Journal de la Société Physico-Mathématique
de Léningrade
t. II, fasc. II

ЖУРНАЛ
ЛЕНИНГРАДСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОСНОВАН
академиком В. А. СТЕКЛОВЫМ

Том II, вып. II

ИЗДАНИЕ ГЛАВНАУКИ
1929

ЦЕНТРАЛЬН. ТИП.
НАРКОМВОЕНМОРА
ЛЕНИНГРАД
Площ. Урицкого, 10

Ленинградский
Областлит № 50434.
Тираж 1.060 — $9\frac{1}{4}$ п. л.
Заказ № 902

РЕДАКЦИЯ ЖУРНАЛА С ПРИСКОРБИЕМ ОТМЕЧАЕТ, ЧТО ЗА ИСТЕКШИЙ ГОД ОБЩЕСТВО ПОТЕРЯЛО НИЖЕПЕРЕЧИСЛЕННЫХ СВОИХ ЧЛЕНОВ:

Почетный член, бывший председатель Общества, заслуженный профессор

Александр Васильевич
ВАСИЛЬЕВ

скончался 6 октября 1929 г., на 76 году жизни

Член Общества, профессор Дальне-восточного Государствен. Университ.

Николай Александрович
АГРОНОМОВ

скончался 23 апреля 1929 г., на 43 году жизни

Член Общества, профессор Педагогического Института имени Герцена

Борис Брониславович
ПИОТРОВСКИЙ

скончался 10 сентября 1929 г., на 53 году жизни

Journal de la Société Physico-Mathématique
de Léningrade
t. II, fasc. II

ЖУРНАЛ
ЛЕНИНГРАДСКОГО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОСНОВАН
академиком В. А. СТЕКЛОВЫМ

Том II, вып. II

ИЗДАНИЕ ГЛАВНАУКИ
1929

Дополнение к списку работ по математическим наукам, опубликованных в СССР за период 1917—1927 г.

К. В. Меликов.

Со времени напечатания основного списка составителю удалось достать некоторые из не бывших ранее в его распоряжении номеров уже цитированных им изданий, а также ряд изданий, ранее ему недоступных или даже неизвестных. Восполняя, главным образом, проистекавшие отсюда пробелы, настоящее дополнение содержит, кроме того, работы, относящиеся к указанному в заголовке периоду, но фактически появившиеся в 1928 г.

Способ обозначений и сокращений сохранен прежний, сокращения заглавий вновь цитируемых изданий даны в конце настоящего дополнения.

Составитель приносит искреннюю благодарность лицам, откликнувшимся на его просьбу сообщать ему о замеченных пропусках и ошибках, все их указания приняты им к сведению, лиц же, пользующихся списком, он просит внести следующие исправления:

Стр.	VII	столб.	2. 15 стр. снизу уничтожить слова (под стр.).
„	XXV	„	1. Статья „Применение плоскостных вурфов...." ошибочно приписана Н. А. Глаголеву вместо А. А. Глаголева.
„	XXV	„	1. „Sur le problème..." является заглавием французского резюме статьи „Задача о кратчайшей линии....", указанной выше.
„	XXXII	„	1. Сборник „Инженерные сооружения и строительная механика" ошибочно приписан Б. И. Извекову.
„	XXXIV	„	2. 7 стр. сверху, вместо $\mathbf{2}_5$ надо $\mathbf{2}_2$ (**5**).

I. Общий отдел.

Андреевский, Н. В. Элементы методики курса Теории Вероятностей в Педагогическом ВУЗ'е. Тверь, И. Пед. Инст. **3** 1927 34—38.

Беляев, Н. П. Очерки по вопросам преподавания математики. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 5—23 англ. рез. 23—23.

Букреев, Б. Я. Биография профессора В. П. Ермакова. К., Вісти Політехн. Інст. **20**$_1$ 1926 133—135.

Воропай, В. С. Математика на факсоцвихові І. Н. О. при чотирьохрічному навчанні Полтава, Зап. Інст. Нар. Осв. **4** 1926—1927 (1927) 115—129.

Выгодский, М. Платон как математик. М., Вестн. Комм. Акад. **16** 1926 193—21.

Дернов, Н. Постановка преподавания математики в школах Франции. Вятка, Трд. Пед. Инст. $\mathbf{2}_2$ 1927 5—17.

Егоров, Д. Ф. Успехи математики в СССР. М., Наука и Техника СССР 1917—1927 **1** 1927 231—232.

Зейлигер, Д. Н. Отзыв о работах G. Kowalewski, представленных на премию имени Н. И. Лобачевского. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 109—118.

Иоффе, А., Лазарев, П., Стеклов, В. Записка об ученых трудах Альберта Эйнштейна. (Albert Einstein). Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 42—42.

Карета, Л. А. Математика в сучасній школі. Каменец-Подольский, Зап. Інст. . ар. Осв. **1** 1926 1—13.

Котельников, А. П. Отзыв о работах Dr. V. Varićak, представленных Казанскому Физико-Математическому Обществу на премию имени Н. И. Лобачевского. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 86—108+1 табл.

Крылов, А., Белопольский, А., Стеклов, В., Рыкачев, М. Записка об ученых трудах профессора Карла Штёрмера. Пгр., И. А. Н. (6) **13** 1919 26—28.

Крылов, Н. М. и **Смирнов, В. И.** Памяти двух великих русских ученых второй половины XIX столетия: П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 XXII—LII.

Лазарев, П. П. и **Иоффе, А. Ф.** Записка об ученых трудах проф. Н. Н. Лузина. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 (1928) 1429—1431.

Лихтенбаум, Л. К вопросу о числе измерений. М., Вестн. Комм. Акад. **24** 1927 184—206.

Маловічко, В. Значення графичних ілюстрацій при викладанні математики. Херсон, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1925—1926 (1926) 49—54+1 табл.

Марков, А., Стеклов, В., Крылов, А. Записка об ученых трудах профессора Петроградского Университета Якова Викторовича Успенского. Пгр., И. А. Н. (6) **15** 1921 (1923) 4—6.

Парфентьев, Н. Н. Речь на юбилее проф. Д. Н. Зейлигера. 1927. VI. 5. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 127—130.

Платонов, Н. Ф. Заметки по вопросам физики и математики. Тверь, И. Пед. Инст. **3** 1927 90—102.

Профессор Г. К. Суслов. (К 70-летию со дня рождения и 45-летию научной и общественной деятельности). Одесса, Наука и Техника. **5** 5—6 (12) 1927 1—3.

Седьмой конкурс на премию имени Н. И. Лобачевского. Протокол заседания комиссии по присуждению премии имени Н. И. Лобачевского на VII международном конкурсе 11 мая 1927. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 62—63 фр. перев. 64—65.

Смирнов, В. И. Отзыв о диссертации доц. Н. С. Кошлякова: „О некоторых приложениях теории интегральных вычетов“. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 LV—LX.

Стеклов, В., Лазарев, П., Белопольский, А. Записки об ученых трудах Н. М. Гюнтера, И. И. Иванова, С. А. Чаплыгина, Д. Ф. Егорова, С. Н. Бернштейна, Д. А. Граве, Поля Пенлевэ (Paul Painlevé), Г. Х. Харди (Godfrey Harold Hardy), Эдмунда Ландау (Edmund Landau), Адольфа Кнезера (Adolph Kneser), Франческо Севери (Francesco Severi), Дж. Чарльза Фильдс (J. Charles Fields), Станислава Зарембы (S. Zaremba). Л., И. А. Н. (6) **18** 1924 (1925) 441—457.

Стеклов, В., Успенский, Я., Иоффе, А. Записка об ученых трудах Давида Гильберта (David Hilbert). Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 29—32.

—— —— —— Записка об ученых трудах Жака Адамара (Jacques Hadamard). Л., И. А. Н. (6) **16** 1922 (1924) 33—37.

Хинчин, А. Я. Идеи интуиционизма и борьба за предмет в современной математике. М., Вестн. Комм. Акад. **16** 1926 184—192.

Чистяков, И. И. Феликс Клейн и его реформа математического образования. Тверь, И. Пед. Инст. **3** 1927 5—15 фр. рез. 15—15.

Широков, П. А. Отзыв о книге D. J. Struik'a „Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung“, представленной Казанскому Физико-Математическому Обществу на премию имени Н. И. Лобачевского. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 119—126.

Cartan, Elie. Rapport sur le mémoire de J. A. Schouten, intitulé: Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 71—76.

Falckenberg, H. Bericht über Abhandlungen von Fr. Schilling erstattet für die Physiko-Mathematischen Gesellschaft an der Universität Kasan. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 77—80.

Fubini, Guido. Relazione sui lavori presentati dal Prof. Koebe. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 81—85.

Hilbert, David. Referat über die geometrischen Schriften und Abhandlungen Hermann Weyl's, erstattet der Physiko-Mathematischen Gesellschaft an der Universität Kasan. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 66—70.

II. Арифметика и алгебра.

Брадис, В. М. Опыт обоснования некоторых практических правил действия над приближенными числами. Тверь, И. Пед. Инст. **3** 1927 103—139 нем. рез. 139—140.

Григорьев, Е. И. О плотности и распределении простых чисел. Казань, И. Ф.-М. Общ. (2) **24**$_1$ 1924 14—25 фр. рез. 25—26.

Грузинцев, Г. А. Понятие отношения и аксиоматическое определение числа. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 25—42 фр. рез. 43 - 43.

Добровольский, В. П. К вопросу о выделении вещественных корней уравнений. К., Вісти політехн. Інст. **20**$_1$ 1926 65—66

Комаревский, В. М. К доказательству Cauchy основной теоремы высшей алгебры. Ташкент, Бюлл. 1 Ср.-Аз. Унив. **6** 1924 153—154.

Костанди, Г. В. Несколько слов о содержании и расположении тригонометрических таблиц логарифмов. Одесса, Наука и Техника, **2**$_3$ 1924 26—29.

—— О трансцендентных числах Лиувиля. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. **1**$_1$ 1921 49—59.

Кошляков, Н. С. Sur quelques applications du calcul des résidus à la théorie des nombres. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 101—128.

Кравчук, М. Ф. До загальної теорії білінійних форм. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1$_1$ 1924 72—79 фр. рез. 80—80.

—— Про одиниці поля $R(\sqrt[3]{\rho})$. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1$_1$ 1924 17—18.

Кузнецов, Г. П. Новая форма решения уравнения Пелля. Новочеркасск, И. Донск. Политехн. Инст. **10**$_2$ 1926—1927 (1928) 55—67 фр. рез. 68—69.

—— О числе целых решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k=m$, удовлетворяющих системе неравенств

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant 0,$$

при чем m число натуральное. Новочеркасск, И. Донск. Политехн. Инст. **10**$_2$ 1926—1927 (1928) 70—78.

Малеев, В. А. О последней теореме Fermat'a. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 36—40 фр. рез. 40—40.

—— О свойствах системы чисел, удовлетворяющих сравнению

$$x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^ny^nz^n\equiv 0 \pmod{q^{km}}.$$

Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 21—35 фр. рез. 35—35.

Петров, М. Про випадок втрати точности при відійманні наближених чисел. Херсон, Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1926—1927 (1926) 128—131.

Ремез, Е. Я. Питання теорії та практики логаритмічних обчислень. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 163—172.

Самбикин, Н. П. Алгебраическое и тригонометрическое решение полного кубического уравнения. Воронеж, Трд. Унив. **1** 1925 240—264.

Филиппов, А. Заметка о простых числах Эйлера. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. **1**$_1$ 1921 37—39.

—— К алгебре сравнений. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. **1**$_1$ 1921 19—32.

Франк, М. Л. Логарифмический прибор для решения алгебраических уравнений. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 35—38 англ. рез. 38—38.

Чеботарев, Н. Г. Studien über Primzahlendichtigkeit I. Über Grenzen, zwischen denen gewiss Primzahlen liegen, die zu einer gegebenen Abteilung von Substitutionen gehören. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 14—20.

Штаерман, И. Я. и **Ахиезер, Н. И.** К теории квадратичных форм. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 2$_1$ 1924 116—123.

IV. Анализ.

Акимов, М. И. О некоторых приложениях функций Бесселя многих переменных. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 64—72 англ. рез. 72—72.

—— О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике. Пгр., 1922 136 + 4 (литогр.).

Аппельрот, Г. Г. К вопросу о периодических решениях алгебраических дифференциальных уравнений. М., Мат. Сборн. **34** 1927 364—381 нем. рез. 382—383.

Ахіезер Н. И. Про деякі застосування сумаційної формули Poisson'a. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 157—162.

Боев, Г. П. Об автоморфных функциях. Саратов, Уч. Зап. Унив. **6**$_3$ (**15**) 1927 47—53.

Букреев, Б. Я. О теоремах Кнезера и Хильберта. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 153—158 англ. рез. 158—158.

—— Об одном предложении вариационного исчисления. К., Вісти Політехн. Інст. **20**$_1$ 1926 23—25.

Варзар, С. О практическом применении метода Lagrange-Dale'a. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **15** 1925 84—86.

Викберг, Б. А. К вопросу о классификации решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Баку, И. Азерб. Унив. **3**$_1$ 1923—1924 221—229.

Вишневский, Л. А. Ueber ein System linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 85—88.

—— Ueber Taylorsche Entwickelung und über relatives Extremum der Funktionen von unendlichvielen unabhängigen Variabeln. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 161—175.

Гагаев, Б. М. К теории суммируемых ортогональных рядов. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 58—61 фр. рез. 61—61.

Голубев, В. В. Исследования по теории особых точек. Саратов, Уч Зап. Унив. **6**$_3$ (**15**) 1927 31—45.

Граве, Д. А. О решении линейных дифференциальных уравнений при помощи определенных интегралов. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 (1928) 943—952.

Зернов, В. Д. Табличный и механический гармонический анализ. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **2** 1926 5—16.

Карета, Л. А. Формула Тайлора як узагальнена теорема Лягранжа. Каменец-Подольский Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1926 1—2.

Кованько, А. С. Определение интеграла вдоль квадрируемой кривой. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 135—143 фр. рез. 143—144.

—— Sur les suites de fonctions additives et absolument continues. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 96—98.

—— Sur quelques fonctions sommables. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 98—100.

—— Sur une extension d'un théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme des suites de fonctions à une variable compléxe. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 10—10.

Кошляков, Н. С. Sur la fonction $\Gamma(ia)$ à l'argument purement imaginaire. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымского Унив. **3** 1921 7—8.

