А. Д. Александров «Научная постановка вопроса о разработке программы по математике для средней школы».

1°. Научные основы всякого преподавания состоят прежде всего в том, что преподавать нужно правду. (Однако этому сплошь и рядом не придают первостепенного значения.)

2°. Научные основы преподавания подразумевают преодоление узости и формализма в определении понятий, в выборе уровня строгости и др. (Ошибочен распространенный взгляд, абсолютизирующий строгость в стандартном преподавании.)

3°. Удовлетворительное с точки зрения научных основ построение курса математики представляет чрезвычайные трудности.

Заседание 14 декабря 1982 г.

Заседание проводилось совместно с семинаром по математической логике ЛОМИ, было посвящено памяти С. Ю. Маслова (1939—1982).

1. Современное состояние теории формальных систем.

Выступления Н. А. Шанина, Г. Е. Минца, В. П. Оревкова, А. О. Слисенко, Г. В. Давыдова.

Заседание 28 декабря 1982 г.

1. Я. Г. Синай (Москва) «Канторовы множества в физических задачах».

В последнее время канторовы множества под видом пространств дробной размерности (фрактали, по терминологии Б. Мандельброта) встречаются в разнообразных физических задачах. В докладе описаны следующие примеры таких задач:

1°. Универсальность Фейгенбаума.

2°. Странные аттракторы.

3°. Спектр уравнения Шрёдингера с почти периодическим потенциалом.

4°. Фазовые переходы «соизмеримость-несоизмеримость».

Заседание 15 февраля 1983 г.

1. А. Б. Александров «Внутренние функции в шаре».

Проблема о существовании внутренних функций в шаре была решена в конце 1981 г. докладчиком [1] и Э. Ловом [2] независимо и почти одновременно. В настоящее время имеется по крайней мере три доказательства существования внутренних функций в шаре. Третье доказательство основано на очень красивом результате П. Войтащика — И. Рыля [3] и использует L^2-технику. (В то время как доказательство в [1] использует технику пространств L^p с $p < 1$.)

Пусть B обозначает открытый единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$, S — его граница. Пусть m обозначает «поверхностную» вероятностную меру на сфере S. Обозначим через $A(S)$ пространство всех голоморфных в B функций, непрерывных вплоть до границы. Символом $H^p(S)$ будем обозначать класс Харди в шаре B. Всюду ниже φ обозначает положительную полунепрерывную снизу функцию на сфере S.

Теорема 1 [1]. *Если $\varphi \in L^1(S)$, то существует положительная сингулярная мера ν на сфере S такая, что $\nu(S) = \int\limits_S \varphi\, dm$ и интеграл Пуассона меры $\varphi \cdot m - \nu$ — плюригармоническая в шаре B функция.*

Теорема 2 ([1], [2]). *Если $\varphi \in L^p(S)$ $(0 < p \leqslant +\infty)$, то существует функция $f \in H^p(S)$ такая, что $|f| = \varphi$ почти всюду на S и $f(0) = 0$.*

Теорема 3 [4]. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \in A(S)$, что $f(0) = 0$, $|f| \leqslant \varphi$ всюду на S и $m\{|f| \neq \varphi\} < \varepsilon$.*

Аналоги теорем 2 и 3 для случая ограниченной строго псевдовыпуклой области с C^2-границей были получены Э. Ловом [5]. Оказывается, что аналоги теорем 1—3 имеют место в довольно общей абстрактной ситуации. В этой же ситуации справедлива и теорема Н. Сибони — М. Хакима [6]. Этот абстрактный подход вместе с результатами работы [5] показывает, что теорема 1 тоже имеет место для ограниченных строго псевдовыпуклых областей с C^2-границей. Кроме того, этот абстрактный подход позволяет получить аналоги теорем 1—3 не только для произвольных ограниченных симметрических областей и даже для областей Зигеля первого и второго рода, но также потребовать в теоремах 1—3, чтобы мера $\varphi \cdot m - \nu$ и функция f имели весьма редкий «спектр».

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Александров. Существование внутренних функций в шаре.— Матем. сб., 1982, 118:2, с. 147—163.

[2] E. Low. A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbb{C}^n$.— Invent. Math., 1982, 67:2, p. 223—229.

[3] J. Rull, P. Wojtaszczyk. On homogeneous polynomials on a complex ball.— The University of Texas at Austin, Preprint, 1981.

[4] А. Б. Александров. О граничных значениях голоморфных в шаре функций.— ДАН, 1984.

[5] E. Low. Inner functions and boundary values in $H^\infty(\Omega)$ and $A(\Omega)$ in smoothly bounded pseudoconvex domains.— Princeton University dissertation, 1983.

[6] M. Hakim, N. Sibony. Fonctions holomorphes bornees sur la boule unite de $\mathbb{C}^n$.— Invent. Math., 1982, 67:2, p. 213—222.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избран С. Ю. Славянов.

Заседание 1 марта 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Особенности систем лучей».

Системами лучей Гамильтон назвал то, что теперь называется лагранжевыми многообразиями. Вариационные задачи с односторонними ограничениями (например, задача об обходе препятствия) приводят к лагранжевым многообразиям, которые сами имеют особенности. В докладе рассказано о выражении этих особенностей через геометрию $SL(2, R)$-модулей (связь с которыми заранее не очевидна) и о многомерном обобщении теории эвольвент Гюйгенса, первым рассмотревшего задачу об обходе препятствия. (Более подробно см. УМН, 1983, 38 : 2(228), с. 77—147.)

Заседание 22 марта 1983 г.

1. Д. Б. Фукс (Москва) «Тождества Эйлера — Якоби — Макдональда и когомологии алгебр Ли».

В последние годы была найдена замечательная связь между классическими тождествами Эйлера — Якоби и градуированными алгебрами Ли. Макдональд и его последователи связали эти тождества с формулами характеров.

2. Прием в члены общества.— В члены общества избраны С. А. Назаров, М. В. Паукшто, А. И. Кароль, Н. В. Борисов, М. И. Захаревич, Н. Б. Маслова, А. Н. Подкорытов.

Заседание 29 марта 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. В. А. Рохлин «Недавний прогресс в четырехмерной топологии».

Обзор замечательных открытий, сделанных недавно в топологии четырехмерных многообразий. Были рассмотрены: теорема Доналдсона о формах, реализуемых гладкими односвязными замкнутыми четырехмерными многообразиями; теорема Фридмана о многообразиях Кассона; классификационная теорема Фридмана о почти сглаживаемых односвязных замкнутых четырехмерных многообразиях; теорема Квинна о сглаживании четырехмерных многообразий; следствия теорем Фридмана и Дональдсона, относящиеся к некомпактным многообразиям (существование гладких многообразий, гомеоморфных, но не диффеоморфных, многообразиям $S^3 \times R$, $S^2 \times S^2 - pt$ и $\mathbb{R}^4$).

Заседание 12 апреля 1983 г.

1. Н. В. Крылов (Москва) «Нелинейные уравнения в частных производных и управляемые процессы».

В последние десять лет в теории вероятностей были созданы методы исследования задач оптимального управления случайными процессами диффузионного типа. Как и в задачах управления детерминированными процессами, здесь имеются два подхода: 1) стохастический принцип максимума (вариационное исчисление), 2) уравнения Беллмана (уравнение Гамильтона — Якоби). Более плодотворный второй подход позволил выделить широкий класс уравнений (включающий уравнения Монжа — Ампера), где удалось доказать разрешимость вероятностными методами. Затем ряд авторов доказали это же традиционными методами.

Заседание 26 апреля 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. Приветствие от Ленинградского математического общества С. Г. Михлину в связи с его 75-летием.

2. О. А. Олейник (Москва) «Некоторые задачи усреднения в теории упругости».

1°. Краевые задачи для системы теории упругости с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и краевые задачи в перфорированных областях. Усредненная краевая задача. Оценки разности решений исходной и усредненной задач. Асимптотическое разложение решения. Случай почти периодических коэффициентов.

2°. Колебания пористых тел и композитных материалов с периодической структурой. Усредненная задача. Формулы для коэффициентов усредненной системы. Оценки отклонения собственных чисел и собственных функций.

Заседание 17 мая 1983 г.

1. Сообщение представителя издательства «Мир» (Г. М. Цуккерман) о планах изданий на 1984—1985 гг.

2. Отчет правления ЛМО и отчет ревизионной комиссии.

К настоящему времени ЛМО насчитывает 189 человек, из них 87 докторов физико-математических наук. Регулярно дважды в месяц проводятся научные заседания.

В сентябре 1981 г. организована секция математики Дома ученых им. М. Горького при АН СССР, совместно с которой проводится часть заседаний. Руководство секцией осуществляет бюро секции совместно с правлением ЛМО. С 1981 г. в Петродворце возобновил работу математический лекторий для студентов Ленинградского университета, организованный ЛМО. Прочитаны лекции: Н. Н. Петров «Кубик Рубика», А. С. Меркурьев «Простые алгебры», Г. С. Цейтин «Представления знаний», Ю. Д. Бураго «Смешанные объемы», В. И. Арнольд «Теория катастроф», Н. А. Шанин «Анализ безканторовской теории континуума», Ю. А. Давыдов «Индикатриса Банаха».

3. Выборы правления ЛМО и ревизионной комиссии.

Состав вновь избранного правления: С. М. Лозинский (президент), О. А. Ладыженская (вице-президент), А. М. Вершик (вице-президент). Члены правления: С. М. Ермаков, С. Г. Михлин, Б. С. Павлов, В. Ф. Лазуткин и М. З. Соломяк (комиссия по программе заседаний ЛМО), О. Я. Виро и Ю. А. Давыдов (математический лекторий для студентов), В. Н. Судаков (казначей), Г. И. Натансон (секретарь ЛМО). Ревизионная комиссия: В. Н. Фомин (председатель), В. П. Хавин, Н. К. Никольский. Состав бюро секции математики при Доме ученых: М. И. Башмаков, А. М. Вершик (зам. председателя), И. А. Ибрагимов, С. В. Керов, С. М. Лозинский (председатель), Б. С. Павлов, В. Г. Тураев (секретарь), Н. Н. Уральцева, С. В. Хрущёв.

4. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1983 г. Премия присуждена Е. К. Склянину (ЛОМИ) за работу: «О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера».

1985 г. март—апрель т. 40, вып. 2(242)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1])

Заседание 4 октября 1983 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1983 г.
2. Лекции лауреатов премии.

А. С. Меркурьев «Делимые группы Брауэра».

Хорошо известно, что группа Брауэра поля является абелевой периодической группой. Примеры полей, для которых можно явно вычислить группу Брауэра, показывают, что эта группа близка к делимой. Однако долгое время не удавалось построить пример абелевой периодической группы, которая не изоморфна группе Брауэра поля. Первые такие примеры были построены в [3], где было доказано, что при $p = 2$ или 3 p-компонента группы Брауэра любого поля либо является элементарной 2-группой, либо содержит нетривиальную делимую подгруппу. В [1] Файн и Шакер выдвинули гипотезу о том, что любая делимая абелева периодическая группа изоморфна группе Брауэра некоторого поля. Настоящая лекция содержит доказательство этой гипотезы.

Теорема. *Для любой делимой абелевой периодической группы A существует поле F такое, что $\mathrm{Br}(F) \simeq A$.*

Доказательство. Построим по индукции последовательность вложенных друг в друга полей $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ и подгруппы A_i, $B_i \subset \mathrm{Br}(F_i)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) Группа A изоморфна A_1.

2) $\mathrm{Br}(F_i) = A_i \oplus B_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

3) Ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{Br}(F_i) \to \mathrm{Br}(F_{i+1})$, индуцированного вложением полей $F_i \subset F_{i+1}$, совпадает с группой B_i, а группа A_i изоморфно отображается на A_{i+1}.

Пусть сначала $i = 1$. Выберем такое поле F_1, что группа A изоморфна некоторой подгруппе $A_1 \subset \mathrm{Br}(F_1)$ ([2], теорема 2). Поскольку группа A_1 делима, она выделяется прямым слагаемым в $\mathrm{Br}(F_1)$, т. е. существует такая подгруппа $B_1 \subset \mathrm{Br}(F_1)$, что $\mathrm{Br}(F_1) = A_1 \oplus B_1$.

Пусть мы уже построили поля $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$ и соответствующие подгруппы A_i, $B_i \subset \mathrm{Br}(F_i)$. Выберем теперь такое поле F_{n+1}, содержащее F_n, что ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{Br}(F_n) \to \mathrm{Br}(F_{n+1})$ совпадает с группой B_n ([2], теорема 1). Обозначим через A_{n+1} образ группы A_n при этом гомоморфизме, а через B_{n+1} — любое дополнение к A_{n+1} (группа $A_{n+1} \simeq A$ делима). Построение цепочки полей завершено.

Обозначим теперь через F объединение всех полей F_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что

$$\mathrm{Br}(F) = \varinjlim \mathrm{Br}(F_i) = \varinjlim (A_i \oplus B_i) = \varinjlim A_i \simeq A.$$

Теорема доказана.

---

[1]) См. УМН, 1984, 39:1(235), с. 181—188.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Fein, M. Schacher. Brauer groups of fields.— Ring Theory and Algebra, 1980, 3, p. 345—356.

[2] B. Fein., M. Schacher. Relative Brauer groups. I.— J. Reine Angew. Math., 1981, 321, p. 179—194.

[3] A. S. Merkurjev. Brauer groups of fields.— Comm. in Algebra, 1983, 11:22, p. 2611—2622.

Е. К. Склянин «Об одной алгебре порождаемой, квадратичными соотношениями».

Доклад посвящен исследованию ассоциативной алгебры $\mathcal{F}$, порождаемой четырьмя образующими S_0, S_1, S_2 и S_3 и квадратичными соотношениями

$$\begin{cases} (S_0S_1-S_1S_0)=iJ_{23}(S_2S_3+S_3S_2), \\ (S_1S_2-S_2S_1)=i(S_0S_3+S_3S_0), \end{cases} \tag{1}$$

а также получающимися из них циклическими перестановками индексов 1, 2, 3 (всего 6 соотношений). При этом предполагается, что константы $J_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношению

$$J_{12}+J_{23}+J_{31}+J_{12}J_{23}J_{31}=0. \tag{2}$$

Алгебра $\mathcal{F}$ была предложена в работе [1] как алгебра наблюдаемых для некоторой вполне интегрируемой квантовомеханической системы.

Так как алгебру $\mathcal{F}$ можно рассматривать как деформацию универсальной обертывающей алгебры Ли $U(\mathrm{gl}\,(2))$, которая получается при $J_{\alpha\beta}\equiv 0$, неудивительно, что многие свойства алгебры $\mathcal{F}$ копируют соответствующие свойства $U(\mathrm{gl}\,(2))$. Так, алгебра имеет квадратичные по S_α операторы Казимира и обладает серией конечномерных представлений, вырождающихся в неприводимые конечномерные представления sl(2). Вместе с тем существуют еще две серии конечномерных представлений алгебры $\mathcal{F}$, которые не имеют уже соответствий в теории алгебр Ли. Подробное описание свойств алгебры $\mathcal{F}$ и ее представлений приведены в работах [1], [2].

Остановимся в заключение на некоторых нерешенных вопросах. Остается недоказанной в общем случае сформулированная в [1] гипотеза об аналоге теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для алгебры (в случаях $J_{12}=0$ или $J_{23}=0$ эта гипотеза доказана недавно Л. А. Тахтаджяном). Невыясненным остается все, что касается неприводимости построенных в [2] представлений алгебры $\mathcal{F}$. Неизвестно также, содержатся ли среди построенных представлений все неприводимые конечномерные представления алгебры $\mathcal{F}$. Как сообщил докладчику А. М. Вершик, в случае $J_{12}=J_{23}=-J_{31}$ (относящемся к случаю 1в по классификации статьи [2]) ему удалось перечислить все неприводимые самосопряженные представления алгебры $\mathcal{F}$, размерность которых, как оказалось, может быть 1, 2 и 4 и которые параметризуются тремя вещественными параметрами, напоминая тем самым представления серии б) статьи [2].

Интересно было бы также расширить аналогию с универсальной обертывающей алгеброй Ли, введя на алгебре $\mathcal{F}$ операцию коумножения φ: $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ и задав на ней, тем самым, структуру алгебры Хопфа [3]. Так, в случае $J_{12}=0$, $J_{23}=-J_{31}=c^2$ коумножение φ имеет вид

$$\begin{cases} \varphi(S_0)=S_0\cdot S_0+c^2S_3\cdot S_3, \\ \varphi(S_3)=S_3\cdot S_0+S_0\cdot S_3, \\ \varphi(S_\pm)=S_\pm\cdot(S_0+cS_3)+(S_0-cS_3)\cdot S_\pm, \end{cases} \tag{3}$$

где $S_\pm=S_1\pm iS_2$. Непосредственным вычислением проверяется, что отображение φ сохраняет соотношения (1) и коассоциативно. Обобщение формул (3) на произвольные $j_{\alpha\beta}$ пока неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. I.— Функц. анализ, 1982, 16 : 4, с. 27—34.

[2] Е. К. Склянин. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. II. Представления квантовой алгебры.— Функц. анализ, 1983, 17 : 4, с. 34—48.

[3] E. Abe. Hopf algebras.— Cambridge: Univ. Press, 1980.

Заседание 25 октября 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. А. И. Кострикин (Москва) «Конечные простые группы: результаты и проблемы».

Считается, что конечные простые группы расклассифицированы. Однако математики проявляют сдержанность в оценке степени завершенности этого фундаментального достижения. Почему? В докладе рассказано о состоянии вопроса и деятельности, которая ведется в направлении совершенствования доказательства в реализации существующих простых групп. В конечном счете это сводится к лучшему пониманию природы простых групп и обнаружению новых связей их с другими областями математики. В частности, рассказано о решетках в алгебрах Ли и группах их автоморфизмов.

Заседание 15 ноября 1983 г.

1. А. Н. Паршин (Москва) «О гипотезе Морделла».

Гипотеза Морделла — одно из центральных утверждений теории диофантовых уравнений — доказана в этом году молодым немецким математиком Фалтингсом. Из нее, в частности, следует конечность числа решений в целых числах уравнения «великой теоремы Ферма» для $n \geqslant 3$. Работа опирается на доказанные ранее глубокие факты алгебраической теории чисел.

Заседание 29 ноября 1983 г.

1. Ю. Ш. Абрамов «Вариационные методы в теории операторных пучков».

В докладе изложены новые подходы к вариационному исследованию спектра оператор-функций (пучков операторов — п. о.). Возникающие здесь задачи, как правило, не только включают соответствующие проблемы из спектральной теории операторов, но и обогащают их многообразием постановок одного и того же вопроса. Для спектра п. о. приводится ряд аналогов классических результатов: вариационные принципы, теоремы о качественном и количественном его поведении и др. Рассказывается об общих экстремальных задачах, содержащих в себе спектральные задачи для п. о. в вариационной постановке, и о связанной с ними «невыпуклой» теории двойственности. Рассмотрены также некоторые приложения.

Подробное изложение см. в книге докладчика «Вариационные методы в теории операторных пучков».— Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны Ю. Ш. Абрамов, А. Ф. Иванов, А. Н. Кириллов, А. Е. Каган, Е. П. Ожегова.

Заседание 6 декабря 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секциями математики и физики Ленинградского Дома ученых.

1. Б. Б. Кадомцев, Ю. А. Данилов (Москва) «Синергетика: идеи, методы, надежды».

Физика, химия и биология изучали процессы самоорганизации своими специфическими средствами и методами. Последние годы предпринимаются настойчивые попытки создания единой теории процессов самоорганизации, применимой к системам различной природы. Единый подход позволяет установить ряд аналогий и обнаружить новые явления и ранее неизвестные типы решений. Разработаны первые теоретические модели, воспроизводящие сложные режимы самоорганизации, наблюдаемые в реальных системах.

Создание теории, охватывающей широкий круг явлений, наталкивается на определенные трудности: отсутствие адекватного математического аппарата, строгих определений, достаточно общих понятий. Преодоление этих трудностей требует и одновременно является источником новых идей и методов.

Заседание 20 декабря 1983 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено Леонарду Эйлеру (1707—1783).

1. Ю. Х. Копелевич «Л. Эйлер и Петербургская Академия наук».

В выступлении рассказано об условиях службы Эйлера в Петербургской Академии наук, способствовавших становлению его как ученого мирового значения.

2. Н. Н. Поляков «Значение работ Эйлера по механике».

В докладе освещено обоснование Эйлером ньютоновой механики с помощью дифференциального исчисления.

3. Е. П. Ожегова «Рукописное наследие Эйлера по теории чисел».

Рассмотрено влияние рукописного наследия Эйлера на творчество К. Г. Якоби, П. Л. Чебышёва и других математиков.

Заседание 28 февраля 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математиков Ленинградского Дома ученых.

1. В. А. Якубович «Теория адаптивных систем (метод рекуррентных целевых неравенств)».

В докладе был сделан обзор работ по методу рекуррентных целевых неравенств (методу РЦН), частично представленных в [1], [2], а также опубликованных в основном в журналах технического профиля. Формальное определение адаптивной системы имеется в [1]. Задание адаптивной системы предполагает задание множества $\Xi = \{\xi\}$ (класса адаптации) уравнений системы (включая уравнение регулятора) и цели управления (ЦУ), содержащих $\xi \in \Xi$. (Элемент ξ объединяет все то, что неизвестно и может меняться.) В простейшем случае ЦУ задается неравенствами, связывающими переменные в каждый момент времени. Уравнения регулятора не должны содержать ξ; в задачах адаптации именно эти уравнения подлежат определению из условия адаптивности системы. Система называется адаптивной, если для любого $\xi \in \Xi$ существует такой момент $t_*(\xi)$, что ЦУ выполнена для всех $t \geqslant t_*(\xi)$. Если спустя время адаптации $t_*(\xi)$ меняется $\xi \in \Xi$, то спустя новое время адаптации ЦУ снова начинает выполняться, что и означает приспособляемость системы к изменению внешних условий и цели управления.

Предполагается, что существует закон управления $u_t = U^0(\sigma_t, \xi)$, для которого выполнена ЦУ $Q_t \geqslant 0$ $\forall t$. Здесь u_t, σ_t — управление и сенсор в момент t. Наиболее интересные задачи адаптации сводятся к восстановлению неизвестной функции $U^0(\sigma_t, \xi)$ (неизвестного «хорошего» закона управления) в своеобразной и нестандартной ситуации, тогда известна лишь косвенная специфическая информация о качестве принятого приближения этой функции.

В методе РЦН $U^0(\sigma, \xi)$ точно или приближенно представляется в виде $U^0(\sigma, \xi) = \sum v_j(\sigma)\tau_j(\xi) \overset{\text{def}}{=} U[\sigma, \tau(\xi)]$, $\tau(\xi) \in \mathrm{R}^N$ и отыскивается $\tau(\xi)$ с точностью до выполнения ЦУ. Регулятор ищется в виде $u_t = U(\sigma_t, \tau_t)$, $\tau_{t+1} = T(\sigma_{t+1}, \sigma_t, \tau_t)$. Для определения T составляются РЦН $Q_t(\tau) \geqslant 0$. Неравенство $Q_t(\tau) \geqslant 0$ определяет множество всех $\tau \in \mathrm{R}^N$, для которых при $u_t = U(\sigma_t, \tau)$ и при заданных значениях всех переменных до момента t выполнена ЦУ. Обычно не только $\tau(\xi) \in \mathscr{G}_t = \{\tau\colon Q_t(\tau) \geqslant 0\}$, но и некоторый шар $|\tau - \tau(\xi)| \leqslant \varepsilon$ содержится в $\bigcap_t \mathscr{G}_t$. Если $\tau_t = \hat{\tau} = \mathrm{const}$ и $Q_t(\hat{\tau}) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_*(\xi)$, то система адаптивна. Такие алгоритмы T называются конечно сходящимися алгоритмами (КСА) решения счетной системы РЦН $Q_t(\tau) \geqslant 0$. Основной характеристикой КСА является оценка числа $r = r(\xi)$ невыполненных неравенств $Q_t(\tau_t) < 0$ через число $\delta = \varepsilon\,|\,r_0 - \tau(\xi)\,|^{-1}$. Она должна быть существенно лучше оценки для метода полного перебора. (Отметим, что получить оценку времени адаптации $t_*(\xi)$ принципиально невозможно, ибо в общем случае неравенства $Q_t(\tau_t) < 0$ могут быть сколь угодно «растянуты» во времени.) Для выпуклых областей $\mathscr{G}_t$ КСА с «хорошими» оценками для $\tau(\xi)$ получены в [3] и др. Именно таким способом решено большое число разнообразных задач адаптации (подробности и библиографию см. в [1], [2]). Заметим еще, что КСА должен быть представим в виде $\tau_{t+1} = T(\sigma_{t+1}, \sigma_t, \tau_t)$ и, в частности, не должен зависеть от ξ; поэтому для одних и тех же РЦН одни КСА применимы, а другие нет. Имеются и другие осложняющие обстоятельства.)

А. С. Немировский обратил внимание автора на то, что известный алгоритм эллипсоидов является КСА для линейных РЦН. Он поэтому также применим в задачах адаптации. Сравнение оценок $r(\xi)$ показало, что при любом N и малых δ (больших необходимых точностях) алгоритм эллипсоидов лучше алгоритмов [3], но при любом фиксированном δ и больших размерностях N алгоритмы эллипсоидов хуже алгоритмов [3]: $r_э \gg r$. Так, например, при $\delta = 10^{-3}$, взяв для наглядности вместо $r_э$ и r при $N \gg 29$. При этом $T_э = T = 2$ ч. 47 мин. для $N = 29$; метод же полного перебора дает $T = 3 \cdot 10^{800}$ лет; последние цифры характеризуют эффективность алгоритмов адаптации.

Выбор КСА в задачах адаптации связан и с необходимостью обоснования условий сходимости КСА, что обычно сводится к обоснованию замкнутой нелинейной системы (см. [1]). Основными здесь являются методы теории абсолютной устойчивости и близкие к ним. Методом РЦН решены разнообразные технические задачи (Д. П. Деревицкий, А. Л. Фрадков, Б. Р. Андриевский, Г. С. Аксенов, Б. М. Соколов, В. М. Брейтман, А. В. Зак, Б. Д. Любачевский, Б. А. Перлин и др.), в том числе задачи робототехники (А. В. Тимофеев, В. И. Ружанский, Ю. К. Зотов, Г. Д. Пенев, С. В. Гусев и др.). Промоделировано на ЭВМ поведение различных квазибиологических самообучающихся систем. С. В. Гусевым и С. Л. Шишкиным промоделирован на ЭВМ процесс самообучения ходьбе модели антропоморфного механизма.

Другой подход к развитию теории адаптивных систем (стохастических) предложен ранее Я. З. Цыпкиным [4]; он широко представлен в современной технической литературе. Имеются и другие направления в теории адаптивных систем; они описаны в [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Фомин, А. Л. Фрадков, В. А. Якубович. Адаптивное управление динамическими объектами.— М.: Наука, 1981.

[2] Д. П. Деревицкий, А. Л. Фрадков. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления.— М.: Наука, 1981.

[3] В. А. Якубович. ДАН 1966, **166**:6, с. 1308—1311.

[4] Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.

[5] В. Г. Срагович. Адаптивное управление.— М.: Наука, 1981.

Заседание 20 марта 1984 г.

1. А. М. Вершик «Аменабельность и аппроксимируемость групп и алгебр».

В 1929 г. в журнале «Fundamenta Mathematika» вышла работа фон Неймана «Zur allgemeinen theorie des masses» (К общей теории меры). Ее значение было полностью оценено лишь много позже.

В ней обсуждалась проблема, поставленная Лебегом в 1906 г. о существовании конечно-аддитивного евклидово-инвариантного продолжения меры Лебега на σ-алгебру всех подмножеств R^n. Фон Нейман показал, что определяющими в этой задаче являются чисто алгебраические свойства группы, а не свойства пространства R^n, где действует группа. Это объясняет, почему проблема Лебега решается положительно при $n = 1,2$ (Банах — Тарский, 1924) и отрицательно при $n \geqslant 3$ (Хаусдорф, 1914). Помимо подробного исследования известного парадокса Хаусдорфа (о сфере S^2), автор находит и другие примеры, показывающие, что эффективное действие свободной группы с двумя образующими всегда связано с парадоксами; например, любая мера, решающая проблему Лебега в R^2, не инвариантна относительно $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, а в R^1 такая мера обязательно обладает свойством: существует дробно-линейное преобразование R^1, которое уменьшает меру некоторого множества, хотя его якобиан на множестве больше 1! Эти остроумные парадоксы, волновавшие тогда крупных математиков, постепенно забылись. Однако анализ работы фон Неймана привел к новому и важному вопросу о том, какие свойства действия групп с инвариантной или квазиинвариантной мерой зависят только от алгебраической природы группы и каков класс групп, гарантирующий данное свойство при всяком действии. Ясно, что такие свойства действия (и соответственно классы групп) должны быть очень грубыми и поэтому принципиальными. В работе фон Неймана выделен класс групп, соответствующий свойству: «иметь положительное решение проблемы Лебега при любом действии»; это класс «измеримых», как назвал их автор, а по нынешней терминологии — «аменабельных», или «имеющих инвариантное среднее», групп. Теперь приходится удивляться тому, как правильно угадан этот класс групп, нашедший применения в значительно более актуальных вопросах. Он естественно появляется в теории динамических систем, теории представлений, теории групп Ли и дифференциальной геометрии, теории вероятностей и математической физике и др. Имеются комбинаторные (Фельнер), вероятностные (Кестен, Вершик — Кайманович), гомологические (Джонсон), функциональные (Диксмье — Хуланицкий), геометрические (Марков — Какутани) и другие критерии аменабельности. Вот несколько результатов последних лет.

В 1981 г. Конн, Фельдман, Орнштейн и Вейс [1], завершая почти 20-летние усилия ряда математиков, доказали замечательную теорему, глубоко вскрывающую аппроксимационный смысл аменабельности: для счетных (соответственно сепарабельных локально-компактных недискретных) групп аменабельность равносильна тому, что всякое (или даже хотя бы одно свободное) действие группы с инвариантной мерой траекторно изоморфно действию $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{R}$). Тем самым аменабельные группы составляют в точности тот класс, на который переносятся наиболее общие принципы эргодической теории (эргодические теоремы, энтропия и др.).

Чисто алгебраическое описание класса аменабельных групп до самых последних лет мало продвинулось по сравнению с работой фон Неймана, где показано, что этот класс замкнут относительно перехода к расширениям, подгруппам, фактор-группам, индуктивным пределам и содержит конечные и коммутативные группы. Совсем недавно Р. И. Григорчук [2] привел пример аменабельных групп, которые не получаются этими операциями из конечных и коммутативных. А именно, он построил интересные сами о себе группы промежуточного (между полиномиальным и экспоненциальным) роста. Несколько ранее А. Ю. Ольшанский [3], используя методы, развитые для других целей, построил пример периодической не аменабельной группы, чем опроверг гипотезу, высказанную последователями фон Неймана [4] (а не им самим, как иногда пишут) о том, что всякая неаменабельная группа содержит свободную группу W_2. Ранее идеи таких построений выдвигались разными авторами. Не исключено, что неаменабельными являются группы Адяна — Новикова. В работах Вершика — Кайманович — Березного (см. обзор [5]) приведены другие аналитические характеристики, связанные с аменабельностью (энтропия, асимптотика «гоша» и др.).

Наиболее интересная проблематика связана с перенесением понятия аменабельности на алгебры (ядерность, гиперконечность, инъективность C^*-алгебр — Конн, Хагеруп и др.). Эти понятия относятся к теории C^*- и W^*-алгебр; однако чисто алгебраического определения аменабельности алгебры все еще нет. По-видимому, здесь полезно обобщение критерия аменабельности групп, принадлежащего Кестену в форме, приданной ему Григорчуком (т. е. в терминах роста слов в нормальном делителе свободной группы, задающих копредставление групп —«корост»). Для алгебр соответствующее понятие должно быть связано с грубой классификацией идеалов в свободной алгебре, ранее не рассматривавшейся.

Имеются ли другие столь же радикально различающиеся классы групп, подобно классам введенных фон Нейманом аменабельных и неаменабельных групп? По-видимому, таким же (в классе неаменабельных групп) является свойство (T), введенное Кажданом: изолированность единичного представления в пространстве неприводимых унитарных представлений. Это свойство имеет много применений. Его аналог для алгебр также не изучен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Connes et al. An amenable equivalence relations generated by single transformation.—Ergodic theory and dynamical systems.— 1981, 1 : 4, p. 431—450.

[2] Р. И. Григорчук. К проблеме Милнора о групповом росте.— ДАН, 1983, 271 : 1, с. 30—33.

[3] А. Ю. Ольшанский. К проблеме существования инвариантного среднего на группе.— УМН, 1980, 35 : 4, с. 199—200.
[4] Ф. Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах.— М.: Мир, 1983, с. 1—136.
[5] A. M. Vershik. Amenability and approximation of infinite groups.— Selecta Math. Sov., 1982, 2 : 4, p. 311—330.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны А. А. Киселёв, М. С. Никулин.

Заседание 27 марта 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено Владимиру Ивановичу Смирнову (1887—1974).

С воспоминаниями о жизни и деятельности академика В. И. Смирнова выступили С. М. Лозинский, С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, Л. В. Канторович, О. А. Ладыженская, С. Г. Михлин, Г. И. Петрашень, Е. И. Эдельштейн.

Заседание 10 апреля 1984 г.

1. М. А. Шубин (Москва) «Нестандартный анализ и теория релаксационных колебаний».

Нестандартный анализ, созданный в начале 60-х годов нашего века А. Робинсоном, часто называют также теорией бесконечно малых: в нем поле действительных чисел расширяется до более широкого упорядоченного поля, уже содержащего бесконечно большие и бесконечно малые числа. Это позволяет, в частности, сделать более естественной теорию сингулярных возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений, считая малый параметр сразу бесконечно малым. На этом пути были, в частности, открыты утки — циклы характерной специальной формы, появление которых сопровождает бифуркацию Хопфа в системах с малым параметром.

В докладе рассказаны основные идеи нестандартного анализа и дан обзор некоторых его приложений в теории релаксационных колебаний.

Подробная статья докладчика и А. К. Звонкина на эту тему опубликована в УМН, 1984, 39:2.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны А. Л. Лихтарников, Н. Н. Ляшенко, В. Н. Солев, В. М. Харламов.

Заседание 17 апреля 1984 г.

Заседание проводилось совместно с общематематическим семинаром ЛОМИ.

1. Ж.-П. Серр (Париж) «О τ-функции Рамануджана».

Заседание 24 апреля 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых и было посвящено 50-летию первой Ленинградской математической олимпиады для школьников.

Весной 1934 г. в Ленинграде состоялась первая в Советском Союзе математическая школьная олимпиада, объявленная и готовившаяся с осени 1933 г. Ее основными организаторами были Б. Н. Делоне и Г. М. Фихтенгольц.

На заседании с воспоминаниями выступили участники первых олимпиад и организаторы олимпиад разных лет: Д. К. Фаддеев, М. Л. Александрова (победительница 1-й олимпиады), В. А. Залгаллер, М. И. Башмаков, А. В. Яковлев, В. Я. Григошин (Дворец пионеров), А. С. Меркурьев, А. Г. Гольдберг (Институт усовершенствования учителей), Н. А. Шанин (победитель 2-й олимпиады), С. В. Рукшин (Дворец пионеров).

Заседание 22 мая 1984 г.

1. А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский «Группы Ли и вполне интегрируемые системы».

Уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, имеют ряд замечательных свойств: эти уравнения гамильтоновы, они обладают большим числом интегралов в эволюции, их решение сводится к задаче Римана. Эти свойства естественно объединяются общей теоретико-групповой схемой, применимой как к обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и к уравнениям в частных производных. Ее первоначальный вариант появился в работах Б. Костанта и М. Адлера (библиографию см. в [1]). Эта схема, в частности, непосредственно приводит к известной алгебро-геометрической теории уравнений со спектральным параметром, развивавшейся С. П. Новиковым и др.

Конструкция основана на взаимодействии двух структур алгебры Ли на одном и том же пространстве. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли, $\mathfrak{g}^*$ — двойственное пространство. Скобка Ли — Пуассона (скобка Кириллова) в $\mathfrak{g}^*$ определяется тем, что для линейных функций на $\mathfrak{g}^*$, т. е. элементов алгебры $\mathfrak{g}$, она совпадает со скобкой Ли в $\mathfrak{g}$. Как правило, эта скобка вырождена. Максимальные невырожденные подмногообразия для нее — орбиты коприсоединенного действия Ad^* группы G в $\mathfrak{g}^*$. Центр скобки Ли — Пуассона совпадает с подалгеброй $I(\mathfrak{g})$ функций, инвариантных относительно Ad^*.

Определение [1]. Классической R-матрицей называется линейный оператор в алгебре $\mathfrak{g}$ такой, что R-скобка

$$[X, Y]_R = [RX, Y] + [X, RY] \tag{1}$$

есть скобка Ли в пространстве $\mathfrak{g}$.

Основной пример R-матрицы следующий. Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ представима в виде линейной суммы двух своих подалгебр, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dotplus \mathfrak{g}_-$, и пусть $P_\pm$ — проекторы на $\mathfrak{g}_\pm$. Тогда

$$R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-). \tag{2}$$

Теорема 1. 1) *Функции из* $I(\mathfrak{g})$ *находятся в инволюции относительно R-скобки Ли — Пуассона.* 2) *Пусть* $\Phi \in I(\mathfrak{g})$. *Уравнения движения, задаваемые гамильтонианом* Φ *относительно R-скобки, имеют «лаксов» вид*

$$\frac{d}{dt}L = -\,\mathrm{ad}^*R(M)\cdot L, \tag{3}$$

где $M = d\Phi(L)$.

Геометрический смысл теоремы 1 проясняется при переходе к соответствующим группам Ли [2]. Мы сформулируем результат для R-матрицы вида (2). Пусть $G_\pm$ — подгруппы, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{g}_\pm$.