Кравчук, М. Ф. До способу моментів у математичній статистиці. К., Зап. С.-Госп. Інст. **2** 1927 83—94 англ. рез. 95—95.

—— До теорії функцій дійсного змінного. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1926 94—99 нем. рез. 99—100.

—— Перемінні множини лінійних перетворень. К., Зап. С.—Госп. Інст. **1** 1926 25—51 нем. рез. 51—58.

—— Про деякі перетворення кратних інтегралів. К., Зап. С.—Госп. Інст. **3** 1927 77—85 нем. рез. 86—88.

—— Про одну Hermite'ову формулу. К., Зап. С.-Госп. Інст. **2** 1927 80—82 нем. рез. 82—82.

—— Про похідні від наближених інтегралів деяких диференціяльних рівнянь. К., Вісті Політехн. Інст. **21** 1927 (1928) 3—9 фр. рез. 10—10.

—— Про спосіб найменших квадратів та про спосіб моментів у теорії наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь. К., Вісті Політехн. Інст. **21** 1927 (1928) 11—17 фр. рез. 18—18.

—— Про суцільність коренів цілої трансцендентної функції. К., Вісти Політехн. Інст. **20**$_1$ 1926 63—64.

—— Про спосіб М. Крилова в теорії наближеної інтеграції диференціяльних рівнянь. К., Трд. Ф.-М. відділу 5_2 1926 12—33.

—— и **Оконенко, А.** Про нормальний закон разподілу при двох змінних ознаках. К., Зап. С.-Госп. Інст. **1** 1926 95—99 нем. рез. 99—99.

Крейн, М. О ряде Тэйлора, определяющем аналитическую функцию регулярную в области, ограниченной несколькими кружками. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 50—57 фр. рез. 57—57.

Крылов, Н. М. О сходимости некоторых интерполяционных формул и в частности формулы M. Riesz'a. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 73—84 англ. рез. 84—84.

—— Разбор диссертации проф. Л. А. Вишневского: „Некоторые вопросы теории функций бесконечного числа независимых переменных". Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 V—XXI англ. рез. XXI—XXI.

—— Sur la formule de Stokes en coordonnées curvilignes (Extrait d'une lettre adressée à prof. M. Tikhomandritzky). Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 61—63.

—— Sur la théorie des équations intégrales à noyau symetrisable. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 89—95.

—— Sur les équations intégrables de première éspèce. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 129—134.

—— Sur un lemme dans la théorie de fermeture se rapportant au cas des fonctions fondamentales de la prémière classe limite. Х., Наук. Зап. Технол. Інст. 2_1 1927 93—94.

Левицкий, В. и **Кравчук, М. Ф.** Формула Стірлінга. К., Зап. С.-Госп. Інст. **3** 1927 89—90.

Люстерник, Л. К вопросу обоснования анализа и геометрии положения без теории множеств. М., Вестн. Комм. Акад. **13** 1925 217—222.

Ляпин, Н. М. Вывод формулы для средней случайной вариации суточного хода хронометров. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. 1_1 1921 9—14.

—— Об одном основном свойстве случайных ошибок. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. 1_1 1921 15—18.

—— Простой способ получения формулы Cowell'a. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. 1_1 1921 61—64.

Макавеев, В. М. К анализу эмпирических кривых. Новый способ выделения периодических членов при свободном члене, имеющем постоянную величину. Л., И. Р. Гидрол. Инст. **14** 1925 13—29 фр. рез. 30—30.

Маловічко, В. Метода аналізи безкрайньо малих. Херсон. Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1926—1927 (1926) 113—127.

Марчевский, М. М. Деяки питання, що звязані з сумуванням. Х., Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 37—45.

Мордухай-Болтовской, Д. Д. Об арифметических свойствах интегралов дифференциальных уравнений первого порядка типа Пенлевэ. Казань, И. Ф.-М. Общ (3) **2** 1927 (1928) 1—13 фр. рез. 13—13.

Пфейффер, Г. В. Загальний огляд дослідів, що їх перевів проф. Г. В. Пфейфер у царині інтегрування рівнань з частковими похідними першого порядку одніеї та багатьох невідомих функцій за час з р. 1914 до р. 1920. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 141—150.

Саткевич, А. А. Приемы исследования эмпирических кривых. I. Номографический метод параллельного координирования в его применении к анализу эмпирических кривых. Пб. Опытно-Строительное дело. **3** 1919 90+1.

Смирнов, В. И. О конформном преобразовании односвязной области в себя. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 145—152 фр рез. 152—152.

—— Sur quelques points de la théorie des équations differentielles lineaires du second ordre et des fonctions automorphes. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 20—24.

Смогоржевский, А. и **Кравчук, М. Ф.** Про ортогональні перетворення. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 151—155 нем. рез. 156—156.

Смоленский, Б. И. Геометрическая интерпретация некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. Свердловск, И. Уральск. Политехн. Инст. **6** 1927 27—51 фр. рез. 52—52.

Сушкевич, А. К. О теореме Weierstrass'a. Воронеж, Трд. Унив. **1** 1925 238—239.

Тельный, С. Графический метод интегрирования дифференциальных уравнений, встречающихся в электротехнике. Екатеринослав, И. Горн. Инст. **14** 1924 403—413+1 тбл.

Тер-Мкртичев, А. Периодические функции и периоды. Баку, Н. И. Азерб. Политехн. Инст. **1** 1925 21—38.

Турчанинов, А. С. О некоторых приложениях исчисления матриц к линейным дифференциальным уравнениям. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. $\mathbf{1}_1$ 1921 41—48.

Филиппов А. Об одной формуле дифференциального исчисления. Одесса, Уч. Зап. Высш. Шк. $\mathbf{1}_1$ 1921 33—36.

Франк, М. Л. Ueber die Interpolation einiger in der Praxis vorcommender geschlossener Kurven. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 15—16.

Шнейдер, В. Я. Об общем выражении полного дифференциала сложной функции одного независимого переменного. Свердловск, И. Уральск. Политехн. Инст. **6** 1927 53—71.

Штаерман, И. Я. О приближенном интегрировании дифференциальных и интегральных уравнений. К., Вісти Політехн. Інст. $\mathbf{20}_1$ 1926 26—59 нем. рез. 60—62.

—— О приложении методов интерполяции к приближенному интегрированию дифференциальных уравнений равновесия упругих оболочек. К., Вісти Політехн. Інст. $\mathbf{20}_2$ 1926 (1927) 101—112.

—— Обобщение формул ортогонализирования. К., Вісті Політехн. Інст. **21** 1927 (1928) 49—56.

Cartan, E. См. V.

V. Геометрия.

Белоновский, П. Д. О некоторых геометрических приложениях теории целых комплексных чисел. Вятка, Трд. Пед. Инст. $\mathbf{2}_2$ 1927 39—56.

Боев, Г. П. Минимальные поверхности, проходящие через три пересекающиеся прямые. Саратов, Уч. Зап. Унив. $\mathbf{6}_3$ (**15**) 1927 55—62+4 тбл.

Букреев, Б. Я. О фокусах кривых второго порядка. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1_1 1924 3—8 нем. рез. 8—8.

—— Простейшее решение задачи об эволютах пространственной кривой. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 159—160 англ. рез. 160—160.

Горбунов, Б. Н. и **Уманский, А. А.** О построении конических сечений. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 2_1 1924 126—134.

—— —— О специальном методе изображения проф. B. Mayor'a. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1_1 1924 39—53.

Горин, Н. П. Некоторые замечания о полюсах и полярах в гиперболической плоскости. Свердловск, И. Уральск. Политехн. Инст. **6** 1927 341—345 фр. рез. 345—345.

Карета, Л. А. Форми конічних перерізів на викройці конуса. Каменец-Подольский, Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 1—3+1 тбл.

Китран, Е. Е. Метод вычисления средних глубин и объемов некоторых водоемов. Одесса, Ж. н.—досл. кафедр $\mathbf{2}_3$ 1926 102—103 нем. рез 103—103.

Кравчук, М. Ф. Замітка про обвід кола в неевклідовій геометрії. К., Зап. С.-Госп. Інст. **1** 1926 74—75 нем. рез. 75—75.

Марковский, Д. Повна кривина оборотових еліпсоіда, гіперболоіда та параболоіда. Херсон, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1925—1926 (1926) 55—67.

Огиевецкий, И. Е. О кардановом движении. Днепропетровск, И. Горн. Инст **15** 1925—1927 (1928) 149—150.

—— Эволюция геометрии физического мира. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 75—98.

Оглоблин, Н. В. О приложении векториального анализа к теории кривых. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 26—34.

—— Об интегральных соотношениях векториального анализа. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 185—193 англ. рез. 193—193.

—— On the multiplication of vector quantities. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 2—6.

Подгорный, Н. Фокальная теория поверхностей второго порядка. (Приложение метода взаимных поляр). Баку, Н. И. Азерб. Политехн. Инст. **1** 1905 9—19.

Рабинович, Ю. Г. Опыт натуральной геометрии кривых многомерных пространств. Одесса. Уч. Зап. Высш. Шк. **1**, 1921 1—8.

Сикорский, Ю. С. О спрямлении дуг плоских кривых. Одесса, Н.-Техн. Ж. $\mathbf{5}_{7-10\,(13)}$ 1927 101—106.

Синцов, Д. М. Етюди з теорії кривих. III. Звязок Декартового листка та Штейнерової гіпоциклоїди. Х. Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 35—36 фр. рез. 36—36.

Черный, С. Д. Лобачевського простір та простір небесний. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1926 107—112.

Чистяков, И. И. О рациональных треугольниках. Тверь, И. Пед. Инст. **1** 1926 52—58.

Яцына, В. П. Теория линий средин второго порядка. Л., И. Технол. Инст. **1 (25)** 1927 246—289 нем. рез. 290—290.

Cartan, E. Sur un problème de Calcul des Variations en Géométrie projective plane. M., Мат. Сборн. **34** 1927 349—363 русск. рез. 363—364.

VI. Механика.

Акимов, М. И. см. IV.

Ахиезер, Н. И. К вопросу об устойчивости вихревых улиц. Х., Наук. Зап. Технол. Інст. $\mathbf{2}_1$ 1927 95—97.

—— О формулах Blasius'а. Х., Наук. Зап. Технол. Інст. $\mathbf{2}_1$ 1927 99—100.

Верховский, А. В. Четырехзвенный пространственный механизм с цилиндрическими шарнирами, оси которых не параллельны и не пересекаются в одной точке, и его исследование. Томск, И. Технол. Инст. $\mathbf{46}_2$ 1925 24—30+1 тбл.

Ветчинкин, В. П. Теория гребных винтов. М., (Военн.-Возд. Акад.) 1926 581+15+4 тбл. (лит.).

[illegible], П. В. К вопросу об интегрировании уравнений Лагранжа. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 39—59 англ. рез. 35—35 нем. рез. 60—60.

—— Пример на движение несвободного твердого тела. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 176—184 нем. рез. 184—184.

—— Ueber nicht holonome Systeme. Симферополь, Зап. Мат. каб. Крымск. Унив. **3** 1921 12—13.

Гернгросс, С. В. Метод выбора наивыгоднейшего профиля аэропланного крыла. Одесса, Н.-Техн. Ж. $\mathbf{5}_{7-10\,(13)}$ 1927 87—101.

Глушков, Г. С. Применение моментов высоких степеней в теории изгиба. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **3** 1927 33—60.

Горин, Н. П. О сложении сил в пространстве Лобачевского. Свердловск, И. Уральск. Политехн. Инст. **6** 1927 3—24 фр. рез. 25—25.

Грдина Я. И. К вопросу о динамической устойчивости центробежных регуляторов. Днепропетровск, И. Горн. Инст. **15** 1925—1927 (1928) 41—70.

—— Основные законы движения. Екатеринослав, И. Горн. Инст. **14** 1924 185—213.

Гюнтер, Н. М. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. Часть четвертая и пятая. Л., И. А. Н. (6) **21** 1927 (1928) 735—756, 1139—1162.

Динник, А. Н. Продольный изгиб стержней, жесткость которых меняется по кубическому закону. Днепропетровск, И. Горн. Инст. **15** 1925—1927 (1928) 115—122 нем. рез. 123—123.

Добровольский, В. П. К теореме площадей механики. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 2_1 1924 124—126.

—— Некоторые вопросы теории потенциала. К., Вісти Політехн. Інст. $\mathbf{20}_1$ 1926 67—73.

Жемочкин, Б. Н. Некоторые гидростатические аналогии. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **6** 1927 47—54.

Зальцберг, С. Г. О расчете круглой пластинки при помощи квадратур. Одесса, Н.-Техн. Ж. $\mathbf{5}_{7-10\,(13)}$ 1927 42—57.

Иванов, Б. М. Применение кинематики к расчету комбинированных и сложных статически определимых систем. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **2** 1926 17—29.

Иванов, М. Н. О малых колебаниях материальной системы около положения равновесия. Томск, И. Технол. Инст. $\mathbf{41}_1$ 1916 (1918) 1—60.

Квасников, А. В. Определение неуравновешенности поршневых машин. Томск, И. Технол. Инст. $\mathbf{43}_2$ 1923 1—26+2 табл.

Котельников, А. П. Точки Бурместра, их свойства и построение. М., Мат. Сборн. **34** 1927 207—345 фр. рез. 346—348.

Ксандров, Д. Н. К теории кривого бруса. Х., Наук. Зап. Технол. Інст. **2**, 1927 105—108.

Куликовский, П. Г. Основи методу пружистої лінії. К., Вісти Политехн. Інст. **20**, 1926 90—103.

Лебедев, С. Ф. Обод под нагрузкой по закону показателя. Томск, И. Технолог. Инст. **45**, 1924 71—79+1 табл.

Лендер, Ф. Ф. К вопросу о распределении давлений газов между дном снаряда и дном канала. Пгр. (Ком особ. арт. оп). 1919 38.

—— Механические свойства кривых давлений пороховых газов в канале орудий в начальной точке движения снаряда. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.) 1919—32.

Локшин, А. Ш. Динамические напряжения в канатах переменного сечения. Днепропетровск, И. Горн. Инст. **15** 1925—1927 (1928) 125—148.

—— К кручению анизотропных призм. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 53—59.

—— Об изгибе круглой пластины. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 45—52.

Лукин, П. П. Об одном инварианте в строительной механике. Баку, Н. И. Азерб. Политехн. Инст. **1** 1925 3—8+1 тбл.

Малиновский, А. Э. Единство физической картины мира. Понятие о температуре. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 61—65.

Малкин, И. К динамике вязкой жидкости. Казань, И. Ф.-М. Общ. (3) **2** 1927 (1928) 41—48 фр. рез. 49—49.