Теорема 2. *Факторизация однопараметрической подгруппы* $\exp tM$:

$$\exp tM = g_+(t)^{-1}g_-(t), \tag{4}$$

где $g_\pm(t)$ — *гладкие кривые в подгруппах* $G_\pm$, $g_\pm(0) = 1$, — *дает решение уравнений движения* (3):

$$L(t) = \mathrm{Ad}^*\, g_+(t)\cdot L = \mathrm{Ad}^*\, g_-(t)\cdot L. \tag{5}$$

Итак, для построения уравнений вида (3) нужно указать:

1) R-матрицу; обычно она имеет вид (2);

2) орбиту R-скобки — фазовое пространство системы; для R-матрицы вида (2) она распадается в прямую сумму орбит подалгебр $\mathfrak{g}_\pm$;

3) гамильтониан Φ — инвариант коприсоединенного действия.

Подчеркнем, что R-матрица определяет задачу факторизации, и обратно; R-матрица также определяет гамильтонову структуру лаксовых уравнений. Тем самым гамильтоновость очень тесно связана с задачей факторизации.

Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dotplus \mathfrak{g}_-$ обычно связано с градуировкой в алгебре $\mathfrak{g}$: если $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_i$, то $\mathfrak{g}_+ = \sum\limits_{i>0} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_- = \sum\limits_{i\leqslant 0} \mathfrak{g}_i$. Важно отметить, что если $\mathfrak{g}_i$ конечномерны, то орбиты R-скобки конечномерны, хотя алгебра $\mathfrak{g}$ может быть бесконечномерной.

Конечномерные (простые) алгебры Ли приводят лишь к системам типа обобщенных цепочек Тоды. Гораздо большее число интересных систем доставляют аффинные алгебры Ли — алгебры матричнозначных полиномов Лорана от переменной λ и их градуированные подалгебры. Уравнение (3) в этом случае приобретает вид лаксова уравнения со спектральным параметром

$$\frac{d}{dt}L(\lambda) = [L(\lambda), M_\pm(\lambda)], \tag{6}$$

где $M_\pm(\lambda) = \pm P_\pm(M(\lambda))$. Среди получающихся гамильтоновых систем — многомерные волчки в линейном поле сил, периодические цепочки Тоды, ангармонические осцилляторы и др. ([2], [3]). Задача факторизации в этом случае представляет собой задачу Римана — Гильберта об аналитической факторизации матричных функций.

Теорема 2 дает ключ к алгебро-геометрическому описанию решений уравнения (6). Уравнение $\det(L(\lambda) - z) = 0$ задает спектральную кривую X_L матрицы $L(\lambda)$. Для каждой точки $p = (\lambda, z) \in X_L$ имеется одномерное (в случае простого спектра) собственное подпространство $E_L(p)$. Возникает линейное голоморфное расслоение E_L над X_L. Согласно (6) в процессе эволюции кривая X_L не меняется. Из теоремы 2 легко вытекает

Следствие. *Расслоение $E_{L(t)}$ меняется линейно (как точка на якобиане компактификации $\overline{X}_L$ кривой X_L).*

Доказательство. Определим аффинные области $U_\pm \subset \overline{X}_L$ условиями $\lambda^{\pm 1} \neq \infty$; имеем $\overline{X}_L = U_+ \cup U_-$. Поскольку $M = d\Phi(L)$, а $\Phi \in I(\mathfrak{g})$, то $[L, M] = 0$. Следовательно, подпространства $E_L(p)$ — собственные для M: $M \mid E_L(p) = \mu(p)$. Пусть $\exp tM = g_+(t)^{-1}g_-(t)$ — решение задачи факторизации (4); оно существует, по крайней мере, для малых значений t. Согласно (5) эволюция матрицы L дается формулой $L(\lambda, t) = g_+(\lambda, t)L(\lambda)g_+(\lambda, t)^{-1} = g_-(\lambda, t)L(\lambda)g_-(\lambda, t)^{-1}$, где $g_\pm(\lambda, t)$ регулярны в областях $\lambda^{\pm 1} \neq \infty$ на $\mathbb{C}P^1$. Поэтому расслоение собственных векторов $E_{L(t)}$, как подрасслоение в $\overline{X}_L \times \mathbb{C}^n$, над областями $U_\pm$ представляется в виде $E_{L(t)}(p) = g_\pm(\lambda, t)E(p)$: функции $g_\pm(\lambda, t)$ задают изоморфизмы E_L и $E_{L(t)}$ над $U_\pm$. При этом функция перехода в $U_+ \cap U_-$, различающая эти изоморфизмы, есть $g_+(t)^{-1}g_-(t) \mid E_L = \exp tM \mid E_L = \mathrm{ext}\, t\mu$. Таким образом, $E_{L(t)} = E_L \otimes E_t$, где E_t — однопараметрическая подгруппа линейных расслоений, задаваемая функцией перехода $\exp t\mu$. Поэтому в терминах якобиана движение линейно.

Двумеризация лаксовых уравнений приводит к уравнениям нулевой кривизны Захарова — Шабата. Включение этих уравнений в нашу схему требует центрального расширения основной алгебры с помощью коцикла Маурера — Картана [4]. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли функций переменной x со значениями в $\mathfrak{g}$. Определим 2-коцикл ω на $\tilde{\mathfrak{g}}$ равенством

$$\omega(X, Y) = \int dx\, B\left(X, \frac{d}{dx}Y\right), \tag{7}$$

где B — инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Построим по ω центральное расширение $\hat{\mathfrak{g}}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Если форма B невырождена, то коприсоединенное действие группы $\hat{G}$ на $\hat{\mathfrak{g}}^*$ задается калибровочными преобразованиями. Инфинитезимально оно имеет вид

$$\mathrm{ad}^* M \cdot L = c\frac{d}{dx}M + [M, L].$$

Соответствующие гамильтоновы уравнения по скобке Ли — Пуассона принимают вид уравнений нулевой кривизны. Инварианты такого действия — собственные значения преобразования монодромии для уравнения

$$\frac{d}{dx}\psi = L\psi.$$

Если в качестве $\mathfrak{g}$ выбрана аффинная алгебра Ли, то тем самым в нашей схеме воспроизводится обычный формализм метода обратной задачи, и естественно возникают такие уравнения, как нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение ферромагнетика, двумеризованные цепочки Тоды и т. д.

Если в качестве $\mathfrak{g}$ взять алгебру псевдодифференциальных символов, то двумеризация приводит к уравнениям КП и ему подобным 5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Семёнов-Тян-Шанский. Что такое классическая R-матрица.— Функц. анализ, 1983, 17 : 4, с. 17—33.

[2] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I, II.— Invent. Math., 1979, 54 : 1, p. 81—100; 1981, 63 : 3, p. 423—432.

[3] А. Г. Рейман. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1980, 95, с. 3—54.
[4] А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных.— ДАН, 1980, 251 : 6, с. 1310—1313.
[5] А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский. Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева — Петвиашвили.— Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1984, 133, с. 212—227.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества избраны А. Л. Вернер, Н. Л. Гордеев, Ю. Г. Дуткевич, А. А. Жиглявский, А. А. Корбут, А. П. Киселёв, В. Л. Кобельский, П. П. Кулиш, М. А. Лифшиц, М. М. Лесохин, В. В. Некруткин, С. Л. Печерский, А. И. Соболев.

Заседание 5 июня 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского Дома ученых.

1. И. М. Гельфанд (Москва) «Несколько замечаний об опыте работы в математике и биологии».

2. И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский (Москва) «Модели представлений классических групп и скрытые симметрии».

Для всех комплексных классических групп G построены новые реализации модели представлений G, т. е. суммы всех конечномерных алгебраических неприводимых представлений G, взятых ровно по одному разу. Эти реализации обладают скрытой симметрией: действие алгебры Ли группы G на них естественно продолжается до действия большей (супер-)алгебры Ли. Построение скрытых симметрий основано на геометрической конструкции, аналогичной конструкции твисторов Пенроуза.

Подробный текст публикуется в журнале «Функциональный анализ и его приложения», 1984, 18:3., с. 14—31.

Заседания математического Лектория для студентов при ЛМО в 1983/84 г.

18 октября 1983 г. О. Я. Виро «О расположении прямых в пространстве».
17 ноября 1983 г. А. Н. Паршин «О гипотезе Морделла».
1 марта 1984 г. В. С. Буслаев «Что такое континуальный интеграл».
29 марта 1984 г. Ю. В. Матиясевич «Как перемножить два числа».
12 апреля 1984 г. М. А. Шубин «Что такое нестандартный анализ».
17 мая 1984 г. С. Ю. Пилюгин «Динамика отображений отрезка в себя».

1986 г. январь—февраль т. 41, вып. 1(247)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1])

Заседание 25 сентября 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. Приветствие Ленинградского математического общества С. М. Лозинскому в связи с его семидесятилетием.

2. И. П. Мысовских «Об исследованиях С. М. Лозинского по оценке погрешности приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений».

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \qquad x(t_0)=x_0. \tag{1}$$

Система записана в векторной форме, x — вектор с n составляющими, $f(t, x)$ — вектор-функция.

Остановимся на следующих трех направлениях в исследованиях С. М. Лозинского: 1) Оценка погрешности приближенного решения $X(t)$ задачи (1); при этом вектор-функция $X(t)$ задается аналитически. 2) Оценка погрешности численного интегрирования системы (1) методом Адамса. 3) Применение численного интегрирования для получения строгой информации о расположении решения задачи (1).

В работах, относящихся к первому направлению, получены оценки для составляющих и норм вектора $x(t) - X(t)$, где $x(t)$ — точное решение задачи (1). Эти оценки выражены через некоторые характеристики матрицы Якоби вектор-функции $f(t, x)$ и невязку системы (1) на приближенном решении: $X'(t) - f(t, X(t))$. В работах [27], [28] предполагается, что решение $x(t)$ существует на некотором интервале. (Цифры в квадратных скобках означают номера в списке печатных работ С. М. Лозинского, который опубликован в УМН, 1964, т. 19, вып. 6 (120), с. 210—212, и УМН, 1975, т. 30, вып. 2 (182), с. 233—234.) В [29], [30] получены оценки без этого предположения: по заданной вектор-функции $X(t)$ гарантируется определенный интервал $[t_0, T]$, на котором существует точное решение задачи (1). Эти результаты обобщены в [52], [53], где даны рекомендации по их применению и приведены численные примеры.

Ко второму направлению относится работе [35], где указаны априорная и апостериорная оценки погрешности экстраполяционного метода Адамса. Предполагается, что точное решение $x(t)$ существует на том интервале $[t_0, T]$, на котором выполняется численное интегрирование, и указана некоторая область, содержащая это решение. Для проверки этого предположения используются результаты работ первого направления. Полученные оценки существенно улучшают ранее известные оценки и отличны от них как по своей структуре, так и по методу получения. По-видимому, эти оценки до настоящего времени остаются лучшими в литературе. В [35] введено понятие логарифмической нормы матрицы. Это понятие нашло применения в работах по линейной алгебре и дифференциальным уравнениям как самого С. М. Лозинского, так и многих других авторов. Значение логариф-

[1]) См. УМН, 1985, т. 40, вып. 2 (242), с. 213—222.

мической нормы станет ясным, если сопоставить два факта: 1) в оценках она появляется в показателе степени l, 2) она может принимать отрицательные значения.

Третье направление представлено работами [38] и [45]. В [38] введен класс избыточных методов численного интегрирования, обладающий следующими свойствами. Пусть правые части системы (1) и некоторые их частные производные не убывают по каждому аргументу. Если численное интегрирование задачи (1) избыточным методом удается выполнить на некотором интервале, то из этого факта вытекает, что точное решение задачи (1) на этом интервале существует и в узлах интегрирования не превосходит численного решения. Показано, что за счет уменьшения шага интегрирования можно получить сколь угодно хорошее приближение к истинному интервалу существования непродолжимого решения. Существование методов с такими свойствами в литературе не отмечалось. В [45] введены недостаточные методы численного интегрирования, которые дают численное решение с недостатком.

3. Г. И. Натансон «О работах С. М. Лозинского по конструктивной теории функций».

4. С. М. Лозинский «Краткие сведения из истории Ленинградского математического общества (к 25-летию Общества)».

Ленинградское математическое общество (далее, ЛМО) основано 25 лет назад, в сентябре 1959 г. Однако еще в 20-е годы существовало Ленинградское физико-математическое общество, президентом (председателем) которого был член-корреспондент АН СССР Николай Максимович Гюнтер; с 1926 г. Общество издавало журнал. Почетным членом Общества, основателем и первым редактором журнала был вице-президент АН СССР Владимир Андреевич Стеклов. Общество и журнал прекратили существование в 1930 г.

В начале 1953 г. по инициативе академика В. И. Смирнова был организован Ленинградский общегородской математический семинар, заседания которого проходили (2 раза в месяц, кроме каникулярного времени) в Ленинградском доме ученых. Председателем семинара был В. И. Смирнов. Чтобы дать представление о характере работы семинара, приведем названия некоторых из докладов, сделанных в первом полугодии 1953 г.: В. И. Смирнов «Современные проблемы математической физики»; Н. П. Еругин «Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в большом»; А. Д. Александров «Отношение геометрии к физике»; М. К. Гавурин «О современных вычислительных машинах»; Л. В. Канторович «Значение современной вычислительной техники для прикладной математики»; А. А. Марков «Теория алгоритмов».

Семинар работал до сентября 1959 г. Всего на семинаре было сделано 143 доклада, из них 9 иногородними и 2 иностранными докладчиками. Среди докладов было примерно 10 обзорных и несколько информационных — о планах издания математической литературы, о международных математических съездах. Одно из заседаний было посвящано памяти Е. И. Золотарёва и одно — памяти И. А. Лаппо-Данилевского. Образование семинара было отмечено УМН (1953 г., вып. 6, с. 159—161), и работа семинара систематически освещалась в УМН в среднем два раза в год. Математической общественностью семинар воспринимался как образование «по существу Ленинградского математического общества» (слова в кавычках взяты из статьи П. С. Александрова, И. Н. Векуа, М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, посвященной 70-летию В. И. Смирнова (УМН, 1957, т. 12, вып. 6, с. 200).

В 1959 г. был положительно решен вопрос о создании ЛМО; его устав был утвержден Министерством высшего образования СССР в апреле 1959 г. По этому уставу Общество создавалось при ЛГУ и подчинялось непосредственно ректору университета. 29 сентября 1959 г. состоялось учредительное собрание ЛМО. На этом собрании было избрано Правление в составе: Ю. В. Линник (президент), О. А. Ладыженская и С. М. Лозинский (вице-президенты), А. Д. Александров, Б. А. Венков, А. В. Малышев (секретарь), С. Г. Михлин, Н. Н. Поляхов, В. И. Смирнов (казначей).

С созданием ЛМО общегородской математический семинар прекратил свою работу; Общество приняло на себя его функции, собираясь с той же периодичностью, что и семинар, но заседания Общества стали проводиться на мат.-мех. ф-те ЛГУ (Васильевский остров, 10 линия, д. 33), а с 1981 г. — одно из двух заседаний в месяц — в Доме ученых.

Всего до 1984 г. было 11 распорядительных собраний с отчетом и перевыборами Правления, проходивших один раз в два года. В 1965 г. Ю. В. Линник сложил с себя обязанности президента ЛМО. Президентом был избран С. М. Лозинский, вице-президентами — Б. З. Вулих и Д. К. Фаддеев. С 1970 по 1978 гг. вице-президентами избирались Б. З. Вулих и О. А. Ладыженская, а с 1978 г. по настоящее время — О. А. Ладыженская и А. М. Вершик.

Динамика роста количества членов Общества: при основании — 49 человек, в феврале 1963 г.— 92, в мае 1970 г.—93, в мае 1973 г.—123, в октябре 1978 г.—150, в сентябре 1984 г.—209, в мае 1985 г.—224. Среди них (май 1985 г.): академиков — 2, членов-корреспондентов АН — 4, докторов наук — 91, кандидатов наук — 121, без ученой степени — 6. С. Н. Бернштейн, А. Д. Александров, Л. В. Канторович и А. А. Марков избраны в 1966 г. почетными членами Общества. В. И. Смирнов в 1962 г. избран почетным членом, а в 1967 г.— почетным президентом ЛМО. В настоящее время Общество объединяет в своих рядах почти всех активно работающих математиков Ленинграда и в первую очередь математиков университета и ЛОМИ АН СССР.

В УМН опубликованы материалы обо всех заседаниях ЛМО, за исключением заседаний первого полугодия 1969 г. Информация помещается раз в год, как правило, с тезисами докладов. В каждом отчете дается ссылка на предыдущую публикацию.

С сентября 1959 г. по сентябрь 1984 г. в Обществе сделано ленинградскими математиками 203 доклада, иногородними — 80, иностранными математиками — 11 (в эти числа не входят информационные доклады и доклады по вопросам преподавания).

В 1970 г. в Правлении ЛМО создана программная комиссия (председатель А. М. Вершик), которая занялась планированием и организацией докладов и, в частности, организовала большой цикл докладов о современных проблемах математики. В результате интерес к заседаниям постепенно стал повышаться, в ряды Общества было привлечено много молодежи. Возросло абсолютное и относительное количество обзорных докладов и докладов, сделанных иногородними математиками (до 1970 г. обзорные доклады составляли примерно седьмую часть всех докладов, после — больше четверти, доклады иногородних математиков соответственно 1/8 и 1/3), расширилась проблематика и оживилась деятельность Общества в целом. Среди докладчиков, кроме ленинградцев, математики Москвы, Новосибирска, Киева и др. Тематика докладов охватывает почти все области математики и ряд ее приложений; при этом организаторы стараются отразить все сколько-нибудь крупные математические события у нас в стране и за рубежом. Много докладов делают молодые математики Ленинграда.

В 1976 г. при ЛМО был организован математический лекторий для студентов мат.-мех. и других факультетов ЛГУ; доклады лектория посвящены отдельным проблемам или областям математики, носят обзорный характер и доступны студентам 3—5 курсов.

С 1981 г. при Ленинградском доме ученых организована математическая секция и заседания Общества раз в месяц проводятся совместно с нею в Доме ученых. Председатель секции — вице-президент Общества А. М. Вершик.

С 1962 г. ЛМО ежегодно весной присуждает одну или две премии молодым математикам (не старше 30 лет). Всего было 30 лауреатов (премия не присуждалась в 1969, 1972 и 1979 гг.). Первым лауреатом в 1962 г. был В. Г. Мазья. Начиная с 1970 г., новый сезон открывается докладами лауреатов премии.

ЛМО выдвигало кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты АН СССР и кандидатов на Ленинские премии. Общество проводило заседания, посвященные памяти Л. Эйлера, П. Л. Чебышёва, С. В. Ковалевской, Н. М. Гюнтера, С. Н. Бернштейна, а также заседания памяти умерших членов Общества И. П. Натансона, Ю. В. Линника, В. И. Смирнова, В. З. Вулиха, Г. Я. Лозановского, С. Ю. Маслова.

В 1984 г. было проведено заседание ЛМО совместно с секцией математики Дома ученых, посвященное 50-летию первой Ленинградской (и первой в СССР) математической олимпиады для школьников.

Регулярно приглашаются представители центральных издательств для информации о выходе математической литературы. Устраиваются совместные заседания (с секцией физики Дома ученых, с Институтом истории естествознания, математико-механическим факультетом и др.).

Состав Правления и ревизионной комиссии, избранной в 1985 г., публикуется в этом отчете.

Заседание 9 октября 1984 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1984 г. Премии присуждены Д. Ю. Григорьеву и А. Л. Чистову за цикл работ «Эффективные алгоритмы в коммутативной алгебре» и В. Л. Кобельскому за работу «Модули многомерных зацеплений».

2. Лекция лауреатов премии: Д. Ю. Григорьев и А. Л. Чистов «Эффективные алгоритмы в коммутативной алгебре».

В последнее время произошел значительный прогресс в построении эффективных алгоритмов для основных вычислительных задач коммутативной алгебры: разложение многочлена от многих переменных на неприводимые множители, разложение многообразия на неприводимые компоненты, проекция многообразия, нахождение вещественных решений системы полиномиальных неравенств, разрешение элементарной теории вещественно замкнутых полей (алгебры Тарского). Для всех этих задач ранее были известны (Кронекер, А. Зайденберг, Д. Коллинз, Х. Вютрих) алгоритмы, требующие экспоненциального (от размера входных данных) времени работы.

Для разложения многочлена от одной переменной над конечным полем алгоритм полиномиальной сложности был предложен в конце 50-х годов Д. К. Фаддеевым, А. И. Скопиным и позже Д. Берлекэмпом. В 1982 г. А. Ленстра, Х. Ленстра, Л. Ловас построили алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочлена от одной переменной над полем рациональных чисел. Далее, Д. Ю. Григорьев, А. Л. Чистов построили алгоритм для разложения многочлена от многих переменных над полем, конечно порожденным над простым подполем данной характеристики, время работы которого полиномально.

Для более общей задачи разложения алгебраического многообразия на неприводимые компоненты (и тем самым для решения системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем) Д. Ю. Григорьев, А. Л. Чистов предложили алгоритм субэкспоненциальной (т. е. экспоненциальной от полинома от логарифма) сложности. Далее, Д. Ю. Григорьев, А. Л. Чистов построили алгоритм субэкспоненциальной сложности для нахождения линейной проекции квазипроективного многообразия.

Решение систем полиномиальных неравенств является обобщением задач линейного, а также выпуклого программирования. Н. Н. Воробьев (мл.), Д. Ю. Григорьев предложили алгоритм для нахождения вещественных решений системы полиномиальных неравенств, время работы которого субэкспоненциально.

Разрешимость элементарной теории вещественно замкнутых полей (алгебры Тарского) была впервые установлена А. Тарским. В методологическом плане разрешение алгебры Тарского обобщает все рассмотренные выше задачи. Д. Ю. Григорьев построил алгоритм для ее разрешения, время работы которого на данной формуле алгебры Тарского субэкспоненциально при ограниченном числе перемен кванторов в формуле. С другой стороны, известна (М. Фишер, М. Рабин) нижняя экспоненциальная оценка сложности разрешения алгебры Тарского, установленная для последовательности формул, у которых число перемен кванторов растет линейно с числом переменных.

Заседание 23 октября 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. А. В. Скороход (Киев) «Стохастические полугруппы».

В докладе рассмотрены свойства общих стохастических полугрупп, которые являются обобщением случайных процессов с независимыми приращениями, в первую очередь стохастические полугруппы в пространствах операторов и их представления через операторнозначные процессы с независимыми приращениями.

Заседание 13 ноября 1984 г.

1. В. Е. Захаров (Москва) «Многомерная обратная задача рассеяния».

При помощи метода $\bar{\partial}$-проблемы построены точные решения некоторых многомерных нелинейных дифференциальных уравнений.

2. Прием в члены Общества; в члены Общества принят Г. С. Осипенко.

Заседание 27 ноября 1984 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева «Новое в теории квазилинейных дифференциальных уравнений».

В докладе рассказано:

1) О новых оценках для решений равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений 2-го порядка общего вида и соответствующих усилениях результатов по разрешимости краевых задач для них.

2) О классической разрешимости задачи Дирихле для некоторых нелинейных эллиптических уравнений.

3) Об исследовании гладкости решений задач с односторонними ограничениями.

Заседание 11 декабря 1984 г.

Председательствующий сообщает, что 3 декабря 1984 г. скончался член ЛМО Владимир Абрамович Рохлин.

1. Ю. Г. Решетняк (Новосибирск) «Пространственные отображения с ограниченным искажением и дифференциальные уравнения».

Отображение области n-мерного пространства называется отображением с ограниченным искажением, если определитель матрицы Якоби оценивается сверху через n-ю степень нормы этой матрицы, с константой, не зависящей от точки области.

Отображение с ограниченным искажением можно рассматривать как многомерный аналог аналитической функции одной переменной. В докладе рассказано об основных результатах теории отображений с ограниченным искажением и используемых в ней методах.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества приняты Г. П. Астраханцев, Ю. К. Даугавет, И. В. Клокачев, Б. Л. Овсиевич, Л. А. Оганесян, В. Т. Перекрест, Л. А. Руховец.

Заседание 25 декабря 1984 г.

1. В. М. Харламов «Жесткие изотопии алгебраических кривых и поверхностей».

В докладе рассмотрены неособые плоские вещественные алгебраические кривые и неособые вещественные алгебраические поверхности трехмерного пространства. Для них жесткая изотопия может быть определена как непрерывное изменение коэффициентов уравнения, обходящее особенности. Изучение кривых и поверхностей с точностью до жестких изотопий имеет столь же давнюю историю, как родственные вопросы об обыкновенных изотопиях, включенные Гильбертом в его известную 16-ю проблему. Прогресс, достигнутый за последние годы в 16-й проблеме Гильберта, значительно продвинул и изучение жестких изотопий.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества приняты А. С. Матвеев, А. Е. Барабанов.

Заседание 26 февраля 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых. Вычислительный эксперимент в математических исследованиях.

1. Ю. В. Матиясевич «Вычислительные эксперименты по гипотезе Римана».

На примере двух гипотез — гипотезы Римана и более сильной гипотезы Мертенса — показано, что вычислительный эксперимент не может служить полноценной заменой человеческой интуиции. Гипотеза Мертенса была сформулирована на основе большого численного материала и подтверждалась последующими интенсивными вычислениями. Тем не менее она в конце концов была опровергнута в ходе счета на ЭВМ [1]. Напротив, вычислительные эксперименты по гипотезе Римана развернулись только после того, как она была уже сформулирована. Все они (а сейчас проверено, что первые 40 000 000 нулей лежат на критической прямой [2]), а также теоретические исследования служат неформальными доводами в пользу гипотезы Римана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Te Riele H. Mertens' conjecture disproved.— CWI Newslett., 1983, № 1, p. 23—24.
[2] Van de Lune J., te Riele H. J. J. Recent progress on the numerical verification of the Riemann Hypothesis.— CWI Newslett., 1984, № 2, p. 35—37.

2. М. Ю. Любич «Численные эксперименты в теории итераций рациональных функций комплексного переменного».

Основы теории итераций рациональных функций комплексного переменного были заложены в начале века в трудах Фату и Жюлиа. В последние годы эта теория привлекла большой интерес, который в значительной степени связан с возможностями современных компьютеров. С одной стороны, с помощью компьютеров можно рисовать впечатляющие картинки, которые иллюстрируют неожиданную сложность динамики уже для простейших функций и приводят к новым наблюдениям и гипотезам. С другой стороны, теория Жюлиа — Фату дает надежду усовершенствовать методы приближенных вычислений и лучше понять их возможности. В частности, представляется весьма важной задача исследования глобальной сходимости итерационного процесса Ньютона. Простые примеры показывают, что процесс Ньютона может «зацикливаться» для открытого множества начальных приближений$\left(\text{например, для полинома } p(z) = z^3 - z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Однако следующий результат является в какой-то степени обнадеживающим.

Теорема. *Пусть корни полинома $p(z)$ вещественны и просты. Тогда почти все траектории интерационного процесса Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$ сходятся к корням.*

3. В. А. Залгаллер «Перечень правильногранных многогранников».

4. А. М. Вершик «Рост и асимптотика случайных конфигураций («рост зверей») — теория и эксперимент».

Возможности современных ЭВМ позволяют по-новому взглянуть на трудные задачи об асимптотических свойствах растущих конфигураций, множеств, траекторий процессов с нечисловым пространством состояний. Такие модели рассматривались фон Нейманом, Уламом и их последователями. Характерная постановка вопроса такова: имеется пространство объектов («зверей»), например конечных подмножеств на решетке $\mathbb{Z}^\nu$ определенного вида (связных, выпуклых и т. п.), и правила допустимых переходов от одного объекта к другому (например, присоединение или стирание граничных узлов объекта или более общее взаимодействие) заданы также вероятности, согласованные с этими правилами. Таким образом, имеется марковский процесс с переменным множеством состояний. Модели такого рода возникают в статистической физике, химии полимеров, эпидемиологии, теории конечных автоматов, комбинаторике, теории представлений групп, теории вероятностей.

Строгих результатов в этой области очень мало, но экспериментаторами (в основном физиками и химиками) накоплен огромный фактический материал. Возникло даже предложение [1] использовать термин «показать» (montrer), в отличие от «доказать» (démontrer), в значении «получить достоверный машинный результат». Например, *показано*, что размерность 7 является критической для ветвящихся случайных блужданий. Трудные задачи об асимптотике случайного роста диаграмм и таблиц Юнга возникают в связи с теорией представлений и аддитивной теорией чисел с растущим числом слагаемых (см. [2]). Особенно неприступными (даже для машинных экспериментов) выглядят задачи о росте трехмерных таблиц Юнга. В теоретических постановках следует помнить и о том, что общие задачи об эргодичности, нетривиальности границы и др. для подобных процессов, как правило, алгоритмически неразрешимы. Поэтому машинный эксперимент и изучение отдельных классов моделей не могут быть заменены общей теорией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Viennot G. Seminar Bourbaki.— Fevrier, 1984, № 626.
[2] Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы. —Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 1, с. 25—36.

Заседание 12 марта 1985 г.

1. Г. В. Розенблюм «Можно ли услышать форму барабана?— 20 лет спустя».

В 1965 г. М. Кац (см. в [1] изложение его доклада) предложил остроумную формулировку: можно ли услышать форму барабана, т. е. найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (с гладкой границей) по спектру оператора Лапласа в Ω с условиями Дирихле. Сходный вопрос ставится в отношении оператора Лапласа — Бельтрами на римановом многообразии с краем или без края: описать множество $\Sigma(\Omega)$ многообразий, *изоспектральных* Ω. В докладе изложены отрицательные и положительные результаты последних лет по этим проблемам.

Если Ω, $\partial\Omega = \varnothing$, имеет постоянную кривизну, то из экстремальных свойств коэффициентов разложения при $t \to 0$ функции $\mathrm{Tr}\, e^{t\Delta}$ следует, что $\Omega' \in \Sigma(\Omega)$ тоже должно иметь постоянную кривизну. С помощью имеющихся здесь формул следов (Якоби, Сельберга и т. п.) доказано, что $\Sigma(\Omega)$ конечно. В [2] построены примеры изоспектральных пятимерных линзовых пространств, которые даже не гомеоморфны.

Пусть, далее, Ω — область на сфере S^n, вырезаемая камерой Вейля группы Вейля G в $\mathbb{R}^{n+1}$. Спектр полностью описывается набором показателей группы G. В [3] при $n \geqslant 3$ построены неизоморфные группы Вейля с совпадающими наборами показателей. В частности, области на S^3, отвечающие группам $B_3 \times A_1$ и $I_2(4) \times I_2(6)$, изоспектральны. Усеченные конусы в $\mathbb{R}^4$ с соответствующими основаниями дают пример отрицательного ответа на вопрос М. Каца, впрочем, с негладкой границей. Ответ на исходный вопрос неизвестен.

Во всех упомянутых примерах множество $\Sigma(\Omega)$ оказывалось дискретным. В ряде случаев, например для многообразий отрицательной кривизны без края, такое свойство типично (см. [4]). Лишь в [5] выяснилась возможность *изоспектральной деформации* римановой метрики. Пусть G — нильпотентная экспоненциально полная группа Ли Γ — решетка в G, $\Omega = \Gamma \diagdown G$; снабдим Ω левоинвариантной римановой метрикой, унаследованной из G. Автоморфизму $\Phi \in \mathrm{Aut}\,(G)$ отвечает многообразие $\Omega_\Phi = \Phi(\Gamma) \diagdown G$. Если Φ — внутренний автоморфизм, $\Phi \in \mathrm{Inn}\,(G)$, то Ω_Φ изометрично Ω. Автоморфизм Φ — *почти внутренний*, $\Phi \in \mathrm{AIA}(G)$, если в присоединенном представлении $\mathrm{Aut}(G)$ в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ $\Phi \cdot X \in \mathrm{Inn}(G) \cdot X$ для любого $X \in \mathfrak{G}$. Если $\Phi \in \mathrm{AIA}(G)$, то Ω и Ω_Φ изоспектральны. Например, для алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с образующими X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2)$ $[X_i, Y_i] = Z_1$, $[X_1, Y_2] = Z_2$, $\mathrm{AIA}(G)/\mathrm{Inn}(G) \cong \mathbb{R}^2$ и $\Sigma(\Omega)$ имеет структуру двумерного многообразия, т. е. метрика Ω допускает двупараметрическое семейство нетривиальных изоспектральных деформаций.

Положительные ответы на вопрос М. Каца получают обычно на пути анализа числовых характеристик спектра, выражающихся в геометрических терминах. Такими спектральными инвариантами служат объем Ω, площадь поверхности, средняя кривизна а для строго выпуклых многообразий с краем — набор длин замкнутых бильярдных траекторий на Ω и замкнутых геодезических на $\partial\Omega$. В [6] с помощью этих инвариантов найдено содержащее круг трехпараметрическое семейство областей в $\mathbb{R}^2$, которые можно услышать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kac M., Can one hear the shape of a drum? — Amer. Math. Monthly, 1966, v. 73, № 4, p. 1—23.

[2] Ikeda A. On spheric space forms which are isospectral but not isometric.— J. Math. Soc. Japan, 1983, v. 35, № 3, p. 437—444.

[3] Urakawa H., Bounded domains whieh are isopectral but not congruent.— Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., v. 15, № 3, p. 441—456.

[4] Guillemin V., Kazhdan D., Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds. Topology, 1980, v. 19, № 3, p. 301—312.

[5] Gordon C. S., Wilson E. N., Isospectral deformation of compact solvmanifolds.— J. Diff. Geom., 1984, v. 19, № 1, p. 241—256.

[6] Marvisi S., Melrose R., Spectral invariants of convex planar regions.— J. Diff. Geom., 1982, v. 17, № 4, p. 475—502.

2. Прием в члены Общества. В члены Общества приняты Н. М. Ивочкина, М. Ю. Любич.

Заседание 26 марта 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. Б. В. Чириков (Новосибирск) «Численное моделирование хаотических процессов».

Обсуждаются особенности численного моделирования хаотических процессов, а также некоторые численные эксперименты, составляющие основу нашего понимания динамического хаоса, в частности, так называемое ренорм-свойство хаоса.

2. Д. В. Ширков (Москва) «Ренорм-группа в различных областях физики».

Обсуждается соответствие между различными ренорм-группами. Вводится понятие функциональной автомодельности, обобщающее хорошо известное понятие степенной автомодельности.

Заседание 9 апреля 1985 г.

Заседание посвящено памяти Владимира Абрамовича Рохлина (1919—1984). С воспоминаниями о жизни и деятельности выступили С. М. Лозинский, О. А. Ладыженская, С. П. Новиков, А. М. Вершик, О. Я. Виро, В. А. Ефремович, В. А. Залгаллер, Д. А. Владимиров, Л. М. Абрамов.

Заседание 23 апреля 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых и математико-механическим факультетом ЛГУ.

Заседание посвящено памяти погибших в Великой Отечественной войне студентов, аспирантов, преподавателей, математиков, учившихся или работавших на математико-механическом факультете ЛГУ.

Выступившие С. М. Ермаков, А. Д. Александров, Е. С. Ляпин, М. К. Гавурин, В. А. Залгаллер, А. А. Никитин, Ц. А. Рахман, А. В. Белова и др. рассказали о многих талантливых студентах, аспирантах и преподавателях математико-механического факультета, погибших в годы войны.

Заседание 28 мая 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Ленинградского дома ученых.

1. Отчет правления ЛМО (С. М. Лозинский, А. М. Вершик).
2. Отчет ревизионной комиссии (В. Н. Фомин).
3. Обсуждение работы ЛМО и планов на ближайшее время.
4. Выборы Правления, ревизионной комиссии и бюро секции математики Дома ученых.

Новый состав Правления:. С. М. Лозинский (президент), О. А. Ладыженская (вице-президент), А. М. Вершик (вице-президент). Члены Правления: С. М. Ермаков, С. Г. Михлин, С. Б. Павлов, Г. И. Натансон (ученый секретарь), В. Н. Судаков (казначей), Н. В. Иванов, В. Ф. Лазуткин, А. С. Меркурьев, М. З. Соломяк — программная комиссия, Ю. В. Давыдов, О. Я. Виро — математический лекторий для студентов. Ревизионная комиссия: В. Н. Фомин (председатель), В. П. Хавин, Н. К. Никольский. Бюро секции математики:. А. М. Вершик (председатель), М. И. Башмаков (заместитель председателя). Члены: И. А. Ибрагимов, С. В. Керов, С. М. Лозинский, Б. С. Павлов, А. И. Плоткин, В. Г. Тураев (секретарь), Н. Н. Уральцева, С. В. Хрущев, В. А. Якубович.

5. Сообщение представителя издательства «Наука» А. П. Баевой о планах издательства по выпуску математической литературы на ближайшие годы.
6. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1985 г.

Премия присуждена М. А. Лифшицу за работы по изучению структуры распределений функционалов от траекторий случайных процессов.

7. Прием в члены Общества. Членами Общества избраны В. Н. Попов, В. А. Даугавет, Н. Е. Фирсова.

Лекции математического лектория для студентов при ЛМО в 1984/85 учебном году:

1. С. Г. Михлин «Погрешности в вычислительных процессах».
2. Н. Н. Ляшенко «Конечноразрядный математический анализ».
3. С. А. Виноградов «Об одной гипотезе Литтлвуда, связанной с оценкой тригонометрических сумм».
4. В. И. Арнольд «Фокальные точки, оптимизация и группы отражений».
5. З. И. Боревич «Теорема Ферма и современные ЭВМ».
6. Г. С. Цейтин «Как мы программируем».

Примечание при корректуре. 22 августа 1985 г. скончался президент Ленинградского математического общества Сергей Михайлович Лозинский. На заседании, состоявшемся 22 октября 1985 г., новым президентом Ленинградского математического общества был избран Дмитрий Константинович Фаддеев.

1987 г. март—апрель *т. 42, вып. 2(254)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1]

Заседание 24 сентября 1985 г.

1. Вручение премий ЛМО молодому математику за 1985 г.

2. Доклады лауреатов премий.

М. А. Лифшиц «Допустимые преобразования и распределения функционалов от случайных процессов».

Распределение функционала от случайного процесса можно рассматривать как образ вероятностной меры, сосредоточенной на функциональном пространстве. Если исходная мера обладает большим запасом допустимых преобразований, то открывается возможность проверять такие свойства распределения, как абсолютная непрерывность, ограниченность плотности, существование старших производных.