Малышев, А. П. Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры. Томск, И. Технол. Инст. 1923 1—77+2+16 табл.

Мостовский, А. Ф. К вопросу о влиянии скорости и масс на деформации при ударе. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **1** 1926 106—108.

Огиевецкий, И. Е. Об одной основной теореме кинематики. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 67—69.

Проскура, Г. Ф. Определение диаметра воздушного винта из условий minimum'a потерь. Х., Наук. Зап. Технол. Інст. **2**, 1927 101—103.

Рабинович, И. М. Графическая статика плоских многократно изменяемых кинематических цепей и некоторые применения ее в строительной механике. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **3** 1927 97—174.

—— О некоторых соотношениях между перемещениями точек упругого тела. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **3** 1927 71—96.

Рерих, К. Э. Влияние быстроходности двигателей на прерывный процесс регулирования центробежных регуляторов. Днепропетровск, И. Горн. Инст. **15** 1925—1927 (1928) 87—113.

Станкевич, И. В. К вопросу об испытании прочности металлических стержней с помощью прибора Мартенса. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **1** 1926 98—105.

Столяров, Н. А. Абсолютний рух в інерціяльних середовищах. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1926 101—104 фр. рез. 105—106.

Страхович, К. И. Волнообразное движение вязкой жидкости. Л., И. Гидрол. Инст. **19** 1927 90—90.

—— Движение вязкой несжимаемой жидкости. Л., И. Гидрол. Инст. **18** 1927 5—18 фр. рез. 18—18.

—— Интегральные уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Л., И. Гидрол. Инст. **20** 1927 167—168.

—— Об одном случае движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости. Л., И. Гидрол. Инст. **20** 1927 79—87 фр. рез. 88—88.

—— Потенциальное плоское движение вязкой сжимаемой жидкости. Л., И. Гидрол. Инст. **20** 1927 168—168.

Струнников, В. Т. Остойчивость судов с жидкими грузами, обладающими значительной свободной поверхностью. М., Трд. Инст. Инж. Трансп. **6** 1927 143—152.

Сухомель, Г. Й. Визначення центра ваги площі, обмеженої двома взаємноперпендикулярними простими та дугою кола. К., Вісті Політехн. Інст. **21** 1927 (1928) 129—130.

Трофимов, В. М. Опыты по определению сопротивления воздуха, произведенные на Главном Артиллерийском Полигоне в 1908—1910 годах. Пгр. (Ком. особ. арт. оп.) 1920 43+3 тбл.

Фок, В. А. Условно-периодические системы с соизмеримостями и их адиабатические инварианты. М.-Пгр., Трд. Гос. Опт. Инст. **3**, 19 1924 1—22.

Цейтлин, З. Проблема всемирного тяготения. М., Вестн. Комм Акад. **13** 1925 167—1[illegible].

Черный, С. Д. Рух планетного перигелія в чотирьохмірнім Евклідовім просторі. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **2** 1927 113—119 англ. рез. 119—122.

Шмидт, Ф. Г. К. теории сил лобового сопротивления плоского потока. Л., И. Гидрол. Инст. **18** 1927 19—35+1 табл. нем. рез. 35—35.

Штаерман, И. Я. К расчету кругового опорного кольца. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **18**$_1$ 1923 37—46.

—— К теории гибких нитей. Одесса, Наука и Техника. **4**$_{1-2\,(10)}$ 1926 23—28.

—— К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1$_1$ 1924 54—72.

—— К теории симметричных деформаций упругих анизотропных оболочек. (Дополнение). К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1$_2$ 1924 64—75.

—— О применении метода асимптотического интегрирования к расчету упругих оболочек. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1$_2$ 1924 75—99.

—— О продольном изгибе круговых арок переменного сечения. К., Вісті Політехн. Інст. **21** 1927 (1928) 19—24

—— Об интегрировании дифференциальных уравнений равновесия упругих оболочек. К., Вісти Політехн. Інст. **20**$_2$ 1926 (1927) 96—100.

—— Устойчивость криволинейных стержней и арок. К., Вісті Політехн. Інст. **21** 1927 (1928) 25—48.

Жарский, А. В. Расчетные формулы для одного типа жесткой рамы. К., 1925. 26.

VII. Теория относительности.

Грдина, Я. И. Заметки по принципу относительности. Днепропетровск, И. Горн. Инст. **15** 1925—1927 (1928) 77—86.

Кордыш, Л. И. Закони теорії гравитації Ейнштейна, які можна вывести з Ньютоновських потенціялів. К., Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1926 127—128.

—— Теория относительности и теория квант. К., И. Политехн. и С.-Х. Инст. **19** 1$_1$ 1924 10—17.

Огиевецкий, И. Е. Ueber die Anwendungen eines Dualitätsgesetzes auf die ralativistische Physik. Днепропетровск, Зап. Інст. Нар. Осв. **1** 1927 71—74.

Фесенков, В. Астрономические доказательства принципа относительности. М., Вестн. Комм. Акад. **13** 1925 200—216.

Харазов, Г. А. Малый принцип относительности. М., Вест. Комм. Акад. **12** 1925 265—326, **14** 1926 143—162.

—— Математическая критика теории относительности. М., Вестн. Комм. Акад. **10** 1925 258—299.

Щукарев, А. Н. Принцип относительности и современные течения научной мысли. Х., Н.-Техн. Ж. **3—5** 1922 45—61. **6—10** 1923 113—128.

Список сокращений журналов.

Вісти Політехн. Інст.	Вісти Київського Політехнічного Інституту Київ.
Зап. Інст. Нар. Осв.	Записки Дніпропетровського Інституту Народньої освіти.
Зап. Інст. Нар. Осв.	Записки Кам'янець—Подільського Інституту Народньої освіти. Кам'янець на Поділлю.
Зап. Інст. Нар. Осв.	Записки Київського Інституту Народньої освіти. Київ.
Зап. Інст. Нар. Осв.	Записки Полтавського Інституту Народньої освіти. Полтава.
Зап. Інст. Нар. Осв.	Записки Харківського Інституту Народньої освіти ім. О. О. Потебні. Харків.
Зап. Інст. Нар. Осв.	Записки Херсонського Інституту Народньої освіти імени Н. К. Крупської. Херсон.
Зап. С.-Госп. Інст.	Записки Київського Сільсько-Господарського Інституту. Київ.
И. Азерб. Унив.	Известия Азербайджанского Государственного Университета имени В. И. Ленина. Отдел Естествознания и Медицины. Баку.
И. Гидрол. Инст.	Известия Государственного Гидрологического Института. Ленинград.
И. Горн. Инст.	Известия Екатеринославского Горного Института имени т. Артема-Сергеева. [**14**]. Известия Днепропетровского Горного Института им. т. Артема-Сергеева. Днепропетровск. [С **15**].
И. Пед. Инст.	Известия Тверского Педагогического Института. Тверь.
И. Политехн. и С.-Х. Инст.	Известия Киевского Политехнического и Сельско-Хозяйственного Институтов. Киев.
И. Технол. Инст.	Известия Технологического Института имени Ленинградского Совета рабочих, крестьянских и красноармейских депутатов. Ленинград.
Н. И. Азерб. Политехн. Инст.	Научные Известия Азербайджанского Политехнического Института имени Азизбекова. Баку. [До **2**, с **3** Известия Азербайджанского Государственного Политехнического Института имени Азизбекова Баку].
Н.-Техн. Ж.	Научно-Технический Журнал Одесского Отделения Научно-Технического Управления ВСНХ УССР, Одесского Политехнического Института и Одесского Отделения Всеукраинской Ассоциации Инженеров. Одесса. (С **5**, как продолжение Наука и Техника).
Н.-Техн. Ж.	Научно-Технический Журнал. Орган Научно-Технического Совета при Украинском Научно-Техническом Отделе УСНХ. Харьков.
Наук. Зап. Технол. Інст.	Наукові Записки Харківського Технологічного Інституту імени В. І. Ленина. Харків.

Наука и Техника.	Наука и Техника Орган Одесского Научно-Технического Отдела ВСНХ УССР, Одесского Отделения Всеукраинской Ассоциации Инженеров и Одесского Политехнического Института. Одесса. (до 5_6, далее Научно-Технический Журнал).
Опытно-Строительное дело.	Опытно-Строительное дело. ВСНХ Управление ирригационных работ в Туркестане. Петербург.
Трд. Пед. Инст.	Труды Вятского Педагогического Института имени В. И. Ленина. Вятка.
Трд. Инст. Инж. Трансп.	Труды Московского Института Инженеров Транспорта. Москва.
Уч. Зап. Высш. Шк.	Ученые Записки Высшей Школы г. Одессы. Отдел Физико-Математических и Технических Наук под редакцией профессоров Б. Н. Кандиба, Ч. Д. Кларка, Л. И. Мандельштама и И. Ю. Тимченко. Одесса.

К теории совокупных Диофантовых приближений.

Р. Кузьмин.

Здесь я даю вывод одной теоремы о распределении дробных долей системы полиномов, представляющей некоторое обобщение теоремы, доказанной академиком И. М. Виноградовым в статье: „Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого полинома“ (ИАН ССС 1927).

Простое применение этой теоремы позволяет дать довольно полное решение ряда вопросов, относящихся к теории совокупных Диофантовых приближений высших степеней. Первые шаги в исследовании этих вопросов сделаны, насколько мне известно, Hardy и Littlewood'ом в их докладе на международном съезде математиков в 1912 г. Weyl в 1914 г. дал одно замечательное неравенство, значительно облегчившее дальнейшее изучение этих вопросов. Оно лежит в основе и этой работы.

Для простоты изложения, в дальнейшем всюду говорится о двух полиномах, или двух приближениях. Обобщение на большее число не представляет затруднений.

§ 1. Отметим некоторые предложения, нужные для дальнейшего:

I. Неравенство Вейля: если $f(x)=\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha n$ — полином с вещественными коэффициентами, «z» — расстояние числа z до ближайшего целого, $S=\left|\sum_{1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right|$ то:

$$S^{2^{n-1}}<4^{2^{n-1}}\left[N^{2^{n-1}-1}+N^{2^{n-1}-n}\sum_{h_1,\,h_2\ldots h_{n-1}=1}^{N}\operatorname{Min}\left(N,\frac{1}{«\alpha n!\,h_1\,h_2\ldots h_{n-1}»}\right)\right].$$

Следствием неравенства Вейля является формула:

$$S^{2^{n-1}} = O(N^{\varepsilon})\left[N^{2^{n-1}-1} + N^{2^{n-1}-n}\sum_{h=1}^{n!N^{n-1}} \mathrm{Min}\left(N, \frac{1}{«\alpha h»}\right)\right],$$

справедливая при любом выборе положительной постоянной ε.

Доказательство этих предложений можно найти в книге E. Landau: Vorlesungen über die Zahlentheorie Bd I (Satz 265, 266).

Отметим еще, что из неравенства Вейля вытекает предложение: при α иррациональном $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{S}{N} = 0$.

II. Если

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}; \quad (p, q) = 1, \quad 0 < q < N^n,$$

то:

$$\sum \mathrm{Min}\left(N, \frac{1}{(\alpha h)}\right) = 0(N^{\varepsilon})\, N^n \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N^n}\right).$$

При этом суммирование распространено на все последовательные значения h в интервале, длина которого есть величина порядка N^{n-1}.

Доказательство лишь несущественно отличается от доказательства леммы III названной работы И. М. Виноградова.

§ 2. Пусть функция $\varphi(\xi)$ с периодом, равным единице, в интервале (a, b) равна единице, а в остальной части интервала $(0,1)$ равна нулю.

Тогда, как легко видеть:

$$\varphi(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n\xi},$$

при чем

$$a_0 = b - a; \quad |a_n| < \frac{1}{n}.$$

Введем еще функцию $\psi(\xi) = \frac{1}{2\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \varphi(\xi + u)\, du$, где Δ — некоторое положительное число.

Тогда:

$$\psi(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{2\pi n i\xi}; \quad b_0 = b - a; \quad b_n = a_n \frac{\sin 2\pi n\Delta}{2\pi n\Delta},$$

кроме того:

$$|b_n| < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2\Delta}\right),$$

так что ряд абсолютно сходящийся.

Образуем, наконец, функцию $\omega(\xi, \eta) = \psi(\xi) \cdot \psi_1(\eta)$, где $\psi_1(\eta)$ отличается от $\psi(\xi)$ тем, что вместо чисел a, b, ξ взяты c, d, η.

Очевидно справедливо разложение:

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} c_{nm} e^{2\pi i (n\xi + m\eta)}$$

при этом $c_{00} = (b - a)\ (d - c)$; $\quad c_{nm} = b_n \cdot b'_m$, где b'_m — коэффициент в разложении $\psi_1(\eta)$.

Точки (a, c), (b, c), (a, d), (b, d) составляют вершины прямоугольника с площадью $\sigma = (b - a)\ (d - c)$, расположенного внутри квадрата с вершинами (0,0) (0,1) (1,0) (1,1).

Для всякого прямоугольника σ_1, аналогичного прямоугольнику σ можно составить соответствующую функцию ω_1, аналогичную функции $\omega(\xi, \eta)$.

§ 3. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ два полинома степеней h и k, причем $h < k$. Переменное x принимает ряд значений: 1, 2, 3, ... N. Каждому значению x соответствует внутри единичного квадрата (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) точка, координаты которой равны дробным долям соответственных значений $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Цель ближайших параграфов состоит в том, чтобы определить $\nu(\sigma)$ — число таких точек, попадающих внутрь прямоугольника σ с вершинами в точках: (a, c), (b, c), (a, d), (b, d). Введенная в § 2 функция $\omega(\xi, \eta)$ дает удобное средство для этого. Возьмем два прямоугольника σ_1 и σ_2, стороны которого удалены от сторон прямоугольника σ на величину Δ. Прямоугольник σ будем считать таким, что σ_2 целиком расположен внутри единичного квадрата, а σ_1 существует. Составим для этих прямоугольников соответствующие функции $\omega_1(\xi, \eta)$, $\omega_2(\xi, \eta)$, $\omega(\xi, \eta)$. Легко видеть, что $\omega_2(\xi, \eta) = 1$ в прямоугольнике σ и не отрицательна в остальной части единичного квадрата, $\omega_1(\xi, \eta) = 0$ вне квадрата σ и $\leqq 1$ внутри его.