В. Л. Кобельский (Лауреат премии 1984 г.) «Алгебраическая структура моделей зацеплений коразмерности два».

Классическое зацепление — это несколько непересекающихся окружностей в трехмерной сфере. Зацепления, о которых идет речь в докладе, представляют собой многомерные аналоги классических зацеплений. Основное отношение эквивалентности между зацеплениями — объемная изотопия; в нем формализуются наглядные представления о «перевязывании» одного зацепления в другое. Существует богатый набор инвариантов, позволяющих различать изотопические типы зацеплений. Доклад посвящен описанию алгебраической структуры этих инвариантов.

3. Прием в члены Общества.

В члены Общества избраны: Меркурьев С. П., Решетихин Н. Ю., Васюнин В. И., Шубов В. И., Капитанский Л. В., Скриганов М. М., Тетерин Ю. Г., Сафаров Ю. Г., Макаров Н. М., Гершкович В. Я.

Заседание 15 октября 1985 г.

1. Н. Б. Маслова «Математические проблемы кинетической теории».

Кинетические уравнения предназначены для описания необратимых процессов (типа вязкости и теплопроводности) с точки зрения молекулярной динамики. Основные физические идеи вывода таких уравнений были сформулированы в работах Максвелла и Больцмана. Математическая разработка вопросов обоснования и исследования кинетических уравнений, как и всего круга проблем неравновесной статистической механики, ведется сейчас весьма интенсивно. Обзорное изложение последних результатов содержится в книге [1].

Одна из классических нерешенных задач — описание связи уравнения Больцмана с уравнениями гидродинамики. В работах Максвелла впервые появилась бесконечная цепочка моментных уравнений для больцмановской функции распределения и проблема обоснования уравнений гидродинамики была сформулирована как проблема замыкания

[1]) См. УМН, 1986, т. 41, 1(247), с. 215—223.

этой цепочки. Ожидается, что в ситуациях, близких к равновесным, быстро происходит «приспособление» старших моментов к младшим, обеспечивающее возможность упрощенного описания. Однако физическая и математическая природа этого процесса не вполне ясна.

Одно из направлений исследований, связанное с именами Гильберта и Карлемана состоит в изучении асимптотики решения задачи Коши для уравнения Больцмана

$$(1) \qquad \frac{dF}{dt} = \varepsilon^{-1} J(F), \qquad F\,|_{t=0} = F(0)$$

с большим параметром ε^{-1} при нелинейном операторе столкновений. Здесь $F = F(t, x, \xi)$ — функция, описывающая плотность распределения молекул по координатам x ($x \in \Omega \subset R^m$, $m = 1, 2, 3$) и импульсам $\xi (\xi \in R^3)$ в момент времени $t (t \in [0, T])$, $\frac{d}{dt} = \partial_t + \xi \cdot \partial_x$. Ниже предполагается, что $\Omega = R^m$. Основные формулируемые ниже утверждения верны для тора и области с гладкой зеркально отражающей границей.

Гильберт описал структуру формальных степенных разложений F по ε и свойства связанных с этим разложением интегральных операторов. Любое такое разложение однозначно определяется вектором гидродинамических моментов $M = (\rho, v, \theta)$. Компоненты вектора M имеют смысл плотности (ρ) скорости (v, $v \in R^3$) и температуры (θ). Главный член гильбертова ряда — максвелловское распределение $\omega(M, \xi)$, параметры M которого определяются из решений уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости.

В работах японских математиков (С. Укаи, Т. Нишида, К. Асано) доказаны теоремы, дающие обоснование главного члена ряда Гильберта для начальных данных $F(0)$, близких к максвелловскому распределению с постоянными параметрами и аналитических по переменным x. Время существования решения задачи Коши (1), гарантируемое этими теоремами, зависит от нормы начального возмущения в соответствующем банаховом пространстве аналитических функций и убывает с ростом этой нормы.

На самом деле по каждому решению задачи Коши для уравнений Эйлера на $[0, T]$ (существование такого решения в соболевских пространствах гарантируется теоремой Като) можно на том же промежутке времени построить решение задачи (1) в пространстве

$$B(l, \omega) = \{F\colon (F - \omega)\, \bar{\omega}^{-1/2} \in L_\infty([0, T], W_2^l(\Omega, H))\}.$$

Здесь $\omega = \omega(M, \xi)$, $M \in L_\infty\{[0, T], W_2^l(\Omega)\}$ — решение задачи Коши для уравнений Эйлера с начальными данными, соответствующими распределению $F(0)$, $\bar{\omega}$ — максвелловское распределение с постоянными параметрами, мажорирующее ω, H — пространство суммируемых с квадратом функции от ξ. Единственное существенное предположение — близость начального распределения F к ω. Однако достаточно предположить близость в пространстве $L_\infty(\Omega, H)$, не вводя, таким образом, никаких ограничений на градиенты гидродинамических моментов M. Точнее, предположим, что при $t = 0$ выполнены следующие условия:

1) $M - M_0 \in W_2^l(\Omega)$, $M_0 = \mathrm{const}$, $\inf \rho,\ \theta > 0$, $l \geqslant 5$,

2) $(1 + |\xi|)^4 (F - \omega)\, \omega^{-1/2} \in W_2^l(\Omega, H)$.

Теорема. *Существуют постоянные c^*, T^* такие, что при $T \leqslant T^*$, $\|(F - \omega)\omega^{-1/2}\|_{L_\infty(\Omega, H)} \leqslant c^*$ задача* (1) *при всех ε имеет единственное решение в* $B(l - 3, \omega)$.

Одно из следствий теоремы состоит в возможности полного обоснования метода Гильберта. Для гладких начальных данных n-я частная сумма ряда Гильберта отличается от точного решения на величину порядка ε^n в норме $W_2^l(\Omega, H)$ при любом $t > 0$.

Глобальные решения задачи (1) удается построить только для начальных данных с малыми (порядка ε в $W_2^l(\Omega)$) начальными гидродинамическими моментами. Главные члены асимптотики моментов при $\varepsilon \to 0$ определяются решениями уравнений Навье — Стокса для сжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1985, Т. 2. С. 235—307.

Заседание 22 октября 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и было посвящено памяти профессора Сергея Михайловича Лозинского (1914—1985), президента Ленинградского математического общества с 1965 по 1985 гг., заслуженного деятеля науки и техники РСФСР.

С воспоминаниями выступили И. П. Мысовских, В. А. Плисс, Х. Л. Смолицкий, Д. А. Владимиров, Л. Я. Адрианова, Т. В. Кербер, Б. Н. Саморуков (см. некролог в УМН, 1986, вып. 5).

На этом же заседании новым президентом Ленинградского математического общества избран Дмитрий Константинович Фаддеев.

Заседание 19 ноября 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

В. П. Гердт, Д. В. Ширков (Дубна) «Аналитические вычисления на ЭВМ: системы, алгоритмы, применения».

Дан обзор основных этапов становления и перспектив развития методов аналитических вычислений на ЭВМ. Рассмотрены наиболее популярные программные системы аналитических вычислений и показана роль эффективных символьных алгоритмов. Приведен ряд примеров и применений (дифференц. уравнения — обыкновенные и в частных производных; вычисления квантово-полевых величин в рамках теории возмущений).

Заседание 10 декабря 1985 г.

1. А. Б. Венков, П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян «О монодромии фуксовых дифференциальных уравнений: проблема Римана — Гильберта в рамках теории автоморфных функций и связь с геометрией пространства Тейхмюллера».

2. Организационные вопросы: об оплате секретарям Общества.

Заседание 24 декабря 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. Ю. М. Березанский (Киев) «Спектральные методы в бесконечномерном анализе».

Бесконечномерный анализ в настоящее время активно развивается в связи с рядом задач функционального анализа, квантовой теории поля, статистической физики и т. д. Большую роль в нем играют методы спектральной теории операторов. В докладе описываются некоторые из этих методов, а также связанные с ними вопросы: 1) обобщенные функции бесконечного числа переменных, 2) разложения по совместным обобщенным собственным векторам коммутирующих семейств операторов и его применения к гармоническому анализу, 3) спектральные свойства бесконечномерных дифференциальных операторов и их применение к теории поля.

2. Прием в члены Общества

Членами Общества избраны — Вольберг А. Л., Шмидт Р. А.

Заседание 18 февраля 1986 г.

Г. В. Кузьмина «Геометрическая теория функций и гипотеза Бибербаха».

В геометрической теории функций (в дальнейшем ГТФ) исследуются общие классы функций, заданных в различных областях определения или на римановой поверхности. При этом ГТФ концентрирует внимание на классах функций преимущественно как на классах отображений и существенная роль в ГТФ принадлежит однолистным функциям. Одним из основных классов однолистных функций является класс S функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$, регулярных и однолистных в круге $U = \{|z| < 1\}$.

Метод площадей, разработанный Гронуоллом, Бибербахом и Фабером, позволил установить ряд замечательных свойств функций Кебе

$$K_\varepsilon(z) = z/(1 + \varepsilon z)^2, \qquad |\varepsilon| = 1. \tag{1}$$

В 1916 г. Л. Бибербах высказал гипотезу, что в классе S справедливо неравенство

$$|c_n| \leqslant n, \qquad n \geqslant 2, \tag{2}$$

и что равенство в (2) имеет место только для функций (1). Сам Бибербах доказал неравенство (2) для $n = 2$. Гипотеза Бибербаха (в дальнейшем ГБ) оказала большое влияние на развитие многих методов ГТФ. Так, в 1923 г. К. Левнер создал свой параметрический метод и с его помощью доказал неравенство (2) для $n = 3$. В 1930—1940 гг. возникли метод полос (Х. Гретш, 1928), метод контурного интегрирования (Х. Грунский, 1932), методы граничных и внутренних вариаций (М. Шиффер, 1938 и 1943; Г. М. Голузин, 1946). В начале 1950 годов возникли метод экстремальных метрик в его современной форме (Л. Альфонс и А. Бейрлинг, Дж. Дженкинс) и метод симметризации, несколько позднее — метод крайних точек. Все эти методы являются по существу геометрическими. Получили развитие и первоначальные классические методы. Так, в 1950—1960 гг. в работах Н. А. Лебедева и И. М. Милина были разработаны общие формы метода площадей. Именно указанные методы определили современное состояние ГТФ. Большое внимание в исследованиях последних лет уделяется весьма общим объектам: классам систем отображений на неналегающие области различных типов (см. монографии Дж. Дженкинса [1] и Н. А. Лебедева [2]).

ГБ исследовалась в различных направлениях. В 1958 г. В. К. Хейман показал, что для каждой функции $f \in S$ существует такой номер N_f, что $|c_n| \leqslant n$ для всех $n \geqslant N_f$. Была доказана так называемая локальная ГБ: (2) справедливо для всех $f \in S$, принадлежащих некоторой окрестности функции Кебе. Стало традиционным доказательство оценок вида $|c_n| \leqslant Cn$ для всех n (в последней из них $C = 1{,}0691$ (1976)). Усилия многих аналитиков были посвящены точным оценкам начальных коэффициентов в классе S. Однако после Левнера и до 1984 г. неравенство (2) было доказано лишь для $n = 4, 5$ и 6 (соответственно, в 1955, 1972 и 1968 гг.). Поэтому явилось подлинной сенсацией полученное в 1984 г. де Бранжем доказательство неравенства (2) одновременно для всех $n \geqslant 2$.

Одновременно с ГБ де Бранж доказал гипотезу Робертсона (ГР) (1936). В классе $S^{(2)}$ нечетных функций из S, т. е. функций $f^{(2)}(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + c_2^{2}z^3 + \ldots + c_k^{(2)}z^{2k-1} + \ldots$, где $f \in S$, справедливо неравенство

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} |c_k^{(2)}|^2 \leqslant n, \qquad n \geqslant 2,$$

и равенство в (3) имеет место только для функций $K_\theta^{(2)}(z) = \sqrt{K_\theta(z^2)}$, где $K_\theta(z)$ — функция (2). ГБ следует из ГР. До 1984 г. ГР была доказана для $n = 2, 3, 4$.

Де Бранж использует следующее из неравенств, установленных в 1965—1967 гг. совместно Н. А. Лебедевым и И. М. Милиным [3, 4]. Пусть γ_k — логарифмические коэффициенты функции $f \in S$, определяемые разложением $\log\{f(z)/z\} = 2\gamma_1 z + \ldots + 2\gamma_k z^k + \ldots$ В классе S справедливо неравенство

$$(4)\qquad (|c_{n+1}| \leqslant) \sum_{k=1}^{n+1} |c_k^{(2)}|^2 \leqslant (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Равенство в (4) имеет место только в случае $\gamma_k = \eta^k/k$, $|\eta| = 1$ ($k = 1, \ldots, n$). Из (4) непосредственно следует, что если для $f \in S$

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k|\gamma_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\frac{1}{k},$$

то справедливы неравенства (2) и (3). Де Бранж воспользовался этим соображением и получил неравенство (5) в качестве следствия установленного (см. ниже) неравенства для ограниченных функций. Предположения о том, что (5) справедливо для любой функции $f \in S$, естественно называть гипотезой Лебедева — Милина.

Пусть S_1 — класс функций $f(z) = c_1 z + \ldots + c_k z^k + \ldots$, $c_1 > 0$, регулярных и однолистных в круге U, $|f(z)| < 1$ в U,

$$(6)\qquad K_{\tau,x}(z) = K_x^{-1}(\tau K_x(z)), \qquad 0 < \tau \leqslant 1, \qquad |x| = 1,$$

где $K_x(z)$ — функция Кебе (1). В дальнейшем $\sigma_k(t)$ ($k = 1, \ldots, n+1$) — система функций, удовлетворяющих при $t \in [1, \infty)$ рекуррентной системе уравнений

$$\sigma_k(t) + \frac{t}{k}\sigma_k'(t) = \sigma_{k+1}(t) - \frac{t}{k+1}\sigma_{k+1}'(t)$$

с начальными условиями $\sigma_k(1) = n + 1 - k$ ($k = 1, \ldots, n+1$).

Теорема Де Бранжа [5]. *Для любого $n \geqslant 1$, любого $\beta > 1$, любой функции $f(z) \in S_1$, $f'(0) = \tau$, $0 < \tau < 1$, и произвольной регулярной в круге U функции $p(z) = p_1z + \ldots + p_kz^k + \ldots$ справедливо неравенство*

$$(7)\quad \sum_{k=1}^{n}\left|\left\{\log\frac{f(z)}{\tau z} + p\circ f(z)\right\}_k\right|^2 k\sigma_k(\beta\tau) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}|p_k|^2 k\sigma_k(\beta) + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k}(\sigma_k(\beta\tau) - \sigma_k(\beta)).$$

Здесь $\{F(z)\}_k$ — коэффициент при z^k разложения $F(z)$ в ряд по степеням z. Для функций $f(z) = K_{\tau,x}(z)$, где $|x| = 1$, и $p(z) = -2\log(1 + xz)$ в (7) имеет место равенство.

Из этой теоремы и неравенства Лебедева — Милина (4) справедливость ГБ и ГР вытекает крайне просто. Пусть $f(z) \in S$ и $|f(z)| < M$, где $M > 1$, в U. Тогда $f_1(z) = M^{-1}f(z) \in S_1$, $f_1'(0) = M^{-1}$. Следовательно, для $f_1(z)$ справедливо (7) с $\tau = M^{-1}$, $\beta = M$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $M \to \infty$, получаем (5), а из (5) и (4) следуют (2) и (3) с утверждениями о случаях равенства.

Сначала теорема доказывается в предположении, что функции $\sigma_k(t)$ ($k = 1, \ldots, n+1$) неотрицательны и не возрастают на $[1, \infty)$. Это — основная часть доказательства. Затем показывается, что функции $\sigma_k(t)$ действительно обладают требуемыми свойствами (здесь используются известные результаты теории гипергеометрических рядов). Остановимся кратко на основной части доказательства.

Из классической теоремы Левнера следует, что суперпозиции конечного числа отображений вида (6) образуют всюду плотный подкласс в S_1. Поэтому достаточно доказать (7) лишь для таких суперпозиций. Можно и дальше сузить множество функций, для которых достаточно доказать неравенство (7). Это де Бранж устанавливает при помощи следующего весьма изящного рассуждения. Пусть $f(z) = f_2\circ f_1(z)$, где f_2 — отображение вида (6), f_1 — суперпозиция $m \geqslant 1$ таких отображений. Имеем $f'(0) = \tau = \tau_2\tau_1$, где $\tau_j = f_j'(0)$. Обозначим через $\Phi(f, p, \beta)$ разность между левой и правой частями неравенства (7). Пользуясь аддитивностью второй суммы в правой части (7) (ее можно записать в виде интеграла по промежутку $[\beta\tau, \beta]$), получаем тождество

$$\Phi(f_2\circ f_1, p, \beta) = \Phi(f_2, p, \beta) + \Phi(f_1, \log(f_2/\tau_2 z) + p\circ f_2, \beta\tau_2).$$

Отсюда и из очевидного тождества $\Phi(K_{\tau,x}, p, \beta) = \Phi(K_{\tau,1}, \tilde{p}, \beta)$, где $\tilde{p}(z) = p(\bar{x}z)$, следует, что достаточно доказать неравенство (7) только для функций $K_{\tau,1}(z)$ и произвольной функции $p(z)$, $p(0) = 0$, регулярной в U. Последнее не представляет принципиальных трудностей и сводится к несложным формальным преобразованиям.

Несколько иной вариант доказательства ГБ дан де Бранжем в [6], см. также [7]. В выработке классической версии первоначального доказательства де Бранжа в [5] существенную роль сыграл Ленинградский семинар по ГТФ. Подробно об этом говорится в [8]. Исходное доказательство де Бранжа основано на развитой им теории суммируемых с квадратом степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. — М.: ИЛ, 1962.

[2] Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975.

[3] Лебедев Н. А., Милин И. М. Об одном неравенстве//Вестн. ЛГУ. — Сер. мат., мех. и астрон., вып. 4. 1965. — № 19. — С. 157—158.

[4] Милин И. М. О коэффициентах однолистных функций//ДАН СССР. — 1967.— Т. 176, № 5. — С. 1015—1018.

[5] de Branges L. A proof of the Bieberbach conjuecture//LOMI preprints, E-5-84. Leningrad. 1984.
[6] de Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture//Acta Math. — 1985. — V. 154, № 1—2. P. 137—152.
[7] Fitzgerald C. H., Pommerenke Ch. The de Branges theorem on univalent functions//Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 290, № 2, P. 683—690.
[8] Fomenko O. M., Kuz'mina G. V. The last 100 days of the Bieberbach conjecture//Math. Intel. — 1986. — № 1. — P. 40—47.

Заседание 4 марта 1986 г.

Об учебниках по математике для средней школы

1. Д. К. Фаддеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский «Об учебниках по алгебре и началам анализа для 6—10 классов».

1° На сегодняшний день средняя школа накопила значительный опыт преподавания элементов математического анализа. Поэтому есть смысл снова вернуться к вопросу о том, целесообразно ли вообще такое обогащение курса математики средней школы и если да, то какова должна быть идейная направленность и содержание этого курса?

Анализируя результаты практического преподавания, нетрудно заметить, что изучение начал анализа сводится в основном к двум моментам: а) овладение техникой дифференцирования, б) отработка навыка применения алгоритма исследования функции на экстремумы и монотонность с помощью производной. И то, и другое — вещи безусловно необходимые для многих специалистов в самых различных областях человеческой деятельности, но в общеобразовательной школе такого рода навыки и умения не должны быть в центре внимания. Приоритет должен быть отдан решению общеобразовательных задач. Курс математики в средней школе должен прежде всего заложить и воспитать в ученике не формальное, а основанное на понимании ощущение связи основной идеи дифференциального исчисления с реальной действительностью. Ученику следует дать наглядное и интуитивно ясное представление о методах высшей математики как о мощнейшем инструменте изучения многих явлений природы. Такая ориентация в преподавании элементов математического анализа принесет пользу и тому, кто продолжит образование в техническом вузе, и тому, кто практически не будет сталкиваться с применением математического аппарата в своей трудовой деятельности.

2° По нашему мнению, первое знакомство школьника с элементами математического анализа должно происходить на том интуитивном уровне, на котором математический анализ фактически возник. Надо убедить учащегося в простоте, наглядности и даже «грубости» основной идеи дифференциального исчисления. Эта идея сводится, по существу, к следующему простому соображению (мы называем его «основным принципом дифференциального исчисления»): на небольшом участке любой достаточно «хорошей» кривой она успевает мало изогнуться, и тем меньше, чем меньше рассматриваемый участок. Поэтому маленький участок кривой линии почти совпадает с отрезком некоторой прямой и их различие постепенно исчезает по мере стягивания участка кривой к некоторой точке. Эта прямая называется касательной к кривой в этой точке. Угловой коэффициент касательной к графику функции называется значением производной от функции в данной точке.

В книге Д. К. Фаддеева и др. «Элементы высшей математики для школьников» (готовится к выпуску в 1987 г. в изд-ве Наука) принят следующий подход к изложению основных результатов дифференциального исчисления. Сначала понятия и утверждения формулируются и обосновываются на уровне «основного принципа», затем они доказываются более строго с привлечением понятия бесконечно малой величины (в книге параллельный термин —«исчезающая величина») и понятия сходящейся переменной. Таким образом, первоначально смысл утверждений и их обоснования проводится на наглядно-интуитивном уровне. В учебнике для массовой школы, который создается на основе написанной книги, предполагается этот метод изложения реализовать в предельно последовательной форме. При этом мы считаем, что изучение понятий бесконечно малой величины, сходящейся переменной и предела не должно быть самоцелью и составлять раздел, предшествующий понятию производной. Эти понятия следует ввести только как средство исследования и обоснования в связи с уточнением «основного принципа» после введения понятия производной. Кроме того, мы считаем необходимым ввести понятие дифференциала, так как именно через представление дифференциала как «малого куска» изучаемой величины осуществляются наиболее элементарные, но важнейшие приложения элементов высшей математики в физике, технике и т. д. Интегрирование следует рассматривать как действие, восстанавливающее функцию прежде всего по ее дифференциалу, а не производной. Наиболее существенный довод в пользу этого то, что при применении интегрирования к вычислению некоторой величины, она рассматривается как значение переменной величины, дифференциал которой наглядно виден или легко вычисляется.

3° Успешное проведение предлагаемого варианта введения элементов высшей математики требует некоторой целенаправленной подготовки. Во-первых, в 6—8 классах должна быть хорошо отработана техника алгебраических преобразований. Во-вторых, следует обеспечить формирование практической, опытной базы интуиции. Так как неформальное овладение «основным принципом дифференциального исчисления» невозможно без хорошо развитых интуитивных представлениях о непрерывной и гладкой функции, без того, чтобы было воспитано «ощущение» сравнительно большого и сравнительно малого (в абсолютном и относительном смыслах). Достижению этих целей должны способствовать примеры на применение алгебраических преобразований к вычислениям, упражнения на построение графиков функций по точкам, изучение свойств функций элементарными средствами с применением вычислительной техники, приемы приближенного решения уравнений и способы оценивания значения выражения. Именно такую направленность имеет книга Д. К. Фаддеева «Алгебра 6—8»: Просвещение. — 1983).

2. М. И. Башмаков «Требования к школьному учебнику по математике».

Перестройка структуры и содержания школьного математического образования предъявляет новые требования к школьному учебнику. В докладе рассказано об опыте конструирования нового учебника для старших классов общеобразовательных школ и ПТУ.

3. Информация об участии ЛМО в школьных олимпиадах.

ЛМО является членом-учредителем математических олимпиад для ПТУ, проводимых с 1985 г. Учреждено несколько премий для победителей и учителей.

Заседание 25 марта 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. В. И. Арнольд (Москва) «Особенности границ пространств дифференциальных уравнений».

Границы областей устойчивости, эллиптичности, гиперболичности, чебышёвскости и т. д. для типичных семейств дифференциальных уравнений имеют стандартные особенности, обладающие своеобразными свойствами (стабилизация, принцип хрупкости хорошего и т. д.). В докладе рассказано об этих особенностях и их связях со стратификациями Шуберта, диаграммами Юнга и упорядочениями Брюа.

Заседание 15 апреля 1986 г.

1. Н. В. Иванов «Геометрическая теория пространств Тайхмюллера».

Работы Тёрстона (W. P. Thurston) и, в первую очередь, его теорема геометризации, полностью изменили облик трехмерной топологии. Менее известно, что в ходе доказательства этой теоремы Тёрстон внес ряд принципиально новых идей в теорию пространств Тайхмюллера. В противоположность доминировавшим ранее методам hard analysis, эти идеи имеют ярко геометрический характер. В основе лежат понятия одномерного слоения с трансверсальной мерой на поверхностях (у этих слоений допускаются особенности стандартного вида) и соответствующее понятие гиперболической геометрии — понятие геодезической ламинации.

Первое их применение — построение естественной границы пространства Тайхмюллера, так называемой границы Тёрстона. Исследование этой границы приводит, во-первых, к полученной Тёрстоном классификации (изотопических классов) диффеоморфизмов поверхностей. На следующем уровне абстракции это позволяет исследовать не только отдельные диффеоморфизмы, но и всю группу изотопических классов диффеоморфизмов данной поверхности — так называемую модулярную группу Тайхмюллера (известную также под именем группы классов преобразований поверхности). На этом пути докладчику удалось доказать, что для подгрупп модулярных групп Тайхмюллера справедливы аналоги ряда центральных теорем теории линейных групп: теоремы Титса о свободных подгруппах, теоремы Маргулиса — Сойфера о максимальных подгруппах, теоремы Платонова о подгруппах Фраттини. Некоторые результаты в этом направлении получили также Дж. Мак-Карти и Д. Лонг.

Одним из самых ярких применений идей Тёрстона является решение проблемы реализации Нильсена, полученное Керкхоффом. Он показал, что каждая конечная группа изотопических классов диффеоморфизмов данной поверхности возникает (очевидным образом) из конечной группы диффеоморфизмов. Доказательство основано на понятии землетрясения, обобщающем классические деформации Фенхеля — Нильсена. Замечательный аналог одного из главных шагов доказательства теоремы геометризации был обнаружен Тёрстоном в теории голоморфных динамических систем. Речь идет о топологической характеризации широкого класса рациональных отображений сферы Римана (так называемых критически конечных отображений). Технически как в этой теории, так и в Теореме геометризации одним из главных моментов доказательства является наличие неподвижной точки у некоторого специального отображения пространства Тайхмюллера. Среди других приложений нужно отметить одно из решений задачи о строгой эргодичности почти всех перекладываний (Х. Мазур) и связь с теорией квадратичных дифференциалов (Х. Мазур и Дж. Хаббард).

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: А. З. Гриншпан, П. Г. Зограф, В. А. Кайманович, Г. В. Кузьмина, А. И. Мартикайнен, И. М. Милин, Ф. А. Смирнов, Б. Ф. Скубенко.

Заседание 29 апреля 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Круглый стол по информатике и программированию

Выступавшие С. С. Лавров, Г. С. Цейтин, А. О. Слисенко, И. В. Романовский, С. М. Ермаков и др. поделились своими соображениями о перспективах развития и подготовки кадров в новой области.

Лекции математического лектория для студентов при ЛМО

17.10.1985 г. — С. М. Ермаков «Моделирование случайности».

21.11.1985 г. — В. П. Хавин «Новое доказательство закона распределения простых чисел».

13.3.1986 г. — Г. И. Натансон «О вычислениях на микрокалькуляторах».

27.3.1986 г. — В. И. Арнольд «Фундаментальные системы решений линейных уравнений, проективные кривые и диаграммы Юнга».

15.5.1986 г. — А. Г. Хованский «Выпуклые многогранники».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1]

Заседание 30 сентября 1986 г.

Н. Г. Макаров «Метрические свойства гармонической меры».

Обзор последних результатов о хаусдорфовой размерности носителя гармонической меры. Особое внимание уделено вероятностным аспектам теории.

Заседание 14 октября 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

О. А. Ладыженская «Теория аттракторов для уравнений в частных производных».

Рассказано о нахождении минимальных (истинных) глобальных аттракторов для полугрупп, порожденных начально-краевыми задачами для уравнений гидродинамики и квазилинейных параболических и гиперболических уравнений.

Более подробное изложение приведено в работе, опубликованной в ДАН СССР, 1987, т. 294, № 1, с. 33—37.

Заседание 28 октября 1986 г.

О. Я. Виро «Новые результаты четырехмерной топологии».

Две из трех филдцевских премий 1986 г. присуждены за работы по топологии четырехмерных многообразий. Обзор ее недавнего развития, основанного на удивительной связи с теорией калибровочных полей, дан в докладе.

Заседание 11 ноября 1986 г.

М. Ю. Любич «Конформная динамика на сфере Римана».

Теория итераций рациональных функций комплексного переменного сочетает в себе идеи теории динамических систем (грубость, стохастичность, самоподобие) с техникой комплексного анализа (нормальные семейства, пространства Тейхмюллера, квазиконформные деформации). В докладе дан обзор как классических результатов в этой области (Фату, Жюлиа), так и последних достижений (Дуади, Сулливан, Терстон и др.).

Подробный обзор см. в работе автора в УМН, 1986, т. 41 № 4, с. 35—95.

Заседание 25 ноября 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

Впечатления о математическом конгрессе в Беркли, август 1986 г.

С сообщениями выступили участники конгресса В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, А. Б. Александров, Н. Г. Макаров.

---

[1]) См. УМН, 1987, т. 42, 2(254), с. 255—262.

Заседание 9 декабря 1986 г.

В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов «Негладкий анализ. Состояние и перспективы».

Негладкий анализ — широкий круг вопросов, относящихся к изучению недифференцируемых функций с помощью их локальной аппроксимации. К негладкому анализу относятся: исчисление аппроксимирующих объектов, исследование экстремальных задач, обобщение теорем классического анализа (теорема о неявной функции и др.). В докладе обсуждаются основные концепции негладкого анализа. Показывается, что в первом приближении теория негладкого анализа 1-го порядка может считаться в настоящее время построенной.

Заседание 23 декабря 1986 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. А. М. Переломов (Москва) «Теория квантовой струны и многообразия Калаби — Яо».

В докладе рассказано о математических аспектах новой физической теории и о ее связях с геометрией комплексного многообразия.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны — Полищук Е. М., Фомин С. В.

Заседание 27 января 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых и было посвящено памяти выдающегося советского математика и экономиста Леонида Витальевича Канторовича.

о жизни

С воспоминаниями выступили Д. К. Фаддеев, В. П. Ильин, М. К. Гаврин, И. П. Мысовских, М. Ш. Бирман, А. М. Вершик, ~~а также все желающие кратко рассказать о жизни и~~ научной деятельности Л. В. Канторовича.

Заседание 24 февраля 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

А. А. Суслин «Алгебраическая K-теория полей».

Рассказано о связях между алгебраической K-теорией и другими теориями когомологий, а также о последних достижениях в проблеме вычисления K-функторов.

Заседание 17 марта 1987 г.

1. Ю. Л. Далецкий (Киев) «Стохастическая дифференциальная геометрия».

В докладе рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения на гладком бесконечномерном многообразии и свойства гладкости и абсолютной непрерывности связанных с ними мер.

2. О студенческом конкурсе решения задач, проводимом ЛМО.

Заседание 31 марта 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

Ю. С. Ильяшенко (Москва). Теоремы конечности для предельных циклов.

Полиномиальное векторное поле на вещественной плоскости может иметь лишь конечное число предельных циклов. Долгое время считалось, что эта теорема доказана Дюлаком (1923). Однако в 1981 г. выяснилось, что работа Дюлака ошибочна: Дюлак обращается с асимптотическими рядами как со сходящимися. Предлагается доказательство этой теоремы, полученное докладчиком.

Заседание 14 апреля 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых в рамках Всесоюзного семинара, посвященного 100-летию со дня рождения академика Владимира Ивановича Смирнова, организованного ЛОМИ, ЛГУ и ЛМО.

Вступительное слово ректора ЛГУ С. П. Меркурьева. Доклады: Н. К. Никольский, В. П. Хавин «Работы В. И. Смирнова по комплексному анализу». А. П. Юшкевич «Работы В. И. Смирнова по истории математики». А. В. Кольцов «В. И. Смирнов как историк науки».

С воспоминаниями выступили Д. К. Фаддеев, С. Г. Михлин, О. А. Ладыженская, Н. А. Толстой и др.

Заседание 28 апреля 1987 г.

1. Г. А. Леонов. Математические проблемы теории синхронизации.

Обсуждаются дифференциальные уравнения синхронных электрических машин и радиотехнических схем синхронизации. С математической точки зрения эти вопросы в значительной мере сводятся к оценкам параметров бифуркации в многомерных системах. В докладе излагаются результаты этих исследований.

2. Прием в члены Общества.

Членом общества избран — С. С. Сурин.

Заседание 12 мая 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. Я. Г. Синай (Москва) «Локализация Андерсона и операторы с почти периодическими коэффициентами».

Локализация Андерсона состоит в появлении всюду плотного множества собственных чисел и экспоненциального убывания собственных функций. Предлагается общий метод доказательства локализации Андерсона для разностных уравнений Шрёдингера и задач о квантовом хаосе.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику за 1987 г.

Премии присуждены М. Ю. Любичу за цикл работ «Итерации рациональных отображений римановой сферы» и Ю. Г. Сафарову за цикл работ по спектральной асимптотике эллиптических операторов.

* * *

Заседения математического лектория студентов при ЛМО в 1986/87 учебном году.

16.10.1986 г.— А. М. Вершик «Модели случайного роста и клеточные автоматы»:

27.11.1986 г.— А. Т. Фоменко (Москва) «Минимальные поверхности и проблема Плато».

11.12.1986 г.— О. Я. Виро «Прогресс в топологии четырехмерных многообразий».

5.3.1987 г.— И. В. Романовский «Математическая политграфия».

2.4.1987 г.— Из цикла «Замечательные ученые математико-механического факультета» «В. И. Смирнов. К 100-летию со дня рождения». Выступили В. М. Бабич, В. П. Хавин, В. А. Якубович.

1989 г. март — апрель *т. 44, вып. 2(266)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1]

Заседание 29 сентября 1987 г.

Доклады лауреатов премии ЛМО молодому математику за 1987 г.:

1. М. Ю. Любич «Блуждающие множества в голоморфной и одномерной динамике».

Возможность появления блуждающих областей является одним из главных препятствий понимания асимптотических свойств одномерных динамических систем (вещественных и комплексных). В докладе было рассказано о близких к окончательным результатах в этой проблематике, полученных в последние годы.

2. Ю. Г. Сафаров «Двучленные спектральные асимптотики для оператора Лапласа».

Основные результаты опубликованы в журнале «Функциональный анализ и его приложения».— 1987.—Т. 21, вып. 4.— С. 88—90; 1988.— Т. 22, вып. 3.— С. 53—65.

Заседание 13 октября 1987 г.

Керов С. В. «Представления алгебр Гекке и их связи с топологией и матфизикой».

Основные результаты опубликованы в следующих статьях:

[1] Вершик А. М., Керов С. В. Характеры и реализации фактор-представлений бесконечномерной алгебры Гекке и инварианты узлов//ДАН СССР.— 1988.—Т. 301, № 4.

[2] Керов С. В. Реализации $*$-представлений алгебр Гекке и ортогональная форма Юнга//Записки семинаров ЛОМИ.— 1987.— Т. 161.— С. 155—172.

[3] Керов С. В. Реализации представлений полугруппы Брауэра//Записки семинаров ЛОМИ.— 1987.— Т. 164.—С. 189—193.

Заседание 3 ноября 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых и было посвящено 80-летию члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева.

Доклад И. Р. Шафаревича (Москва) «О теории когомологий».

Выступления З. И. Боревича, А. В. Яковлева

Заседание 24 ноября 1987 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

А. Д. Александров «Вокруг геометрии».

Докладчик рассказал о своей работе над школьными учебниками геометрии и о своих взглядах на преподавание в школе.

---

[1]) См. УМН.—1987.—Т. 42, вып. 6 (258).— С. 208—210.

Заседание 8 декабря 1987 г.

1. В. Г. Тураев «Недавний прогресс в теории узлов».

В докладе рассказано о новых полиномиальных инвариантах узлов и их связях с алгебрами Гекке и статистической физикой.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны В. Я. Крейнович, Н. Е. Мнев, М. Б. Табанов, А. Л. Фельштын, И. Н. Фокин, Ю. В. Чурин

Заседание 22 декабря 1987 г.

А. А. Бейлинсон (Москва) «Алгебры токов и алгебраическая геометрия».

В докладе рассказано о задачах теории представлений и алгебраической геометрии, возникающих в конформной теории поля.

Заседание 16 февраля 1988 г.

Г. А. Маргулис (Москва) «Потоки на однородных пространствах и минимумы неопределенных квадратичных форм».

В докладе рассказано о доказательстве гипотезы Оппенгейма — Давенпорта о минимуме неопределенных квадратичных форм. Доказательство основано на изучении «индивидуальных» орбит некоторых потоков на однородных пространствах.

Заседание 1 марта 1988 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. Дискуссия «Современная математика и университетское математическое образование».

Выступили: Б. С. Павлов, А. М. Вершик, О. Я. Виро, С. М. Ермаков, Д. К. Фаддеев, В. А. Якубович, А. Д. Александров, О. И. Рейнов, и др. Принято решение о чтении серии спецкурсов для студентов по современным разделам математики. Принято письмо Общества и математико-механического факультета ЛГУ о необходимости отмены призыва на срочную службу студентов факультета. Выступающие выдвинули ряд предложений по улучшению преподавания, контактам с институтом математики и по другим вопросам.

2. Информация об издании «Трудов ЛМО». Принято к сведению, что ЛМО совместно с ЛГУ начинает с 1990 года ежегодное издание «Трудов Ленинградского математического общества».

Заседание 22 марта 1988 г.

1. Н. Ю. Решетихин. «Представление групп кос и инварианты зацеплений, связанные с алгебрами Хопфа».

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны — Л. Я. Адрианова, Н. Ю. Нецветаев, Б. М. Соломяк, О. А. Иванов, И. А. Панин, С. М. Финашин, И. М. Давыдова, С. Е. Козлов.

Заседание 5 апреля 1988 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

В. А. Марченко (Харьков) «Задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза с неубывающими начальными данными».