Кроме того, везде:

$$\omega_1(\xi, \eta) \leqq \omega(\xi, \eta) \leqq \omega_2(\xi, \eta).$$

Поэтому, полагая:

$$\xi = f_1(x), \ \eta = f_2(x),$$

найдем:

$$\sum_{x=1}^{N} \omega_1(\xi, \eta) \leqq \nu(\sigma) \leqq \sum_{x=1}^{N} \omega_2(\xi, \eta)$$

$$\sum_{x=1}^{N} \omega_1(\xi, \eta) \leqq \sum_{x=1}^{N} \omega(\xi, \eta) \leqq \sum_{x=1}^{N} \omega_2(\xi, \eta).$$

Отсюда следует:

$$\nu(\sigma) = \sum_{x=1}^{N} \omega(\xi, \eta) + \theta \left[\sum_{x=1}^{N} \omega_2(\xi, \eta) - + \sum_{x=1}^{N} \omega_1(\xi, \eta) \right].$$

Применяя разложение функций $\omega(\xi, \eta)$ в ряд и суммируя почленно, найдем отсюда:

$$\nu(\sigma) = N\sigma + O(N\Delta + R).$$

Здесь через R обозначен максимум абсолютного значения величины

$$\sum_{n,m}{}' C_{nm} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i (n\xi + m\eta)},$$

в которой суммирование распространено на все целые значения чисел n и m, не равных нулю одновременно.

§ 4. Для оценки величины R воспользуемся равенством:

$$\sum_{n,m}{}' = \sum_{\substack{1 \leqq |n| \leqq N \\ m=0}} + \sum_{\substack{|n| \leqq N \\ 1 \leqq m \leqq N}} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ |m| > N}}^{+\infty} + \sum_{\substack{|n| > N \\ |m| \leqq N}} = A+B+C+D.$$

При оценке сумм C и D величину

$$\left| \sum_{x=1} e^{2\pi i (n\xi + m\eta)} \right| = S_{nm}$$

заменим величиной N и воспользуемся неравенствами для величин $|C_{nm}|$, вытекающими из неравенств для величин b_n § 2. Пользуясь обычными приемами, найдем:

$$C+D = O\left(\frac{\lg N}{\Delta}\right) = O\left(\frac{N^{\varepsilon}}{\Delta}\right).$$

[При этом ε, как обычно, — произвольная положительная постоянная, и предположено, что $\frac{1}{\Delta} = O(N)$].

Для оценки величины B, применяя неравенство Коши-Шварца, получим:

$$|B|^2 \leqq \sum |C_{nm}| \cdot \sum |C_{nm}| \cdot S_{nm}^2.$$

Дальнейшее применение неравенства Коши-Шварца дает:

$$|B|^{2^{k-1}} \leqq \left[\sum |C_{nm}|\right]^{2^{k-1}-1} \cdot \sum |C_{nm}| \cdot S_{nm}^{2^{k-1}}.$$

В правой части полученного неравенства первый множитель есть величина порядка $(\lg N)^{2^k} = O(N^{\varepsilon})$.

Для изучения второго множителя, заметим, что

$$S_{nm} = \left| \sum_1^N e^{2\pi i (n\xi + m\eta)} \right| = \left| \sum_1^N e^{2\pi i (\alpha m x^k + \dots)} \right|.$$

Поэтому применение неравенств для C_{nm} и неравенства Вейля дает:

$$\sum |C_{nm}| S_{nm}^{2^{k-1}} = O(N^{\varepsilon}) \sum_{\substack{|n| \leqq N \\ 1 \leqq m \leqq N}}{}' \frac{1}{nm} \left[N^{2^{k-1}-1} + \right.$$

$$\left. + N^{2^{k-1}-k} \sum_{\lambda=1}^{k! N^{k-1}} \operatorname{Min}\left(N, \frac{1}{«\lambda m \alpha»}\right) \right].$$

Знак над суммой означает, что при $n = 0$ величина $\frac{1}{nm}$ должна быть заменена на $\frac{1}{m}$.

Поэтому:

$$\sum |C_{nm}| \cdot S_{nm}^{2^{k-1}} = O(N^{\varepsilon} \lg^2 N)\, N^{2^{k-1}-1} + O(N^{\varepsilon})\, N^{2^{k-1}-k} Q.$$

Здесь

$$Q = \sum_{|n| \leqq N}{}' \frac{1}{n} \sum_{\lambda, m} \frac{1}{m} \operatorname{Min}\left(N, \frac{1}{«\lambda m \alpha»}\right) =$$

$$= O(\lg N) \sum_{\mu=1}^{k! N^k} \operatorname{Min}\left(N, \frac{1}{«\alpha \mu»}\right) \cdot \tau(\mu).$$

Через $\tau(\mu)$ здесь обозначена сумма $\sum_{m\lambda = \mu} \frac{1}{m}$, распространенная лишь на такие значения m, при которых $\lambda \leqq k! N^{k-1}$.

Сумму, получившуюся в правой части последнего равенства, разобьем на группы последовательных слагаемых. числом к $k!N^{k-1}$ в каждой. Пусть $l = \rho \cdot k!N^{k-1}$ и S_ρ — одна из таких групп:

$$S_\rho = \sum_{\mu = l+1}^{l + k!N^{k-1}} \tau(\mu) \; \mathrm{Mln}\left(N, \frac{1}{«\alpha\mu»}\right).$$

В каждом из слагаемых $\frac{1}{m}$, входящих в состав $\tau(\mu)$ одного из членов суммы S_ρ величина $m \geqq \frac{1}{\rho}$, при $\rho > 0$ или $m \geqq 1$ при $\rho = 0$. Число слагаемых, входящих в состав $\tau(\mu)$, меньше, чем общее число делителей μ, следовательно, оно есть величина $O(N^\varepsilon)$.

Применяя замечание II § 1, находим:

$$\sum_{\mu=1}^{k!N^k} \tau(\mu) \; \mathrm{Min}\left(N, \frac{1}{«\alpha\mu»}\right) = O(N^\varepsilon) \; N^k \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N^k}\right),$$

где q — знаменатель одной из подходящих дробей к числу α, причем $q < N^k$.

Сопоставляя сказанное, находим:

$$B = O(N^\varepsilon) \; N \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N^k}\right)^{2^{1-k}}.$$

Подобным же путем, при условии $h > 1$ для величин A, найдем:

$$A = O(N^\varepsilon) \; N \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{r} + \frac{r}{N^h}\right)^{2^{1-h}}.$$

Здесь r—знаменатель одной из дробей, подходящих к числу β — старшему коэффициенту полинома $f_1(x)$.

Число r удовлетворяет неравенству: $r < N^h$.

Объединяя сказанное, получаем окончательно:

$$\nu(\sigma) = N\sigma + O(N\Delta) + O(N^{1+\varepsilon})\left[\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N^k}\right)^{2^{1-k}} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{r} + \frac{r}{N^h}\right)^{2^{1-h}}\right].$$

Полагая $\Delta = \frac{1}{N^{\frac{1-h}{2}}}$, найдем:

$$\nu(\sigma) = N\sigma + O(N^{1+\varepsilon})\left[\frac{1}{N^{\frac{1-h}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{1-h}{2}}} + \left(\frac{r}{N^h}\right)^{\frac{1-h}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q^{\frac{1-k}{2}}} + \left(\frac{q}{N^k}\right)^{\frac{1-k}{2}}\right].$$

При изложенном выводе на прямоугольник σ были наложены некоторые ограничения. Из полученной формулы легко видеть, что они несущественны, и формула верна для любого прямоугольника σ, ориентированного параллельно осям и расположенного внутри единичного квадрата.

При $h = 1$ оценка величины A изложенным способом неприменима, но специальное рассмотрение показывает, что полученная для A оценка остается в силе и в этом случае. В случае, если речь идет об одном многочлене, выбираем $\Delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1-k}{2}}$, что дает формулу И. М. Виноградова:

$$\nu(\sigma) = N\sigma + O(N^{1+\varepsilon})\left[\frac{1}{q^{\frac{1-k}{2}}} + \left(\frac{q}{N}\right)^{\frac{1-k}{2}}\right].$$

§ 5. Из полученных результатов легко следуют выводы, относящиеся к Диофантовым приближениям.

Из формулы И. М. Виноградова следует, что при

$$q < T < N^k$$

$$\nu(\sigma) = N\sigma + \theta K N^{1+\varepsilon}\left[\frac{1}{q^{\frac{1-k}{2}}} + \left(\frac{T}{N^k}\right)^{\frac{1-k}{2}}\right];$$

$$|\theta| < 1; \ K \text{ — постоянная.}$$

Если можно найти q, удовлетворяющее сказанному условию и большее, чем некоторое число τ, то:

$$\nu(\sigma) = N\sigma + \theta K\left[\frac{1}{\tau^{2^{1-k}}} + \left(\frac{T}{N^k}\right)^{2^{1-k}}\right].$$

Отсюда следует, что в интервале $(0, \sigma_0)$, где

$$\sigma_0 = \frac{KN^{\varepsilon}}{N}\left[\frac{1}{\tau^{2^{1-k}}} + \left(\frac{T}{N^k}\right)^{2^{1-k}}\right]$$

заключается одна из дробей полинома $f_2(x) = \alpha x^k$.

Если же $q < \tau$, то $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qT}$, откуда:

$$|\alpha q^k - pq^{k-1}| < \frac{\tau^{k-1}}{T}.$$

Поэтому во всяком случае существует среди чисел $1, 2, \ldots N$ такое целое число x, что значение αx^k отличается от ближайшего целого меньше, чем на величину:

$$\frac{KN^{\varepsilon}}{N}\left[\frac{1}{\tau^{2^{1-k}}} + \left(\frac{T}{N^k}\right)^{2^{1-k}}\right] + \frac{\tau^{k-1}}{T}.$$

Целесообразный подбор величин τ и T доказывает теорему И. М. Виноградова: При заданном числе $\sigma < \frac{k}{k2^{k-1}+1}$ можно найти такую постоянную C, что в интервале $(1, N)$ для любого числа α найдется такое целое x, при котором расстояние величины αx^k до ближайшего целого меньше, чем $\frac{C}{N^{\sigma}}$.

Простым обобщением этой теоремы является такая:

„Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ полиномы без свободного члена, вещественные. Тогда в любом интервале $1 \leqq x < t$ можно найти такое значение x, при котором значения данных полиномов отличаются от ближайших целых меньше, чем на $\frac{C}{t^{\sigma}}$, где C и σ некоторые положительные постоянные“.

Для доказательства рассмотрим сначала тот случай, когда $f_1(x) = \alpha x^m$, $f_2(x) = \beta x^n$. Возьмем два числа T и T^a. Среди чисел интервала $(1, T)$ найдется по изложенному такое ξ, что расстояние $\alpha\xi^m$ до ближайшего целого будет меньше, чем $\frac{C}{T^{\sigma_1}}$.

В интервале $(1, T^a)$ найдется такое η, что расстояние до ближайшего целого числа $\beta_1\eta^n = \beta\xi^n\eta^n$ будет меньше, чем $\frac{C}{T^{a\sigma_2}}$ назвав $\xi\eta = x$, $T^{1+a} = t$, найдем, что $1 \leqq x < t$ и при том расстояния величин αx^m и βx^n до ближайших целых меньше, чем $\frac{C}{t^{\frac{\sigma_1 - na}{1+a}}}$ и $\frac{C}{t^{\frac{a\sigma_2}{1+a}}}$ соответственно.

Выбрав a так, чтобы $\sigma_1 - na > O$, наименьшую из величин $\frac{\sigma_1 - na}{1+a}$ и $\frac{a\sigma_2}{1+a}$ можем принять за то σ, о котором говорится в теореме.

Общий случай можно доказать с помощью полной индукции. Предположим, что теорема доказана для того случая, когда степени полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ меньше n. Пусть $f_1(x) = \alpha x^n + \varphi_1(x)$; $f_2(x) = \beta x^n + \varphi_2(x)$, где степени $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ меньше n, а одно из чисел α и β может быть равно и нулю. Возьмем два числа: T и T^a. В интервале $(1, T)$ найдем по доказанному такое число ξ, что числа $\alpha\xi^n$ и $\beta\xi^n$ отличаются от ближайшего целого меньше, чем на $\frac{C}{T^{\sigma_1}}$. Согласно предположению в интервале $(1, T^a)$ можно найти такое число η, что значения полиномов: $\psi_1(\eta) = \varphi_1(\xi\eta)$, $\psi_2(\eta) = \varphi_2(\xi\eta)$ отличаются от ближайших целых меньше, чем на $\frac{C}{T^{a\sigma_2}}$.

При этом $\alpha(\xi\eta)^n$ и $\beta(\xi\eta)^n$ отличаются от ближайших чисел меньше, чем на $\frac{CT^{an}}{T^{\sigma_1}}$.

Поэтому, назвав: $\xi\eta = x$; $T^{1+a} = t$, найдем: $1 \leqq x < t$ и притом числа $f_1(x)$ и $f_2(x)$ отличаются от ближайших целых меньше, чем на

$$\frac{C}{t^{\frac{\sigma_1 - na}{1+a}}} + \frac{C}{t^{\frac{a\sigma_2}{1+a}}}.$$

Выбрав число a так, чтобы: $O < a < \frac{\sigma_1}{n}$ и назвав наименьшее из чисел $\frac{\sigma_1 - na}{1+a}$ и $\frac{a\sigma_2}{1+a}$ через σ, найдем, что σ и есть то число, о котором говорится в теореме.

Так как в случае, когда $f_1(x) = \alpha x$ и $f_2(x) = \beta x$ теорема верна, то она доказана.

§ 6. В случае, если хотя бы один из полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеет свободный член, теоремы, подобной предыдущей, вообще говоря, не существует, даже и по замене величины $\frac{O}{t^{\sigma}}$ любой другой функцией, убывающей до нуля при $t \to \infty$. В этом случае могут существовать, однако, теоремы, подобные теореме Чебышева.

Для случая одного полинома из формулы И. М. Виноградова вытекает, что у каждого полинома $f(x)$ с иррациональным коэффициентом хотя бы у одного члена, отличного от свободного, существует такая последовательность бесконечно возрастающих целых x, при которых расстояние $f(x)$ до ближайшего целого меньше, чем $O(x^{\varepsilon})\, x^{-2^{1-k}}$, где k — степень полинома.

Для случая, когда полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ разных степеней и старшие коэффициенты их одинаковы, общая формула § 4 показывает, что при соответствующем бесконечном ряде значений целого x величины $f_1(x)$ и $f_2(x)$ отличаются от ближайших целых на величину $O(x^{\varepsilon})\, x^{-2^{1-k}}$.