Заседание 26 апреля 1988 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

1. В. П. Платонов (Минск) «Геометрический подход к классификации представлений групп с конечным числом образующих».

2. Информация А. Н. Андрианова и Н. К. Никольского о новом математическом журнале «Алгебра и анализ», издаваемом в Ленинграде.

3. О решениях заседания от 1 марта с. г. о проблемах университетского математического образования.

Заседание 5 мая 1988 г.

На математико-механическом факультете ЛГУ в зале Ученого совета состоялось заседание Ученого совета математико-механического факультета с участием Ленинградского математического общества, посвященное 80-летию Соломона Григорьевича Михлина.

Выступили С. М. Ермаков, Д. К. Фаддеев, Е. М. Ландис, В. С. Рябенький, А. И. Кошелев, П. Е. Соболевский, Г. М. Вайникко, Ю. К. Демьянович и др.

ЛЕКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЛЕКТОРИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПРИ ЛМО

5 ноября 1987 г. — Ю. А. Давыдов «Отображения мер».

26 ноября 1987 г. — А. О. Слисенко «Что такое оптимальный алгоритм».

17 декабря 1987 г. — В. М. Харламов «Топология алгебраически простых вещественных многообразий».

18 февраля 1988 г. — Я. Ю. Никитин «Линейные ранговые критерии».

31 марта 1988 г. — Э. Б. Винберг «Вещественные целые функции с предписанными критическими значениями».

28 апреля 1988 г. — «Г. М. Фихтенгольц и кафедра анализа» (к 100-летию со дня рождения Г. М. Фихтенгольца). Выступили Д. К. Фаддеев, В. П. Хавин, С. А. Виноградов, Д. А. Владимиров, Б. М. Макаров, Г. И. Натансон, А. М. Вершик и др.

ЗАСЕДАНИЕ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1])

Заседание 27 сентября 1988 г.

Заседание проведено совместно с секцией математики Дома Ученых и Всесоюзной конференцией по математической логике и посвящено 85-летию со дня рождения Андрея Андреевича Маркова; выступили Д. К. Фаддеев, Н. А. Шанин, С. И. Адян, Г. С. Цейтин, Г. Е. Минц, А. А. Иванов, М. Д. Гринлиндер, А. М. Вершик и др.

Заседание 4 октября 1988 г.

1. Вручение премий ЛМО молодому математику за 1988 год.
2. Доклады лауреатов:

В. А. Кайманович «Энтропия и границы случайных блужданий на группах, многообразиях и слоениях».

Н. Ю. Решетихин «Квантовые группы и инварианты зацеплений».

3. Об издании «Трудов ЛМО».
4. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны В. А. Козлов, Н. Г. Кузнецов.

Заседание 25 октября 1988 г.

В. Л. Попов (Москва) «Теория инвариантов».

В докладе прослеживается история теории инвариантов с момента возникновения до наших дней.

Заседание 1 ноября 1988 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено 100-летию со дня рождения профессора Г. М. Фихтенгольца (1888—1959).

С воспоминаниями о научной и педагогической деятельности профессора Г. М. Фихтенгольца выступили Д. К. Фаддеев, Д. А. Владимиров, В. П. Хавин, А. М. Вершик, Н. К. Никольский и др.

Заседание 15 ноября 1988 г.

1. А. Н. Варченко (Москва) «Бета-функция Эйлера, определитель Вандермонда, уравнение Лежандра и критические значения линейных функций на конфигурациях плоскостей».
2. О целесообразности создания секций средней школы при ЛМО.

Заседание 13 декабря 1988 г.

1. Отчет правления ЛМО.
2. Отчет ревизионной комиссии.

---

[1]) См. УМН.— 1989.— Т. 44, вып. 2 (266).— С. 245—247.

3. Обсуждение деятельности ЛМО и планов работы (в частности, вопрос о создании школьной секции).

4. Выборы руководящих органов ЛМО.

5. Информация о планах издательства «Мир» на ближайшие годы.

6. Выборы редколлегии «Трудов ЛМО».

С отчетом о деятельности Общества выступили Д. К. Фаддеев (президент), А. М. Вершик (вице-президент), В. Н. Судаков (казначей), Ю. А. Давыдов (математический лекторий), В. Н. Фомин (ревизионная комиссия).

Были обсуждены работа Общества за отчетный период и планы дальнейшей деятельности.

Собрание признало работу правления за отчетный период 1985—1988 гг. удовлетворительной и утвердило отчет ревизионной комиссии. Собрание избрало:

президентом ЛМО — Д. К. Фаддеева;

вице-президентами — О. А. Ладыженскую и А. М. Вершика;

членами Правления: А. Д. Александрова, М. И. Башмакова (школьный совет), О. Я. Виро, С. М. Ермакова, Ю. А. Давыдова, Н. В. Иванова, Г. А. Леонова, А. С. Меркурьева, Г. И. Натансона (уч. секретарь), М. А. Семенова-Тян-Шанского, М. З. Соломяка, В. Н. Судакова (казначей), А. В. Яковлева;

ревизионную комиссию: В. Н. Фомина (председатель), Н. К. Никольского, В. П. Хавина.

В настоящее время ЛМО насчитывает 250 членов: из них 100 — из ЛГУ, 60 — из ЛОМИ; более ста членов ЛМО — доктора наук, 140 — кандидаты наук.

Собрание избрало открытым голосованием вновь сформированные:

редколлегию «Трудов Ленинградского математического общества». О. А. Ладыженская — главный редактор, А. М. Вершик — заместитель главного редактора, Н. А. Вавилов — отв. секретарь, С. А. Виноградов, О. Я. Виро, Ю. А. Давыдов, Г. А. Леонов, Б. С. Павлов, Б. А. Пламеневский, М. А. Семенов-Тян-Шанский;

школьный совет ЛМО: М. И. Башмаков — председатель, А. Д. Александров, А. Л. Вернер, О. Я. Виро, О. А. Иванов, А. С. Карп, А. Л. Лихтарников, Б. М. Макаров, А. С. Меркурьев, М. С. Никулин, А. И. Плоткин, И. Ф. Соколовский, С. В. Фомин;

совет по работе со студентами и математический лекторий: А. М. Вершик — председатель, С. В. Востоков, А. А. Лодкин, Я. Ю. Никитин, А. В. Осипов, Н. Ю. Нецветаев.

С сообщением о планах издательства «Наука» выступила А. П. Баева (Москва).

Собрание постановило избрать почетным членом Общества Соломона Григорьевича Михлина.

Собрание приняло решение изменить § 17 Устава Общества и увеличить срок деятельности Правления одного созыва до пяти лет, с обязательным рассмотрением вопроса о целесообразности частичного изменения его состава и довыборов через два года.

Заседание 14 февраля 1989 г.

1. Б. Мандельброт (США) «Фракталы в физике и математике».

Заседание 28 февраля 1989 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов (Новосибирск) «Когомологии римановых многообразий в пространстве суммируемых функций».

В докладе рассказано о гомологиях комплекса форм, удовлетворяющих некоторым условиям суммируемости. Эти гомологии чувствительны к метрическому характеру особенности многообразия и к поведению метрики на бесконечности. Упомянуто о вычислении таких когомологий, об аналогах двойственности Пуанкаре и теорем вложения, об аналитическом варианте геометрической теории интегрирования Уитни.

2. Прием в члены Общества.

Членом Общества избран В. Г. Осмоловский.

Заседание 21 марта 1989 г.

Е. И. Зельманов (Новосибирск) «О проблеме Бернсайда».

Различные варианты этой проблемы, поставленной в начале века, занимают одно из центральных мест в теории групп. Недавно автору удалось найти решение так называемой ослабленной проблемы Бернсайда для примарных показателей.

Заседание 28 марта 1989 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

В. И. Арнольд, В. А. Васильев (Москва) «Начала» Ньютона 300 лет спустя».

Анализируя второй закон Кеплера, Ньютон изобрел удивительно современное доказательство трансцендентности абелевых интегралов, оставшееся, в сущности, непонятым исследователями. В докладе рассказано об этой теореме Ньютона, о ее многомерных обобщениях и о нескольких других новых теоремах.

Заседание 11 апреля 1989 г.

1. Б. Куперстейн (Калифорнийский университет) «Полилинейные формы с большими группами изометрий».

Заседание 18 апреля 1989 г.

Заседание проводилось совместно с пленарным заседанием научной конференции преподавателей и студентов математико-механического факультета ЛГУ.

1. Вступительное слово декана Г. А. Леонова.
2. С. Г. Михлин «Выдающиеся представители анализа в ЛГУ» (В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, Л. В. Канторович).
3. В. М. Вершик, О. Я. Виро, А. В. Яковлев «Современная математика и обучение математике на математико-механическом факультете» (доклад публикуется в «Вестнике ЛГУ, сер. матем. и мех.», № 1, 1990 г.).
4. Подведение итогов конкурса научных работ студентов и вручение премий ЛМО молодым математикам за 1989 г.

Победителем студенческого конкурса признан студент I курса А. Берлов. Премии ЛМО присуждены А. А. Боричеву и О. Т. Ижболдину.

Заседание 25 апреля 1989 г.

Заседание проводилось совместно с пленарным заседанием Всесоюзного семинара «50 лет линейному программированию».

1. Вступительное слово ректора ЛГУ С. П. Меркурьева.
2. Д. К. Фаддеев «Воспоминание о Л. В. Канторовиче».
3. А. М. Вершик и В. Л. Канторович. «Трудное начало отечественного линейного программирования: открытие Л. В. Канторовича, его сторонники и противники».
4. И. В. Романовский «Линейное программирование 50 лет спустя».

Заседание 23 марта 1989 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Проблемы школьного математического образования и участие Ленинградского математического общества в их решении.

Выступили Д. К. Фаддеев, А. Д. Александров, В. Н. Малоземов, О. Я. Виро, О. А. Иванов, А. П. Карп, А. И. Плоткин, Д. В. Фомин, Ж.-Л. Кахан (Париж) и др.

Принято решение организовать ассоциацию учителей математики при ЛМО и установить контакт между ЛМО, математико-механическим факультетом ЛГУ и специализированными школами и классами.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: А. И. Барвинок, А. А. Боричев, О. Т. Ижболдин.

Математический лекторий для студентов

1 декабря 1988 г.— А. М. Вершик. «Узлы, косы, группы, представления».

2 марта 1989 г.— М. Ю. Любич «Итерации комплексных полиномов».

30 марта 1989 г.— В. А. Васильев (Москва) «Сложность алгоритмов приближенного решения уравнений и их связь с топологическими характеристиками».

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1])

Заседание 26 сентября 1989 г.

1. Вручение премий ЛМО молодому математику за 1989 год.
2. Доклады лауреатов:

А. А. Боричев «Применения почти аналитических функций».
О. Т. Ижболдин «K-теория полей ненулевой характеристики».

Заседание 10 октября 1989 г.

А. Б. Гивенталь (Москва) «Симплектическая топология».

Заседание 31 октября 1989 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

М. И. Рабинович (Горький) «Модели зарождения структур и пространственно-временной беспорядок».

В докладе дан обзор современных представлений о хаосе и о детерминированности в динамических системах.

Заседание 28 ноября 1989 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

А. А. Кириллов (Москва) «Представления группы диффеоморфизмов окружности и пространства однолистных функций».

Доклад посвящен обнаружившейся недавно замечательной связи между классической теорией однолистных функций и представлениями бесконечномерных групп.

Заседание 19 декабря 1989 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Дискуссия на тему: О качестве математической подготовки выпускников специализированных математических школ.

В дискуссии приняли участие М. И. Башмаков, А. М. Вершик, О. Я. Виро, С. В. Фомин, А. Л. Вернер, М. А. Нарбут, М. М. Лесохин, В. И. Рыжик.

Заседание 26 декабря 1989 г.

Заседание посвящено памяти В. А. Рохлина (1919—1984).

А. Н. Тюрин (Москва) «О геометрии полиномов Дональдсона для четырехмерных многообразий».

В докладе рассказано о связи между алгебро-геометрическими и гладкими инвариантами четырехмерных многообразий.

[1]) См. УМН.— 1989.— Т. 44, вып. 6 (270).— С. 165—168.

Заседание 6 февраля 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено памяти президента Общества с 1985 г. Дмитрия Константиновича Фаддеева (1907—1989).

1. С воспоминаниями о его жизненном пути и научном творчестве выступили И. Р. Шафаревич, З. И. Боревич, М. И. Башмаков, Н. А. Шанин, Л. А. Назарова, Е. С. Ляпин, А. Д. Александров, А. М. Вершик.

2. Выборы Президента ЛМО.

Президентом Ленинградского математического общества выбрана Ольга Александровна Ладыженская.

3. Прием в члены Общества.

В члены Общества избраны Я. И. Белопольская, В. К. Захаров, С. И. Карпушев.

Заседание 6 марта 1990 г.

Н. А. Вавилов «Максимальные подгруппы конечных простых групп».

За последние 5 лет был достигнут замечательный,— а в некоторых случаях решающий,— прогресс в задаче описания всех максимальных подгрупп конечных простых групп.

Заседание 28 марта 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено математическому творчеству Марка Григорьевича Крейна (1907—1989).

С воспоминаниями выступили М. Ш. Бирман, В. А. Якубович.

Заседание 3 апреля 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено 75-летию со дня рождения Юрия Владимировича Линника (1915—1972).

С воспоминаниями выступили И. А. Ибрагимов, В. В. Петров.

Заседание 10 апреля 1990 г.

А. П. Веселов (Москва) «Интегрируемые соответствия».

Многозначные отображения или соответствия естественно возникают в различных задачах геометрии и математической физики (биллиарды, классические цепочки типа Гейзенберга, уравнения Янга — Бакстера). Доклад посвящен кругу вопросов, связанному с понятием интегрируемости для отображений.

Заседание 5 июня 1990 г. распорядительное

1. Выступление представителей издательств «Наука» (А. П. Баева) и «Мир» (В. И. Авербух) о планах издательств на 1991 г.

2. Присуждение премии ЛМО молодому математику.

Премия присуждена А. И. Барвинку за цикл работ «Применение методов теории представлений к комбинаторной оптимизации».

Математический лекторий для студентов

16 октября 1989 г.— В. Б. Невзоров «Рекорды, последовательные ранги и задача о разборчивой невесте».

30 ноября 1989 г.— Н. Г. Макаров «Лапласовские фракталы».

14 декабря 1989 г.— С. В. Фомин «Эффективность потоковых алгоритмов».

22 февраля 1990 г.— Н. А. Вавилов «Классификация конечных простых групп».

15 марта 1990 г.— Н. В. Иванов «Дискретные группы как геометрические объекты».

9 апреля 1990 г.— А. П. Веселов (Москва) «Полиномы Чебышева, алгебры Ли и интегрируемые отображения».

1992 г. май — июнь *т. 47, вып. 3(285)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА [1])

Заседание 25 сентября 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

Впечатления о постановке математического образования и организации математических исследований в университетах США и Европы; выступили А. М. Вершик, О. Я. Виро, Н. К. Никольский, В. П. Хавин, М. А. Семенов-Тян-Шанский и др.

Заседание 9 октября 1990 г.

1. Вручение премии ЛМО молодому математику за 1990 г.
2. Доклад лауреата премии ЛМО:
А. И. Барвинок «Методы теории представлений в оптимизации».
3. Об ассоциации математических обществ.

Заседание 30 октября 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых и посвящено памяти Соломона Григорьевича Михлина (1908–1990).

Выступили О. А. Ладыженская, Ю. К. Демьянович, Н. Ф. Морозов, Б. А. Пламеневский, М. З. Соломяк и др.

Заседание 13 ноября 1990 г.

1. О. Я. Виро «Новые инварианты в теории трехмерных многообразий».
2. Довыборы Правления ЛМО. Вице-президентом ЛМО избран О. Я. Виро; ответственным секретарем редколлегии «Трудов ЛМО» избран А. И. Барвинок.

Заседание 20 ноября 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых.

А. М. Олевский (Москва) «Свободная интерполяция в классическом и гармоническом анализе».

Заседание 4 декабря 1990 г.

Г. Б. Шабат (Москва) «О реализации программы Гротендика».

В 1984 г. А. Гротендик дал набросок программы исследований, связывающих некоторые комбинаторно-топологические объекты (графы на компактных поверхностях) с алгебраическими кривыми над числовыми полями. В докладе рассказано о некоторых первых результатах по реализации программы – в основном об имеющихся явных вычислениях и о постановках вопросов. Упомянуты связи с классической теорией псевдоэллиптических интегралов с вполне интегрируемыми системами и с квантовой гравитацией.

---

[1]) См. УМН. – 1991. – Т. 46, вып. 2(278). – С. 233–234.

Заседание 11 декабря 1990 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых и посвящено памяти профессора ЛГУ Юрия Александровича Волкова (1930–1981) (60-летие со дня рождения)

Выступили А. Л. Вернер, В. А. Залгаллер и др.

Заседание 26 февраля 1991 г.

Г. Л. Литвинов (Москва) «Рациональные аппроксимации и автокоррекция погрешности».

При приближенном построении рациональных аппроксимаций вещественнозначных функций возникают парадоксальные эффекты. Один из них состоит в том, что для «правильных» методов построения рациональных аппроксимаций (в том числе аппроксимаций Паде, линейных и нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышева и др.) большие погрешности вычисления коэффициентов не влияют существенно на погрешность построенного приближения: ошибки в числителе и знаменателе дробно-рационального приближения компенсируют друг друга. Причина состоит в том, что ошибки в коэффициентах рационального приближения распределены не произвольно, а образуют коэффициенты нового приближения к аппроксимируемой функции. Понимание механизма автокоррекции погрешности позволяет уменьшить эту погрешность, варьируя процедуру построения приближения в зависимости от его вида.

Заседание 19 марта 1991 г.

1. А. Г. Хованский (Москва) «Число целых точек в целочисленных многогранниках. Теорема Римана – Роха и многомерное обобщение формулы Эйлера – Маклорена».

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Н. С. Ермолаева, А. А. Меклер, Б. Б. Походзей.

Заседание 26 марта 1991 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома ученых и посвящено 100-летию со дня рождения лауреата Государственной премии СССР, профессора университета, члена-корреспондента Академии наук СССР Николая Сергеевича Кошлякова (1891–1958 гг.)

С воспоминаниями о его жизненном пути и научной деятельности, об истории его лагерной жизни (1942–1951 гг.) выступили член-корреспондент АН УкрССР, лауреат Государственной премии СССР В. Н. Кошляков (Киев), доктор физ.-мат. наук, профессор ЛГТУ Д. Р. Меркин и др.

Математический лекторий для студентов

3 октября 1990 г.– О. И. Рейнов «Базисы и проблема аппроксимации в банаховых пространствах». В. Г. Осмоловский «Эволюция понятия решения в классических задачах математической физики».

27 февраля 1991 г.– Г. Л. Литвинов (Москва) «Вычисление функций на ЭВМ и рациональные приближения».

ЗАСЕДАНИЕ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА[1]

Заседание 15 октября 1991 г.

Г.Я.Перельман. *Пространства А.Д.Александрова с ограниченными снизу кривизнами.*

В докладе рассказано о классе пространств с внутренней метрикой, удовлетворяющих условию ограниченности снизу кривизны в смысле А.Д.Александрова, которое формулируется в терминах функции расслоения. Эти пространства, обобщающие римановы многообразия, являются подходящим объектом для развития методов синтетической геометрии, не требующих априорных предположений о гладкости, и даже о топологии пространства. С другой стороны, этот класс пространств содержит все пределы последовательностей полных римановых многообразий с равномерно ограниченными снизу секционными кривизнами, и, следовательно отражает возможные вырождения римановых метрик.

Заседание 19 ноября 1991 г.

В.А.Якубович. *Линейно-квадратичные задачи оптимального управления с квадратичными ограничениями.*

Хорошо известно, сколь важное место занимают в теории управления линейно-квадратичные оптимизационные задачи (аналитическое конструирование оптимальных регуляторов, фильтры Винера, Калмана и др.). В докладе изложен общий метод решения аналогичных задач с дополнительными ограничениями, это – специальный класс задач глобальной минимизации невыпуклого (в общем случае) функционала на множестве, которое также может быть невыпуклым.

Заседание 26 ноября 1991 г.
Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Н.Н.Уральцева. *Об эволюции поверхностей под действием средней кривизны.*

Задача о движении поверхности с нормальной скоростью, равной средней кривизне поверхности, впервые рассматривалась в 1978 г. Брокки, который доказал существование слабого решения (в классе варифолдов). В последние два года найдены новые подходы, позволяющие исследовать разрешимость этой задачи в более хорошем смысле и изучить поведение решений при неограниченном возрастании времени.

Заседание 17 декабря 1991 г.

[1] См. УМН. 1992. т. 47, № 3.

1. А.М.Вершик. *Гидродинамические пределы классических алгебр Ли.*

Общепринятое определение классических простых алгебр Ли основано на системах простых корней. Оказывается, возможно определить аналоги классических простых алгебр Ли, у которых система корней континуальна, например, окружность. Такие алгебры Ли являются "гидродинамическими" пределами классических алгебр Ли и связаны с теорией интегрируемых систем, квантовых групп и т. д.

2. *Присуждение премии ПМО молодому математику за* 1991 *г. Премия присуждена Г.Я.Перельману за цикл работ по римановой геометрии.*

Заседание 11 февраля 1992 г. (распорядительное).

1. О названии Общества.
   Утверждено новое название Общества: Санкт-Петербургское математическое общество (ПМО).
2. О членских взносах.
3. О регистрации Общества.
4. О вступлении в Европейское математическое общество.
5. Разное.

Принято решение о разработке нового Устава ПМО и выделении его в самостоятельное научно-общественное объединение. Поддержано решение о вступлении в Европейское математическое общество.

Заседание 25 февраля 1992 г.

И.А.Панин. *Векторные расслоения на однородных пространствах.*

Вычисления групп Гротендика векторных расслоений на квадриках и формах проективных пространств сыграли ключевую роль в решении классической задачи о структуре алгебр с делением над полем.

В докладе изложен новый взгляд на эти вычисления, связывающий их с теорией представлений классических групп Ли, рассказано и о новых вычислениях, основанных на этой точке зрения.

Заседание 10 марта 1992 г.

Доклад лауреата премии молодому математику за 1991 год.

Г.Я.Перельман. *Сходимость и коллапс римановых многообразий.*

Что может быть пределом последовательности римановых многообразий, как связаны геометрические и топологические свойства элементов последовательности со свойствами предельного объекта, какие топологические ограничения накладывает на многообразие наличие на нем коллапсирующей последовательности метрик, т. е. с предельным объектом меньшей размерности? Различные содержательные формулировки этих вопросов можно получить, накладывая на элементы последовательности различные равномерные ограничения.

Начатое М.Л.Громовым в конце 70*-х годов исследование этих вопросов продолжается в настоящее время.*

Заседание 24 марта 1992 г.

С.В.Керов. *Асимптотика взаимного разделения.*

Во многих математических сюжетах возникает взаимно разделяющие друг друга пары последовательностей

$$x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n \quad -$$

– корни ортогональных многочленов, частоты линейных систем при наложении связей, схемы Гельфанда–Цетлина и др. В докладе описано предельное поведение таких пар на фиксированном промежутке при n, стремящемся к бесконечности.

Оказывается, что корни ортогональных многочленов большой степени разделяются, при широких условиях. Одинаково интересно, что точно такая же асимптотика была ранее установлена для растущих диаграмм Юнга в контексте теории представлений симметрических групп, эти результаты связаны также с открытой Вигнером универсальностью распределения собственных чисел больших случайных матриц.

Заседание 7 апреля 1992 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

М.И.Граев, В.С.Ретах(Москва). *Новейшее развитие теории гипергеометрических функций.*

Теория гипергеометрических и конфлюэнтных функций – один из красивейших разделов классической математики. Современная теория гипергеометрических и конфлюэнтных функций, развиваемая с 1986 г. школой И.М.Гельфанда, связана с различными вопросами интегральной и комбинаторной геометрии, теории представлений и комплексного анализа, об этой теории рассказано в докладе.

Заседание 28 апреля 1992 г.

И.Б.Фесенко. *О высшей теории полей классов.*

Классическая теория полей классов, описывающая абелевы расширения глобальных и локальных полей, является одной из вершин алгебраической теории чисел. В последнее время возник новый (бескогомологический) подход к теории полей классов, который позволяет исследовать и неклассические типы полей. Об этом подходе и его применении к высшим локальным полям, лежащим на пересечении алгебраической геометрии, алгебраической K-теории и теории чисел, рассказано в докладе.

Заседание 2 июня 1992 г.

Современное развитие идей С.В.Ковалевской (к 100-летию со дня смерти).

Доклады В.М.Бабича, М.А.Семенова-Тян-Шанского.

Заседание 2 июня 1992 г. (распорядительное)

1. Обсуждение нового статуса Общества и принятие нового Устава. Принят новый устав ПМО и одобрен его статус как самостоятельного научного общества и юридического лица с соответствующими правами и обязанностями.

2. Присуждение премии молодому математику за 1992 г. Премия присуждена Д.Ю.Бураго за работы по периодическим римановым метрикам и энтропии геодезических потоков и И.Б.Фесенко за цикл работ по высшей теории полей классов.

Математический лекторий для студентов.

1990–91 гг. – Выступления участников Международного конгресса в Японии

– Г.Л.Литвинов. Вычисления функций на ЭВМ и рациональные приближения

30.IX.1991 г. – Н.Н.Петров “Новые инварианты в задачах поиска на графах”

13.XI.1991 г. – А.Н.Бородин. Математическое решение задачи о распространении тепла

11.XII.1991 г. – Д.Ю.Бураго. Геометрические задачи в теории динамических систем

26.II.1992 г. – А.Л.Смирнов. Диофантова геометрия. Проблемы и успехи

1.IV.1992 г. – Н.Ю.Нецветаев. 90 лет гипотезе Пуанкаре

28.IV 1992 г. – А.М.Вершик. Что такое предельный рисунок в геометрических задачах

ЗАСЕДАНИЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА*

Заседание 22 сентября 1992 г.

1. Вручение премий молодому математику за 1992 г.

2. Доклады лауреатов

И. Б. Фесенко. Высшая теория полей классов.

Д. Ю. Бураго. Периодические римановы метрики.

3. Организационные вопросы (взносы, перерегистрация членов ПМО. Информация о дальнейшей работе общества).

4. Выборы вице-президента. Вице-президентом Общества избран Ю. А. Давыдов.

Заседание 6 октября 1992 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено 80-летию со дня рождения Александра Даниловича Александрова.

Выступали: О. А. Ладыженская, Ю. Г. Решетняк, В. А. Залгаллер, А. Л. Вернер, Н. Н. Уральцева, Э. Г. Позняк, А. А. Никитин, Ю. Ф. Борисов.

Заседание 13 октября 1992 г.

М. Берже (Париж). Упаковка кругами.

Заседание 10 ноября 1992 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. Ю.В. Матиясевич. Интерактивные доказательства (я Вам докажу ...).

Традиционно математик доказывает теорему прежде всего для самого себя, а найдя доказательство, может делиться им с другими. Несколько лет назад было предложено понятие "интерактивного доказательства", в котором активное участие принимают две стороны: Доказывающий и Проверяющий. Если первый успешно ответит на все вопросы второго, то тот будет убежден в справедливости теоремы сам, но, вообще говоря, не сможет убедить в этом третьего. Это свойство интерактивных доказательств находит приложения в криптографии.

Доклад не предполагает у слушателей предварительных знаний по математической логике. В качестве примеров использованы доказательства в теории графов.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Д.Ю. Бураго, А. Л. Громов, А. А. Семенов, И. Б. Фесенко.

Заседание 17 ноября 1992 г.

Заседание посвящено памяти профессора Санкт-Петербургского университета Марка Константиновича Гавурина (1911–1992).

Выступили: А. М. Вершик, И. В. Романовский, И. К. Даугавет, В. Н. Малоземов, В. М. Рябов, Г. М. Натансон и др.

Заседание 24 ноября 1992 г.

А. А. Болибрух (Москва). XXI проблема Гильберта для фуксовых линейных систем.

Эта проблема формулируется так: показать, что всегда существует система дифференциальных уравнений с заданными особыми точками и заданной группой монодромии (т.е. система линейных уравнений $du/dz = A(z)u$, где A – матрица, голоморфная всюду, за исключением конечного числа простых полюсов; она определяет представление монодромии фундаментальной группы дополнения к полюсам в $\mathbb{C}$).

---

* См. УМН, 1993, вып. 1, с. 208–210.

Долгое время считалось, что проблему положительно решил в 1908 г. Й. Племель, но в 1980 г. были найдены пробелы в доказательстве, а в 1989 г. докладчик построил контрпример. Анализ проблемы связан с геометрией голоморфных расслоений. В докладе рассказано об этих результатах и примерах.

Заседание 15 декабря 1992 г. (распорядительное).

1. Отчет Правления и финансовый отчет ПМО.

2. Обсуждение деятельности ПМО.

3. Выборы руководящих органов ПМО.

Президент: О.А. Ладыженская.

Вице-президенты: А.М. Вершик, Ю.А. Давыдов.

Правление: А.Д. Александров, М.И. Башмаков, В.С. Буслаев, О.Я. Виро, И.А. Ибрагимов, С.В. Керов, Г.А. Леонов, А.А. Лодкин, Ю.А. Матиясевич, А.С. Меркурьев, Г.И. Натансон (ученый секретарь), Н.Ю. Нецветаев, М.А. Семенов-Тян-Шанский.

Ревизионная комиссия: О.А. Иванов, Б.В. Лурье, А.А. Семенов, В.Н. Судаков, В.Н.Фомин, В.П. Хавин.

Научный совет: В.М. Бабич, М.С. Бирман, В.С. Буслаев, А.М. Вершик, С.А. Виноградов, С.В. Востоков, И.А. Ибрагимов, Г.А. Леонов, Ю.А. Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, (ученый секретарь), А.П. Осколков, Н.Н. Уральцева, Л.Д.Фаддеев, В.П. Хавин, В.А. Якубович.

Редакционная коллегия Трудов ПМО: О.А. Ладыженская (главный редактор), А.М. Вершик (заместитель главного редактора), В.П. Оревков (ответственный секретарь), С.А. Виноградов, Г.А. Леонов, Б.С. Павлов, П.А. Пламеневский, М.А. Семенов-Тян-Шанский.

Школьный совет (председатель М.И. Башмаков).

Совет по работе со студентами (председатель С.В. Востоков).

Бюро секции Дома Ученых (председатель А.М. Вершик, секретарь С.В. Керов).

В функции вновь образованного Научного совета входит (по соглашению с фондами "Математика" РАН, Американского математического общества и другими) координация помощи этих фондов математикам Санкт-Петербурга, научное руководство специальной группой математико-механического факультета СПУ, поддержка других научных инициатив.

4. Прием в члены Общества. Членами Общества избраны: Б.В. Будаев, В.Л. Олейник, А.Г. Изергин, А.П. Карп, Б.А. Лифшиц, А.Л. Чистов, В.М. Нежинский, С.А. Евдокимов, А.Д. Лисицкий, И.Н. Пономаренко, Н.В. Проскурин, Г.А. Серегин, Н.В.Смородина, И.В.Денисова.

Заседание 22 декабря 1992 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено жизни и научной деятельности Николая Максимовича Гюнтера (1871–1941).

Выступили: В.М. Бабич, Г.И. Натансон, С.Ю. Пилюгин.

Заседание 2 марта 1993 г.

Н.Н. Петров. Многообразие топологий и топология многообразия.

В докладе рассказано о проблемах теоретико-множественной топологии, возникающих при исследовании некоторых дифференциально-топологических задач. На множестве точек гладкого многообразия рассматриваются топологии, естественным образом порождаемые различными "гладкими" объектами (распределениями, слоениями, динамическими полисистемами и т.п.). В тех случаях, когда эти топологии метрические, возникают интересные геометрические проблемы. Оказалось, что эти проблемы тесно связаны с задачами математической физики (принцип максимума А.Д. Александрова), дифференциальной геометрии (коллапс римановых структур по Громову), оптимизации (неголономные вариационные задачи. В связи с неголономными вариационными задачами будет затронута проблема субримановых геодезических, вокруг которой в последнее время происходят интересные события).

2. Прием в члены общества. Членами Общества избраны: А.Ю. Алексеев, В.А. Бондарко, П.П. Каргаев, В.Л. Крепс, М.М. Луценко, О.В. Русаков.

Заседание 16 марта 1993 г.

Л.Д.Пустыльников (Москва). Модель Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики и механизм ускорения Ферми.

В докладе рассказано о строгом обосновании закона возрастания энтропии на основе классической механики для газа, состоящего из конечного числа частиц, в сосуде фиксированного размера. Модель, которая имеется в виду, предложена Пуанкаре в работе 1906 г. для решений этой задачи. Результат, о котором идет речь, тесно связан с другой проблемой – обоснованием механизма ускорения Ферми частиц в космическом пространстве, которая в настоящее время получила исчерпывающее решение. В основе доказательства лежат чисто математические задачи и теории: проблема Улама, числа вращения Пуанкаре, эргодическая теория, теория КАМ.

Заседание 6 апреля 1993 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. К 30-летию первых выпусков специализированных математических школ.

2. Прием в члены Общества. Членами Общества избраны: А.Б. Алексеев, Д.Г.Бенуа, В.В. Борзов, Е.П. Голубева, К.М. Дьяконов, Б.А. Желудев, И.Г. Зельвенский, Ю.А. Ильин, А.Ю. Кокотов, Е.Л. Рабкин, В.Н. Сеничкин, Т.В. Слободинская, С.П. Токарев, Ю.Б. Фарфоровская, Г.В. Фирсова, А.М. Коточигов.

Заседание 20 апреля 1993 г.

В.П. Оревков. О сложности доказательств теорем существования.

В докладе рассказано о новом направлении в математической логике – теории сложности логического вывода. Главное внимание уделено сравнению сложности прямых и косвенных доказательств теорем существования (в прямых доказательствах в явном виде предъявляется конструкция требуемого объекта).

Заседание 8 июня 1993 г.

1. Заседание посвящено памяти Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987).

Выступили: А.Д. Александров, Н.К. Никольский, Ю.Л.Добрушин, Е.Б.Дынкин, И.А. Ибрагимов, В.М. Тихомиров, А.Н. Ширяев, П. Мартин-Лёф, Н.А. Шанин, А.М. Вершик.

2. Прием в члены Общества. Членом Общества избран Ж.-П.Серр (Париж).

3. Вручение премий победителям студенческого математического конкурса 1993 г.

Математический лекторий для студентов.

28.10.92 г. Ю.В.Матиясевич. Интерактивные доказательства (я Вам докажу...).

18.11.92 г. С.Ю.Пилюгин. Что такое хаос.

7.12.92 г. Е.П.Голубева. Знаменитая нерешенная проблема Гаусса об однокласcности и непрерывные дроби.

3.03.93 г. И.Б.Фесенко. Аддитивные многочлены.

17.03.93 г. В.М. Бабич. От функции к обобщенной функции.

ЗАСЕДАНИЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 21 сентября 1993 г.

1. Вручение премии молодому математику за 1993 год

2. Доклад лауреата:

Ф. Л. Назаров – Неравенства типа принципа неопределенности в гармоническом анализе

3. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Е. Я. Данцин, А. А. Кельзон, Я. В. Курылев, В. А. Лившиц, Ф. Л. Назаров.

Заседание 12 октября 1993 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и было посвящено 80-летию со дня рождения *Израиля Моисеевича Гельфанда*.

Выступили: О. А. Ладыженская, А. М. Вершик, М. А. Семенов-Тян-Шанский и другие.

Заседание 19 октября 1993 г.

1. С. В. Нечаев (Москва) – Случайные блуждания на некоммутативных группах и некоторые приложения в физике.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Б. Ф. Иванов, В. П. Одинец.

Заседание 2 ноября 1993 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

А. Н. Паршин (Москва) – Новые достижения в теории диофантовых уравнений.

23 июня 1993 г. Эндрю Вайлис анонсировал доказательство гипотезы Таниямы–Вейля о модулярной параметризации для стабильных эллиптических кривых. Как доказали в 1985–88 гг. Г. Фрей и К. Рибет, из справедливости этого факта вытекает последняя теорема Ферма. В Докладе рассказано об этих результатах на основе имеющихся результатов (текст Вайлиса пока не получен).

Заседание 16 ноября 1993 г.

М. М. Скриганов – Аномалии в проблеме подсчета числа точек решетки в области.

В докладе рассказано об аномально малых, в частности, логарифмически малых остатках в проблеме подсчета числа точек решетки в расширяющемся теле. Также рассказано о приложениях этого явления в теории полей алгебраических чисел, вычислительной математике и спектральной теории.

См. УМН, 1993 г., Т. 48, вып. 6 (294), с. 179–181.

Заседание 21 декабря 1993 г.

Ю. С. Ильяшенко (Москва) – Нормальные формы локальных семейств, нелокальные бифуркации и проблема Гильберта–Арнольда.

Проблема Гильберта–Арнольда состоит в следующем: "Доказать, что в типичном конечнопараметрическом семействе векторных полей на двумерной сфере с компактным пространством параметров число предельных циклов равномерно ограничено". В докладе рассказано о доказательстве гипотезы Гильберта–Арнольда при дополнительных ограничениях на семейство.

Заседание 15 февраля 1994 г.

Заседание посвящено памяти *Нины Борисовны Масловой* (1939–1993 гг.).

Выступили: Л. А. Оганесян, Н. И. Вальцингер, М. С. Бирман, А. М. Вершик и другие.

Заседание 22 марта 1994 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых и посвящено 100-летию со дня смерти *Пафнутия Львовича Чебышёва* (1821–1894 гг.).

Выступили: Е. П. Голубева, Н. С. Ермолаева, В. В. Жук, Я. Ю. Никитин, Г. И. Натансон, М. П. Юшков.

Заседание 12 апреля 1994 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. В. М. Бабич – Избранные вопросы теории дифракции.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: В. В. Виноградов, Л. Ю. Колотилина, Н. К. Кривулин, Ю. В. Нетрусов, А. Ю. Солынин, С. М. Шиморин.

Заседание 19 апреля 1994 г.

Н. Ю. Нецветаев – Топология комплексных гиперповерхностей.

Гиперповерхности $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ степени d изучаются на 1–2 курсах при $d \leqslant 2$ и $n \leqslant 3$. Изучение вещественных гиперповерхностей большей степени – очень трудная задача (16-я проблема Гильберта), которая неожиданно упрощается при переходе к комплексным переменным, поскольку неособые комплексные гиперповерхности одной степени и размерности с топологической точкой зрения устроены одинаково. Однако задача усложняется, если у гиперповерхностей есть хотя бы изолированные особенности.

В докладе рассказано о разных сторонах этой проблемы и о некоторых имеющихся результатах.

Заседание 7 июня 1994 г.

Заседание посвящено 75-летию *Николая Александровича Шанина*.

1. Обзор предшествующих исследований Н. А. Шанина: А. А. Иванов (работы по топологии), Г. С. Цейтин (работы по конструктивному направлению), В. П. Оревков (работы по поиску вывода).

2. Н. А. Шанин. О финитарном варианте математического анализа.

А. М. Вершик

ЗАСЕДАНИЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 4 октября 1994 г.

1. Вручение премии Общества "Молодому математику" за 1994 г.

2. Доклад лауреата: С. М. Шиморин – *Обобщенные операторы Лапласа и некоторые их приложения.*

В докладе рассказано об одном семействе интегро-дифференциальных операторов, связанных со степенями (необязательно натуральными) оператора Лапласа в единичном круге комплексной плоскости. Операторы из этого семейства обладают рядом свойств, обобщающих классические свойства оператора Лапласа, например, формулу Грина. Рассматриваемые операторы имеют приложения к задачам факторизации аналитических функций и к некоторым биогармоническим уравнениям.

3. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: В. В. Довгаль, В. О. Тарасов.

Заседание 1 ноября 1994 г.

1. С. В. Буяло, В. Л. Кобельский – *Геометризация графмногообразий.*

Одним из плодотворных подходов в трехмерной геометрии и топологии является разбиение многообразия на части, наделяемые стандартными геометрическими структурами. С другой стороны, для некоторых классов многообразий содержателен вопрос о том, могут ли эти структуры на элементах разложения быть согласованы между собой, то есть вопрос о глобальной геометризации многообразия.

В докладе рассказано о решении этой задачи для т.н. графмногообразий.

2. Прием в члены Общества.

Членом Общества избран С. В. Буяло.

Заседание 28 февраля 1995 г.

Математика для всех. О пропаганде математических знаний среди школьников.

Рассказано о Международной ассоциации "Кенгуру – математика для всех" и о проведении в Петербурге, в марте 1995 г. международного конкурса – игры "Кенгуру".

Выступили: М. И. Башмаков, Ю. В. Матиясевич, Н. Н. Уральцева.

Заседание 3 марта 1995 г.

Заседание посвящено 150-летию со дня рождения Георга Кантора.

Выступили: А. И. Скопин, Л. И. Брылевская, Н. А. Шанин, А. М. Вершик.

См. УМН, 1993 г., вып. 1, 208–210; 1993 г., вып. 6, 179; 1995, вып. 3, 187–188.

Заседание 21 марта 1995 г.

Заседание проводились совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. А. М. Вершик – *Новые асимптотические задачи в геометрии и комбинаторике.*

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: М. Г. Гельфонд, В. Я. Крейнович, И. С. Понизовский.

Заседание 4 апреля 1995 г.

В. В. Чень (Австралия) – *Иррегулярности распределений.*

Доклад посвящен обзору современного состояния теории равномерных распределений. Этот раздел теории чисел, возникший из работ Ван дер Корпута, Рота и Шмидта, имеет многочисленные приложения, например, в вычислительной математике. В последнее время здесь получен ряд принципиально новых результатов, позволяющих взглянуть на всю теорию с новой точки зрения.

Заседание 18 апреля 1995 г.

1. Заседание посвящено памяти профессора Университета Зенона Ивановича Боревича (1922–1995).

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Л. И. Брылевская.

Заседание 30 мая 1995 г.

Р. Рокфеллер (США). – *Неклассические вариационные задачи.*

В последнее время было потрачено много усилий на обобщение классических уравнений Гамильтона и Эйлера–Лагранжа вариационного исчисления с целью охватить задачи оптимального управления и более широкий круг подынтегральных выражений и ограничений. Удалось получить такие обобщения классических необходимых условий оптимальности, в которых негладкость является обычным явлением, а градиенты систематически заменяются субградиентами. Недавние результаты, основанные на теории эписходимости выпуклых функций, привели к решению давно стоявших вопросов об эквивалентности различных обобщений.

Математический лекторий для студентов.

16.03.1995 г. А. М. Вершик. – *Разбиения, решетки, асимптотика (как анализ помогает комбинаторике).*

1997 г. март — апрель *т. 52, вып. 2(314)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 17 октября 1995 г.

1. О. А. Ладыженская *Динамика геометрических объектов.*
2. *Прием в члены Общества.*

Членами Общества избраны: В. И. Волчегурский, А. П. Петухов.

Заседание 14 ноября 1995 г.

1. В. М. Бухштабер (г. Москва). *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа.*

Многозначная группа представляет из себя пространство с многозначным умножением: результат умножения двух элементов есть непустое подмножество. Естественные аксиомы делают это понятие полезным для топологии, алгебры, функционального анализа. Первые примеры многозначных формальных групп появились в работах С. П. Новикова и докладчика по характеристическим классам Понтрягина. Недавно E. Rees и докладчик построили аналог теории алгебр Хопфа для колец функций и когомологий многозначных групп. В работе А. П. Веселова и докладчика было показано, что интегрируемость некоторых динамических систем также объясняется с помощью теории многозначных групп.

2. *Прием в члены Общества.*

Членами Общества избраны: А. И. Бобенко.

3. *Текущие дела.*

Заседание 5 декабря 1995 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Г. А. Леонов. *Странные аттракторы и устойчивость.*

Заседание 20 февраля 1996 г.

1. Заседание, посвященное юбилею членов Общества: В. А. Залгаллера, А. А. Иванова, В. Н. Кублановской.
2. Присуждение премии "Молодому математику" за 1995 год.

Заседание 5 марта 1996 г.

1. Вручение премии Общества "Молодому математику".
2. Доклад лауреата. С. В. Иванов. *Гипотеза Хопфа о римановых метриках без сопряженных точек на торе.*

Заседание 8 апреля 1996 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. А. М. Вершик. *Асимптотическая теория разбиений с точки зрения статистической физики.*

Многие задачи асимптотической комбинаторики, в частности, теория разбиений (скалярных и векторных) можно рассматривать как задачи о предельном поведении гиббсовских мер в подходящем пространстве. Эта точка зрения дает хорошие методы решения таких задач и приводит к ряду интересных вопросов в различных областях математики.

2. *Прием в члены Общества.*

Членами Общества избраны: С. В. Иванов, David G. Ebin.

См. УМН, т. 51, вып. 2, 189–190.

1997 г. ноябрь — декабрь *т. 52, вып. 6(318)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 24 сентября 1996 г.

О. Я. Виро. *"Инварианты конечной степени как степени отображения "*.

Инварианты, изучавшиеся в последние 10 лет в топологии малых размерностей, не укладывались в традиционную схему.

Доклад посвящен попытке осознания новых инвариантов с традиционной точки зрения.

Заседание 22 октября 1996 г.

1. John Coates (Cambridge). *"Арифметика эллиптических кривых"*.

Старейшей важной нерешенной математической проблемой является вопрос об арифметике эллиптических кривых, и предположительный ответ на него есть прекрасный пример современной теории.

Этот вопрос, восходящий к Ферма, интенсивно изучался на протяжении этого столетия. Исследования тридцати лет были в основном мотивированы знаменитой гипотезой Бёрча и Суиннертон-Дайера, которая устанавливает таинственную связь между изучением группы рациональных точек и L-функций. Кроме того, оказалось, что эта тематика имеет совершенно неожиданные связи с далекими на первый взгляд вопросами теории чисел, такими как Великая Теорема Ферма и поставленная Гауссом проблема эффективного определения всех комплексных квадратичных полей с заданным числом классов. Все эти аспекты теории затронуты в лекции.

2. *Прием в члены Общества.*

Членами Общества избраны: Е. В. Абакумов, Е. С. Дубцов, А. А. Флоринский, Д. В. Якубович.

Заседание 19 ноября 1996 г.

1. М. Н. Гусаров. *"Инварианты конечной степени трехмерных многообразий"*.

Теория инвариантов конечной степени совпадает с популярной в последние годы теорией инвариантов Васильева для случая узлов, а в случае трехмерных многообразий теория инвариантов конечной степени дает возможности, которые пока не реализованы на языке теории инвариантов Васильева. Доклад посвящен новым результатам в этой области.

2. *Прием в члены Общества.*

Членами Общества избраны: P. Ceqielski, W. S. Hatcher, D. Richard.

Заседание 18 февраля 1997 г.

П. П. Каргаев. *"Обобщенное преобразование Фурье, связанное с оператором Дирака"*.

Рассмотрен одномерный оператор Дирака. Прямое обобщенное преобразование Фурье, связанное с этим оператором, было предметом исследования М. Г. Крейна и Луи де Бранжа. Оказывается, можно построить содержательную теорию и для обратного обобщенного преобразования Фурье. В частности, многие свойства обычного пространства Харди справедливы для обобщенного пространства Харди – пространства функций, обобщенное преобразование Фурье которых обращается в нуль на отрицательной полуоси.

Заседание 25 марта 1997 г.

И. Х. Сабитов (Москва). *"Объем многогранника как функция длин его ребер (обобщение формулы Герона)"*.

См. УМН, т. 52, вып. 2, с. 189–190.

В течение полутора веков после доказательства Коши в 1813 г. теоремы о неизгибаемости выпуклого многогранника почти все работы по изгибаниям многогранников касались главным образом различных модификаций теоремы Коши. Только в 1977 г. американский математик Коннелли построил первый пример изгибаемого вложенного в $\mathbb{R}^3$ (т.е. не имеющего самопересечений) многогранника. Затем было замечено, что объем этого и других позже построенных изгибаемых многогранников в ходе изгибания остается неизменным. В 1978 г. Коннелли в своем докладе на Конгрессе в Хельсинки высказал гипотезу, что это свойство постоянства объема справедливо для всех изгибаемых многогранников или, по-другому, что изгибаемые многогранники (с отверстием на твердой грани) не могут работать как математически идеальные кузнечные меха. Эта проблема ("гипотеза кузнечных мехов") среди специалистов считалась одной из самых интересных и красивых задач в теории изгибаний многогранников. В серии работ 1994–96 гг. докладчику удалось найти решение этой проблемы, основанное на простых геометрических соображениях. Попутно вытекает ряд следствий, дающих существенное продвижение в решении двух основных задач метрической теории многогранников – в проблеме изометрической погружаемости в $\mathbb{R}^3$ данной многогранной метрики и в проверке изгибаемости данного многогранника.

Заседание 15 апреля 1997 г.

В. В. Жук. *"Наилучшие приближения и функции класса $C^{(r)}$"*.

Устанавливается (при $r \in \mathbb{N}$) существование двух функций f и g, имеющих равные при всех n наилучшие приближения, таких, что $f \in C^{(r)}$, а $g^{(r-1)}$ – непрерывная функция, не попадающая в класс $\operatorname{Lip} 1$. Тем самым дан отрицательный ответ на давно стоявший вопрос о возможности описания упомянутых выше классов функций в терминах наилучших приближений.

Заседание 24 июня 1997 г.

Заседание Международной алгебраической конференции, посвященное 90-летию со дня рождения Дмитрия Константиновича Фаддеева (1907–1989), проводилось при участии Санкт-Петербургского математического общества. С докладом о жизни и научном творчестве Д. К. Фаддеева выступил А. В. Яковлев.

Математический лекторий для студентов.

26 марта 1997 г. И. Х. Сабитов (Москва). *"Объем многогранника как функция длин его ребер (обобщение формулы Герона)"*.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ЗАСЕДАНИЯ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 15 октября 1997 г.

Совместное заседание ПМО и общеинститутского семинара ПОМИ.

В. И. Арнольд. *Топологический смысл теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций.*

Заседание 16 октября 1997 г.

К 60-летию В. И. Арнольда.

В. И. Арнольд. *Топологические вопросы теории распространения волн.*

В докладе рассказано о применении теоремы Штурма–Гурвица о нулях ряда Фурье к симплектической топологии, теории Морса многозначных функций, к обобщениям теоремы Мебиуса о точках перегиба.

Заседание 11 ноября 1997 г.

Недавние результаты молодых математиков Петербурга.

1. О. Л. Виноградов. *О некоторых точных неравенствах в теории приближений.*

Т. Н. Шилкин. *О регулярности решений некоторых задач механики.*

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: А. А. Архипова, Ю. Г. Марков, Н. А. Сидоров, В. Б. Смирнова.

Заседание 11 декабря 1997 г.

Совместное заседание ПМО и общеинститутского семинара ПОМИ.

М. Л. Громов (Франция). *Эндоморфизмы бесконечномерных алгебраических пространств.*

Заседание 13 декабря 1997 г.

М. Л. Громов (Франция). *Статистическая геометрия алгебраических многообразий.*

Заседание 16 декабря 1997 г. Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

Компьютеры в фундаментальных математических исследованиях.

1. Г. С. Цейтин. *Механизмы Интернета.*

2. Н. Н. Васильев. *Современные системы компьютерной алгебры.*

3. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: О. Л. Виноградов, Т. Н. Шилкин.

Заседание 17 февраля 1998 г. (продолжение заседания, состоявшегося 16 декабря 1997 г.) Заседание проводилось совместно с секцией математики Дома Ученых.

1. В. И. Мысовских. *Групповые вычисления в системе GAP (Groups, Algorithms and Programming).*

2. Б. А. Новиков. *Математическая компьютерная полиграфия и электронные публикации.*

В докладе обсуждались компьютерные средства подготовки математических изданий, в том числе в электронной форме, последствия массового распространения таких систем, а также преподавание этих технологий на математико-механическом факультете.

3. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Н. Н. Васильев, В. И. Мысовских, В. А. Новиков.

Заседание 10 марта 1998 г.

Отчетно-выборное собрание.

1. Отчет правления СПбМО.
2. Отчет ревизионной комиссии.
3. Выборы руководящих органов Общества: президента, вице-президентов, правления, ревизионной комиссии, научного совета, школьного и студенческого советов, председателя и заместителя председателя секции математики Дома Ученых.
4. Обсуждение предложений по дальнейшей работе Общества и наказ новому правлению (издание "Трудов", информационная активность, биржа труда, взносы, лекторий для студентов, ПОМИ-группа СПбГУ и др.).
5. Информация.

Состав Правления и других органов Общества, избранных 10 марта 1998 г.

Президент: А. М. Вершик.

Вице-президенты: Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, Н. Н. Уральцева.

Правление: А. Д. Александров, В. М. Бабич, М. Ш. Бирман, В. С. Буслаев, О. Я. Виро, В. А. Залгаллер, И. А. Ибрагимов, А. Г. Изергин, О. А. Ладыженская, Г. А. Леонов, С. Ю. Пилюгин, Л. Д. Фаддеев, В. П. Хавин, А. В. Яковлев, В. А. Якубович.

Ученый секретарь: А. А. Лодкин.

Казначей: Б. Б. Лурье.

Ревизионная комиссия: О. А. Иванов, А. А. Семенов, Н. В. Смородина, В. Н. Фомин, Л. А. Халфин.

Редактор Трудов ПМО: Н. Н. Уральцева.

Совет по направлениям работы Общества:

Башмаков М. И. (Школьный совет – ш.с.), Буяло С. В. (Программная комиссия – п.к.), Всемирнов М. А. (Студенческий Совет – ст.с.), Генералов А. И. (п.к.), Голубева Е. П. (п.к.), Гордин М. И. (п.к.), Жуков И. Б. (ш.с.), Иванов О. А. (ш., ст.с.), Карп А. П. (ш.с.), Керов С. В. (электронные публикации), Кохась К. П. (ш.с., ст.с.), Матвеев А. С. (п.к.), Мысовских В. И. (п.к.-информатика), Назаров А. И. (ст.с. и ПОМИ-поток), Панин И. А. (Библиотека), Пламеневский Б. А. (п.к.), Серегин Г. А. (п.к.), Сидоров Н. А. (ст.с. – молодежные гранты).

На заседании почетными членами Общества избраны О. А. Ладыженская и В. А. Залгаллер.

Заседание 7 апреля 1998 г.

В. А. Кайманович. *Эргодические свойства орициклического потока.*

Геодезический и орициклический потоки на поверхностях постоянной отрицательной кривизны являются центральными примерами динамических систем геометрической природы. Согласно теореме Хопфа–Цуи–Сулливана эргодичность геодезического потока равносильна его консервативности, а также возвратности броуновского движения на поверхности. Орициклический поток был подробно изучен в компактном случае, однако до последнего времени почти ничего не было известно о его эргодических свойствах для некомпактных многообразий. Эти вопросы допускают естественную переформулировку в терминах теории фуксовых групп.

В докладе изложен ряд новых результатов об эргодичности и консервативности орициклического потока, полученных путем применения методов траекторной теории динамических систем и теории марковских процессов. В частности, эргодичность орициклического потока оказывается равносильной отсутствию ограниченных гармонических функций на поверхности.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: М. А. Всемирнов, А. И. Генералов, Р. С. Кашаев.

Заседание 28 апреля 1998 г.

С. К. Смирнов (лауреат премии ПМО за 1997 г.). *Устранимые множества для аналитических функций.*

Множество E называется устранимым для ограниченных аналитических функций (непрерывных аналитических функций, конформных отображений), если из того, что такая функция аналитична вне E, следует, что она глобально аналитична. Вопрос о том, является ли какое-то множество устранимым, часто встает в анализе и в динамических системах. Тем не менее, ни для одного из вышеперечисленных классов нет геометрического описания устранимых множеств. Дан обзор классических результатов и открытых вопросов, а также описаны недавние продвижения.

2. Прием в члены Общества.

Членом Общества избран: С. К. Смирнов.

Заседание 12 мая 1998 г.

С. Ю. Пилюгин. *Отслеживание псевдотраекторий в динамических системах.*

Пусть f – гомеоморфизм метрического пространства. Последовательность $\{x_k\}$ называется d-псевдотраекторией динамической системы $\{f^k\}$, если $r(x_{k+1}, f(x_k)) < d$. Говорят, что f обладает свойством отслеживания псевдотраекторий, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\{x_k\}$ найдется точка x со свойством $r(x_k, f^k(x)) < \varepsilon$. В докладе изложен ряд новых результатов теории отслеживания, связанных с отслеживанием в структурно устойчивых системах, типичностью свойства отслеживания, свойством предельного отслеживания, отслеживанием в эволюционных системах, порождаемых параболическими уравнениями.

2. Прием в члены Общества.

Членами Общества избраны: Д. Е. Апушкинская, В. А. Слоущ, Н. Д. Филонов.

Математический лекторий для студентов.

16 октября 1997 г. Топологическая классификация комплексных и вещественных тригонометрических многочленов и перечисление графов.

В САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ ОБЩЕСТВА

Заседание 22 сентября 1998 г.

Впечатления о Международном конгрессе математиков в Берлине (август 1998 г.)

Выступления участников: А. Н. Бородин, А. М. Вершик, С. В. Кисляков, Н. Ю. Нецветаев, С. Ю. Пилюгин, Н. Н. Уральцева.

Заседание 13 октября 1998 г. И. А. Панин. *Сумма четырех квадратов и гипотеза Гротендика.*

Рассказана общая формулировка гипотезы Гротендика, касающейся главных однородных пространств, рассмотрены интересные примеры, показана связь этой проблемы с некоторыми задачами о дифференциалах второго рода и с общей гипотезой Герстена. Недавний прогресс тесно связан с идеями из работ Воеводского. В частности, рассказано об уравнении

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a$$

и его решениях над полями рациональных функций.

Заседание 22 декабря 1998 г. С. В. Кисляков. *Операторные пространства и задача о подобии.*

В январе 1996 г. Ж. Пизье построил пример полиномиально ограниченного оператора в гильбертовом пространстве, неподобного сжатию. Тем самым был дан ответ на вопрос, сформулированный на рубеже 50-х и 60-х годов и привлекавший с тех пор значительное внимание. В докладе обсуждался контрпример Пизье, другие (схожие по постановке) задачи о подобии, а также были затронуты связи с возникшей относительно недавно теорией "операторных пространств" и вполне ограниченных отображений.

Заседание 5 января 1999 г. В. А. Кайманович (Rennes, Франция). *Символическая динамика, эргодичность коциклов и геометрические приложения.*

Задача об эргодических свойствах орициклического потока на компактных поверхностях отрицательной кривизны является классикой эргодической теории. Однако лишь недавно появилось несколько работ о некомпактном случае, а именно, об абелевых накрытиях компактных многообразий. Доклад посвящен новому подходу, разработанному совместно К. Шмидтом и докладчиком. Этот подход основан на изучении групповых коциклов на топологических цепях Маркова и ведет к существенному обобщению ранее известных результатов.

Отчет о заседаниях Санкт-Петербургского математического общества в 1997–1998 гг. помещен в УМН, т. 54, вып. 1. Отчет о деятельности Санкт-Петербургского математического общества за период с августа 1999 г. по декабрь 2001 г. помещен в УМН, т. 57, вып. 1.

Заседание 12 января 1999 г. Совместное заседание Секции математики Дома Ученых, Санкт-Петербургского математического общества и Института математики РАН (ПОМИ).

К 100-летию со дня рождения академика В. А. Фока (1898–1974).

С научными сообщениями выступили Л. Д. Фаддеев и А. М. Вершик. С воспоминаниями о В. А. Фоке – Г. И. Петрашень, Ю. Н. Демков, И. В. Комаров.

Заседание 30 марта 1999 г. А. П. Петухов. *Всплески и их приложения.*

Под базисами всплесков (wavelet bases) обычно понимают базисы пространства L^2, получающиеся при помощи некоторого набора двоично-рациональных сдвигов и растяжений (сжатий) аргумента единственной функции. С момента формирования к концу 80-х общих взглядов на построение базисов всплесков круг их применения постоянно расширяется.

В докладе было обсуждено современное состояние дел в этой области и причины такой популярности всплесков в приложениях (теория аппроксимациии, быстрые алгоритмы, сжатие информации и т. д.).

Заседание 13 апреля 1999 г. О. Р. Мусин (Москва). *Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне.*

Диаграммой Вороного множества точек S в евклидовом пространстве называется разбиение этого пространства на выпуклые области $V(p)$, где p – точка из S. $V(p)$ содержит все точки пространства, которые ближе к p, чем к остальным точкам из S. Это понятие появилось еще у Декарта, хотя первые серьезные результаты принадлежат Дирихле и Вороному. Триангуляция (разбиение) Делоне – это разбиение, двойственное к диаграмме Вороного. Эти понятия стали очень популярными в вычислительной геометрии и других прикладных науках.

В докладе приведены основные геометрические свойства этих конструкций, рассказано об алгоритмах их построения (в частности, с использованием понятия "вторичный многогранник", введенного Гельфандом–Зелевинским–Капрановым) и основные их применения. Кроме того, было предложено многомерное обобщение теоремы о четырех вершинах для многогранников, являющимся подкомплексом триангуляции Делоне.

Заседание 27 апреля 1999 г. И. А. Дынников (Москва). *Трехстраничный подход в теории узлов.*

Стандартным инструментом в теории узлов являются плоские диаграммы. Диаграмма узла – это его проекция на плоскость, для каждого пересечения на которой указано, какая ветвь проходит сверху, а какая снизу. Классическая теорема Райдемайстера, дающая необходимое и достаточное условие эквивалентности узлов, заданных плоскими диаграммами, сводит задачу классификации узлов и нахождения изотопических инвариантов к сложным задачам комбинаторики и алгебры.

Новый альтернативный подход состоит в том, чтобы вкладывать узел или зацепление в объединение трех полуплоскостей с общей граничной прямой. Эти полуплоскости расположены в трехмерном пространстве как три страницы книги.

Трехстраничный подход приводит к принципиально иной комбинаторике и алгебре. Для кодировки узлов теперь используются слова в некотором универсальном конечном алфавите, а роль классических движений Райдемайстера восполняет некоторый конечный набор соотношений. Заданная этими соотношениями полугруппа имеет своим центром множество изотопических классов всех зацеплений. Таким образом, классификация зацеплений сводится к проблеме тождества слов в этой полугруппе.

Трехстраничный подход оказывается полезным для компьютерного распознавания тривиального узла. Классический алгоритм распознавания (Хакен, 1961 г.) далек от компьютерной реализации для диаграмм с более чем 10 пересечениями. Существуют, однако, частичные алгоритмы распознавания, которые проверяют лишь некоторое достаточное условие тривиальности. Один из таких алгоритмов реализован для диаграмм, имеющих до 50 пересечений (С. Матвеев, Е. Фоминых, 1997 г.). Частичный алгоритм, основанный на трехстраничном подходе демонстрирует фантастическую скорость и результативность при распутывании диаграмм тривиального узла, имеющих сотни пересечений.

Европейские лекции по математике

С 18 по 21 мая Европейское математическое общество и СПбМО проводили в Петербурге третью сессию "Европейских лекций по математике". Сессия представляет собой серию из нескольких лекций, посвященных недавнему прогрессу в какой-либо актуальной области математики и прочитанных в каждом из трех различных университетах Европы. Лектор выбрается на конкурсной основе исполкомом Европейского Математического Общества; университеты, где читаются лекции, также отбираются в зависимости от тематики лекций. Такие сессии проводятся раз в два года. В 1999 году в качестве лектора был избран М. Ю. Любич (Stony Brook, США), получивший хорошо известные результаты в голоморфной и одномерной динамике, а местами прочтения лекций – Санкт-Петербург, Копенгаген и Барселона.

1. Заседание 18 мая 1999 г. (совместное заседание СПбМО и секции математики Дома Ученых). 1-я лекция. *Универсальность Фейгенбаума и динамика квадратичных многочленов.*

Закон универсальности Фейгенбаума, открытый около двадцати лет назад, поразил как физиков, так и математиков. С точки зрения физики, он предсказывает значение параметра перехода от "ламинарного" к "турбулентному" режиму. Математическая сторона представляет серьёзную проблему на стыке теории динамических систем, анализа и геометрии. В докладе рассказано о математических структурах, лежащих в основе этой проблемы, которые недавно привели к ее решению.

2. Заседание 19 мая 1999 г. (семинар по теории представлений и динамическим системам). 2-я лекция. *Эргодическая теория вещественных квадратичных отображений.*

3. Заседание 20 мая 1999 г. (общеинститутский семинар ПОМИ). 3-я лекция. *Голоморфная динамика и гиперболические слоения.*

Заседание 25 мая 1999 г. *Приобщение школы к мировой математической культуре.*

Заседание посвящено новым инициативам в области привлечения молодежи к занятиям математикой. Было сообщено об итогах очередного конкурса-игры Кенгуру. Обсуждался проект международной программы издания научно-популярной литературы. Помимо организаторов заседания (академика РАО М. И. Башмакова и доцента А. И. Плоткина) выступили гости из Томска (проф. Э. Гельфман) и Англии (проф. А. Белл, Ноттингем). Состоялась краткая дискуссия. Заседание было посвящено памяти замечательного организатора работы со школьниками Николая Борисовича Васильева.

Заседание 1 июня 1999 г. P. Cartier (France). *Интегрируемые дифференциальные уравнения и комбинаторика многогранников.*

Изучается асимптотика решений уравнения Книжника–Замолодчикова при помощи соответствующей компактификации подходящего вещественного симплекса. Это приводит к так называемому многограннику Stasheff'а, обладающему богатой комбинаторикой. Было также рассказано о приложениях к теории представлений группы кос и алгебр Гекке.

Математический лекторий для студентов

22 октября 1998 г. А. И. Генералов. *Гомологическая алгебра с точки зрения элементарной алгебры.*

6 апреля 1999 г. Н. Ю. Нецветаев. $2 \times 2 = 4$ *и континуум гладких структур на четырехмерном пространстве.*

21 мая 1999 г. М. Ю. Любич. *Множество Мандельброта и проблема жесткости.*

Премия общества "Молодому математику" за 1998 год

Премии удостоены Н. В. Цилевич за работы по теории мер Пуассона–Дирихле и А. Б. Пушницкий за работы по функциям спектрального сдвига.

Далее следует отчет за первую половину 2002 года.

Заседание 22 января 2002 г. В. Е. Корепин (Stony Brook, США). *Квантовые компьютеры.*

В докладе были рассмотрены квантовая телепортация и алгоритм Дойча.

В САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ ОБЩЕСТВА

Заседание 19 августа 1999 г.

Открытие международной конференции "Топология и динамика: памяти В. А. Рохлина" в Международном математическом институте им. Л. Эйлера и ПОМИ РАН при участии Санкт-Петербургского математического общества. (См. отчет в "Успехах" 2000. Т. 55, № 4. С. 219–223.)

Заседание 5 октября 1999 г. Н. А. Вавилов. $(1+\varepsilon)$*-порождение конечных простых групп и гурвицевы группы.* В докладе рассказано о замечательных достижениях последних лет, связанных с порождением групп. Оказывается, конечная простая группа с вероятностью 1 порождается любыми двумя элементами порядков 2 и 3 и вообще любыми $1+\varepsilon$ элементами, где $\varepsilon > 0$. В частности, на этом пути обнаружено, что все группы достаточно большого ранга гурвицевы. Гурвицевы группы связывают арифметику и теорию римановых поверхностей и их изучению были посвящены сотни работ, но до 1997 года не было известно ни одного примера гурвицевых групп ранга $\varepsilon > 4$.

В члены общества приняты: Maurice de Gosson, Г. Б. Михалкин, С. Е. Рукшин, А. И. Шепелявый.

Заседание 26 октября 1999 г. Компьютеры в математических исследованиях.

1. Н. Н. Васильев. *Компьютерная алгебра и Интернет.*
2. Ю. В. Матиясевич. *Вычисление обобщённых многочленов Чебышёва на компьютере.*

Заседание 28 октября 1999 г. Совместное заседание общества и общего семинара ПОМИ.

Мартин Дэвис (США). *Универсальный компьютер Алана Тьюринга.*

Имя Мартина Дэвиса хорошо известно в нашей стране благодаря его вкладу в отрицательное решение десятой проблемы Гильберта. Он является автором нескольких книг, одна из которых (по нестандартному анализу) переведена на русский язык.

Докладчик рассказал о своих размышлениях о роли трудов специалистов в области математической логики в связи с наступающей компьютерной эрой. В 2000 году должна выйти его книга на эту тему. В докладе акцент сделан на математическом творчестве Алана Тьюринга. Было рассказано о роли, которую оно сыграло в развитии универсальных электронных цифровых машин.

Заседание 16 ноября 1999 г. Заседание, посвященное памяти А. Д. Александрова (1912–1999). На заседании выступили: А. М. Вершик, А. Л. Вернер, Н. Н. Уральцева, И. Х. Сабитов, Н. А. Шанин, Л. В. Никишова, И. А. Ибрагимов, Л. А. Вербицкая, А. А. Иванов, И. В. Степанов, А. И. Назаров, А. Н. Борисова, Д. А. Медведева.

Были зачитаны тексты выступлений В. А. Залгаллера, А. В. Погорелова, Ю. Г. Решетняка.

Состоялось присуждение премии общества "Молодому математику" за 1999 год. По решению общества премия присуждена Г. Б. Михалкину за работу "Поверхности в трехмерном пространстве и их амебы".

На заседании состоялось вручение премий, присужденных Германским математическим обществом (DMV) по рекомендации правления СПбМО, следующим молодым математикам С.-Петербурга:

1. Бондарко Михаилу Владимировичу,
2. Иванову Сергею Владимировичу,
3. Подкорытову Семёну Сергеевичу.

В члены общества приняты В. А. Арзуманян, Н. К. Косовский.

Заседание 7 декабря 1999 г.

Н. Е. Мнёв. *О проблеме Александера в кусочно-линейной топологии.*

Дж. В. Александеру принадлежит постановка следующей до сих пор не решённой проблемы: *Верно ли, что любые две геометрические триангуляции симплекса обладают общим геометрическим звездным подразбиением*? Нерешенность этой проблемы повлияла на основания комбинаторной топологии: понятие комбинаторного многообразия оказалось недостаточно гибким, а теория сглаживания кусочно-линейных многообразий и описание характеристических классов до сих пор не стали конструктивными. В докладе рассмотрен новый подход к проблеме.

Заседание 23 декабря 1999 г. Совместное заседание общества и Общего семинара ПОМИ. Лекция лауреата премии общества "Молодому математику" за 1999 г.

Г. Б. Михалкин. *Поверхности в трехмерном пространстве и их амебы.*

Амебой гиперповерхности в комплексном торе $\mathbb{C}_0^n$ называется образ этой гиперповерхности при отображении $\mu\colon (x_1,\dots,x_n \to (\log|x_1|,\dots,\log|x_n|)$. Амеба принимает особенно интересную форму в случае вещественной (т.е. инвариантной по отношению к комплексному сопряжению) амебы. В докладе будет отдельно рассмотрен случай $n=3$ и сформулирована новая теорема о топологии поверхностей в вещественных торических 3-многообразиях.

Заседание 11 января 2000 г. Совместное заседание общества и Общего семинара ПОМИ Заседание, посвященное памяти Анатолия Георгиевича Изергина (1945–1999). Выступили Н. Боголюбов, П. Кулиш, А. Вершик.

Заседание 23 марта 2000 г.

В. Г. Осмоловский. *Вариационные задачи о фазовых переходах в механике сплошных сред.*

Задача, о которой было рассказано в докладе, относится к вариационным задачам и выпуклым функционалам. Исследуются вопросы существования решений, их зависимости от внутренних параметров задачи, а также вопрос о возникновении двухфазовых состояний равновесия.

Заседание 11 апреля 2000 г. Заседание, посвященное памяти Пала Эрдеша (1913–1996). Демонстрировался видеофильм об Эрдеше. С комментариями и воспоминаниями выступили Ю. В. Матиясевич и А. М. Вершик.

В члены Общества приняты: С. М. Машарский, И. П. Соловьев.

Заседание 30 мая 2000 г.

Erling Størmer (Oslo, Norway). *Вариационный принцип для одного класса асимптотически абелевых C^*-алгебр.*

Рассматривается понятие давления для C^*-динамических систем и доказывается некоммутативный аналог вариационного принципа в энтропийной теории таких систем для некоторого класса AF-алгебр. При этом применяется некоммутативное обобщение энтропии относительно инвариантного состояния на алгебре, предложенное Конном–Нарнхофером–Тиррингом. В частности, показано, что топологическая энтропия Войкулэску совпадает с максимальной энтропией состояний, причем (конечный) максимум достигается на состояниях, являющихся следами.

В члены общества принят С. А. Ягунов.

Заседание 4 сентября 2000 г. Совместное заседание общества и Общего семинара ПОМИ.

А. А. Суслин. *Алгебраическая K-теория и мотивные когомологии.*

Заседание 7 сентября 2000 г. Совместное заседание общества и Общего семинара ПОМИ, посвященное памяти Сергея Васильевича Керова (1946–2000).

Выступили А. А. Лодкин, А. М. Вершик, Г. И. Ольшанский.

Заседание 11 сентября 2000 г. Совместное заседание общества и Общего семинара ПОМИ.

Б. Б. Венков. *Сферические схемы и теория Вороного.*

Заседание 31 октября 2000 г. Совместное заседание общества и Секции математики Дома Ученых Компьютерные технологии дистанционного обучения математике (рассказ об обучающих системах и их демонстрация).

1. А. И. Кириллов (Москва, МЭИ). *Системы символьной математики и их значение для математического образования инженеров.*

Продемонстрирован пакет Word-CAS Interface, а также пакет Решебник ВМ для обучения решению задач по высшей математике, построенный на основе Word-CAS Interface.

2. А. Б. Пирожников, С. Ю. Славянов (СПбГУ). *SFTools – база знаний по специальным функциям.*

База знаний представляет собой древовидно организованную поисковую систему, включающую гипергеометрические функции, функции Гойна, трансценденты Пенлеве, ортогональные многочлены.

С сообщением о деятельности издательства выступил представитель Научно-издательского центра “Регулярная и хаотическая динамика” С. Кузнецов.

Заседание 21 ноября 2000 г. Совместное заседание общества и Секции математики Дома Ученых. Выступления лауреатов премии общества “Молодому математику”

1. Н. В. Цилевич. *Бесконечномерный аналог меры Лебега и некоторые свойства гамма-процесса.*

В докладе излагаются результаты совместной работы с А. М. Вершиком и М. Йором. Определяется сигма-конечная мера на пространстве дискретных мер на измеримом пространстве, которая эквивалентна закону классического гамма-процесса и инвариантна относительно бесконечномерной группы мультипликаторов. Эта мера была впервые открыта в работах Вершика–Гельфанда–Граева по теории представлений групп токов, однако, в данной работе она строится явно, исходя из свойств гамма-процесса. Указанное свойство инвариантности является прямым обобщением соответствующего свойства лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$, что и позволяет считать построенную меру бесконечномерной мерой Лебега. Она обладает рядом других замечательных свойств, некоторые из которых рассмотрены в докладе.

2. О. В. Демченко. *Формальные группы и символ Гильберта.*

Классическое понятие символа Гильберта может быть обобщено на случай формальных групп. Задача явного вычисления этого символа связана с именами таких математиков как Куммер, Артин, Хассе, Шафаревич, Ивасава, Вайлс. Доклад посвящен построению одной из наиболее полных явных формул для обобщённого символа Гильберта. Ключевой идеей здесь являются классификационные теоремы, полученные докладчиком и связывающие два важнейших класса формальных групп: формальные группы Любина–Тэйта и формальные группы Хонды.

Заседание 12 февраля 2001 г. Совместное заседание ПМО и Секции математики Дома Ученых. Сумеем ли мы спасти традиции математических школ Ленинграда–Санкт-Петербурга?