Последняя теорема может быть легко обобщена на и тот случай, когда старшие коэффициенты полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, будучи иррациональны, имеют рациональное отношение. Можно, видоизменив рассуждения, приводящие к формуле § 4, обобщить ее и на случай полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равных степеней, имеющих иррациональные старшие коэффициенты с рациональным отношением r. Только в этом случае разность $f_1(x) - rf_2(x)$ должна начинаться с члена, иррациональный коэффициент которого соизмерим со старшим коэффициентом полинома $f_1(x)$.

В общем случае, когда отношение иррациональных старших коэффициентов полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ иррационально, теорем подобных сказанным не существует. Какова бы ни была $\varphi(x)$, положительная и убывающая до нуля при $x \to \infty$, при соответственном подборе коэффициентов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ оказывается, что числа $f_1(x)$ и $f_2(x)$ отличаются от ближайших целых меньше, чем на $\varphi(x)$ одновременно, лишь для конечного числа целых значений x.

В заключение заметим, что, применяя функцию § 2 $\omega(\xi, \eta)$ и пользуясь упомянутым в § 1 свойством, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{S}{N} = 0$, если $S = \left| \sum\limits_{1}^{N} e^{2\pi i f(x)} \right|$, где старший коэффициент $f(x)$ иррационален, можно доказать существование равномерности распределения в единичном квадрате точек, координаты которых дробные доли полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Единственное условие, которое при этом приходится наложить на полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ состоит в невозможности при целых n и m уравнения:

$$nf_1(x) + mf_2(x) = C + f(x),$$

где $f(x)$ — полином с рациональными коэффициентами. Ясно, что если уравнение подобного вида возможно, то точки, координаты которых равны дробным долям полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, и не могут быть равномерно распределены по площади единичного квадрата.

Отсюда следует, что если полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ подчинены сказанному условию, то всегда можно при заданном положительном ε найти такое целое число x, чтобы числа $f_1(x)$ и $f_2(x)$ отличались от ближайших целых чисел меньше, чем на ε одновременно.

Sur la théorie des inégalités simultanées de Diophant.

R. Kuzmin.

Je démontre ici le théorème suivant:

étant donné les polynomes $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_k(x)$, qui s'annulent pour $x=0$, on peut désigner une constante positive σ, dependant de degrès des polynomes donnés, qui a la propriété:

pour chaque valeur du paramètre $t > t_0$ on peut satisfaire aux inégalités:

$$|f_1(x) - y_1| < \frac{c}{t^\sigma};$$

$$|f_2(x) - y_2| < \frac{c}{t^\sigma}; \dots |f_k(x) - y_k| < \frac{c}{t^\sigma}$$

Ici x, y_1, $y_2 \dots y_k$ — sont des nombres entières; $0 < x < t$; c est une constante positive.

Un théorème tout á fait semblable existe pour les polynomes á plusieures variables.

La condition: $f_1(0)=f_2(0)=\ldots=f_k(0)=0$
est necessaire par la nature de la question.

Tout cela est une consequence d'un théorème assez précise et générale sur la distribution des valeurs des polynomes suivant le module un, que j'ai demontré en appliquant l'inégalité celebre de Weyl et les séries trigonometriques au moyen d'une methode, qui est une modification simplifiée de celle de M. Winogradoff. (C. R. de l'Ac. de Sc. U. S. S. R. 1927).

Об универсальных функциях.

Л. В. Канторович.

Гр. М. Фихтенгольцом был поставлен следующий вопрос: что можно сказать о классе функции двух переменных $F(x, t)$, универсальной для всех функций $y=f(x)$ одной переменной x, класса $\leqslant \alpha$ по классификации Baire'a[1]).

При рассмотрении этого вопроса мы пришли к следующим результатам:

1) Для функций классификации Young'a существует функция двух переменных типа g_α (G_α)[2]), универсальная для всех функций одной переменной x типа (не выше) g_α (G_α). Здесь (и ниже) через α обозначается любое число первого или второго числового класса.

2) Не существует функции двух переменных α-го класса Baire'a, универсальной для всех функций одной переменной не выше того же класса.

Здесь же важно отметить, что мы рассматриваем и функции, допускающие несобственные значения $+\infty$ или $-\infty$. Для конечных функций невозможность существования универсальных функций $F(x, t)$ в обоих указанных случаях сразу вытекала бы (от противного) из рассмотрения функции $F(x, x)+1$.

В дальнейшем все наши построения мы будем производить в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

---

[1]) Функция $F(x, t)$ называется универсальной для функций одной переменной определенного класса, если для каждой функции $f(x)$ этого класса существует такое значение t' параметра t, что $F(x, t')=f(x)$, и, обратно, при каждом значении параметра t получается функция от x, принадлежащая упомянутому классу.

[2]) Здесь (и в дальнейшем) мы пользуемся терминологией и обозначениями H. Hahn'a; см. его Theorie der reellen Funktionen [Berlin, 1921], стр. 328 и след.

Обозначим через P совокупность тех чисел t, которых разложение по троичной системе может быть написано с помощью цифр 0 и 1, так что $t=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\ldots+\frac{a_k}{3^k}+\ldots$, где $a_k=0$ или 1. Как известно, совокупность P есть совершенная.

Разобьем последовательность $\{a_k\}$ на бесконечное множество частичных; для этого достаточно разбить таким образом последовательность натуральных чисел, например, по схеме:

$$(1)\qquad \begin{cases} 1, & 3, & 5, & \ldots\ldots, 2i-1, & \ldots\ldots \\ 2\cdot 1, & 2\cdot 3, & 2\cdot 5, & \ldots\ldots, 2(2i-1), & \ldots\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{k-1}\cdot 1, & 2^{k-1}\cdot 3, & 2^{k-1}\cdot 5, & \ldots\ldots, 2^{k-1}(2i-1), & \ldots\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

Определим теперь функции $l_1(t)$, $l_2(t)$, ... следующим образом:

$$l_1(t)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\frac{a_5}{2^3}+\ldots\ldots,\ l_2(t)=\frac{a_2}{2}+\frac{a_6}{2^2}+\frac{a_{10}}{2^3}+\ldots\ldots;\ \cdots$$

Относительно этих функций справедливо следующее:

1) Функции $l_1(t)$, $l_2(t)$, ... непрерывны в P (и вдоль P).

2) Каковы бы ни были числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0\leqslant\lambda_k\leqslant 1)$, по ним найдется в совокупности P точка t', для которой одновременно:

$$l_1(t')=\lambda_1,\ l_2(t')=\lambda_2,\ldots,\ l_k(t')=\lambda_k,\ldots\ldots$$

Заметим, что замкнутая совокупность вполне определяется исчислимым множеством чисел, именно, расстояниями всех рациональных точек до этой совокупности. Теперь, благодаря этому замечанию и свойству функций l, мы без труда построим плоскую замкнутую совокупность **E**, универсальную [3]) для линейных замкнутых совокупностей [4]).

---

[3]) Аналогично [1]), плоская совокупность **E** называется универсальной (Н. Лузин) для линейных совокупностей определенного класса, если все эти совокупности (и только они) получаются при сечении совокупности **E** прямыми $t=t'$.

Следует оговорить, что под сечением двумерной совокупности $\{(x, t)\}$ прямой $t=t'$ мы разумеем совокупность тех значений x, при которых точка (x, t') принадлежит двумерной совокупности.

[4]) Впервые такого рода совокупности построили T. Ważewski (Fund. Math., t. IV, стр. 214) и W. Sierpiński (ibid, t. VII, стр. 198).

Перенумеруем все рациональные числа в промежутке $J=(0,1)$: r_1, $r_2, \cdots r_k, \cdots$, и определим совокупность $\mathbf{E}$ следующим образом:

$$\mathbf{E}=\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\Big(t \varepsilon P, |x-r_k| \geqslant l_k(t)\Big). \tag{2}$$

Эта совокупность $\mathbf{E}$ и будет искомой. Действительно, прежде всего из непрерывности функций $l_1(t)$, $l_2(t), \ldots$ вытекает замкнутость $\mathbf{E}$; таким образом, и все сечения ее будут замкнутыми.

Покажем теперь, что, какова, бы ни была линейная замкнутая совокупность E в интервале J по ней найдется такое $t' \varepsilon P$, что сечением совокупности $\mathbf{E}$ прямой $t=t'$ будет именно совокупность E. Для краткости мы обозначим это сечение через $\overset{t'}{\mathbf{E}}$. Пусть дана совокупность E; положим λ_k равным расстоянию точки r_k до совокупности E. По свойству 2) функций l, найдется такое $t' \varepsilon P$, что $l_k(t')=\lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Это значение t и будет искомым, т.-е. $\overset{t'}{\mathbf{E}}=E$. В самом деле, из определения $\mathbf{E}$ (см.(2)) имеем, что

$$\overset{t'}{\mathbf{E}}=\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_x(|x-r_k| \geqslant \lambda_k).$$

Пусть точка $x_0 \varepsilon E$; тогда расстояние ее до любой точки r_k будет $\geqslant \lambda_k$ и потому $x_0 \varepsilon \overset{t'}{\mathbf{E}}$, так что $E \subseteq \overset{t'}{\mathbf{E}}$. Наоборот, если $x_0 \varepsilon \overset{t'}{\mathbf{E}}$, то она не может принадлежать дополнительному к E промежутку, ибо иначе можно было бы найти рациональную точку r_k, для которой расстояние от E было бы **больше** расстояния от x_0; итак, $\overset{t'}{\mathbf{E}} \subseteq E$, и в результате: $\overset{t'}{\mathbf{E}}=E$.

[Заметим, что и **пустая** совокупность может быть получена таким же путем, если выбрать t' так, чтобы все $l_k(t')=1$.]

Разобьем последовательность функций $l_1(t), l_2(t), \ldots$ на бесконечное множество частичных, хотя бы по схеме (1):

$$\begin{array}{l} l_1(t),\ l_3(t), \ldots\ldots \\ l_2(t),\ l_6(t), \ldots\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{3}$$

Пользуясь этими последовательностями функций, построим ряд совокупностей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2, \ldots$ точно так же, как мы, исходя из последовательности $l_1(t)$, $l_2(t), \ldots$, построили совокупность $\mathbf{E}$.

Пусть теперь E_1, E_2, ...будет произвольная последовательность замкнутых совокупностей в промежутке J. Так же, как и раньше, мы убедимся, что есть такие числа $\lambda_1, \lambda_3, \ldots.$, что лишь только t' удовлетворяет условиям:

$$l_1(t')=\lambda_1,\ l_3(t')=\lambda_3, \ldots., \tag{4}$$

сечение совокупности $\mathbf{E}_1$ прямой $t=t'$ есть E_1. Также существуют такие числа λ_2, $\lambda_6, \ldots.$, что если только

$$l_2(t')=\lambda_2,\ l_6(t')=\lambda_6, \ldots., \tag{4*}$$

то сечение совокупности $\mathbf{E}_2$ прямой $t=t'$ есть E_2, и т. д. Но, по свойству 2) функций l_1, $l_2, \ldots.$, мы можем найти по числам λ_1, $\lambda_2, \ldots.$ такое число t' в промежутке J, чтобы одновременно удовлетворялись все условия (4), (4*) и т. д.

Этим доказана основная

Лемма I. Существует последовательность плоских замкнутых совокупностей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2, \ldots$, обладающая следующим свойством: какова бы ни была последовательность линейных замкнутых совокупностей E_1, $E_2, \ldots.$, существует такое число t', что сечениями прямой $t=t'$ совокупностей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2, \ldots.$ и будут именно совокупности E_1, $E_2, \ldots..$

Замечание. В тексте леммы можно было бы замкнутые совокупности заменить открытыми, если только, вместо построенных при ее доказательстве плоских совокупностей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2, \ldots.$, взять их дополнения $C\mathbf{E}_1$, $C\mathbf{E}_2, \ldots.$ до основного квадрата (0,1; 0,1).

F. Hausdorff [5]) ввел в рассмотрение так называемые δs—функции (суммы произведений) и σd—функции (произведения сумм) от последовательности E_1, $E_2, \ldots. E_n, \ldots.$ совокупностей, взятых из какого-нибудь класса совокупностей (E). Функции первого типа, например, определяются так. Пусть дано произвольное множество N различных последовательностей $\nu=(n_1, n_2, \ldots., n_k, \ldots.)$ возрастающих натуральных чисел.

Взяв последовательность E_1, $E_2, \ldots.$ совокупностей из (E), положим

$$G=\Phi(E_1, E_2, \ldots.)=\underset{\nu\varepsilon N}{\mathfrak{S}} E_{n_1}E_{n_2}\ldots.E_{n_k}\ldots.,$$

---

[5]) F. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin. 1927), стр. 89.

где суммирование распространено на все последовательности ν из N. Аналогично определяются и σd—функции, с заменой произведений суммами, и наоборот.

Из леммы I (и замечания к ней) непосредственно вытекает

Лемма II. Какова бы ни была δs—функция или σd—функция $\Phi(E_1, E_2, \ldots.)$, для класса совокупностей G, которые получаются с помощью этой функции из линейных замкнутых (открытых) совокупностей, существует универсальная плоская совокупность $\mathbf{G}$, представляемая тою же функцией от некоторой последовательности замкнутых (открытых) плоских совокупностей.

Для доказательства достаточно положить, например,

$$\mathbf{G} = \Phi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.),$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$ — плоские замкнутые (открытые) совокупности, о которых была речь в лемме I (и в замечании к ней). Вместо последовательности $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$, очевидно, можно было бы исходить и из любой ее частичной последовательности.

Далее, как явствует из рассуждений F. Hausdorff'a [6]) для каждого типа Borel'евых совокупностей, $\mathfrak{D}_\alpha$ или $\mathfrak{B}_\alpha$, существует такая δs — или σd — функция Φ, с помощью которой из замкнутых, соответственно, открытых совокупностей получаются все совокупности (не выше) этого типа и только они; при этом тою же функцией Φ можно пользоваться как для линейных, так и для плоских совокупностей. Тогда из леммы II следует существование плоской совокупности $\mathbf{D}$ типа $\mathfrak{D}_\alpha$, универсальной для линейных совокупностей (не выше) этого типа [7]).

Эту совокупность $\mathbf{D}$ мы строили на последовательности совокупностей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$. Разобьем теперь последовательность $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$ на частичные по схеме (1):

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_5, \ldots. \\ \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_{10}, \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

[6]) Ibid., стр. 85—90 и 177—178.