Необычайно высокий уровень российской математики признан во всем мире. Особенно ясно это стало после того, как наступило время открытого и беспрепятственного общения ученых нашей страны с учеными других стран. Однако новое время принесло и новые проблемы, и сейчас можно говорить о тяжелейшей ситуации, ставящей в повестку дня вопрос о спасении нашей математики и ее замечательных традиций. Проведенное недавно изучение списка успешно окончивших мат-мех студентов за 1994–1999 годы показывает, что только небольшая их доля осталась в математике и совсем немногие из них – в России. В первую очередь речь идет о том, чтобы удержать хотя бы часть талантливой молодежи для научной работы в составе различных научных школ, существующих в нашем городе. Не менее остра проблема поддержания должного уровня математического образования в Университете, аспирантуре, специализированных средних школах в связи с отъездом на постоянную работу в другие страны многих ведущих математиков. Без этого невозможно воспроизводство поколений математиков. Авторитет российской математики достаточно высок, к мнению и оценкам нашей математической общественности прислушивается весь математический мир, однако оно до сих пор не услышано властью. Выход из положения должны искать и найти мы сами.

На заседании обсуждалась драматическая ситуация, сложившаяся в математике (как и в науке вообще) в Петербурге и стране, и возможные пути ее облегчения. Отдавая отчет в невозможности кардинального исправления ситуации без изменения государственного подхода к науке и образованию, участники заседания сосредоточились на поиске реалистических мероприятий, способных содействовать сохранению талантливой молодежи и научных математических школ. В обсуждениях участвовали А.М. Вершик, Э.А. Тропп, Г.А. Леонов, В.М. Бабич, А.В. Шишлов, И.А. Ибрагимов, Ю.А. Матиясевич, В.Ф. Демьянов, А.А. Лодкин, Д.Н. Ленков, Е.Е. Жукова, М.Я. Пратусевич, Б.Б. Лурье, Э.А. Гирш, Н.А. Нецветаев, В.М. Гольховой, А.И. Храбров, Л.И. Брылевская. На заседании был свободный обменом мнениями и полемика. Ниже приводятся краткие выдержки из прозвучавших соображений.

В числе предлагавшихся законодательных инициатив, которые следовало бы продвигать, были следующие:

- создание законодательной базы для спонсорства (освобождение от налогов);
- переход на платное высшее образование, когда государство выдает кредит всем обучающимся, а выпускник его постепенно возвращает при наличии высокой зарплаты, причем государство погашает долг тем, кто работает в госучреждениях (австралийский опыт).

Из инициатив министерского уровня предлагалось:

- создать именные стипендии (Гос. Думы, Президента, и т.д.) для молодых ученых;
- создать некоторое (возможно, небольшое) число хорошо оплачиваемых ставок для математиков, в том числе финансируемых из внебюджетных фондов, для поддержки высокого уровня преподавания специальных предметов;
- защитить физико-математические школы от нововведений типа сокращения количества часов и введения 12-тилетки, придать особый статус таким школам, сделать их более весомыми в глазах общества, чтобы выпускники таких школ получали общественное признание (пока, наоборот, получают отсутствие золотых медалей);
- укрепить и использовать для взаимной пользы связь с уехавшими на Запад нашими математиками и, в частности, использовать их заинтересованность в обучении здесь своих детей, а также привлекать диаспору к помощи книгами и к получению бесплатного доступа к сетевым ресурсам типа MathSciNet.

Высказывались другие инициативы, требующие юридической подготовки:

- поддержать идею создания Академического университета как надстройки над аспирантурой РАН;
- договариваться с западными университетами о предоставлении возможности нашим ученым работать часть времени за границей, а часть – в России;
- создавать небольшие элитные структуры с особым статусом, при сотрудничестве с существующими институтами.

Из инициатив, относящихся к компетенции руководства университета, факультета, ПОМИ, назывались следующие:

- организация совместной аспирантуры с западными университетами (аспирант имеет двух руководителей и проводит часть времени за границей, часть в России, финансирование совместное);
- расширение платного обучения иностранных студентов на мат-мехе;
- совершенствование программы в университете и аспирантуре. В частности, избавление студентов и аспирантов от непрофессионального или излишнего преподавания гуманитарных предметов, предоставление возможности сдавать тест по иностранному языку без необходимости его обязательного изучения именно в университете, замена обязательной физкультуры расширением сети спортзалов;
- присвоение математикам дополнительной квалификации "программист" для создания лучших перспектив трудоустройства и повышения конкурса на факультет.

Кроме того, говорилось о том, что

- руководители должны обеспечивать научные контакты своих студентов с западными уче-

ными, возить их на конференции;
- нужно более эффективно использовать ММИ им. Эйлера для приглашения иностранных коллег (в том числе для чтения коротких курсов);
- полезно организовывать крупные проекты (съезды, конференции) в Петербурге, способные привлечь финансовую поддержку и создать привлекательный имидж петербургской математики, необходимо сохранять, поддерживать, организовывать семинары;
- необходимо больше заниматься популяризацией математики, как среди молодежи, так и среди законодателей и потенциальных спонсоров; создавать научно-популярные брошюры, написанные специалистами; более активно обращаться к обществу напрямую, без посредников, искажающих наши проблемы и вызывающих у общества раздражение;
- шире распространять информацию о перспективах трудоустройства и условиях будущей работы математиков, проникать на нетрадиционные "рынки" студентов, устраивать летние лагеря для иностранных школьников;
- восстановить производственную практику в физ-матшколах, базирующуюся в ПОМИ и университете и конкурирующую с аналогичными программами других ВУЗов;
- поддерживать систему школьник-студент-аспирант-доцент-профессор, реформируя олимпиадно-кружковскую систему, которая сейчас порой отпугивает от математики часть школьников, неудачно выступивших на олимпиаде;
- создать математический лекторий для школьников и учителей, оказывать методическую поддержку "обычным" школам.

Перед заседанием на сайте общества http://www.mathsoc.spb.ru была открыта дискуссия по обсуждавшейся тематике. Там же помещен более подробный отчет о заседании.

Заседание 3 апреля 2001 г. В. А. Малышев (Москва). *Дискретная двумерная квантовая гравитация.*

Математически речь идет о просто формулируемых комбинаторных и вероятностных задачах с растущими графами на поверхностях.

Заседание 22 мая 2001 г. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов (Москва). *Идемпотентная математика и математическая физика.*

Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее "классический аналог" – идемпотентная математика, т.е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Для идемпотентных полуполей выполнены все стандартные аксиомы кроме наличия вычитания; вместо этого выполняется свойство идемпотентности сложения: $x + x = x$. Типичным примером является алгебра Max-Plus, состоящая из вещественных чисел (и символа "минус бесконечность", играющего роль нуля) и имеющая операцию $\max$ в качестве сложения и обычное сложение в качестве (нового) умножения.

Переход от традиционной математики к идемпотентной можно рассматривать как процедуру деквантования при чисто мнимых значениях постоянной Планка. При этом уравнение Гамильтона–Якоби можно рассматривать как идемпотентную версию уравнения Шрёдингера, а вариационные принципы механики – как идемпотентную версию известного подхода Р. Фейнмана к квантовой теории на основе интегралов по траекториям. Идемпотентный принцип суперпозиции состоит в том, что многие задачи и уравнения (включая уравнения Гамильтона–Якоби и Беллмана, т.е. основные уравнения классической механики и теории оптимизации) являются линейными над подходящим идемпотентным полуполем или полукольцом. Это сильно облегчает анализ решений и позволяет заимствовать идеи из математической физики и других разделов математики. Имеется и (эвристический) идемпотентный принцип соответствия в духе принципа соответствия Н. Бора в квантовой теории. Это означает, что важным и интересным понятиям и результатам традиционной математики соответствуют важные и интересные понятия и результаты в идемпотентной математике. Например, идемпотентной версией преобразования Фурье является преобразование Лежандра.

Идемпотентная математика продвинута весьма далеко (в частности, построен идемпотентный функциональный анализ) и имеет многочисленные приложения (в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления).

Заседание 24–28 сентября 2001 г. Сессия, посвященная 200-летию М. В. Остроградского, проведенная при участии Санкт-Петербургского математического общества.

Заседание 25 сентября 2001 г. Совместное заседание общества и секции "История математики и механики" конференции.

1. И. Е. Лопатухина. *Основные этапы жизни и научной деятельности М. В. Остроградского.*

2. В. М. Тихомиров (Москва). *М. В. Остроградский и вариационное исчисление.*

3. Ю. З. Алешков. *Методы Остроградского в математической физике.*

4. Л. И. Брылевская. *Миф об Остроградском: правда и вымысел.*

Заседание 2 октября 2001 г.

Р. И. Григорчук (Москва). *Случайные блуждания на группах и гипотеза Атьи об L_2-числах Бетти.*

Случайные блуждания на "группах мигающих лампочек" (т.е. сплетениях, $\wr$ (wreath product), целочисленных решеток и группы порядка два) впервые были рассмотрены А. М. Вершиком и В. А. Каймановичем в 1983 году. Например, ими было доказано, что граница Пуассона для таких групп тривиальна в случае, когда размерность решетки равна 1 или 2, и нетривиальна в случае более высоких размерностей.

В 1999 году докладчик в совместной работе с А. Жуком вычислил спектральную меру дискретного оператора Лапласа на группе $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (для специальной системы образующих). Неожиданно оказалось, что она дискретна. Таким образом был обнаружен первый пример группы с нетривиальной дискретной компонентой в спектральной мере. Существенным моментом в решении этого вопроса оказалось представление $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ как группы, порожденной автоматом с двумя состояниями.

В 2000 году в совместной работе с П. Линнелом, Т. Шиком и А. Жуком докладчик применил результат о спектральной мере к построению семимерного замкнутого многообразия, у которого третье L_2-число Бетти равно $1/3$. Тем самым был дан ответ на вопрос Атьи о существовании многообразия с нецелым L_2-числом Бетти, а также опровергнута так называемая Сильная гипотеза Атьи.

Заседание 9 октября 2001 г. Распорядительное заседание общества

1. Отчёты правления, казначея и ревизионной комиссии.

2. Выборы президента, вице-президентов, правления и ревизионной комиссии.

3. Вручение премий общества "Молодому математику" за 2001 год С. Г. Крыжевичу и А. В. Малютину. Краткие сообщения лауреатов.

Состав Правления и других органов Общества, выбранных 9 октября 2001 г.:

Президент: А. М. Вершик.

Вице-президенты: Ю. В. Матиясевич, С. Ю. Пилюгин, Н. Н. Уральцева.

Правление: В. М. Бабич, М. Ш. Бирман, В. С. Буслаев, О. Я. Виро, М. А. Всемирнов, М. И. Гордин, И. А. Ибрагимов, С. В. Кисляков, Г. А. Леонов, М. А. Лифшиц, Н. Ю. Нецветаев, Л. Д. Фаддеев, В. П. Хавин, А. В. Яковлев, В. А. Якубович.

Ученый секретарь: А. А. Лодкин.

Казначей: Б. Б. Лурье.

Ревизионная комиссия: О. А. Иванов, А. И. Назаров, Г. С. Осипенко.

Утверждены составы комиссий общества: программной, школьной, студенческой, по электронным средствам, библиотечная, по истории математики.

Ответственным редактором "Трудов СПбМО" избрана Н. Н. Уральцева.

Заседание 27 ноября 2001 г.

А. В. Малютин. *Нормальные формы группы кос.*

В литературе описаны несколько нормальных форм для групп кос – формы Артина, Гарсайда, Терстона, Бирман–Ко–Ли. Открытие каждой из них позволяло по-новому взглянуть на структуру группы.

В докладе было рассказано о новом семействе регулярных нормальных форм в группе кос, содержащем, в частности, полные стабильные нормальные формы и нормальные формы, все слова которых являются редуцированными в смысле Деорнуа.

Заседание 4 декабря 2001 г.

А. В. Малышев (Рыбинск). *Клеточная структура пространства вещественных полиномов.*

Для пространства вещественных полиномов, компактифицированного бесконечно удаленной точкой, построены клеточные разбиения, в которых полиномы, принадлежащие одной клетке, имеют одинаковую структуру корней на прямой, полупрямой и отрезке. В случае отрезка клеточное разбиение пространства полиномов степени n получается в результате приклеивания n-мерного октаэдра к n-мерному тетраэдру посредством симплициального отображения границы октаэдра на границу тетраэдра. Это позволяет осуществить линеаризацию полиномов ломаными и свести изучение топологии некоторых алгебраических многообразий к изучению топологии кусочно-линейных объектов. В качестве приложения дается классификация уравнений Абеля, возникающих в задаче чебышёвской аппроксимации с фиксированными коэффициентами.

Математический лекторий для студентов

14 апреля 2000 г.

Н. Н. Вояковская. *Международные студенческие олимпиады по программированию.*

23 ноября 2000 г.

А. А. Лодкин. *Математическая теория квазикристаллов.*

15 февраля 2001 г.

С. В. Фомин (СПИИРАН и Университет Мичигана, США). *Критерий полной положительности.*

27 октября 2001 г.

С. В. Дужин. *О точках, прямых и кривых.*

1 октября 2001 г.

А. И. Назаров. *Симметрия и асимметрия решений экстремальных задач.*

Конференции в Международном математическом институте им. Л. Эйлера

Симпозиум "Теория дифференциальных уравнений в частных производных и специальные разделы теории обыкновенных дифференциальных уравнений", посвященный 150-летию со дня рождения С. В. Ковалевской (11–15 мая 2000 г.).

Ежегодный международный семинар "Дни дифракции 2000" (29 мая – 1 июня 2000 г.).

Математические модели техно-экономических процессов: проблемы экономического роста и инновационная динамика (7–11 июня 2000 г.).

Арифметическая геометрия (20–26 июня 2000 г.).

Конференция по применениям компьютерной алгебры IMACK ACA 2000 (25–29 июня 2000 г.).

Классический анализ, теория операторов, геометрия банаховых пространств, их взаимодействие и приложения (13–17 мая 2001 г.).

Годичный семинар "Дни дифракции" (29–31 мая 2001 г.).

Конференция "Стохастический анализ и смежные вопросы" (4–10 июня 2001 г.).

Семинар "Динамические обратные задачи" (18–23 июня 2001 г.).

3-я конференция по проблемам логико-лингвистического контроля динамических объектов (DOLLC'2001, 18–22 июня 2001 г.).

3-я международная конференция ПОМИ-Флоренция по квантовым группам и интегрируемым системам, посвященная Анатолию Георгиевичу Изергину (1945–1999). (2–6 июля 2001 г.).

Летняя Европейская школа 2001 в России (NATO Advanced Study Institute): Асимптотическая комбинаторика с приложениями к математической физике (9–22 июля 2001 г.).

10-я летняя петербургская встреча "Математический анализ" (22–26 августа 2001 г.).

Семинар "Анализ стохастических систем и статистические модели" (26–31 августа 2001 г.).

Заседание 26 февраля 2002 г. С. Г. Крыжевич. *Об усилении некоторых классических результатов теории устойчивости.*

Известны классические результаты Ляпунова, Перрона и других авторов об условной устойчивости решений дифференциальных систем по первому приближению и об асимптотических свойствах решений в зависимости от линейной части и нелинейности. Докладчиком введены классы так называемых слабо гиперболичных линейных систем, включающие в себя как правильные, так и гиперболические системы. Получены теоремы об условной устойчивости решений в зависимости от коэффициентов слабой гиперболичности линейной части и порядка малости нелинейного возмущения. Эти результаты являются обобщением теорем Ляпунова и Перрона.

Заседание 2 апреля 2002 г. А. И. Нейштадт (Москва). *О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях.*

Затягивание потери устойчивости – интересное, важное и не до конца еще понятное явление в динамике систем с медленно изменяющимися параметрами. Оно состоит в следующем.

Пусть система, зависящая от параметра, имеет при каждом фиксированном значении параметра невырожденное равновесие. Пусть при каком-то критическом значении параметра это равновесие теряет устойчивость: при значениях параметра, меньших критического, равновесие асимптотически устойчиво в линейном приближении, а при значениях параметра, больших критического – неустойчиво. Добавим к задаче динамику самого параметра: пусть он медленно растет со временем и проходит через указанное критическое значение. Оказывается, что если система аналитична, то потеря устойчивости неизбежно затягивается: притянувшаяся к равновесию при значениях параметра, меньших критического, система остается в окрестности потерявшего устойчивость положения равновесия еще долгое время, за которое параметр успевает измениться на конечную величину, не зависящую от скорости изменения параметра.

Это затягивание потери устойчивости – свойство именно аналитических систем, в типичных бесконечно дифференцируемых системах срыв с потерявшего устойчивость равновесия происходит вблизи критического значения параметра. Так что в явлении затягивания материализуется отличие аналитических систем от бесконечно дифференцируемых. Затягивание разрушается очень малым шумом; тем не менее оно наблюдается в компьютерных и реальных экспериментах.

Заседание 8 апреля 2002 г. Совместное заседание общества и Общего семинара ПОМИ.
Ю. С. Ильяшенко (Москва). *Инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта.*

Проблема состоит в оценке числа предельных циклов полиномиальных векторных полей, близких к интегрируемым. Основная задача связана с оценкой числа нулей абелевых интегралов от полиномиальных 1-форм по овалам вещественного многочлена на плоскости. Эта задача, лежащая на границе между алгебраической геометрией, комплексным анализом и дифференциальными уравнениями, исследовалась многими авторами: Ю. Ильяшенко (1969), Г. Петровым, А. Варченко, А. Хованским (80-е годы), Д. Новиковым, С. Яковенко (90-е). В докладе рассказано об этих исследованиях, а также о недавней работе А. Глуцюка и докладчика.

Заседание 23 апреля 2002 г. *Дискуссия о планирующейся реформе школьного образования.*

Не отрицая необходимость улучшения школьного и, не в последнюю очередь, математического образования, участники заседания высказали серьёзную обеспокоенность возможным разрушительным эффектом реформы, которая разрабатывается без привлечения ведущих учёных.

На заседании выступили А. М. Абрамов (Москва), Б. М. Макаров, М. И. Башмаков, В. А. Рыжик, Н. Н. Удальцова, А. Л. Вернер, А. М. Вершик, Ю. В. Матиясевич, А. А. Лодкин. Документы, имеющие отношение к конференции, помещены на странице `http://www.mathsoc.spb.ru/forum/reform02.html`.

Резолюция заседания. 23 апреля 2002 года состоялось заседание Санкт-Петербургского математического общества, посвященное обсуждению планирующейся реформы школьного образования. В заседании приняли участие известные математики и педагоги города. Собравшиеся выразили серьезную обеспокоенность в связи с документами, определяющими реформу образования.

Вызывают возражения узко ведомственный состав группы разработчиков и поспешность, с которой Министерство образования намерено претворять эти предложения в жизнь, затрачивая значительные средства на широкомасштабный эксперимент, результат которого, скорее всего, предрешен. Участники заседания отметили также недопустимо низкий уровень разработанных методических документов по математике.

Опубликованные документы свидетельствуют, что при коренном реформировании нашей школы, справедливо считающейся одной из лучших в мире, министерство ориентируется в основном на опыт американской системы образования, весьма отличной от нашей. Как видно из разработанных документов (и это уже отмечалось, в частности, в резолюциях Отделения ядерной физики РАН, Московского математического общества и ученого совета Математического института РАН), их авторы фактически настаивают на необходимости резкого снижения уровня знаний оканчивающих среднюю школу. Не ограничиваясь этим, они предлагают даже внести соответствующие поправки в Закон РФ об образовании и устранить само содержащееся в нем понятие "обязательный минимум содержания образования". Участники заседания выразили опасение, что столь радикальная реформа нашей школы может привести лишь к повсеместному резкому падению уровня среднего образования в России. Такое развитие событий необходимо предотвратить.

Собрание считает необходимым сделать следующее.

1. Признать неправильным, что такое затрагивающее всех членов общества мероприятие как радикальная реформа среднего образования начинает осуществляться без широкого обсуждения, на основе односторонних, поспешных и келейно принятых решений. Это тем более недопустимо, что Закон РФ об образовании (статья 1, пункт 3, и статья 7, пункт 5) требует, чтобы программы развития образования, государственные образовательные стандарты и их изменения разрабатывались на конкурсной основе.

2. Немедленно объявить мораторий на проведение начинающегося широкомасштабного эксперимента по реформе среднего образования.

3. Обратиться к Президиуму РАН с предложением создать комиссию из членов различных отделений академии с приглашением представителей ведущих университетов, педагогических университетов, РАО, АМН, учителей и общественности для изучения современного состояния среднего образования и возможных направлений его реформирования, учитывая отечественный и мировой опыт. Организовать широкое обсуждение выводов и рекомендаций этой комиссии, а также документов, разработанных Министерством образования.

Президент общества доктор физ.-матем. наук, профессор А. М. Вершик.

Резолюция опубликована в газете "Известия" за 31 мая 2002 г.

Заседание 27 мая 2002 г. Х. Цишанг (Бохум). *Минимальные трехмерные многообразия.* На совокупности трехмерных многообразий вводится отношение частичного порядка: $M \geq N$, если существует отображение $f\colon M \to N$ степени 1. Многообразие M называется минимальным, если из $M \geq N$ следует, что $N \cong S^3$ или $N \cong M$. Общая задача состоит в нахождении минимальных 3-многообразий или в определении, для данного многообразия, является оно минимальным или нет. Доклад посвящен решению задачи в последней формулировке для пространств Зейферта.

Оказывается, что кроме проективного пространства имеется еще 7 минимальных линзовых пространств. Кроме того, существует бесконечно много минимальных пространств Зейферта с конечной фундаментальной группой (призмовые многообразия); среди них – гомологическая сфера Пуанкаре, фундаментальная группа которой имеет порядок 120. Среди многообразий Зейферта с бесконечной фундаментальной группой имеется тоже бесконечно много минимальных. Все они малы в том смысле, что база расслоения Зейферта является сферой и число особых слоев равно 3. Подчеркнем, что у нас нет описания всех минимальных пространств Зейферта, но для заданного многообразия Зейферта мы умеем решать вопрос о минимальности. (Исследования проведены совместно с К. Хайат-Легранд, Ш. Вангом, С. В. Матвеевым.)

Заседание 18 июня 2002 г. В. А. Лифшиц (Остин, США). *Стабильные модели логических программ.*

Логическая программа – это множество выражений, называемых "правилами". Стабильные модели логической программы определяются как неподвижные точки антимонотонного оператора на множествах атомарных символов, ассоциированного с этой программой. Понятие стабильной модели было первоначально введено для описания поведения системы программирования PROLOG. В последние годы оно привело к разработке нового подхода к решению переборных задач. В докладе показано, как некоторые понятия теории графов могут быть описаны в терминах стабильных моделей.

Заседание 22 июня 2002 г. Совместное заседание общества и Российско-Германской конференции, посвященной 90-летию академика А. Д. Александрова.

Вечер воспоминаний об А. Д. Александрове.

На заседании выступили Ю. Г. Решетняк, Г. М. Идлис, А. Л. Вернер, Ю. Ф. Борисов, Н. А. Шанин, С. С. Кутателадзе, В. Н. Берестовский, А. И. Назаров, А. М. Вершик.

Математический лекторий для студентов

17 апреля 2002 г. В. М. Бабич. *Понятие функции в ее становлении.*

Премия общества "Молодому математику"

Премии за 1999 год удостоен Г. Б. Михалкин за работу "Вещественные алгебраические кривые, отображение моментов и амебы".

Премии за 2000 год удостоен О. Я. Демченко за работу "Арифметические свойства спаривания Гильберта на формальных группах Хонды".

Лауреатами премии за 2001 год стали:

С. Г. Крыжевич за работы по теории возмущеных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;

А. В. Малютин за работы по группам кос.

"Труды" и препринты общества

В "Трудах Санкт-Петербургского математического общества" публикуются статьи обзорного характера, научные статьи, посвященные изложению новых результатов, и очерки по истории математики. В 1998–2001 гг. вышли тома 5–8. Почти одновременно появляются английские переводы, издаваемые AMS. Статьи принимаются как от членов общества (в первую очередь), так и от других математиков (подробности и правила для авторов см. на сайте общества по адресу `http://www.mathsoc.spb.ru/rus/trudyr.html`).

В феврале 1999 г. организован электронный архив препринтов общества: `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint`. Тексты принимаются по адресу `pmo-prep@pdmi.ras.ru`. Ссылки на препринты доступны поисковой системе MPRESS сервера `http://euler.zblmath.fiz-karlsruhe.de/MPRESS` Европейской математической информационной службы EMIS.

Сайт общества

С 1996 г. существует сайт общества `http://www.mathsoc.spb.ru/rus`, который содержит обширную информацию:

- об обществе, его истории и текущей деятельности, о выдающихся математиках, чья деятельность связана с Петербургом–Ленинградом;
- о городских семинарах и предстоящих конференциях;
- о вакансиях для математиков в Петербурге и за рубежом;
- список членов общества (со ссылками на персональные страницы в Интернете);
- уже упомянутый архив препринтов.

Время от времени сайт общества предоставляется для дискуссий по злободневным вопросам математической жизни.

В САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Заседания Общества

Заседание 11 июля 2002 г. Совместное заседание Общества и Общего семинара ПОМИ, посвященное 70-летию М.З.Соломяка (институт Вейцмана, Израиль).

М. З. Соломяк. *О спектральных свойствах лапласиана на метрических графах.*

Заседание 24 сентября 2002 г. Г. ван Дейк (Лейден). *Обобщенные пары Гельфанда* (обзор).

Группа $G = SL(2,\mathbb{R})$ действует на верхней комплексной полуплоскости дробно-линейными преобразованиями, причем пространство L^2 разлагается (без кратности) в прямой интеграл неприводимых представлений. Это свойство было изучено и обобщено Гельфандом и другими на пары (G,K), где G – группа Ли, а K – компактная подгруппа. Аналогом верхней полуплоскости служит пространство G/K. Пары (G,K), для которых $L^2(G/K)$ разлагается без кратности, называются парами Гельфанда. Наиболее известные примеры получаются, если G – полупростая группа Ли, а K – максимальная компактная подгруппа. Обсуждено обобщение понятия пары Гельфанда на ситуацию, когда K – замкнутая, не обязательно компактная подгруппа G, и приведен ряд примеров.

Заседание 8 октября 2002 г. *Встреча с представителем издательства "Мир" Г.М. Цукерман.* Обсуждение плана издания математической литературы.

Заседание 15 октября 2002 г. Д. Сирсма (Нидерланды). *Полиномиальные функции и их поведение на бесконечности.*

По работе, выполненной совместно с М. Тибаром.

29 октября 2002 г. Совместное заседание Общества и Секции математики Дома Ученых.

К 200-летию со дня рождения выдающегося норвежского математика Нильса Хенрика Абеля.

Н. С. Ермолаева. *Жизнь и творчество Абеля.*

А. В. Яковлев. *Теорема Абеля об алгебраических уравнениях.*

В. А. Малышев (Рыбинск). *Интегралы с квадратическими иррациональностями.*

М. А. Семенов-Тян-Шанский. *Абелевы многообразия и интегрируемые задачи.*

К. В. Мануйлов. *Теорема Абеля об аддитивных свойствах абелевых интегралов и функций.*

5 ноября 2002 г. Совместное заседание Общества и Секции математики Дома Ученых.

С. К. Ландо (Москва). *Инварианты узлов и инварианты графов.*

Есть два принципиально различных способа сопоставить узлу в трехмерном пространстве граф. Первый из них состоит в том, чтобы рассмотреть проекцию узла на плоскость вдоль общего направления. В результате мы получаем регулярный граф на плоскости, все вершины которого имеют валентность 4, причем в каждой вершине выделены "проходная" и "переходная"

Предыдущий отчет о работе Санкт-Петербургского математического общества см. в УМН, т. 57, вып. 4.

пары противолежащих ребер. Второй подход принадлежит Васильеву и ассоциирует регулярный граф специального вида (хордовую диаграмму) с "особым" узлом, имеющим простые самопересечения. Хордовую диаграмму можно сопоставить и плоской проекции узла. Инварианты хордовых диаграмм, которые приводят к инвариантам узлов, должны удовлетворять определенным ограничениям. Эти ограничения эффективно переносятся на "графы пересечений" хордовых диаграмм, которые, по сути, произвольны. Пространство, натянутое на произвольные графы, наделено естественной структурой алгебры Хопфа, а накладываемые ограничения уважают эту структуру, что позволяет ввести на интересующем нас факторпространстве структуру фактор-алгебры Хопфа. В докладе рассказано о некоторых – весьма нетривиальных и далеких от ясного понимания – соотношениях между упомянутыми понятиями, приведено большое количество примеров инвариантов графов, порождающих инварианты узлов, а также высказаны некоторые гипотезы.

Заседание 18 февраля 2003 г. С. Ю. Пилюгин. *Орбитальное отслеживание.*

Пусть f – гомеоморфизм метрического пространства (X, dist). Фиксируем положительное число d. Последовательность $y = y_k$ называется *d-псевдотраекторией* гомеоморфизма f, если выполнены неравенства $\operatorname{dist}(f(y_k), y_{k+1}) < d$. Гомеоморфизм f обладает стандартным свойством отслеживания, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории y найдется точка x, удовлетворяющая неравенствам $\operatorname{dist}(f^k(x), y_k) < \varepsilon$. В докладе рассказано о введенных недавно орбитальных свойствах отслеживания, в которых вместо выполнения этих неравенств требуется выполнение либо включений $y \subset N(\varepsilon, O(x, f))$ или $O(x, f) \subset N(\varepsilon, y)$, либо неравенства $\operatorname{dist}_H(\operatorname{clos}(y), \operatorname{clos}(O(x, f))) < \varepsilon$, где $N(a, A)$ – a-окрестность множества A, $O(x, f)$ – траектория точки x в динамической системе, порождаемой гомеоморфизмом f, а dist_H – метрика Хаусдорфа. Рассказано также о некоторых (иногда весьма неожиданных) связях введенных свойств с глобальной качественной теорией динамических систем.

25 марта 2003 г. Совместное заседание Общества и Общего семинара ПОМИ.

Э. А. Гирш. *Полуалгебраические доказательства.*

Сложность доказательств для логики высказываний – активно развивающаяся область математики. Наличие доказательств, ограниченных по длине полиномом от размера доказываемого утверждения, означало бы равенство сложностных классов NP и coNP. Известны же лишь нижние (и верхние) оценки сложности доказательств для конкретных систем доказательств (и конкретных тавтологий, соответственно).

Первая часть доклада представляла собой введение в эту область и обзор известных систем доказательств и результатов о них.

Вторая часть доклада была посвящена результатам докладчика (совместным с Д. Ю. Григорьевым и Д. В. Пасечником), касающимся полуалгебраических (т.е. использующих рассуждения о полиномиальных неравенствах) доказательств. Например, вот доказательство принципа Дирихле:

$$\sum_{k=1}^{m}\biggl(\sum_{l=1}^{m-1} x_{kl}-1\biggr)+\sum_{l=1}^{m-1}\Biggl(\sum_{k=1}^{m}\biggl(\sum_{k\neq k'=1}^{m}(1-x_{kl}-x_{k'l})x_{kl}+(x_{kl}^2-x_{kl})(m-2)\biggr) + \biggl(\sum_{k=1}^{m} x_{kl}-1\biggr)^2\Biggr)=-1.$$

(В докладе было сказано, почему.) Доказательства же этого принципа во многих других системах имеют экспоненциальную (от количества кроликов m) длину.

8 апреля 2003 г. Совместное заседание Общества и Секции математики Дома Ученых.

Актуальные проблемы школьного математического образования.

М. И. Башмаков. Проект национального стандарта школьного математического образования.

А. Л. Семенов (МИПКРО). Стандарты по математике и информатике в общем контексте российского школьного образования.

В. А. Рыжик. Цели школьного математического образования.

М. Я. Пратусевич. О содержании профильного образования.

Дискуссия.

Как и на предыдущем заседании 23 апреля 2002 г. на ту же тему (см. УМН, т. 57, вып. 4, а также “Известия” за 31.05.2002), заседание приняло следующую резолюцию.

О модернизации школьного математического образования.

Санкт-Петербургское математическое общество видит необходимость совершенствования школьного математического образования, призывает членов общества активно участвовать в обсуждении путей его улучшения, готово внести свой вклад в решение проблем, возникающих в ходе модернизации всей системы образования. Общество разделяет обеспокоенность математической общественности Санкт-Петербурга происходящими изменениями в постановке школьного математического образования и озабочено необходимостью сохранения традиций высокого уровня математического образования, его роли и места в общем образовании, доступности для представителей всех слоев общества.

Общество принимает следующее решение.

1. Одобрить деятельность школьной комиссии по ряду важных направлений работы в школе – участие в подготовке стандарта школьного математического образования, проведение массовой игры-конкурса “Кенгуру” (577 тысяч участников в марте 2003 года), поддержка в создании членами общества школьных учебников, методическая работа с учителями.

2. Отметить снижение внимания к работе физико-математических школ города, утрату ряда завоеванных позиций (в частности, отмену традиционной формы выпускного экзамена, ослабление связей с математико-механическим факультетом Университета).

3. Поручить школьной комиссии направить в Министерство образования от имени Санкт-Петербургского математического общества письмо, в котором выразить

- *обеспокоенность математической общественности Санкт-Петербурга происходящими изменениями в постановке школьного математического образования;*
- *необходимость сохранения традиций высокого уровня математического образования, его роли и места в общем образовании, его доступности для представителей всех слоев общества;*
- *недопустимость принятия важных решений (утверждение стандарта образования, введение ЕГЭ, ограничение числа выпускаемых учебников, структура обучения в старшей школе) без предварительного и своевременного обсуждения математической и педагогической общественностью;*
- *готовность членов общества внести конструктивный вклад в решение проблем модернизации образования.*

4. Ходатайствовать перед Министерством образования о создании в Санкт-Петербурге регионального экспертного совета по математике.

Президент Санкт-Петербургского математического общества проф. А. М. Вершик

Председатель школьной комиссии общества академик РАО М. И. Башмаков

Заседание 15 апреля 2003 г. Лоран Лафорг (IHES, Франция, лауреат Филдсовской премии 2002 г.). *Покрытия многогранников, склеивание клеток Шуберта и компактификация конфигурационных пространств.*

Доклад представляет собой лекцию по проективной геометрии. При изучении компактификаций введенных Дринфельдом пространств модулей “штук” с уровневой структурой или (по Фалтингсу) локальных модулей многообразий Шимуры возникает задача о том, как компактифицировать факторы $PGL(r) \times \dots \times PGL(r)/PGL(r)$ эквивариантным образом. Предлагается общий метод такой компактификации. Он также применим в случае конфигурационных пространств матроидов. Все получающиеся таким образом компактифицированные схемы снабжены структурным морфизмом (который является гладким в случаях, когда факторов не более трех или когда ранг равен двум, но не в общем случае) над “торическим пучком”, точки которого являются покрытиями некоторого целочисленного многогранника. Имеется индуцированная стратификация, слои которой могут быть описаны в терминах склеивания тонких клеток Шуберта.

Все компактифицированные схемы имеют по крайней мере две модулярные интерпретации:

– как классификация эквивариантных векторных расслоений на некоторых торических многообразиях;
– как классификация определенных проективных рациональных многообразий с логарифмическими особенностями (которые обобщают "минимальные модели проективных пространств", введенные Фалтингсом).

Заседание 27 мая 2003 г. В. А. Тиморин (Москва). *Алгебра, построенная по многочлену объема простого многогранника.*

По всякому многочлену можно построить алгебру, профакторизовав алгебру дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами по идеалу, аннулирующему данный многочлен. В докладе сделан обзор методов и результатов элементарной теории простых многогранников, связанных с алгеброй, построенной по многочлену объема. Определение этой алгебры принадлежит Пухликову и Хованскому. Алгебра моделирует кольцо когомологий гладкого проективного торического многообразия. Многие теоремы алгебраической геометрии (включая теорему Римана–Роха, сильную теорему Лефшеца, билинейные соотношения Ходжа–Римана) имеют аналоги в элементарной геометрии простых многогранников и наиболее естественно формулируются в терминах многочлена объема.

Заседание 24 июня 2003 г. Я. М. Элиашберг (Станфордский университет, США). *Введение в симплектическую топологию: от теоремы Ролля до гомологий Флоера.*

Возникшая около 20 лет назад симплектическая топология оказалась сегодня связанной со многими областями математики и теоретической физики: от гамильтоновой динамики, топологии трех- и четырехмерных многообразий, алгебраической геометрии до теории интегрируемых систем и теории струн.

В докладе были обсуждены основные идеи симплектической топологии и некоторые ее приложения.

Заседание 9 сентября 2003 г. И. Б. Фесенко (Ноттингем). *Некоммутативная геометрия, нестандартная математика и теория эллиптических кривых с "вещественным умножением".*

В последние годы появился ряд работ, в которых техника так называемой некоммутативной геометрии применяется к изучению (коммутативных) теоретико-числовых структур: например, работа А. Конна по дзета-функции Римана, работы Ю. И. Манина и М. Марколли по аракеловской геометрии, модулярным символам и модулярным формам, работа Манина по гипотетической теории "вещественного умножения" как некоммутативной версии классической теории эллиптических кривых с комплексным умножением.

В докладе были объяснены некоторые из соответствующих структур и основных идей, а затем предложен новый, более универсальный, подход, который работает не только на уровне алгебраических структур, но и на уровне целостных арифметических структур.

Этот подход основывается на принципе гипердискретизации из нестандартной математики и его многочисленных приложениях. В ряде случаев теневой образ гиперкоммутативной конструкции должен быть тесно связан с некоммутативным описанием посредством обобщения известного в теории струн отображения Зайберга–Виттена.

Заседание 7 октября 2003 г. В. А. Васильев (Москва). *Когомологии пространства узлов и их комбинаторные формулы.*

Теория инвариантов узлов является лишь частью более естественной задачи вычисления кольца когомологий пространства узлов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Любой такой класс когомологий (например, инвариант) можно задать индексом пересечения с подходящим классом относительных гомологий в пространстве узлов. Комбинаторной формулой для него называют простой полуалгебраический цикл, реализующий этот класс гомологий. Наиболее известный пример комбинаторных формул для инвариантов – это диаграммы Поляка–Виро.

В докладе рассказано о вычислении старших классов когомологий и описан эффективный (т.е. не требующий моделирования непрерывных процессов, деформаций пространственных объектов, ray-tracing и пр.) комбинаторный алгоритм для нахождения комбинаторных формул (в том числе и для инвариантов). Этот алгоритм основан на аналогии теории узлов с комбинаторной теорией наборов аффинных плоскостей и часто является простейшим или единственным доказательством существования класса когомологий.