[7]) Так как аналитические совокупности могут быть получены из класса замкнутых (или открытых) совокупностей с помощью некоторой δs — функции [см., например, F. Hausdorff, loc. cit., стр. 93], то из леммы II, между прочим, вытекает существование плоской аналитической совокупности, универсальной для линейных аналитических совокупностей. Ср.: W. Sierpiński, Fund. Math., t. VII, стр. 201 и N. Lusin, Fund. Math., t. X, стр. 79.

Если мы, исходя из первой частичной последовательности, построим совокупность $\mathbf{D}_1$, исходя из второй — $\mathbf{D}_2$, и т. д., то мы придем к следующей лемме (аналогичной лемме I):

Лемма III. Существует последовательность плоских совокупностей $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots$ типа $\mathfrak{D}_\alpha$, обладающая следующим свойством: какова бы ни была последовательность линейных совокупностей $D_1, D_2, \ldots$ типа (не выше) $\mathfrak{D}_\alpha$, существует такое число t', что для них всех одновременно:

$$\overset{t'}{\mathbf{D}}_n = D_n. \tag{5}$$

Перейдем теперь к доказательству указанных вначале утверждений:

Теорема I. Каково бы ни было α, существует функция двух переменных $\mathbf{F}(x, t)$ типа g_α, универсальная для функций одной переменной $y = f(x)$ типа (не выше) g_α.

Доказательство. Расположив все рациональные числа в виде последовательности: $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$, каждому рациональному числу r_n поставим в соответствие совокупность $\mathbf{D}_n$ (из леммы III). Положим теперь функцию $\mathbf{F}(x, t)$ равной точной нижней границе тех чисел r_n, для которых точка (x, t) не принадлежит $\mathbf{D}_n$. Если же точка (x, t) принадлежит всем $\mathbf{D}_n$, то пусть $\mathbf{F}(x, t) = +\infty$.

Покажем прежде всего, что при любом вещественном ρ:

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x,\, t}(\mathbf{F}(x, t) \geqslant \rho) = \prod_{r_n < \rho} \mathbf{D}_n, \tag{6}$$

где произведение распространено на те значения n, при которых $r_n < \rho$.

Пусть точка (x_0, t_0) принадлежит совокупности в левой части; это значит, что $\mathbf{F}(x_0, t_0) \geqslant \rho$ и, по определению функции $\mathbf{F}$, при всяком $r_n < \rho$ точка (x_0, t_0) принадлежит $\mathbf{D}_n$, а потому принадлежит и произведению, стоящему справа. Обратно, если точка $(x_0, t_0) \varepsilon \prod\limits_{r_n<\rho} \mathbf{D}_n$, т. е., при $r_n < \rho$, $(x_0, t_0) \varepsilon \mathbf{D}_n$, то $\mathbf{F}(x_0, t_0)$, равная точной нижней границе тех r_n, при которых (x_0, t_0) не принадлежит $\mathbf{D}_n$, не может быть меньше ρ, т. е. $\mathbf{F}(x_0, t_0) \geqslant \rho$ и точка (x_0, t_0) принадлежит и совокупности в левой части. Таким образом, соотношение (6) доказано.

Так как все совокупности $\mathbf{D}_n$ типа $\mathfrak{D}_\alpha$, то и их произведение будет (не выше) этого типа, так что [согласно (6)] совокупности $\mathcal{E}(\mathbf{F}(x, t) \geqslant \rho)$ будут типа (не выше) $\mathfrak{D}_\alpha$, откуда, как известно, следует [8]), что функция $\mathbf{F}(x, t)$ будет типа (не выше) g_α.

Покажем теперь, что функция $\mathbf{F}(x, t)$ будет универсальной для функций одной переменной типа (не выше) g_α; отсюда уже будет, между прочим, вытекать, что функция $\mathbf{F}$ сама будет точно типа g_α.

Возьмем любую функцию $f(x)$ типа (не выше) g_α. Положим

$$D_n = \mathcal{E}(f(x) \geqslant r_n) \quad (n=1, 2, 3, \ldots); \tag{7}$$

все эти совокупности будут типа (не выше) $\mathfrak{D}_\alpha$. Тогда, по лемме III, найдется такое число t', что для всех n одновременно будет выполняться соотношение (5). В таком случае, каково бы ни было вещественное число ρ, в виду (6) и (7),

$$\mathcal{E}_x(\mathbf{F}(x, t') \geqslant \rho) = \prod_{r_n < \rho} \overset{t'}{\mathbf{D}_n} = \prod_{r_n < \rho} \mathcal{E}_x(f(x) \geqslant r_n) = \mathcal{E}(f(x) \geqslant \rho),$$

откуда и следует, что тождественно

$$\mathbf{F}(x, t') = f(x).$$

Теорема II. Не существует функции двух переменных $\mathbf{F}(x, t)$ α-го класса (по классификации Baire'а), универсальной для функций одной переменной $y = f(x)$ (не выше) α-го класса.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что такая функция $\mathbf{F}(x, t)$ класса α существует. Полагаем $f_0(x) = \mathbf{F}(x, x)$; функция $f_0(x)$ будет (не выше) α-го класса. Очевидно,

$$\mathcal{E}(f_0(x) > 0) \supset \mathcal{E}(f_0(x) = +\infty) \text{ и } \mathcal{E}(f_0(x) < 0) \supset \mathcal{E}(f_0(x) = -\infty).$$

Совокупности в левых частях обоих включений будут типа $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$, а в правых—типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ [9]). По одной теореме W. Sier-

[8]) H. Hahn, loc. cit., стр. 343

piński'ogo[10]), существуют такие совокупности A_1 и A_2, типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ одновременно, что:

$$\mathcal{E}(f_0(x)>0)\supset A_1\supset\mathcal{E}(f_0(x)=+\infty) \text{ и}$$
$$\supset\mathcal{E}(f_0(x)<0)\supset A_2\supset\mathcal{E}(f_0(x)=-\infty).$$

Обозначим через A_3 дополнение к сумме совокупностей A_1, A_2 до основного промежутка: $A_3=C(A_1+A_2)$. Эта совокупность, очевидно, также будет типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ одновременно. Определим теперь функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{в } A_1+A_2 \\ f_0(x)+1 & \text{в} A_3 \end{cases}.$$

Очевидно, что при всяком x выполняется неравенство $f(x)\neq f_0(x)$. В том, что функция $f(x)$ будет (не выше) α-го класса, нетрудно убедиться[11]), установив, что совокупности $\mathcal{E}(f(x)\geqslant p)$ и $\mathcal{E}(f(x)>q)$, будут, соответственно, типа (не выше) $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$. Например, при $p>0$, совокупность $\mathcal{E}(f(x)\geqslant p)=A_3\cdot\mathcal{E}(f_0(x)\geqslant p-1)$ — типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$; при $p\leqslant 0$, совокупность $\mathcal{E}(f(x)\geqslant p)=A_1+A_2+\mathcal{E}(f_0(x)\geqslant p-1)$ — также типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$.

Итак, мы построили функцию $f(x)$ (не выше) α-го класса, которая в каждой точке отличается от функции $f_0(x)$. Функция $f(x)$ благодаря этому будет отличаться от всякой функции $\mathbf{F}(x, t')$, при любом постоянном t', по крайней мере, в точке $x=t'$ и поэтому $f(x)$ не может быть получена из функции $\mathbf{F}(x, t)$ ни при каком значении параметра t, вопреки допущению, что функция $\mathbf{F}(x, t)$ является универсальной для функций (не выше) α-го класса. Это противоречие и доказывает теорему.

Замечание I. Если мы, взяв функцию $\mathbf{F}(x, t)$, существование которой устанавливается в теореме I, положим: $f_0(x)=\mathbf{F}(x, x)$, то эта функция будет типа (не выше) g_α. Очевидно, что ее изображение [совокупность точек $(x, f_0(x))$] будет иметь общую точку с изображением всякой функции $f(x)$ типа (не выше) g_α. Напротив, не существует функции $f_0(x)$ (не выше) α-го класса, изображение которой необходимо пере-

---

9) Ibid., стр. 346 и 343.

10) W. Sierpiński, Fund. Math., t. VI, стр. 1, 2.

11) H. Hahn., loc. cit., стр. 349.

секалось бы с изображением каждой другой функции (не выше) α-го класса. Действительно, построения, выполненные при доказательстве теоремы II, позволяют для каждой функции $f_0(x)$ (не выше) α-го класса определить такую функцию $f(x)$ также (не выше) α-го класса, которая при каждом значении x отлична от первой.

Замечание II. Теореме II (при $\alpha > 1$) можно было бы придать и несколько более общую форму, заменив функции α-го класса (по классификации Baire'a) функциями типа g_α и G_α одновременно (по классификации Young'a).

Sur les fonctions universelles.

Par L. V. Kantorovitch.

Le but de cet article est de démontrer deux théorèmes suivants:

Th. I. Quel que soit le nombre fini ou transfini α, il existe une fonction de deux variables $\mathbf{F}(x, t)$ du type g_α (suivant les notations de M. H. Hahn), universelle pour les fonctions $f(x)$ d'une variable x qui sont g_α au plus.

Cela veut dire qu'en fixant le paramètre t, dans la fonction $\mathbf{F}(x, t)$, on obtiendra toutes les fonctions d'une variable du type g_α au plus et ces fonctions seulement.

Th. II. Il n'existe aucune fonction $\mathbf{F}(x, t)$ de classe α (de Baire), universelle pour les fonctions d'une variable x des classes $\leqslant \alpha$.

Bien entendu, on admet pour les fonctions en question les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ aussi.

La démonstration repose sur ce lemme:

On peut construire une suite d'ensembles plans $\{\mathbf{D}_n\}$, du type $\mathfrak{D}_\alpha$, jouissant de la propriété suivante: quelle que soit la suite d'ensembles linéaires $\{D_n\}$, du type $\mathfrak{D}_\alpha$ au plus, on les obtiendra tous simultanément, en coupant les ensembles $\mathbf{D}_n$ par la même droite, convenablement choisie, parallèle à l'axe d'abscisses.

Sur les valeurs limites des fonctions, régulières à l'intérieur d'un cercle.

Par V. Smirnoff.

1. Soit $f(z)$ une fonction, régulière à l'intérieur du cercle $K(|z|<1)$. L'article présent concerne quelques questions sur la connexion des propriétés de $f(z)$ à l'intérieur de K et de ses valeurs limites sur la circonférence $C(|z|=1)$ du cercle K. Nous prenons comme point de départ une classe des fonctions, étudiée par M. F. Riesz dans son mémoire: „Ueber die Randwerte analytischer Funktionen" (Math. Zeitschr. Bd. 18 Heft $1/2$, p.p.   ), et nous exposons tout d'abord les propriétés connues des fonctions de cette classe, ce qui est indispensable pour la suite.

Nous dirons que $f(z)=u(re^{i\varphi})+iv(re^{i\varphi})$, régulière à l'intérieur du cerle K, appartient à la classe H_δ, où $\delta>0$, si les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi,$$

croissant avec r, restent bornées, quand $r\to 1$.

Si $f(z)$ appartient a H_δ, elle adment presque partout, suivant les chemins non tangents, les valeurs limites $f(e^{i\varphi})$, et on a:

$$\lim_{r\to 1}\int_M |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi=\int_M |f(e^{i\varphi})|^\delta d\varphi, \tag{1}$$

où M est une partie mésurable arbitraire de l'intervalle $(0,2\pi)$; outre cela l'égalité:

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})-f(e^{i\varphi})|^\delta d\varphi=0 \tag{2}$$

a lieu.

Supposons que $f(z)$ prossède une infinité de zéros: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ à l'intérieur de K. Ces zéros doivent former un produit infini convergent

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

et la fonction:

$$(3) \qquad b(z)=\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \frac{1-\frac{z}{\alpha_n}}{1-\bar{\alpha}_n z}, \quad (\bar{\alpha}_n \text{ éntant conjugué de } \alpha_n)$$

que nous nommons „fonction de Blaschke", satisfait à la condition $|b(z)|<1$ à l'intérieur de K et possède presque partout les valeurs limites égales en module à l'unité. La fonction de départ $f(z)$ peut être mise sous forme:

$$(4) \qquad f(z)=b(z)\cdot g(z),$$

où $g(z)$ ne possède pas de zéros à l'intérieur de K et appartient aussi à H_δ. Nous nommons le procédé décrit, qui fournit la formule (4), „dègagement de la fonction de Blaschke de $f(z)$". Si $f(z)$ possède un nombre fini de zéros, le produit (3) est aussi fini.

Si $f(z)$ appartient à H_1, il suit de la formule (2), qu'elle est représentable par son intégrale de Cauchy:

$$(5) \qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\, d(e^{i\varphi})$$

et par l'intégrale de Poisson:

$$(6) \qquad f(re^{i\vartheta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\varphi.$$

2. Exposons maintenant les deux théorèmes qui nous semblent importantes pour la théorie des fonctions.

Théorème I. Si $f(z)$ appartient à une classe H_∞ $(\delta>0)$ et si $|f(e^{i\varphi})|^\lambda$, où $\lambda>\delta$, est une fonction sommable, $f(z)$ appartient aussi à la classe H_λ.

En faisant le dégagement de la fonction de Blaschke, nous pouvons écrire la formule (4). La fonction $|g(e^{i\varphi})|^\lambda$ est évidemment sommable, et il suffit de démontrer, que la fonction $g(z)$ appartient à la classe H_λ. Il résulte de là, qu'en démontrant le thèorème, nous pouvons supposer, que $f(z)$ ne possède pas de zéros à l'intérieur de K. En remplaceant ensuite $f(z)$ par $[f(z)]^{\frac{1}{\delta}}$, on voit, qu'on peut prendre $\delta=1$ et, par suite, $\lambda>1$, sans nuire à la généralité. Or, si $f(z)$ appartient à H_1, la formule (6) a lieu, et les fonctions harmoniques $u(re^{i\theta})$ et $v(re^{i\theta})$ s'expriment par les intégrale de Poisson. En appliquant à ces intégrales l'inégalité bien connue de Hölder, on obtient:

$$\int_0^{2\pi} | u(re^{i\varphi}) |^{\lambda} d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} | u(e^{i\varphi}) |^{\lambda} d\varphi \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} | v(re^{i\varphi}) |^{\lambda} d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} | v(e^{i\varphi}) |^{\lambda} d\varphi,$$

d'où il suit, que $f(z)$ appartient à la classe H_{λ}.