Заседание 21 октября 2003 г. Г. Ю. Панина. *Гиперболические виртуальные многогранники и гипотеза единственности в теории выпуклых поверхностей.*

Рассказаны и обсуждены контрпримеры к старой гипотезе: если радиусы главной кривизны поверхности гладкого трехмерного тела K всюду разделены постоянной C, то K есть шар радиуса C.

Доклад основан на работах А.В. Погорелова, И. Мартинеса-Мора и докладчика.

25 ноября 2003 г. Совместное заседание Общества и Секции математики Дома Ученых. *А.Н. Колмогоров, Дж. фон Нейман – математические гении XX века. К столетию выдающихся ученых.*

С докладами выступили: В. М. Тихомиров (Москва), А. М. Вершик. Были заслушаны выступления М. А. Семенова-Тян-Шанского, В. Сергеева (Москва), М. А. Красноперовой.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Международный математический институт им. Эйлера при участии Санкт-Петербургского математического общества.

Конференция памяти Л. В. Канторовича (1912–1986)

“Математика и Экономика: Старые проблемы и новые подходы”

8–13 января 2004 г.

Пленарные заседания.

В. Л. Макаров (Москва). *Оптимизация по Канторовичу и исчисление институтов.*

В. М. Полтерович (Москва). *Инновации, имитация и экономическое развитие.*

Б. Т. Поляк (Москва). *Метод Ньютона–Канторовича и его глобальная сходимость.*

Г. Ю. Трофимов (Москва). *Л. В. Канторович и теория экономического роста.*

Л. Клейн (Филадельфия). *Оценки продуктивности информационных технологий с точки зрения затрат – выпуска за последние три десятилетия на примере США.*

К. Шмидт (Париж). *Линейное программирование, теория игр: исторический обзор и прогнозы на будущее.*

М. Демпстер (Кембридж, Великобритания). *Стохастическая динамическая оптимизация.*

Дж. Гумерман (Санта Фе, США). *Адаптация и интенсификация сельского хозяйства доисторического американского юго-запада.*

Секция “Проблема Монжа–Канторовича”.

А. М. Вершик (С.-Петербург). *К истории метрики Канторовича и ее приложений в динамических системах.*

В. Гангбо (Атланта). *Приложения проблемы Монжа–Канторовича к кинетической теории.*

А. Шнирельман (Великобритания). *Проблема Монжа–Канторовича и гидродинамика.*

В. Л. Левин (Москва). *Проблема Монжа–Канторовича: точные решения и приложения к теории принятия решений.*

А. Н. Соболевский (Москва). *Оптимальные методы перемещения масс в космологии.*

И. Ярошевска (Краков). *Стабильность мер и решений дифференциальных уравнений и принцип максимума Канторовича–Рубинштейна.*

Секция “Физическая экономика”.

В. М. Сергеев (Москва). *Термодинамический подход к рыночному равновесию, рациональность, права собственности.*

Д. Смит (Санта Фе, США). *Классическая термодинамика и экономическая теория общего равновесия.*

Д. Лейтес (Стокгольм). *Параметры стабильности неголономных систем (от супергравитации до рыночной экономики).*

А. С. Кузьмин (Москва). *Классификация инвестиционных механизмов и математическое моделирование инвестиционных рынков.*

Р. Г. Хлебопрос (Красноярск). *Почему люди любят и ненавидят капитализм, и почему социализм невозможно уничтожить.*

Секция "Математико-экономические модели".

В. А. Васильев (Новосибирск). *О некоторых K-пространствах бесконечных кооперативных игр.*

В. И. Аркин (Москва). *Инвестирование в условиях неопределенности, налогообложение и проблема оптимальной остановки.*

В. И. Данилов (Москва). *Дискретная выпуклость на целочисленной решетке.*

А. А. Шананин (Москва). *Проблема интегрируемости в теории рационального поведения.*

В. Д. Матвеенко (С.-Петербург). *Теория экономической динамики российской экономики.*

В. М. Маракулин (Новосибирск). *Анализ равновесия в пространствах Канторовича.*

Э. А. Мухачева (Уфа). *Л. В. Канторович и задачи раскроя–упаковки*: 50 *лет становления и развития.*

С. Л. Печерский (С.-Петербург). *Некоторые приложения теории суперлинейных многозначных отображений к теории игр.*

С. М. Меньшиков (Амстердам). *Модель Канторовича – актуальность в наши дни.*

Секция "Функциональный анализ".

Г. Л. Литвинов (Москва). *Деквантизация и идемпотентный функциональный анализ.*

А. Иоффе (Хайфа). *О теореме Хана–Банаха–Канторовича.*

А. А. Флоринский (С.-Петербург). *О значениях векторнозначных мер.*

С. С. Кутателадзе (Новосибирск). *Путь и пространство Канторовича.*

Мемориальное заседание, посвященное Л. В. Канторовичу.

С. П. Новиков, Л. Д. Фаддеев, Э. Б. Ершов, А. М. Вершик, Н. А. Шанин и др.

24 февраля 2004 г. *Заседание, посвященное памяти профессора Г. И. Натансона* (1930–2003).

С воспоминаниями выступили: В. М. Бабич, В. С. Виденский, О. Л. Виноградов, И. К. Даугавет, В. В. Жук, Б. М. Макаров, Я. Г. Натансон, И. В. Недзвецкая, В. П. Одинец, А. Н. Подкорытов, М. А. Скопина, В. Л. Файншмидт, В. П. Хавин.

16 марта 2004 г. *Заседание, посвященное памяти академика О. А. Ладыженской* (1922–2004).

С воспоминаниями выступили: Н. Н. Уральцева, М. С. Бирман, Н. М. Ивочкина, Г. А. Серегин, А. Л. Скубачевский (Москва), А. В. Фурсиков (Москва), Э. А. Тропп, А. М. Вершик. Был показан видеофильм об О. А. Ладыженской.

Математический лекторий для студентов

5 ноября 2002 г. С. К. Ландо (Москва). *Что такое тангенс.*

28 ноября 2002 г. М. А. Лифшиц. *"Звездная пыль" и вероятность.*

19 сентября 2003 г. Ю. В. Матиясевич. *Десятая проблема Гильберта: что можно и что нельзя делать с диофантовыми уравнениями.*

25 марта 2004 г. С. К. Годунов (Новосибирск). *О гарантированной точности в спектральных задачах.*

Премия "Молодому математику"

Премии "Молодому математику" удостоены:

За 2002 год – А. Г. Эршлер за работу "Асимптотики характеристик случайных блужданий на разрешимых группах".

За 2003 год – А. Н. Зиновьев за работу "Обобщенные явные формулы Артина–Хассе и Ивасавы".

2005 г. март — апрель *т. 60, вып. 2(362)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Заседания Общества

Заседание 30 марта 2004 г. Н. А. Шанин. *Вариант математического анализа, не использующий понятие числового континуума.*

Понятия "натуральное число", "рациональное число", "алгебраическое число" таковы, что объекты, называемые этими терминами, обладают "индивидуальными заданиями" в виде слов в подходящих алфавитах.

Иначе обстоит дело с понятием "вещественное число". В теоретико-множественной математике это понятие не связывается с какими-либо "заданиями" подразумеваемых объектов посредством знакосочетаний. Его определение апеллирует (как и вся канторова теория бесконечных множеств в целом) к некоторым "далеко идущим" идеализациям результатов экспериментального познания природы и с этой точки зрения представляется "туманным".

В математических текстах встречаются разнообразные примеры "индивидуально заданных" иррациональных чисел – в частности, заданных в виде алгорифмов последовательного построения рациональных чисел, дополненных алгорифмически заданными регуляторами сходимости в себе таких последовательностей. Примеры этого рода "подсказали" используемое в конструктивной математике понятие "конструктивное вещественное число". Однако попытки достаточно отчетливого разъяснения "содержательного смысла" формального определения этого понятия наталкиваются на препятствия принципиального характера. Приходится признать это понятие, а также понятие конструктивной функции на конструктивном континууме "размытыми".

Несмотря на эти "размытости", предоставляемые математическим анализом (даже в его традиционном варианте) приложениям математики разнообразные теоретические модели часто оказываются "работоспособными", в частности, в задачах, требующих доведения процесса решения "до конкретного числа". Это означает, что в процессах применения таких математических моделей фигурируют процедуры "освобождения от бесконечностей".

Прослеживая "технологии" процедур этого рода, можно увидеть возможность такого варьирования базисных представлений теории функциональных пространств, в результате которого в широком классе случаев принципиального характера окажется ненужным использование общего понятия вещественного (конструктивного вещественного) числа.

"Варьированная" система понятий и представлений укладывается в рамки намеченной Л. Кронекером и более отчетливо очерченной Д. Гильбертом финитарной установки.

В докладе были детализированы сформулированные выше тезисы.

Предыдущий отчет о работе Санкт-Петербургского математического общества см. в УМН, 2004, т. 59, № 2, с. 199–204.

Заседание 20 апреля 2004 г. А. Д. Брюно (Москва). *Новое обобщение цепной дроби.*

Алгоритм разложения числа в обычную цепную дробь обладает многими замечательными свойствами. В том числе:

1. Он прост.
2. Он дает наилучшие рациональные приближения к числу.
3. Он периодичен для квадратичных иррациональностей.

В XVIII, XIX и XX веках были сделаны многочисленные попытки обобщить этот алгоритм на векторы (Эйлер, Эрмит, Якоби, Дирихле, Пуанкаре, Гурвиц, Брун, Минковский, Клейн, Вороной, Перрон, Скубенко, Арнольд и др.). Но пока так и не найден алгоритм, обладающий свойствами 1 и 2 и свойством

$3'$. Периодичность для кубических иррациональностей.

Только алгоритм Вороного обладает свойствами 2 и $3'$, но он довольно громоздок. Многогранники Клейна–Скубенко–Арнольда, хотя и дают геометрическую интерпретацию наилучших приближений, но не дают основы для хорошего алгоритма, что было выяснено в работах докладчика и В. И. Парусникова. Алгоритмические и геометрические концепции, заложенные в указанные обобщения, видимо, недостаточно отражали фундаментальные свойства цепной дроби.

В докладе предложена новая двумерная концепция цепной дроби, которая затем обобщается на трехмерную ситуацию и позволяет построить алгоритм, обладающий свойствами 1, 2 и $3'$. Рассмотрены примеры с подробными вычислениями по новому алгоритму.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Международный математический институт им. Л. Эйлера, при участии Санкт-Петербургского математического общества 8–13 июня 2004 г.

Международная конференция “Теория представлений, динамические системы и асимптотическая комбинаторика”, посвященная 70-летию со дня рождения А. М. Вершика

С докладами выступили М. Божейко (Вроцлав), Д. Бураго (США), Б. Вайс (Иерусалим), О. Я. Виро (Упсала), Д. Ю. Волков (С.-Петербург). Ф. Гёце (Билефельд), И. Гиварш (Рен), М. И. Гордин (С.-Петербург), М. И. Граев (Москва), Э. Джозеф (Реховот), А. Зелевинский (Бостон), И. Итенберг (Страсбург), В. Кайманович (Рен), И. Кантор (Лунд), Я. Квятковский (Торунь), А. А. Кириллов (Филадельфия), Г. Кун (Милан), М. Леманчик (Торунь), Г. Л. Литвинов (Москва), А. Мельников (Хайфа), Н. Е. Мнев (С.-Петербург), Ю. А. Неретин (Москва), Н. И. Нессонов (Харьков), С. П. Новиков (США), А. Окуньков (Принстон), Г. И. Ольшанский (Москва), Ф. В. Петров (С.-Петербург), Л. В. Прохоров (С.-Петербург), А. Регев (Реховот), Ж. Рено (Орлеан), К. Скау (Трондхейм), О. Г. Смолянов (Москва), А. Н. Тихомиров (Сыктывкар), Ж.-П. Тувено (Париж), А. В. Угланов (Ярославль), В. А. Устименко (Киев), Х. Ферстенберг (Иерусалим), С. Фомин (США), Г. Фрейман (Тель-Авив), А. Хованский (Торонто), К. Шмидт (Вена), Г. Б. Шпиз (Москва), М. Эмери (Страсбург), С. Юзвинский (США), Ю. В. Якубович (С.-Петербург).

Заседание 14 сентября 2004 г. Лауреат премии Общества за 2002 г. А. Г. Эршлер (Лилль, Франция). *Граница Пуассона случайных блужданий на группах.*

В докладе было дано описание границы Пуассона для класса групп, действующих на корневых деревьях. Построены первые примеры групп субэкспоненциального роста, допускающих случайное блуждание с нетривиальной границей. В качестве применения этих результатов найдены новые, близкие к точным оценки роста в некоторых субэкспоненциальных группах.

Заседание 19 октября 2004 г. Лауреат премии Общества за 2003 г. А. Н. Зиновьев. *Явные законы взаимности в локальной теории полей классов.*

Тема доклада восходит к классическим работам Э. Артина и Г. Хассе, в которых они впервые поставили задачу явного вычисления символа Гильберта. Ими были получены изящные явные законы взаимности в нескольких важных частных случаях для кругового локального поля. Эти работы послужили отправной точкой для целого ряда исследований в этой области. В результате сложилось два относительно независимых подхода к вычислению спаривания Гильберта в явном виде, которые приводят к явным формулам типа Артина–Хассе и формулам куммерова типа. В докладе был представлен обзор классических явных законов взаимности, принадлежащих к двум типам явных формул, и рассмотрены явные законы взаимности в высшей локальной теории полей классов. После краткого обзора многомерных локальных полей и топологических K-групп Милнора были представлены результаты автора. Для кругового расширения абсолютно неразветвленного стандартного многомерного полного поля из ранее доказанной формулы Востокова, принадлежащей к куммерову типу, были выведены обобщенные формулы Артина–Хассе и Ивасавы.

Заседание 9 ноября 2004 г. А. В. Зорич (Рен, Франция). *Иррациональные обмотки плоских поверхностей, тейхмюллеров геодезический поток и "машина времени".*

Считается, что из всех компактных поверхностей только тор может быть плоским. На самом деле плоская метрика может быть задана на поверхности любого рода, достаточно лишь спрятать лишнюю кривизну в несколько точек с коническими особенностями. Многие динамические системы в размерности 1 и 2 (перекладывания отрезков, биллиарды в многоугольниках, измеримые слоения) эквивалентны прямолинейным потокам на таких плоских поверхностях.

Плоская структура может быть задана голоморфной 1-формой на римановой поверхности; семейства плоских структур отвечают пространствам модулей голоморфных 1-форм. На пространстве плоских поверхностей действует группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Оказывается, для того чтобы описать динамику прямолинейного потока на индивидуальной плоской поверхности, достаточно найти орбиту соответствующей поверхности под действием группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

В первой части доклада речь шла о недавних результатах, полученных в этой области, и об открытых проблемах. Во второй части было рассказано о ренормализации для перекладывания отрезков и о том, как с помощью тейхмюллерова геодезического потока построить машину времени. В простейшем частном случае, когда плоская поверхность – обычный плоский тор, роль ренормализации играет алгоритм Евклида, машина времени превращается в разложение числа вращения иррационального потока в цепную дробь, а тейхмюллеров геодезический поток становится геодезическим потоком на верхней полуплоскости в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Заседание 30 ноября 2004 г. Совместное заседание Общества и Секции математики Дома ученых.

А. М. Вершик. *Универсальность и случайность в геометрии, комбинаторике и анализе.*

Хорошо известный в комбинаторике и логике факт состоит в том, что существует единственный универсальный граф и что при естественном определении понятия случайности случайный граф с вероятностью единица является тем самым универсальным. Менее известно, что еще в 1924 году П. С. Урысон определил универсальное польское пространство, единственное с точностью до изометрии.

В последние годы докладчик исследовал это понятие, определил понятие случайного пространства и доказал факт, аналогичный упомянутому выше. Оказалось также, что в определенном смысле свойство универсальности типично: пополнение натурального ряда по типичной метрике есть пространство Урысона. Свойства универсального метрического пространства и особенно группы его изометрии связаны с интереснейшими проблемами из разных областей математики.

Заседание 7 декабря 2004 г. Совместное заседание Общества и Секции математики Дома ученых. *Ценности школьного математического образования и оценка его результатов.*

С сообщениями выступили М. И. Башмаков, О. Я. Виро, А. И. Плоткин, В. И. Рыжик и др.

Заседание 14 декабря 2004 г. А. М. Бородин (Caltech and Clay Mathematics Institute, USA). *Дискретные уравнения Пенлеве в теории вероятностей.*

Важные одномерные функции распределения в разнообразных дискретных вероятностных моделях (такие как распределение длины наибольшей возрастающей последовательности случайных подстановок или время проницаемости в направленной перколяции) удовлетворяют рекуррентным соотношениям, известным как дискретные уравнения Пенлеве. Эти уравнения впервые были получены в работах по алгебраической геометрии об изоморфизмах проективной плоскости, раздутой в девяти точках. Связь между вероятностью и геометрией устанавливается с помощью теории изомонодромных преобразований линейных разностных уравнений.

Заседание 18 января 2005 г. *Распорядительное заседание Общества.*

С отчетами выступили президент общества А. М. Вершик, редактор "Трудов СПбМО" Н. Н. Уральцева, ученый секретарь А. А. Лодкин и председатель ревизионной комиссии А. И. Назаров.

На заседании был принят ряд предложений по дальнейшей работе Общества.

С отчетом президента и материалами заседания можно ознакомиться на интернет-сайте Общества `http://www.mathsoc.spb.ru/`.

В результате проведенных выборов были избраны:

Президент СПбМО: А. М. Вершик.

Вице-президенты: Ю. В. Матиясевич, С. Ю. Пилюгин, Н. Н. Уральцева.

Правление: В. М. Бабич, М. Ш. Бирман, В. С. Буслаев, О. Я. Виро, С. В. Востоков, Э. А. Гирш, М. И. Гордин, С. В. Дужин, И. А. Ибрагимов, С. В. Кисляков, Г. А. Леонов, М. А. Лифшиц, А. И. Назаров, Л. Д. Фаддеев, В. П. Хавин, Н. А. Широков, А. В. Яковлев.

Ученый секретарь: А. А. Лодкин.

Казначей: Б. Б. Лурье.

Ревизионная комиссия: А. Ю. Зайцев, И. Г. Зельвенский, М. В. Перель.

Редколлегия "Трудов СПбМО": Н. Н. Уральцева (отв. редактор), И. А. Ибрагимов (зам. отв. редактора), Б. А. Пламеневский (зам. отв. редактора), А. И. Кароль (отв. секретарь), В. И. Васюнин, А. М. Вершик, С. В. Востоков, Г. А. Леонов, И. В. Романовский, Т. А. Суслина.

Программная комиссия: А. М. Вершик, Ю. В. Матиясевич, С. В. Буяло, С. В. Дужин, М. И. Гордин, П. П. Кулиш, Н. Ю. Нецветаев, Н. К. Никольский, И. А. Панин.

Школьная комиссия: М. И. Башмаков, О. А. Иванов, С. В. Иванов, К. П. Кохась, Б. Б. Лурье, С. Е. Рукшин, В. А. Рыжик.

Студенческая комиссия: А. И. Генералов, Э. А. Гирш, М. А. Лифшиц, А. И. Назаров, С. Ю. Пилюгин, Н. Д. Филонов.

Электронные средства: А. А. Лодкин, С. М. Машарский, Н. В. Цилевич.

Библиотечная комиссия: Н. Е. Мнев, А. В. Малютин, Ф. Л. Назаров, А. Н. Подкорытов.

Комиссия по истории математики: В. М. Бабич, Л. И. Брылевская, В. С. Виденский, Н. С. Ермолаева, М. А. Семенов-Тян-Шанский.

Почетным членом Общества избран Н. А. Шанин.

Премия "Молодому математику"

Премии "Молодому математику" за 2004 год удостоены:

А. Д. Баранов за работу "Неравенства типа Бернштейна для модельных пространств и их приложения";

Д. С. Челкак за работы по обратной задаче для возмущенного гармонического осциллятора.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

В Санкт-Петербургском математическом обществе

Заседания общества

Заседание 1 марта 2005 г. Б. З. Мороз (Институт Математической физики Макса Планка, Бонн). *О некоторых вопросах теории диофантовых уравнений.*

В этом обзорном докладе сделана попытка описать теорию диофантовых уравнений с точки зрения аналитической теории чисел. Помимо обсуждения общих результатов, с одной стороны, показывающих "универсальность" диофантовых уравнений (как известно, любое перечислимое множество совпадает с множеством положительных значений полинома с целыми коэффициентами) и, с другой стороны, позволяющих оценить число решений для широкого класса диофантовых уравнений, были приведены конкретные примеры из новейших работ.

В члены общества приняты: Е. А. Благовещенская, Т. Н. Рожковская, Д. С. Челкак.

Заседание 5 апреля 2005 г. П. Г. Зограф. *Теория Виттена–Концевича: от двумерной топологической гравитации до случайных деревьев.*

Доклад посвящен истории доказательства знаменитой гипотезы Виттена о числах пересечений на пространствах модулей алгебраических кривых, начиная с пионерских работ Виттена и Концевича и кончая результатами последнего времени Окунькова и Пандхарипанда. Рассказано, как благодаря этой гипотезе обнаружилась тесная связь между такими, на первый взгляд разобщенными, теориями, как алгебраическая геометрия (теория пересечений алгебраических циклов на пространствах модулей), теория интегрируемых систем (уравнения Кортевега–де Фриза), матричные интегралы и комбинаторика (теория Гурвица разветвленных накрытий двумерной сферы и перечисление случайных деревьев).

Заседание 19 апреля 2005 г. А. Д. Брюно (Москва). *Степенная геометрия как новая математика.*

Степенная геометрия – это новый уровень дифференциального исчисления, нацеленный на существенно нелинейные задачи. Для уравнений и систем уравнений (алгебраических, обыкновенных дифференциальных и в частных производных) степенная геометрия позволяет вычислить асимптотики решений, а также локальные и асимптотические разложения решений в бесконечности и вблизи любой особенности уравнений (включая пограничные слои и сингулярные возмущения).

Предыдущий отчет о работе СПбМО см. в УМН, **60**:2 (2005). Подробную информацию о деятельности Общества, полный список его членов, лауреатов премии молодому математику, выборные органы, перечень заседаний, документы, решения, отчеты о дискуссиях, история Общества, Пантеон и др. можно найти на сайте общества http://www.mathsoc.spb.ru.

Элементы плоской степенной геометрии для алгебраического уравнения предложил Ньютон (1680), а для обыкновенного дифференциального уравнения – Брио и Буке (1856). Пространственная степенная геометрия для нелинейной автономной системы ОДУ предложена автором (1962) и для линейного уравнения в частных производных – Михайловым (1963).

Предложено простое изложение основных концепций и алгоритмов степенной геометрии: носитель и многогранник уравнения, грани и укороченные уравнения, степенные и логарифмические преобразования уравнения и системы уравнений. Для примеров используется третье уравнение Пенлеве. Также был дан обзор некоторых приложений степенной геометрии: в уравнениях движения твердого тела с неподвижной точкой, в теории пограничного слоя на игле, в уравнении колебаний спутника.

Заседание 27 апреля 2005 г. Заседание общества в рамках конференции “Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и статистике”, посвященной 90-летию со дня рождения Ю. В. Линника. *Вечер воспоминаний об академике Ю. В. Линнике.*

На заседании выступили: А. Н. Андрианов, А. М. Вершик, А. А. Зингер, К. Кубилюс (Вильнюс), Л. П. Линник, В. А. Плисс, И. В. Романовский, А. Л. Рухин (Балтимор), Т. Тонков (София), М. Ютила (Турку).

Заседание 5 мая 2005 г. А. С. Хорошкин (Москва). *Кошулева двойственность для операд.*

Понятие операды естественно возникает при изучении операций в алгебраических структурах. Классические алгебраические структуры допускают естественную переформулировку на языке операд. Например, ассоциативная алгебра становится алгеброй над ассоциативной операдой, алгебра Ли – алгеброй над операдой Ли и т. д. Одно из замечательных свойств такого языка состоит в том, что почти все естественно возникающие операды кошулевы. Последнее свойство есть обобщение известного понятия кошулевости для алгебр. Кошулевость операды позволяет доказывать общие гомологические утверждения о произвольных алгебрах над ней, вводить понятие соответствующей гомотопической структуры и т. п.

Доклад носил обзорный характер.

В члены общества принят Ю. Н. Сирота.

Заседание 24 мая 2005 г. (совместное заседание с Общеинститутским семинаром ПОМИ). С. В. Буяло. *Теоремы вложения и невложимости в асимптотической геометрии.*

В асимптотической геометрии изучаются свойства метрических пространств, которые видны только издалека, на больших расстояниях. При этом локальная геометрия не играет никакой роли. Основной класс морфизмов – квазиизометрические отображения, т.е. отображения, билипшицевы во всех достаточно больших масштабах. Рассказано о нескольких инвариантах – крупномасштабных родственниках топологической размерности, – с помощью которых удалось решить ряд проблем вложения и невложимости в классе квазиизометрических отображений.

Заседание 14 июня 2005 г. С. М. Натанзон (Москва). *Топологические теории поля.*

Около двадцати лет назад в работах Г. Сигала, М. Атьи, Э. Виттена и других было замечено, что некоторые из моделей, возникающих в различных областях математической физики и математики, обладают одинаковыми топологическими свойствами, описываемыми довольно простой системой аксиом. Теории, удовлетворяющие этим аксиомам, и называются топологическими теориями поля. Важным примером двумерных топологических теорий поля является топологическая теория струн, претендующая на роль топологического фундамента единой теории поля. Другим примером двумерных топологических теорий поля являются числа Гурвица вещественных и комплексных алгебраических кривых.

В докладе дано алгебраическое описание двумерных топологических теорий поля. Доклад основан на совместной работе автора и А. В. Алексеевского.

На заседании были подведены итоги студенческого конкурса 2005 г.

Заседание 13 сентября 2005 г. А. А. Суслин. *Мотивные когомологии и гипотеза Блоха–Като.*

В докладе было рассказано о последних достижениях в теории мотивных когомологий – универсальной целочисленной теории когомологий, определенной для гладких многообразий над произвольным полем. В частности, рассказано о доказательстве гипотезы Блоха–Като, полученном недавно Воеводским и Ростом. Гипотеза Блоха–Като – одна из центральных гипотез алгебраической K-теории – связывает между собой K-группы, когомологии Галуа и (при $p = 2$) квадратичные формы.

Заседание 18 октября 2005 г. В. Я. Эйдерман (Москва). *Оценки картановского типа для потенциала Коши.*

В 1928 г. А. Картан получил оценку для размера плоского множества, на котором модуль многочлена с комплексными корнями превосходит заданное число. Эта лемма играет важную роль в теории функций; ее можно трактовать как оценку логарифмического потенциала с дискретной мерой, целочисленные заряды которой находятся в нулях многочлена и равны кратностям этих нулей. Методом Картана можно оценивать потенциалы и с другими *положительными* ядрами. Изучение размеров множества $Z(P,m) := \{z \in \mathbb{C} : |Cm(z)| > P\}$ для потенциала (преобразования) Коши $Cm(z) = \int C(\xi - z)^{-1}\,dm(\xi)$ с аналогичной мерой m было начато Макинтайром и Фуксом в 1940 г. (в этом случае потенциал Коши равен логарифмической производной соответствующего многочлена). Но поставленная ими задача была решена лишь в прошлом году в совместной работе Дж. Андерсона и докладчика (ДАН, 2005). Прогресс оказался возможным благодаря новому аппарату, развитому в последние 10 лет Мельниковым, Толсой и другими, приведшему к недавним замечательным достижениям в теории аналитической емкости. В докладе было рассказано о некоторых из этих понятий и фактов и их применении к решению задачи Макинтайра и Фукса, а также о совсем недавнем обобщении этой задачи на потенциалы Коши с произвольными мерами m.

В члены общества приняты Д. В. Карпов и К. П. Кохась.

Заседание 22 ноября 2005 г. (Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых). *Актуальные проблемы математического образования в массовой школе и подготовки талантливой молодежи.*

Обсуждалась наблюдающаяся деградация школьного математического образования и опасности, связанные с непродуманным характером предлагаемых реформ (ЕГЭ, изменение статуса олимпиад). Выступили: А. М. Абрамов (Москва), О. А. Иванов, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин. Принято решение о подготовке резолюции по обсуждавшемуся вопросу.

Заседание 29 ноября 2005 г. Вик. С. Куликов (Москва). *“Dif=Def” проблемы.*

В докладе дан обзор результатов, относящихся к следующим трем проблемам.

1) “Dif=Def” *проблема в комплексной геометрии.*

Пусть комплексные компактные поверхности X и Y (рассматриваемые как гладкие дифференцируемые многообразия, $\dim_{\mathbb{R}} X = \dim_{\mathbb{R}} Y = 4$) являются диффеоморфными друг другу. Будут ли X и Y деформационно эквивалентными?

2) “Dif=Def” *проблема для плоских алгебраических кривых с каспидальными особенностями.*

Пусть алгебраические кривые C_1, C_2, лежащие в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P_2$, имеют в качестве особых точек только обыкновенные каспы и ноуды (т.е. особенности типов $x^2 = y^2$ и $x^2 = y^3$). Предположим, что пары $(\mathbb{C}P_2, C_1)$ и $(\mathbb{C}P_2, C_2)$ являются диффеоморфными. Будут ли кривые C_1 и C_2 деформационно эквивалентными?

3) “Dif=Def” *проблема в вещественной геометрии.*

Пусть cX и cY – вещественные структуры на комплексных поверхностях X и Y, и пусть X и Y являются деформационно эквивалентными как комплексные поверхности и эквивариантно (относительно вещественных структур c_X и c_Y) диффеоморфными. Будут ли (X, c_X) и (Y, c_Y) эквивалентны друг другу относительно вещественных деформаций?

Премия общества “Молодому математику” за 2005 г. присуждена О. А. Тараканову.

Заседание 6 декабря 2005 г. С. В. Дужин. *Инвариант Расмуссена.*

Доклад посвящен доказательству гипотезы Милнора о 4-мерном роде торических узлов, которое получил недавно Я. Расмуссен при помощи гомологий Хованова.

Родом узла называется наименьший род поверхности с краем, вложенной в $\mathbb{R}^3$ таким образом, что край совпадает с данным узлом. Если представить $\mathbb{R}^3$ как гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$ и допустить поверхности, выходящие в четвертое измерение, то соответствующий минимум называется 4-мерным, или срезанным, родом; он меньше или равен обычному. Гипотеза Милнора гласит, что для торических узлов имеет место равенство.

Гипотезу Милнора впервые доказали в 1993 г. Кронхаймер и Мровка, использовавшие калибровочную теорию. Доказательство Расмуссена гораздо более элементарно: при помощи гомологий Хованова он строит некий комбинаторный инвариант узла и, изучая его поведение под действием кобордизмов, получает неравенства, связывающие его с обычным и 4-мерным родом для одного класса узлов, включающего торические.

В докладе была изложена конструкция гомологий Хованова и приведена принципиальная схема рассуждений Расмуссена.

Заседание 13 декабря 2005 г. А. Г. Кусраев (Владикавказ). *Анализ, алгебра и логика в теории операторов.*

Методы, разработанные для анализа континуум-проблемы Кантора, привели не только к доказательству независимости гипотезы континуума (К. Гёдель – совместимость гипотезы континуума, 1939; П. Дж. Коэн – совместимость отрицания гипотезы континуума, 1963), но и к открытию булевозначных моделей теории множеств (Д. Скотт, Р. Соловей, П. Вопенка, 1967) и булевозначного анализа. Основополагающий факт булевозначного анализа – теорема, полученная Е. И. Гордоном (1977), – утверждает, что изображение поля вещественных чисел в булевозначной модели приводит к важному типу функциональных пространств, введенных Л. В. Канторовичем (1935). Это обстоятельство позволяет некоторые классы операторов со значениями в пространстве Канторовича рассматривать как вещественнозначные функционалы и приводит к большому количеству приложений в теории положительных и мажорируемых операторов, теории операторных алгебр, теории модулей Капланского–Гильберта, выпуклом анализе и т. п. В качестве иллюстрации плодотворного взаимодействия классического анализа, алгебры и математической логики рассматривается проблема А. Викстеда (1977) о порядковой ограниченности нерасширяющих операторов в пространстве Канторовича.

Заседание 22 декабря 2005 г. (совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых). *Дискуссия о природе математической реальности и о ее взаимоотношениях с физической реальностью.*

Выступили: О. Я. Виро, А. М. Вершик, А. А. Гриб, Н. А. Шанин, Н. Е. Фирсова, А. И. Назаров и другие.

На этом нетрадиционном заседании СПбМО произошел обмен соображениями о том, как математики воспринимают математическую реальность, т.е. предмет своих основных занятий; как они соотносят ее с окружающим нас реальным миром, смежными науками, образованием и др.; в чем истинные проблемы сложностей и даже конфликтов, возникающих между математическим и иным познанием.

Заседание 27 декабря 2005 г. С. К. Ландо (Москва). *Алгебро-геометрическое доказательство гипотезы Виттена.*[1]

Гипотеза Виттена (1991) утверждает, что производящая функция для индексов пересечений некоторых характеристических классов на пространствах модулей комплексных кривых удовлетворяет уравнениям иерархии Кортевега–де Фриза. К настоящему времени известно несколько доказательств этой гипотезы, однако все они используют – в той или иной степени – математику, выходящую за рамки формулировки гипотезы. В докладе изложено недавнее доказательство, принадлежащее М. Э. Казаряну и докладчику, которое остается внутри этих рамок. Доказательство основано на изучении чисел Гурвица, перечисляющих разветвленные накрытия двумерной сферы с предписанным ветвлением над единственной точкой сложного ветвления.

Оказывается, что производящая функция для таких чисел удовлетворяет уравнениям иерархии Кадомцева–Петвиашвили (это утверждение находится в русле работ Окунькова), а формула Экедаля–Ландо–Шапиро–Вайнштейна позволяет редуцировать уравнение КП для чисел Гурвица к уравнению КдФ для индексов пересечений.

Заседание 14 марта 2006 г. *К 100-летию основателя ленинградской школы теории функций Геннадия Михайловича Голузина (1906–1952).*

1. Г. В. Кузьмина. *Геннадий Михайлович Голузин и геометрическая теория функций.*

Доклад был посвящен роли Г. М. Голузина в развитии и распространении основных принципов конформного отображения, параметрического метода Лёвнера, в создании метода вариаций. Была отражена роль результатов Г. М. Голузина в разработке современных методов геометрической теории функций (метод экстремальной метрики, метод симметризации).

2. В. П. Хавин. *Замечание об интерполяционной формуле Голузина–Крылова.*

Заседание 28 марта 2006 г. А. Н. Тихомиров. *Асимптотическое поведение спектра случайных матриц большой размерности (глобальный режим).*

Рассмотрено асимптотическое поведение выборочной спектральной функции распределения случайных матриц большой размерности для вигнеровского ансамбля матриц и ансамбля выборочных ковариационных матриц. Обсуждены вопросы сходимости к полукруговому закону Вигнера и к распределению Марченко–Пастура для матриц с зависимыми элементами, а также скорость сходимости к указанным законам для матриц с независимыми элементами.

Заседание 11 апреля 2006 г.

К 100-летию Исидора Павловича Натансона (1906–1964).

На заседании выступили: А. М. Вершик, В. С. Виденский, В. В. Жук, Б. М. Макаров, В. Н. Малозёмов, В. Н. Судаков.

[1] См. заседание 5 апреля 2005.

Заседание 18 апреля 2006 г. В. Л. Попов (Москва). *13-я проблема Гильберта и алгебраические группы.*

Насколько можно упростить с помощью алгебраических преобразований общее уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0?$$

При $n = 7$ оно приводится преобразованием Чирнгауза к виду, зависящему от трех параметров,

$$y^7 + py^3 + qy^2 + ry + 1 = 0.$$

Возможно ли дальнейшее упрощение, уменьшающее число параметров?

Имея в виду отрицательный ответ на этот вопрос, Д. Гильберт высказал 100 лет назад предположение, что корень уравнения 7-й степени как алгебраическая функция его коэффициентов не представляется в виде конечной суперпозиции функций двух переменных (при $n < 7$ такое представление возможно). Гильберт ожидал, что в этом утверждении можно ограничиться непрерывными функциями двух переменных, но в 1956–57 гг. А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд показали, что в такой форме утверждение неверно. Однако алгебраическая природа задачи делает более естественным требование алгебраичности рассматриваемых функций двух переменных. Эта точка зрения прослеживается и в более поздней работе Гильберта. Она связана с алгебраическим ядром задачи.

До недавнего времени алгебраический аспект такого рода проблем оставался по существу неисследованным. Однако за последние три года положение изменилось благодаря усилиям З. Рейхштейна, Б. Юсина, Дж. Бюлера и Ж.-П. Серра. Для любой линейной алгебраической группы G (в частности, для любой конечной группы) был введен и исследован новый численный инвариант – существенная размерность. Он часто оказывается равным минимальному числу параметров, необходимых для описания всех алгебраических объектов определенного типа. Например, если G – симметрическая группа S_n, то такие объекты – это расширения полей степени n; если G – ортогональная группа O_n, это квадратичные формы от n переменных; если G – проективная группа PGL_n, это алгебры с делением степени n; если G – исключительная простая группа типа G_2 (соответственно типа F_4), это алгебры октав (соответственно исключительные йордановы алгебры). Существенная размерность имеет геометрический смысл: она связана с главными расслоениями над алгебраическими многообразиями, на которых действует группа G. Для ее вычисления (или оценки) используются методы и результаты современной теории инвариантов, алгебраической геометрии и теории когомологий Галуа. Результаты Ж.-П. Серра и А. Гротендика 50-х годов интерпретируются как классификация групп, существенная размерность которых равна 0. В настоящее время мы знаем о значениях существенной размерности гораздо больше, хотя и далеко не все. В качестве приложений получаются и результаты о невозможности упрощения полиномов с помощью преобразований Чирнгауза.

Заседание 25 апреля 2006 г. А. Л. Онищик (Москва). *Проблемы классификации комплексных супермногообразий.*

Доклад посвящен следующим двум классификационным проблемам.

1) Пусть M – компактное комплексное многообразие; описать все комплексные аналитические супермногообразия (M, O), редукцией которых является M.

2) Пусть $M = G/P$ – флаговое однородное пространство полупростой комплексной группы Ли G; описать все однородные комплексные супермногообразия вида (M, O) (в одном специальном случае эта проблема была поставлена Ю. И. Маниным).

Первая задача разбивается на следующие две части: классификация голоморфных векторных расслоений с базой M и классификация комплексных супермногообразий вида (M, O) с фиксированным ассоциированным векторным расслоением $E \to M$.

Первая часть в докладе не обсуждается, а общее решение второй можно дать в терминах 1-когомологий некоторого неабелева комплекса, состоящего из дифференциальных форм на M. В некоторых случаях получено явное решение задачи (например, если M – неприводимое эрмитово симметрическое пространство, а E – его кокасательное расслоение). Если $M = G/P$ и супермногообразие (M, O) однородно, то ассоциированное векторное расслоение $E \to M$ является однородным, а дуальное расслоение E^* порождается глобальными голоморфными сечениями. Такие однородные расслоения можно охарактеризовать в терминах определяющих их линейных представлений подгруппы P. В некоторых случаях эти свойства в сочетании с гомологическими методами позволяют дать явное решение задачи.

Заседание 16 мая 2006 г. О. К. Шейнман (Москва). *Алгебры Кричевера–Новикова, их представления и приложения в геометрии и математической физике.*

В докладе было рассказано об обобщении теории простых алгебр Ли и алгебр Каца–Муди, начатой в работах Кричевера–Новикова. Такие алгебры имеют приложения в теории интегрируемых систем и в квантовой теории поля.

Заседание 13 июня 2006 г. И. М. Сонин (Шарлотт, США). *Теорема о разбиении–разделении для марковских цепей.*

Пусть M – конечное множество, P – стохастическая матрица, $U = (Z_n)$ – семейство марковских цепей (МЦ), задаваемых (M, P) и всевозможными начальными распределениями. Поведение такого семейства – классический результат теории вероятностей, полученный в 30-х годах прошлого века А. Н. Колмогоровым и В. Дёблином. Если стохастическую матрицу P заменить на *последовательность* стохастических матриц (P_n) и переходы в момент n задавать матрицей P_n, то семейство U становится семейством *неоднородных* МЦ. Существуют многочисленные результаты, описывающие поведение МЦ из U при определенных предположениях о поведении (P_n). Можно ли что-то сказать об их поведении, если не делать *никаких* предположений о поведении (P_n)?

Удивительный ответ на этот вопрос – *Да.* Его дает теорема, которую мы назвали теоремой о разбиении–разделении (РР-теорема). Она была инициирована небольшой заметкой А. Н. Колмогорова "*К теории марковских цепей*" (1936), сформулирована и доказана в несколько этапов в статьях Д. Блэквэла (1945), Г. Кона (1971, 1989) и автора (1987, 1991 (ТВП), 1996). Последняя статья содержит краткий обзор других связанных с этой теоремой задач и результатов.

РР-теорема имеет также простую физическую интерпретацию в терминах простейшей модели необратимого процесса – системы чашек, наполненных раствором с различной концентрацией. Необратимость такого процесса проявляется в свойстве мартингальности некоторых случайных последовательностей, связанных с семейством МЦ. Поскольку пространство состояний МЦ конечно, эти мартингальные последовательности в каждый момент времени принимают не более чем $|M|$ значений и обладают некоторыми специальными свойствами, которые не вытекают из классических результатов Д. Дуба.

В докладе было рассказано о некоторых новых результатах, но в общем РР-теорема оставляет много открытых вопросов и, по-видимому, может привести к интересным обобщениям не только в теории вероятностей.

Заседание 29 августа 2006 г. И. Слоун (Сидней, Австралия). *Снятие проклятия размерности: численное интегрирование в пространствах высокой размерности.*

Ричард Беллман ввел выражение "*проклятие размерности*" для описания необычайно быстрого возрастания сложности по мере увеличения числа переменных во многих задачах. Типичной такой задачей является задача численного интегрирования, в которой число элементарных вычислений при использовании любого метода интегрирования мультипликативного типа, очевидно, растет как экспонента от числа переменных. Тем не менее, встречаются задачи с сотнями или даже тысячами переменных, которые в настоящее время успешно решаются. Докладчик описал новые стратегии, математическую постановку и конструкции, позволяющие справляться с некоторыми задачами интегрирования (в частности, в финансовой математике).

Заседание 10 октября 2006 г. (совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых). *К 150-летию Андрея Андреевича Маркова ст. (1856–1922).*

О жизни и творчестве А. А. Маркова рассказали И. А. Ибрагимов, Е. П. Голубева, И. В. Виденский, Н. С. Ермолаева, Л. И. Брылевская.

Заседание 24 октября 2006 г. Д. В. Трещев (Москва). *Диффузия Арнольда: текущее состояние дел.*

В 1964 г. Арнольд построил пример эволюции переменной *действие* в гамильтоновой системе, близкой к интегрируемой, с выпуклым по действиям невозмущенным гамильтонианом. Чириков назвал этот эффект диффузией Арнольда. В докладе рассказано об истории вопроса и современных достижениях.

Заседание 7 ноября 2006 г. (совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых). А. И. Генералов. *Когомологии конечномерных алгебр: новые методы и результаты.*

Докладчик в доступной форме рассказал о своих результатах, связанных с вычислениями некоторых когомологических инвариантов конечномерных алгебр, а именно, алгебры Йонеды (это естественный аналог кольца когомологий группы) и алгебры когомологий Хохшильда. Прогресс в этом направлении связан с некоторыми (эмпирическими по природе) приемами построения проективных резольвент подходящих модулей.

В члены общества принят А. А. Солынин.

Математический лекторий для студентов

18 марта 2005 г. Ю. Н. Ловягин. *Исчисление бесконечно малых Лейбница на языке нестандартного анализа.*

1 апреля 2006 г. А. М. Вершик. *Универсальные графы и задачи, связанные с ними.*

15 апреля 2006 г. С. В. Дужин. *О возведении пространств в степень.*

13 мая 2006 г. С. Ю. Пилюгин. *Сложные структуры в динамике.*

Премия “Молодому математику”

Премии “Молодому математику” удостоены:

- О. А. Тараканов (2005 год) за работу “Отслеживание псевдотраекторий”;
- Н. В. Дуров (2006 год) за работу “Метод вычисления группы Галуа многочлена с рациональными коэффициентами”.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

В Санкт-Петербургском математическом обществе

Заседания общества

9 января 2007 г. Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых.

1. К 25-летию Секции математики при Доме Ученых РАН. Краткое сообщение А. М. Вершика.

Секция была образована в декабре 1981 г. по инициативе ряда математиков Ленинграда, отчасти в связи с переездом матмеха ЛГУ – в помещении которого проводились до этого все заседания Общества, – в Ст. Петергоф, а отчасти в связи с необходимостью устраивать больше открытых заседания с привлечением более широкой аудитории, интересующейся математикой и ее приложениями. Предшествующий созданию Общества (в 1959 г.) Городской математический семинар, организованный в 1953 г., также работал в Доме Ученых. Первым председателем секции был С. М. Лозинский, затем с 1985 г. – А. М. Вершик. Заседания секции одновременно были заседаниями Математического общества, последние проходили поочередно на старом матмехе и в Доме Ученых. В настоящее время секция устраивает ежегодно 3–4 заседания; обычно это заседания по проблемам образования, популяризации математики, а также мемориальные заседания и дискуссии и др. Актуальным является вопрос о вступлении членов Математического общества и участников заседаний в члены Дома Ученых, работа которого нуждается в финансовой поддержке.

2. Вручение премии общества "Молодому математику" за 2006 г. Н. В. Дурову.

3. Доклады лауреатов премии общества "Молодому математику" за 2006 и 2005 г.

Н. В. Дуров. *Арифметическая теория пересечений и гомотопическая алгебра.*

Доклад посвящен изложению общего плана построения арифметической (аракеловской) геометрии и особенно теории пересечений, основанного на построенной докладчиком теории обобщенных колец и на гомотопической алгебре, которая в данной ситуации успешно заменяет гомологическую алгебру, традиционно применяющуюся для подобных задач. Был подробно рассмотрен один из самых простых, но в то же время интересных примеров – компактификация спектра кольца целых чисел. На этом примере продемонстрирована ставшая уже классической связь арифметических кратностей пересечений и логарифмов объемов решеток.

О. А. Тараканов. *Слабое отслеживание для омега-устойчивых диффеоморфизмов.*

В докладе рассмотрена связь понятия слабого отслеживания (СО) и омега-устойчивости диффеоморфизмов на гладком многообразии. Известны примеры омега-

Предыдущий отчет о работе СПбМО см. в УМН, **62**:1 (2007). Отчеты обо всех заседаниях имеются на сайте общества: http://www.mathsoc.spb.ru/rus/reportsr.html.

устойчивых диффеоморфизмов, у которых наличие свойства СО зависит от нетривиальных численных характеристик седловых гиперболических неподвижных точек. Известно, что неблуждающее множество омега-устойчивого диффеоморфизма f состоит из конечного числа замкнутых, попарно непересекающихся "базисных" множеств, каждое из которых содержит плотную траекторию. Доказано, что если в фазовой диаграмме омега-устойчивого диффеоморфизма длина любой цепи не превосходит трех, то диффеоморфизм обладает свойством СО. (Цепью длины n называется последовательность базисных множеств $O_1 \to O_2 \to \cdots \to O_n$, для которых существуют траектории T_i, $i = 1, \dots, n-1$, стремящиеся к O_i на минус бесконечности и к O_{i+1} на плюс бесконечности.)

В члены общества приняты Н. В. Дуров, О. А. Тараканов.

Заседание 25 января 2007 г. Н. К. Никольский. *Проблема Кадисона–Зингера вызывающе элементарна?..*

Известная проблема Кадисона–Зингера (ПКЗ, 1959), происходящая на самом деле из одной математической оплошности П. А. Дирака, – одна из наиболее старых нерешенных задач анализа (мы не говорим о гипотезе Римана...). Вопрос состоит в (недоказанной) единственности продолжения чистых состояний C*-подалгебры алгебры операторов $L(H)$ на всю эту алгебру.

В последние годы было обнаружено, что ПКЗ эквивалентна десятку других нерешенных задач математики и ее приложений – о базисах гильбертова пространства, о замащивании бесконечных матриц, о разбиениях фреймов (frames), об обратимости конечных матриц с лидирующей диагональю, о тригонометрических суммах на канторовых множествах, о комбинаторных свойствах систем векторов в $\mathbb{R}^n$ и другим задачам. Некоторые из эквивалентных формулировок вызывающе элементарны и могут быть сформулированы в качестве упражнений к обычному курсу анализа 5-го семестра. С другой стороны, недавно появились указания на зависимость ПКЗ (и всего узла эквивалентных ей гипотез) от гипотезы континуума (которая, как известно, не зависит от аксиоматики Цермело–Френкеля).

Заседание 10 апреля 2007 г. В. В. Вершинин (Новосибирск, Монпелье). *Косы и связанные с ними структуры.*

Заседание 24 апреля 2007 г. С. В. Дужин. *Гипотеза геометризации и работы Перельмана.*

Хорошо известна связь между топологией и метрической геометрией замкнутых двумерных поверхностей: на всякой такой поверхности можно ввести метрику постоянной кривизны, причем знак последней совпадает со знаком эйлеровой характеристики поверхности (положителен для сферы, нуль для тора и отрицателен для поверхностей рода выше 1).

Около 1980 г. Уильям Тёрстон высказал гипотезу, что подобным образом, только значительно сложнее, обстоит дело с трехмерными многообразиями. Он описал восемь однородных трехмерных римановых геометрий (три геометрии постоянной кривизны и еще пять, однородных, но не изотропных) и обоснованно предположил, что всякое компактное трехмерное многообразие можно определенным образом разбить на куски, в каждом из которых можно ввести одну из восьми модельных геометрий. Гипотеза геометризации Тёрстона включает в себя в качестве частного случая гипотезу Пуанкаре о том, что связное односвязное ориентируемое трехмерное многообразие гомеоморфно сфере.

В течение 25 лет над программой геометризации трехмерной топологии работало множество математиков. Ими было получено большое количество частных результатов, но в целом гипотеза никак не поддавалась (особое сопротивление оказывали эллиптический и гиперболический случаи).

В цикле из трех препринтов 2002–2003 гг. Г. Перельман предложил доказательство гипотезы геометризации, основанное на исследовании эволюции риманова многообразия под действием потока Риччи. В 2006 г. две независимые группы экспертов закончили изучение работ Перельмана, пришли к выводу, что доказательство правильное, и опубликовали пространные тексты, в которых восполнены детали, отсутствовавшие в сжатых оригинальных препринтах.

В докладе дано введение в трехмерную топологию, описана гипотеза геометризации и схематично рассказано о геометрической части рассуждений Г. Перельмана.

16 мая 2007 г. Совместное заседание общества и международной историко-научной конференции, при участии Фонда поддержки российской математики им. Леонарда Эйлера.

К 300-летию Леонарда Эйлера (1707–1783).

1. Г. К. Михайлов (Москва). *Леонард Эйлер и становление рациональной механики.*

2. С. В. Востоков. *Эйлер и закон взаимности.*

3. М. Матмюллер (Базель). *Первый современный математик? О вкладе Эйлера в развитие современного математического стиля.*

4. Н. А. Вавилов (С.-Петербург). *Соединить идеи с вычислениями. От Эйлера до компьютерной алгебры.*

5. Е. Кац (Израиль). *Леонард Эйлер и современные представления о молекулярной структуре фуллеренов и фуллереноподобных наноструктур.*

Собранию был продемонстрирован новый документальный фильм об Эйлере (режиссер – И. А. Шадхан).

Заседание 29 мая 2007 г. Ю. М. Лифшиц. *Четыре результата Джона Клейнберга.*

Джон Клейнберг получил премию Неванлинны (аналог медали Филдса в теоретической информатике) в 2006 г. на Международном математическом конгрессе в Мадриде. В официальном пресс-релизе указано четыре наиболее существенные группы его результатов.

1. Алгоритмы поиска ближайших соседей. Клейнберг предложил новый способ предварительной обработки семейства точек в евклидовом пространстве, позволяющей по новой точке быстро находить ближайшую точку в базе. Впервые удалось построить метод, который доказуемо быстрее, чем полный перебор.

2. Способ определения авторитетности интернет-страниц. Метод, предложенный Клейнбергом, основан на вычислении собственного вектора матрицы, описывающей структуру ссылок в интернете. На этих идеях основан алгоритм PageRank, сделавший Google лучшей системой интернет-поиска.

3. Математические модели эффекта “как тесен мир”. Джон Клейнберг предложил интересную модель социальной сети с параметром, характеризующим способ создания связей в сети. Ему удалось обнаружить необычное свойство этой модели: существует единственное значение параметра, при котором есть эффективный способ быстро передать сообщение до любого адресата “по цепочке знакомых”.

4. Математическая модель “информационных всплесков”. Рассматривается поток некоторых информационных сообщений (например, научные статьи, письма по электронной почте, новости). Всплеском (burst) называется интервал времени, в который определенное ключевое слово встречается чаще обычного. Клейнберг предложил способ перечислить все всплески, отсортировать их по “весу” и построить их иерархию.

Заседание 2 октября 2007 г. А. М. Райгородский (Москва). *О проблеме Борсука в комбинаторной геометрии.*

Комбинаторная геометрия – одна из красивейших дисциплин современной математики. С одной стороны, постановки большинства задач, относящихся к комбинаторной геометрии, абсолютно элементарны и потому доступны пониманию сильного старшеклассника. С другой стороны, решения этих задач зачастую крайне нетривиальны (если, вообще, известны), и требуются весьма глубокие и оригинальные методы для получения серьезных результатов в указанной области.

Одной из наиболее ярких проблем в комбинаторной геометрии является проблема Борсука о разбиении множеств в евклидовом пространстве на части меньшего диаметра. Гипотеза Борсука 1933 г. состояла в том, что каждое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, имеющее ненулевой диаметр, может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра. В связи с попытками обосновать или опровергнуть эту гипотезу были разработаны тонкие методы элементарной геометрии и топологии, комбинаторики и теории вероятностей, которые оказались применимы и ко многим другим задачам.

В докладе было рассказано об интригующей истории проблемы и об упомянутых методах ее решения.

Заседание 16 октября 2007 г. Н. Н. Петров. *Квантовая механика и нейрофизиология. В поисках единой теории.*

В докладе рассматривались некоторые проблемы квантовой механики и нейрофизиологии, лежащие (пока?) за пределами нашего понимания. Известно, что эти науки активно взаимодействуют.

С одной стороны, мышление, в своих самых существенных проявлениях, основано на сложной игре эволюции и редукции (коллапса) волновых функций, являющихся решениями уравнения Шрёдингера. Этот процесс иногда связывают с "неалгоритмической составляющей" нашего мышления, той самой, которая отличает человека от компьютера.

С другой стороны, как оказалось, наш мозг (исключая, быть может, подсознание) совершенно не приспособлен к восприятию загадочных квантово-механических эффектов. Есть предположение, что эта способность, сохранившаяся у животных, утрачена человеком в результате эволюции.

Основной идеей доклада является отказ от "вещественного" описания упомянутых процессов. Что касается квантовой механики, то эта идея не нова. Еще А. Пуанкаре (на основании весьма скудных данных науки начала XX века) однажды заметил, что переход от рациональных чисел к вещественным – нетривиальный и ответственный выбор. Адекватное изменение математического аппарата, по мнению докладчика, заключается в замене отрезка евклидовой прямой канторовым совершенным множеством. В нейрофизиологии эта замена отражает "хаотичность" (или, скорее, исключительную гибкость) нашего сознания, что косвенно подтверждается электроэнцефалограммой здорового человека.

В докладе подробно обсуждается простейшая модель "логического рассуждения", в которой "истина" интерпретируется как неподвижная точка некоторого полиномиального оператора в подходящем компактном кольце, а "приближенные представления" о ней – как итерации этого отображения. В подобных моделях адекватное "вещественное" описание, по-видимому, невозможно.

Заседание 30 октября 2007 г. Т. Е. Панов (Москва). *Торическая топология.*

Начиная с 1970-х годов, торические действия играют все возрастающую роль в различных областях математики, а их изучение стимулирует возникновение новых взаимосвязей между алгебраической геометрией, комбинаторной и выпуклой геометрией, коммутативной и гомологической алгеброй, дифференциальной топологией и теорией гомотопий. По мере расширения этих приложений возникла целая новая область исследований, ставшая известной как торическая топология. Предметом изучения торической топологии являются алгебраические, комбинаторные, дифференциальные, геометрические и гомотопические аспекты важного класса действий тора с богатой структурой в пространстве орбит.

Первоначальный импульс этому развитию придала теория торических многообразий в алгебраической геометрии. С начала 1990-х годов идеи и методы торических многообразий начали проникать в топологию. Пространство орбит регулярного действия компактного тора $\mathbb{T}^n$ несет богатую комбинаторную структуру, отражающую распределение стационарных подгрупп. Во многих случаях топологию пространства с действием тора можно описать в терминах комбинаторики пространства орбит. Замечательно, что этот подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространств с действием тора удается интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически.

Одной из основных здесь является конструкция момент-угол комплекса, переводящая "комбинаторную топологию" в "эквивариантную топологию". В наиболее общем виде эта конструкция сопоставляет симплициальному комплексу (или триангуляции) многообразие или комплекс с просто устроенным действием тора. В частном случае триангуляций сфер, получаемых как границы выпуклых многообразий, эта конструкция приводит к интересному семейству комплексных многообразий, не имеющих кэлеровой структуры. Эти многообразия также возникают в симплектической топологии как множества уровня отображений моментов для гамильтоновых действий тора и задаются полными пересечениями вещественных квадрик.

Заседание 13 ноября 2007 г. Н. А. Вавилов. *Вычисления в исключительных группах.*

Одним из величайших математических открытий на рубеже XIX–XX веков было обнаружение 5 исключительных алгебр Ли/групп Ли/алгебраических групп, типов E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2, Киллингом и Картаном. Позже Диксон и Шевалле построили их аналоги над произвольным, в частности, конечным полем, что было одним из решающих продвижений в классификации конечных простых групп.

Группа типа G_2 представляется как группа матриц степени 7×7 (или 8×8) и похожа на классические группы. Но вот остальные исключительные группы довольно велики. Кроме того, в минимальных представлениях они задаются уравнениями степени 3 или 4 (уравнениями степени 2 можно задать, с точностью до унипотентной части, только произведения классических групп).

Поэтому вычисления в них считались совсем непростым делом. Для поля техника таких вычислений была развита бельгийской и голландской школами в 1950-х и 1960-х годах (Фрейденталь, Титс, Спрингер, Фельдкамп), но вот для кольца приходилось искать обходные пути, типа локализации.

Доклад посвящен вычислениям в больших исключительных группах как группах матриц степеней 27×27, 56×56, 248×248 и 27×27 соответственно.

В начале 1990-х годов было обнаружено, что в вычислениях можно ограничиться использованием лишь *квадратичных* уравнений на элементы одного столбца, а не уравнений степени 3 или 4, как это делалось ранее. Метод сведения к вычислениям такого типа, названный разложением унипотентов, оказался чрезвычайно полезным во многих вопросах структурной теории.

Однако в последнее время в работах докладчика, Гавриловича, Николенко и Лузгарева выяснилось, что при помощи несложных теоретико-групповых соображений можно организовать все вычисления так, чтобы использовать при этом только *линейные* уравнения на алгебру Ли. Используя этот метод, нам удалось передоказать и усилить основные структурные теоремы. Кроме того, этот метод работает не только на уровне K_1, но и на уровне K_2 (в группе Стейнберга).

Заседание 27 ноября 2007 г. Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых. *Вечер памяти академика Владимира Ивановича Смирнова* (к 120-летию со дня рождения).

На заседании выступили: А. И. Назаров, А. М. Вершик, В. М. Бабич, Н. Н. Уральцева, В. П. Хавин, Г. П. Матвиевская (Оренбург). Были заслушаны выступления отсутствующих М. С. Бирмана и В. А. Залгаллера.

Принято решение о присуждении премий Санкт-Петербургского математического общества "Молодому математику" за 2007 г. В. А. Петрову и К. В. Первышеву.

Заседание 25 декабря 2007 г. *Доклады лауреатов премии общества "Молодому математику" за 2007 г.*

К. В. Первышев. *Иерархии по времени для эвристических алгоритмов.*

Известно следующее утверждение: для любых $a < b$ существует язык, распознаваемый некоторым детерминированным алгоритмом за время $O(n^b)$, но не распознаваемый никаким детерминированным алгоритмом за время $O(n^a)$. Данное утверждение называется иерархией детерминированных алгоритмов по времени. Открытым является вопрос о существовании подобной иерархии для *вероятностных* алгоритмов.

Эвристическими алгоритмами будем называть алгоритмы, которые выдают правильный ответ на 99% входов, но могут ошибаться на 1% входов. Сравнительно недавно Л. Фортноу и Р. Сантанам показали, что иерархия по времени существует для *эвристических вероятностных* алгоритмов. В докладе рассказывалось простое доказательство этого результата.

В. А. Петров. *Мотивы однородных проективных многообразий.*

Рассмотрим полупростую алгебраическую группу G внутреннего типа над полем k и проективное многообразие X, однородное относительно действия G. Предположим, что G расщепляется над полем функций $k(X)$. Мы показываем, что в этом случае мотив Чжоу X по модулю любого простого числа p раскладывается в сумму сдвинутых копий некоторого неразложимого мотива $R_p(G)$, зависящего только от G и p. Мы также обсуждаем связь с когомологическими инвариантами и некоторые приложения, относящиеся к вычислению канонической размерности и изучению поведения G при расширении скаляров.

Докладчикам были вручены грамоты лауреатов и премии.

В члены общества приняты: А. А. Кожевников, К. В. Первышев и В. А. Петров.

Математический лекторий для студентов (15 сентября 2007 г.). А. Скопенков (Москва). *Заузливание многообразий малой размерности.*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

В Санкт-Петербургском математическом обществе

Заседания общества

22 января 2008 г. Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и Секции математики Дома Ученых.

Школьное математическое образование в Петербурге.

1. Обсуждение программы “Петербургский учебник”.
2. Проблема оценки результативности обучения.

С основным докладом выступил директор Института продуктивного обучения Российской академии образования, академик РАО М. И. Башмаков. В дискуссии приняли участие С. М. Александрова, А. Л. Вернер, А. П. Карп, Г. М. Карпова, В. П. Одинец, М. Я. Пратусевич, В. И. Рыжик.

Заседание 11 марта 2008 г. Н. Н. Андреев (Москва, МИАН). *Математические этюды.*

В докладе было рассказано о проекте “Математические этюды”, развиваемом в МИАН. Основное содержание проекта – фильмы о решенных и нерешенных математических задачах, созданные с использованием современной компьютерной трехмерной графики. Цель проекта – популяризация математических знаний, однако показанные сюжеты представляют интерес и для профессиональных математиков. Были затронуты, в частности, следующие темы:

– внутренняя и внешняя геометрия многогранников,
– шарнирные механизмы П. Л. Чебышёва,
– экстремальное расположение точек на сфере,
– необычные и красивые конструкции в современной технике как воплощение математических результатов

Заседание 25 марта 2008 г. Б. Л. Фейгин (Москва). *“Квазиклассические” формулы для характеров представлений вертекс-операторных алгебр.*

В докладе рассказано, как писать формулы для характеров, похожие на формулы Вейля для представлений конечномерных полупростых алгебр. Формулы Вейля имеют очень много доказательств и интерпретаций. Наиболее популярен алгебро-геометрический подход – при этом неприводимые представления реализуются в сечениях расслоения на многообразии флагов и формула для характера получается из формулы Лефшеца. Представления алгебр токов можно изучать аналогичным образом, но к более общим вертекс-операторным алгебрам (скажем, к алгебре Вирасоро) такой подход неприменим. В некоторых случаях, однако, можно сделать нечто похожее. Формула Лефшеца – это сумма по неподвижным точкам действия тора

Предыдущий отчет о работе СПбМО см. в УМН, **63**:2 (2008), 185–190. Отчеты обо всех заседаниях имеются на сайте общества: http://www.mathsoc.spb.ru/rus/reportsr.html.

на многообразии флагов: каждой неподвижной точке отвечает специальный “экстремальный” вектор в представлении. С этой точки зрения формула типа Вейля – это сумма по экстремальным векторам, а каждый член описывает структуру представления в “окрестности” экстремального вектора.

Также рассказано о связанном сюжете – о q-характерах тензорных произведений представлений “маленькой” квантовой группы в корне из единицы.

Заседание 8 апреля 2008 г. С. М. Архипов (Торонто). *Центральное расширение группы бесконечных матриц и законы взаимности на кривых.*

Для конечномерного векторного пространства V рассматривается пространство $V((t))$ формальных петель со значением в V с естественной топологией. Группа непрерывных автоморфизмов $\mathrm{GL}(V((t)))$ изучается категорными методами. Строятся канонический Z-торсор “размерностей” $\mathrm{Dim}(V((t)))$ и канонический C^*-жерб “детерминантных теорий” $\mathrm{Det}(V((t)))$. Определив действие $\mathrm{GL}(V((t)))$ на $\mathrm{Det}(V((t)))$, докладчик строит каноническое центральное расширение $\mathrm{GL}(V((t)))$ с помощью этого действия. Далее определяется символ Конту–Каррера на мультипликативной группе поля формальных рядов Лорана, который интерпретируется в терминах построенного центрального расширения. Оказывается, что символ Конту–Каррера удовлетворяет соотношению Стейнберга и таким образом связан с ручным символом в алгебраической K-теории. С помощью символа Конту–Каррера доказывается классический закон взаимности для кривых над комплексным полем. Обсуждена возможность аналогичных построений для двумерных локальных полей и для алгебраических поверхностей.

Заседание 22 апреля 2008 г. Д. А. Звонкин (Париж). *Теория пересечений на пространстве r-спин-структур.*

r-спин-структура на римановой поверхности – это тензорный корень r-й степени из кокасательного расслоения на этой поверхности. В теории пересечения на пространстве модулей r-спин-структур имеется два важных результата и одна важная гипотеза.

1) Формула Chiodo – аналог формулы Мамфорда для пространства модулей кривых. Эта формула получается применением формулы Гротендика–Римана–Роха к спинорному расслоению на универсальной кривой.

2) Недавно доказанная автором, Фабером и Шадриным гипотеза Виттена: она связывает теорию пересечения на пространстве r-спин-структур с интегрируемыми иерархиями.

3) До сих пор не доказанная формула r-ELSV, также связывающая теорию пересечения на пространстве r-спин-структур с интегрируемыми иерархиями, хотя связь, по-видимому, совсем иная.

В докладе было рассказано о гипотезе Виттена и формуле r-ELSV.

Заседание 30 сентября 2008 г. Н. Г. Мощевитин (Москва, МГУ). *Геометрия диофантовых приближений.*

Хорошо известно, что многие задачи теории *одномерных* диофантовых приближений могут быть решены с помощью непрерывных дробей. Естественного же многомерного обобщения аппарата непрерывных дробей для нужд *многомерных* диофантовых приближений придумать не удается. В какой-то мере это связано с новыми геометрическими феноменами, возникающими в многомерной теории. Один из них – явление вырождения размерности наилучших диофантовых приближений, открытое докладчиком в 1996–1997 гг. и восходящее к работам А. Я. Хинчина, Г. Давенпорта и В. Шмидта. С другой стороны, некоторые многомерные задачи поддаются (в какой-то мере) решению теми же методами, что и одномерные задачи. Таковыми являются, например, некоторые вопросы, связанные с существованием плохо приближаемых чисел.

Докладчик рассказал о классических задачах такого рода, решение которых может быть получено (а иногда и действительно получается) стандартными методами геометрии чисел, а также о ряде задач метрической теории чисел, которые оказались решенными благодаря обобщению докладчиком нового простого и изящного вероятностного метода, недавно возникшего в работах Ю. Переса и В. Шлага (2001–2007). В частности, удалось доказать существование плохо приближаемых чисел в так называемой BAD-гипотезе, связанной со знаменитой проблемой Литтлвуда. Подходы, связанные с геометрией многомерных диофантовых приближений, оказываются полезными в некоторых вопросах равномерного распределения последовательностей и теории динамических систем. Так, с помощью анализа наилучших диофантовых приближений докладчик решил в 1996–1997 гг. задачу, поставленную В. В. Козловым, об осцилляции интеграла от условно периодической функции.

В члены общества принят В. Р. Крым.

Заседание 11 ноября 2008 г. С. В. Дужин. *Теорема Гусарова.*

В 2008 г. исполнилось 50 лет со дня рождения М. Н. Гусарова (1958–1999), замечательного петербургского математика, одного из первооткрывателей теории инвариантов конечного типа. Инварианты узлов конечного типа, введенные М. Гусаровым в Петербурге и В. Васильевым в Москве практически одновременно (около 1990 г.), оказали революционное воздействие на теорию узлов, а вскоре и на другие разделы математики, например, на топологию 3-мерных многообразий.

Вскоре после этого О. Виро и М. Поляк изобрели конструктивный способ записывать инварианты конечного типа в виде явных формул при помощи гауссовых диаграмм, которые строятся по плоской проекции узла. Михаил Гусаров доказал изящную и нетривиальную теорему о том, что любой инвариант конечного типа может быть записан при помощи формулы такого вида.

В докладе было дано введение в теорию инвариантов конечного порядка, сформулирована теорема Гусарова и приведена схема ее доказательства. Изложение сопровождалось конкретными примерами.

Заседание 2 декабря 2008 г. А. И. Назаров. *Спектральная теория краевых задач для ОДУ и гауссовские случайные процессы.*

При оценке вероятностей редких событий во многих задачах теории вероятностей и математической статистики используются асимптотики больших и малых уклонений центрированных гауссовских случайных процессов X в различных нормах. В случае L_2-нормы эти асимптотики тесно связаны со свойствами собственных чисел интегрального оператора, ядро которого – ковариационная функция $G_X(s,t) = \mathsf{E}X(s)X(t)$ соответствующего процесса. Наиболее сильные результаты удается получить в ситуации, когда G_X является функцией Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора. Для этого потребовалось, в частности, уточнить классические результаты Биркгофа о спектрах дифференциальных операторов на отрезке.

В докладе дан обзор результатов последних лет по этой тематике. Часть результатов получена совместно с Я. Ю. Никитиным.

26 декабря 2008 г. *Распорядительное заседание общества.*

1. Вручение премий общества “*Молодому математику*”, “*Абрамовской премии*”, а также *премии конкурса Эйлера.*

Премии общества “*Молодому математику*” за 2008 г. удостоены:

В. В. Высоцкий за цикл работ “Предельные теоремы для стохастических моделей взаимодействующих частиц”,

А. Ю. Лузгарев за цикл работ “Надгруппы исключительных групп”.

"Абрамовской премии" общества за 2008 г. удостоены:

А. В. Малютин (первая премия) за цикл работ "Автоморфизмы маломерных многообразий",

А. Д. Баранов (вторая премия) за цикл работ "Граничные свойства элементов модельных подпространств класса Харди и геометрические свойства семейств воспроизводящих ядер",

С. Г. Крыжевич (вторая премия) за цикл работ "Структура инвариантных множеств сильно нелинейных систем".

Премии фонда Л. Эйлера и Петербургского математического общества.

По разделу *"Студенты"*:

первая премия не присуждалась;

вторую премию получил Н. В. Гравин (Санкт-Петербург, СПбГУ) за работу "Невырожденные раскраски в теореме Брукса";

третью премию получил А. М. Изосимов (Москва, МГУ) за работу "Критерий гладкой эквивалентности особенностей типа фокус-фокус".

По разделу *"Аспиранты"*:

первую премию получил Г. Г. Гусев (Москва, МГУ) за работу "Дзета-функция деформаций и диаграммы Ньютона";

вторую премию получил М. Б. Скопенков (Москва, Независимый московский университет) за работу "Классификация зацеплений и их применения";

третью премию получили Д. И. Ицыксон (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН) за работу "Полная задача в классах AvgBPP и HeurBPP" и С. В. Шапошников (Москва, МГУ) за работу "О неединственности решений эллиптических уравнений для вероятностных мер".

По разделу *"Молодые ученые"*:

первая премия – Д. В. Осипов (Москва, МИРАН) за работу "Адели на n-мерных схемах и категории C_n";

вторая премия – А. А. Яковлев (Уфимский государственный авиационный технический университет) за работу "Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга".

Похвальными отзывами за высокий научный уровень работы отмечены:

по разделу *"Студенты"*: В. Г. Горин (МГУ) и А. П. Науменко (Белгородский государственный университет);

по разделу *"Аспиранты"*: Е. А. Горский (МГУ);

по разделу *"Молодые ученые"*: Д. И. Борисов (Башкирский государственный педагогический университет) и С. Г. Крыжевич (СПбГУ).

Жюри решило не присуждать премии за работы, отмеченные наградами других конкурсов, проводившихся в 2008 г., даже в случаях, когда речь шла об очень сильных работах.

2. Отчет общества за 2005–2008 гг. Заслушаны отчеты правления общества (докладчик президент общества А. М. Вершик), редколлегии "Трудов СПбМО" (ответственный редактор Н. Н. Уральцева), ревизионной комиссии (председатель комиссии А. Ю. Зайцев) и школьной комиссии (сопредседатель комиссии В. А. Рыжик).

3. Выборы руководящих органов общества – президента, вице-президентов, правления, редколлегии и комиссий.

Президент общества А. М. Вершик сообщил о своем решении не выдвигаться на новый срок на должность президента общества и предложил кандидатуру Ю. В. Матиясевича в качестве президента общества.

Выступивший от имени членов общества И. А. Ибрагимов поблагодарил А. М. Вершика за многолетнюю самоотверженную работу на посту президента общества.

В результате обсуждения и голосования выбран следующий состав руководящих органов общества:

Президент: Ю. В. Матиясевич.

Вице-президенты: С. В. Востоков, И. А. Ибрагимов.

Правление: В. М. Бабич, М. Ш. Бирман, В. С. Буслаев, А. М. Вершик, О. Я. Виро, Э. А. Гирш, М. И. Гордин, С. В. Дужин, С. В. Кисляков, Г. А. Леонов, М. А. Лифшиц, Н. Е. Мнёв, А. И. Назаров, Я. Ю. Никитин, С. Ю. Пилюгин, Н. Н. Уральцева, Д. С. Челкак, В. П. Хавин, Н. А. Широков.

Ученый секретарь: А. А. Лодкин.

Казначеи: Б. Б. Лурье, В. А. Лифшиц.

Ревизионная комиссия: А. Ю. Зайцев, С. Г. Крыжевич, Д. В. Карпов.

Редколлегия “Трудов ПМО”: Н. Н. Уральцева (ответственный редактор).

Программная комиссия: С. В. Буяло, С. В. Дужин, М. И. Гордин, П. П. Кулиш, Я. Ю. Никитин, А. В. Малютин, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, А. Л. Смирнов, В. П. Хавин.

Школьная комиссия: В. А. Рыжик, М. Я. Пратусевич (сопредседатели), М. И. Башмаков, О. А. Иванов, С. В. Иванов, К. П. Кохась, Б. Б. Лурье, В. Б. Некрасов, С. Е. Рукшин.

Конкурсная комиссия: Н. А. Вавилов, Э. А. Гирш, И. Б. Жуков, Д. В. Карпов, С. Ю. Пилюгин.

Студенческая и клубная комиссия: А. И. Генералов, А. С. Куликов, Н. Е. Мнёв, Ф. В. Петров, Н. Д. Филонов, Д. С. Челкак.

Электронные средства: А. А. Лодкин, С. М. Машарский, А. В. Пастор, Н. В. Цилевич.

Библиотечная комиссия: И. А. Панин, Г. А. Панина, Н. Е. Мнёв, Ф. Л. Назаров, А. Н. Подкорытов.

Комиссия по истории математики: В. М. Бабич, Л. И. Брылевская, В. С. Виденский, Н. С. Ермолаева, А. И. Назаров, М. А. Семенов-Тян-Шанский.

Состоялась краткая дискуссия о планах дальнейшей деятельности общества.

4. Членами общества избраны В. А. Гриценко и А. П. Щеголева.