Théorème II. Si $f(z)$ s'éxprime par une intégrale du type de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\psi(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi} - z} d(e^{i\varphi}), \tag{7}$$

$\psi(e^{i\varphi})$ étant une fonction sommable de φ, ou par une intégrale du type de Cauchy-Stietjes:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{dF(\varphi)}{e^{i\varphi} - z}, \tag{8}$$

$\psi(e^{i\varphi})$ étant une fonction à variation bornée, $f(z)$ appartient à H_{δ} pour valeurs arbitraires de $\delta < 1$.

En examinant la formule (7), il suffit évidemment de considérer le cas, où $\psi(e^{i\varphi})$ est une fonction réele sommable, satisfaisant à l'inégalité: $\psi(e^{i\varphi}) \geqslant m > 0$, m étant un certain nombre positif. La fonction $u(re^{i\varphi})$ s'éxprime d'ailleurs par l'intégrale de Poisson et satisfait à l'inégalité: $u(re^{i\varphi}) \geqslant m > 0$. Il en resulte, que $f(z)$ est distincte de zéro à l'intérieur du cercle K et que les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} | u(re^{i\varphi}) | d\varphi \tag{9}$$

restent bornées, quand $r \to 1$. Dans le cas considéré, la valeur de ces intégrales, égale à $2\pi u(0)$, est indépendante de r. Il ne reste qu'à démontrer, que les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} | v(re^{i\varphi}) |^{\delta} d\varphi \qquad (0 < \delta < 1) \tag{10}$$

sont bornées.

Introduisons le module $R(re^{i\varphi})$ et l'argument $\Phi(re^{i\varphi})$ de $f(z)$. On peut poser, que

$$-\frac{\pi}{2} < \Phi(re^{i\varphi}) < \frac{\pi}{2}.$$

Considérons la fonction:

$$[f(z)]^{\delta}=u_{\delta}(re^{i\varphi})+iv_{\delta}(re^{i\varphi})=R^{\delta}\cos\delta\Phi+iR^{\delta}\sin\delta\Phi$$

régulière à l'intérieur de K. La valeur de $\delta\,(0<\delta<1)$ étant fixée arbitrairement, on à l'inégalité: $\cos\delta\Phi>k>0$, k étant un certain nombre positif. Il en resulte, que

$$|v(re^{i\varphi})|^{\delta}\leqslant R^{\delta}\leqslant\frac{1}{k}u_{\delta}(re^{i\varphi}),$$

et les intégrales (10) restent évidemment inférieures à $\frac{2\pi}{k}u_{\delta}(0)$, quand $r\to 1$, *C. Q. F. D.*

Dans le cas de la formule (8), il faut séparer les parties réeles et imaginaires de $F(\varphi)$ et représenter les deux fonctions obtenues sous forme des différences des deux fonctions croissantes. La fonction $u(re^{i\varphi})$ sera encore positive, les intégrales (9) restront bornées et la démonstration, exposée ci-dessus, aura lieu.

3. Indiquons maintenant quelques conséquences immédites des théorémes démontrés.

I. Si $f(z)$ est représentable par un intégrale du type de Cauchy ou de Cauchy-Stietjes, et si ses valeurs limites sont sommables, elle est aussi représentable par son propre intégrale de Cauchy [formule (5)]. Il résulte de là, entre autres, que si $f(z)$, est représentable par son intégrale de Cauchy, elle appartient à H_1, et se trouve représentable par l'intégrale de Poisson. *)

II. Si une serie conjuguée d'une série de Fourier-Lebesgue, n'est pas une série de Fourier-Lebesgue sa somme généralisée repesénte une fonction, non sommable dans le sens de Lebesgue. Nous nommons „série de Fourier-Lebesgue" une série de Fourie d'une fonction sommable.

En faisant l'intégration partielle dans la formule (8) et en tenant compte de l'existence des valeurs limites $f(e^{i\varphi})$, on arrive immédiatement au résultat connu **): la série, qu'on obtient en différentiant membre à membre une série de Fourier d'une

---

*) Ce résultat a été obtenu par M. G. Fichtenholz à l'aide du théorème de l'inicité des fonctions analytiques Fundamenta Mathematicae, t. XIII. 1929.

**) Plessner. Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. Giessen 1923.

fonction a variation bornée, ainsi que la série conjuguée, sont sommables à l'aide de la méthode de Poisson.

Pour terminer ce paragraphe nous remarquons encore un fait, lié au théorème II. Ce théorème met en évidence, que dans le cas, où l'on a les formules (7) ou (8), $f(z)$ appartient à toutes les classes, H_δ pour $\delta < 1$. L'affirmation inverse est incorrecte et peut être réfutée par l'exemple:

$$f(z) = \frac{\lg(1-z)}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z^n,$$

Cette fonction appartient à toutes les H_δ pour $\delta < 1$, mais elle ne s'exprime pas à l'aide des formules (7) ou (8), car les coéfficients de sa série de Maclaurin ne sont pas bornés.

4. Nous avons à faire quelques remarques complémentaires concernant les fonctions $f(z)$, représentables par les intégrales du type de Cauchy (7). Ecrivons la relation (7) sous forme:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\pi_1(\varphi) + i\pi_2(\varphi)}{e^{i\varphi} - z}\, d(e^{i\varphi}) \tag{11}$$

où $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ sont des fonctions réelles sommables. Introduisons maintenant une notion nouvelle, indispensable pour la suite. Soit $\lambda(\varphi)$ une fonction réelle sommable dans l'intervalle $(0,2\pi)$. Si la série trigonométrique, conjuguée de sa série de Fourier, est aussi une série de Fourier d'une fonction sommable, nous désignons cette dernière fonction par $\bar{\lambda}(\varphi)$ et nous disons, que la fonction $\lambda(\varphi)$ possède la fonction conjuguée $\bar{\lambda}(\varphi)$. Remarquons les deux faits évidents. Pour qu'une intégrale du type de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\nu(\varphi) - i\mu(\varphi)}{e^{i\varphi} - z}\, d(e^{i\varphi}).$$

représente le nombre 0 à l'intérieur de K, il faut et il suffit, que $\mu(\varphi)$ soit la fonction conjuguée de $\lambda(\varphi)$ et que les séries de Fourier de ces deux fonctions ne contiennent pas de termes constants. Outre cela, si la formule (11) a lieu, pour que la fonction $f(z)$ soit représentable par les son propre iutégrale de Cauchy [la formule (5)], il faut et il suffit que les fonctions $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ pcssédent les fonctions conjuguées.

Reprenons les fonctions $f(z)$, représentables par la formule (11). En introduisant la fonction absolument continue:

$$\pi(\varphi)=\int_0^\varphi [\pi_1(\tau)+i\pi_2(\tau)]\, d(e^{i\tau})$$

et en posant: $\pi(2\pi)=\alpha\cdot 2\pi i$, nous pouvons écrire la formule (11) sous forme:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\pi(\varphi)-i\alpha\varphi}{(e^{i\varphi}-z)^2}\, d(e^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)}{(e^{i\varphi}-z)^2}\, d(e^{i\varphi})$$

$\omega_1(\varphi)$ et $\omega_2(\varphi)$ étant des fonctions absolument continues et periodiques.

Envisageons une fonction primitive de $f(z)$:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)}{e^{i\varphi}-z}\, d(e^{i\varphi}).$$

Il est évident, que cette fonction est aussi représentable par son propre intégrale de Cauchy, car les fonctions absolument continues $\omega_1(\varphi)$ et $\omega_2(\varphi)$ possèdent les fonctions conjuguées *); mais le numérateur $\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)$ peut être distinct des valeurs limites $F(e^{i\varphi})$. Quand même, en tout cas, on a la formule:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\omega_1(\varphi)+i\omega_2(\varphi)-F(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-z}\, d(e^{i\varphi})$$

s'est-à-dire il existe une telle fonction $\sigma(\varphi)$, réele, sommable et possèdant la fonction conjuguée $\bar{\sigma}(\varphi)$, que la fonction

$$F(e^{i\varphi})+\sigma(\varphi)-i\bar{\sigma}(\varphi)$$

est absolument continue et periodique. Il est aisé de voir, que cette condition est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante, pour que la fonction $f(z)$ s'exprime par une intégrale du type de Cauchy.

---

*) Il est aisé de démontrer, que $F(z)$ appartient à toutes les classes H_δ pour $\delta > 0$.

Remarquons, que la continuité absolue des valeurs limites mêmes est la condition nécessaire, pour que $f(z)$ s'exprime par son propre intégrale de Cauchy [Formule (5)] *). Considérons un exemple d'une fonction $f(z)$, où l'on a la formule (11), tandis que la formule (5) n'a pas lieu:

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{\lg n}. \quad **)$$

Dans ce cas les valeurs limites $F(e^{i\varphi})$ ne sont pas bornées et sont représentables par la série:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos n\varphi+\sin n\varphi}{n\lg(n-1)}$$

uniformement convergente partout, sauf le voisinage $\varphi=0$. Outre cela on a:

$$\pi_1(\varphi)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{\lg n}; \qquad \pi_2(\varphi)=0.$$

Il en résulte, que $\alpha=0$ et

$$\pi(\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\lg n}-\frac{\cos\varphi}{\lg 2}-\frac{\cos 2\varphi}{2\lg 3}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}\left[\frac{1}{\lg(n-1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\lg(n+1)}\right]+i\left\{\frac{\sin\varphi}{\lg 2}+\frac{\sin 2\varphi}{2\lg 3}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}\left[\frac{1}{\lg(n-1)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\lg(n+1)}\right]\right\}.$$

5. Dans ce paragraphe nous établirons la formule, qui fournit une représentation paramétrique de toutes les fonctions régulières, appartenant à la classe H_δ pour une valeur positive de δ. Faisons d'abord une remarque préliminaire. En se servant du théorème de Harnack sur une suite croissante des fonctions harmoniques et du théorème de Gauss sur la valeur moyenne d'une fonction harmonique, il est aisé de démontrer que, pour que la fonction $f(z)$ appartienne à une classe H_δ, il faut et il suffit qu'il existe une fonction harmonique à l'intérieur de K dont toutes les valeurs

*) F. U. M. Riesz. IV Congr. Des Math. Scandin. à Stockholm 1916.
**) Voir M. G. Fichtenholz, l. c.

à l'intérieur de K ne soient pas inférieures aux valeurs correspondant de $|f(z)|^{\delta}$. Il en résulte immédiatement que si l'on fait une représentation conforme du cercle K sur soi même, toutes les fonctions d'une classe H_{δ} seront transformées en fonctions de la même classe.

Passons maintenant au problème sur la représentation analytique des fonctions positives. Il est connu que si $f(z)$ appartient à H_{δ}, les fonctions $|f(e^{i\varphi})|^{\delta}$ et $\lg|f(e^{i\varphi})|$ sont sommables *). Inversement, si l'on a une fonction $p(\varphi)\geqslant 0$ et si les fonctions $[p(\varphi)]^{\delta}$ et $\lg p(\varphi)$ sont sommables, il existe une infinité de fonctions appartenant à la classe H_{δ} dont les valeurs limites sont égales, en module, presque partout à $p(\varphi)$, et l'une d'elles est supérieure en module à toutes les autres à l'intérieur de K. Nous posons d'ailleurs que la multiplication de la fonction par un facteur, égal en module à l'unité, est sans importance. M. Szego dans son mémoire „Ueber die Randwerte der analytischen Funktionen" (Math. Ann. Bd. 84, Heft 3/4. 1921) a établi la forme de la fonction maximale mentionnée à l'aide de la théorie des formes de Toeplitz. Nous le ferons sans nous en servir et nous donnerons la formule générale pour toutes fonctions mentionnées ci-dessus, appartenant à la classe H_{δ}.

Considérons d'abord le cas particulier où $\delta=1$ et $p(\varphi)=1$. La fonction $f(z)$ appartenant à H_1 et ses valeurs limites étant égales en module à l'unité, on a

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,d\varphi$$

et $|f(0)|\leqslant 1$. En faisant la représentation conforme du cercle K sur soi-même, nous pouvons placer le point arbitraire au commencement, la fonction $f(z)$ appartenant toujours à H_1. Donc, on a $|f(z)|\leqslant 1$ à l'intérieur de K, d'ailleurs il est aisé de voir que l'égalité ne peut avoir lieu, que dans le cas, où $f(e^{i\varphi})$ se réduit presque partout à une certaine constante. Dans ce cas, la fonction $f(z)$, représentable par son intégrale de Cauchy, se réduit à la même constante.

---

*) F. Riesz. Acta Hungaricae Universit. Francisco-Joseph t. I fasc. II 1922/23.

Supposons maintenant que $\delta=1$ et $p(\varphi)\geqslant m>0$ et démontrons que la fonction maximale cherchée est de la forme

$$(12) \qquad D(z)=exp\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(x)\,\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,dx.\ ^{*)}$$

$D(z)$ appartient évidemment à la classe H_1. En remarquant que $\frac{1}{p(\varphi)}$ est sommable et en tenant compte de l'inégalité de Jensen, nous avons:

$$\int_0^{2\pi}|D^{-1}(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p(x)}\,dx,$$

c'est-à-dire, $D^{-1}(z)$ appartient aussi à la classe H_1. Remarquons, outre cela, que si la fonction $f(z)$ possède des zéros à l'intérieur de K, en dégageant la fonction de Blaschke $b(z)$ conformément à la formule (4), on obtient la fonction $g(z)$, possédant presque partout les valeurs limites du module: $|f(e^{i\varphi})|$, mais supérieure en module à $f(z)$ à l'intérieur de K. Il en résulte qu'en formant la fonction maximale nous pouvons supposer, dans la suite, que $f(z)$, appartenant à H_1 et possédant presque partout les valeurs limites du module $p(\varphi)$, n'admet point de zéros à l'intérieur de K. La fonction $\sqrt{f(z)\,D^{-1}(z)}$ appartient aussi à H_1, et possède presque partout les valeurs limites, égales en module à l'unité. En vertu des considérations précédentes il s'ensuit que $|f(z)|\leqslant|D(z)|$; d'ailleurs l'égalité ne peut avoir lieu que dans le cas où $f(z)=c\cdot D(z)$ et $|c|=1$. Par conséquent $D(z)$ est en effet la fonction maximale unique. En conservant la condition $\delta=1$, nous posons maintenant simplement $p(\varphi)\geqslant 0$, les fonctions $p(\varphi)$ et $\lg p(\varphi)$ étant sommables. Introduisons la fonction $p_m(\varphi)$, égale à $p(\varphi)$, si $p(\varphi)\geqslant m$ et à m, si $p(\varphi)<m$. Formons

$$D_m(z)=exp\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p_m(x)\,\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,dx.$$

Les fonctions $D_m(z)$ et $D_m^{-1}(z)$ appartiennent à H_1. La fonction $\sqrt{f(z),\,D_m^{-1}(z)}$, appartenant aussi à H_1, possède presque

---

*) Nous désignerons par $exp\cdot x$ l'expression e^x.

partout les valeurs limites ne surpassant pas en module l'unité. On en conclut, comme dans le cas où $p(\varphi)=1$, que:

$$|f(z)|\cdot|\overset{-1}{D_m}(z)|\leqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$|f(z)|\leqslant epx\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p_m(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\cdot(z=re^{i\theta}).$$

En passant à la limite, quand m tend vers zéro, on obtient:

$$|f(z)|\leqslant|D(z)|,$$

la fonction $D(z)$ étant définie par la formule (12). Il ne reste qu'à considérer le cas, où l'égalité a lieu. Le quotient $f(z):D(z)$ est une fonction bornée appartenant à H_1, et, comme nous l'avons démontré ci-dessus, l'égalité ne peut avoir lieu que dans le cas, où $f(z)=cD(z)$ et $|c|=1$.

L'expression générale des fonctions, possédant les valeurs limites du module donnees: $p(\varphi)$, peut être mise, sous forme d'un produit des trois fonctions:

13) $$f(z)=D(z)\,b(z)\,\sigma(z),$$

où $D(z)$ est la fonction maximale établie, $b(z)$ est celle de Blaschke et $\sigma(z)$ tend presque partout en module vers l'unité, est inférieure, en module, à l'unité et n'admet pas de zéros à l'intérieur de K. Considérons la fonction régulière $\lg\sigma(z)$. Sa partie réelle est la fonction harmonique négative à l'intérieur de K. Une telle fonction peut être mise sous forme de l'intégrale de Poisson-Stieltjes: *)

$$\lg|\sigma(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction décroissante, possédant presque partout la derivée, égale à zéro. La fonction même $\sigma(z)$ doit être de la forme:

(14) $$\sigma(z)=exp\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}d\psi(x).$$

Inversement, si l'on prend une fonction arbitraire $\psi(x)$, satisfaisant aux conditions indiquées, la fonction $\sigma(z)$ jouira des propriétés demandées.

*) Voir M. G. Fichtenholz; l. c. p.

Il résulte de ce que nous venons de dire que toutes les fonctions de la classe H_1 sont de la forme (13); d'ailleurs les paramètres indépendants sont: 1) la fonction $p(x)$, qui entre dans la formule (12); 2) les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ qui entrent dans l'expression de la fonction $b(z)$; 3) la fonction $\psi(x)$, qui entre dans la formule (14). Enonçons encore une fois les conditions, qui doivent être satisfaites par ces paramètres: 1) la fonction $p(x)$ est non négative, les fonctions $p(x)$ et $\lg p(x)$ étant sommables; 2) le nombre des zéros α_n est fini ou infini, dans le dernier cas le produit $\prod_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ étant convergent; 3) la fonction $\psi(x)$ est décroissante et possède presque partout la dérivée égale à zéro. La représentation paramètrique de toutes les fonctions de la classe H_δ sera la même, à une seule difference, que la condition, que $p(x)$ soit commable, doit être remplacée par la condition que $[p(x)]^\delta$ soit sommable.

6. La représentation paramétrique établie des fonctions appartenant à une classe H_δ, se trouve étroitement liée à la question sur la représentation paramétrique d'une classe des fonctions, régulières à l'intérieur de K et satisfaisant à la condition que les integrales:

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \tag{15}$$

restent bornées, quand $r \to 1$, le symbole $\overset{+}{\lg} a$ étant égal à $\lg a$ si $a \geqq 1$, et à zéro, si $a < 1$. Nommons cette classe „classe des fonction (A)". Il est connu, que si $f(z)$ appartient à la classe considérée et possède une infinité de zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ doit être convergent *) et on peut dégager de $f(z)$ la fonction de Blaschke et écrire la formule (4).

Il est aisé de démontrer, que la condition, que les intégrales (15) soient bornées, est équivalente à la condition analogue concernant les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} |\lg|f(re^{i\varphi})||\, d\varphi.$$

---

*) Ostrowski. Acta Hungaricae. Universit. Francisco-Joseph. t. I fasc. II. 1922—1923.

Il suit de là immédiatement que, si la fonction $f(z)$ appartient à la classe (A), la fonction $g(z)$, qui entre dans la formule (4), jouit de la même propriété, c'est-à-dire que les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} \left| \lg |g(re^{i\varphi})| \right| d\varphi$$

restent bornées. Or, on sait *) que le même propriété des intégrales:

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

nous fournit la condition nécessaire et suffisante, pour que la fonction harmonique $u(re^{i\varphi})$ soit représentuble par l'intégrale de Poisson-Stieltjes:

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi - x) + r^2}\, d\,\omega(x),$$

$\omega(x)$ étant une fonction à variation bornée. Donc, $g(z)$ est de la forme:

$$g(z) = c\,exp \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\, d\omega(x), \tag{16}$$

où $\omega(x)$ est une fonction réelle à variation bornée. Inversement, si $g(z)$ s'exprime par la formule (16), $g(z)$ et $f(z)$ appartiennent à la classe (A), et, par suite, la représentation paramétrique des fonctions de la classe (A) est:

$$f(z) = b(z)\,exp \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\, d\omega(x), \tag{17}$$

où $b(z)$ est une fonction de Blaschke et $\omega(x)$ une fonction arbitraire à variation bornée. Représentons $\omega(x)$ sous forme d'une différence de deux fonctions décroissantes:

$$\omega(x) = \omega_1(x) - \omega_2(x). \tag{18}$$

---

*) M. G. Fichtenholz, l. c.

La formule (17) nous fournit l'expression:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}, \tag{19}$$

où les fonctions

$$f_1(z) = b(z)\, exp \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega_1(x)$$

et

$$f_2(z) = exp \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z}\, d\omega_2(x),$$

sont inférieures en module à l'unité et $f_2(z)$ ne possède pas de zéros à l'intérieur du cercle K. Inversement, si $f(z)$ peut être représentée sous forme d'un quotient (19) aux propriétés indiquées de $f_1(z)$ et $f_2(z)$, il est aisé de voir que $f(z)$ appartient à la classe (A). Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ appartienne à la classe (A) est fournie par la possibilité de la représentation (19) aux propriétés mentionnées de $f_1(z)$ et $f_2(z)$. C'est le théorème connu de M. M. F. et N. Nevanlinna (Acta Soc. Sc. Fennicae, t. 4. 1922 p.p. 1—46). *

Remarquons, pour terminer cet article, qu'il existe une infinité de représentation d'une fonction à variation bornée sous la forme (18). Si l'on prend la fonction $\omega_2(x)$ égale à la variation totale de $\omega(x)$ dans l'intervalle (o, x), la fonction $f_2(z)$ dans la formule (19) sera la fonction maximale en module à l'intérieur du cercle K.

§ 7. En se servant des résultats des paragraphes précédents, on démontre aisement le théorème suivant, indiqué par M. Zygmund dans son mémoire „Sur les fonctions conjuguées“ (Fundamenta Mathematicae t. XIII 1929):

Soit $\psi(x)$ une fonction positive telle que $\frac{\psi(x)}{x} \to +\infty$ pour $x \to +\infty$. Si les valeurs $f(e^{i\varphi})$ d'une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ sont intégrables de puissance $\delta > 0$ et si de plus les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \psi\,[\overset{+}{\lg}\,|f(re^{i\varphi})|\,]\, d\varphi$$

*) Nos bibliothéques ne possédant pas le journal indiqué, je n'ai pas eu, à mon regret, le moyen de lire le mémoire et j'ignore la méthode de la démonstration dont ces auteurs se sont servi.

restent bornées pour $r \to 1$, alors les intégrales

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^{\delta} d\varphi$$

restent aussi bornées.

Il suit inmmédiatement des conditions du théorème que la fonction $f(z)$ appartient à la classe (A). Supposons d'abord qu'elle ne possède pas de zéros à l'intérieure du cercle $|z| < 1$. Elle peut être mise d'ailleurs sous la forme

$$f(z) = \exp. \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\,\omega(x), \tag{20}$$

$\omega(x)$ étant une fonction réelle à variation bornée. En posant

$$u(re^{i\varphi}) = \lg|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi - x)+r^2} d\,\omega(x),$$

comme il est bien connu, on a

$$\omega(x) = \lim_{r \to 1} \int_0^x u(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Dèsignons par $\overset{+}{u}(re^{i\varphi})$ la fonction, égale à $u(re^{i\varphi})$, si $u(re^{i\varphi}) \geqslant 0$, et égale à zerosi $u(re^{i\varphi}) < 0$, et introduisons d'une facon analogue la fonction $\overset{-}{u}(re^{i\varphi})$. Envisageons la fonction

$$\omega_1(x) = \lim_{r \to 1} \int_0^x \overset{+}{u}(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Conformement au théorème connu de M. de la Vallée—Poussin la fonction non décroissante $\omega_1(x)$ est absolument continue. Introduisons encore la fonction non croissante

$$\omega_2(x) = \omega(x) - \omega_1(x) = \lim_{r \to 1} \int_0^x \overset{-}{u}(re^{i\varphi})\, d\varphi$$

et en dégageons le terme absolument continu et le terme singulier. La fonction $\omega(x)$ s'écrira ainsi sous la forme d'une somme des trois fonctions. En remplaçant dans la formule (20) $\omega(x)$ par cette somme on aura

$$f(z) = exp. \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} dx \cdot exp. \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z} d\omega_3(x), \tag{21}$$

où $\omega_3(x)$ est une fonction non croissante, possédant presque partout une derivée ègale à zéro, et $e^{\delta q(x)}$, en vertu des conditions du théorème, est une fonction sommable. Il résulte de la formule (21) que la fonction $f(z)$ appartient à la classe H_δ, *c. q. f. d*

Supposons maintenant, que la fonction $f(z)$, possède des zéros et dégageons la fonction de Blaschke $b(z)$, de sorte que

$$f(z) = b(z) \cdot g(z).$$

En se servant du même théorème de M. de la Vallée Poussin, on aura

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(e^{i\varphi}) \right| d\varphi, \tag{22}$$

et l'inégalité $|b(z)| < 1$ $(|z| < 1)$ donne

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \geqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(e^{i\varphi}) \right| d\varphi. \tag{23}$$

Désignons par $b_n(z)$ le produit des n premiers facteurs du produit infini (3), qui représente $b(z)$, et introduisons la fonction

$$g_n(z) = \frac{f(z)}{b_n(z)}.$$

Il est évident, que $|b_n(z)| < 1$ pour $|z| < 1$ et que $|b_n(re^{i\varphi})| \to 1$ uniformement par rapport à φ, quand $r \to 1$. L'intégral

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$$

étant une fonction croissante de r, il en résulte, que:

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g_n(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi,$$

ou, d'après la formule (22),

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g_n(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(re^{i\varphi}) \right| d\varphi,$$

d'où il vient

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g_n(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(e^{i\varphi}) \right| d\varphi \quad (r < 1),$$

et, en passant à la limite,

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(e^{i\varphi}) \right| d\varphi.$$

Cette égalité, jointe à la relation (23), donne

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| g(e^{i\varphi}) \right| d\varphi.$$

Donc, en se servant de nouveau du théorème de M. de la Vallée Poussin, mentionné ci-dessus, on voit, que la fonction $g(z)$, ainsi que la fonction $f(z) = b(z)\ g(z)$, appartiennent à la classe H_δ.

О предельных значениях функций, регулярных внутри круга.

В. И. Смирнов.

Автор исследует классы функций H_δ $(\delta > 0)$ таких, что $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$, и интегралы

$$\int_0^{2\pi} | f(re^{i\varphi}) |^\delta d\varphi$$

остаются ограниченными при $r \to 1$. В основе исследования находятся следующие две теоремы:

1) если $f(z)$ принадлежит некоторому классу H_δ $(\delta > 0)$ и $| f(e^{i\varphi}) |^\lambda$ $(\lambda > \delta)$ есть суммируемая функция, то $f(z)$ принадлежит и классу H_λ;

2) если $f(z)$ изображается интегралом типа Коши или Коши-Стильтиеса по окружности $|z| = 1$, то она принадлежит всем классам H_δ при $\delta < 1$.

Die Umkehrung einer ganzen transzendenten Funktion einer Matrix.

Auszug aus einem Briefe von Prof. D-r L. Schlesinger an D-r J. Lappo-Danilewski.

...... Da Sie Sich naturgemäss auch mit der Frage nach dem Logarithmus einer Matrix beschäftigt haben, so möchte ich Ihnen ein Verfahren schildern, durch das es gelingt, überhaupt die inverse Funktion einer ganzen transzendenten (oder auch rationalen) Funktion für eine Matrix zu definieren.

Es sei $u=E(x)$ eine ganze Funktion von x und $x=L(u)$ ihre inverse. Ich bezeichne mit $x_1, x_2, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $E'(x)=0$, falls solche existieren, und mit u_0 den Picardschen Ausnahmewert, den $E(x)$ für keinen endlichen Wert von x annimmt, falls ein solcher vorhanden ist. Es sei dann U eine Matrix von n^2 Elementen, deren charakteristische Wurzeln von den Werten $u_0, E(x_1), E(x_2), \ldots$ verschieden sind, und es werde die charakteristische Funktion von U

Det $(U-rI)=h(r)=(-1)^n (r-r_1)^{\lambda_1}(r-r_2)^{\lambda_2}\ldots(r-r_p)^{\lambda_p}$ gesetzt, wo die $r_1, r_2, \ldots r_p$ alle von einander verschieden sein mögen. Ich konstruiere eine ganze rationale Funktion $g(u)$ von u, für die die Differenz $u-E[g(u)]=h(u)\cdot f(u)$ wird, wo $f(u)$ eine ganze transzendente Funktion bedeutet. Setzt man dann für u die Matrix U ein, so wird zufolge des Cayleyschen Satzes $h(U)=0$, wir erhalten also

$$U-E[g(U)]=0,$$

d. h. es ist $g(U)$ mit $L(U)$ identisch. Um nun zu der ganzen rationalen Funktion $g(u)$ zu gelangen, hat man wie folgt zu verfahren: Zufolge der über die Wurzeln r_k gemachten Voraussetzung ist die inverse Funktion $L(u)$ in der Umgebung eines jeden Punktes $u=r_k$ holomorph, also in der Form

$$(1) \quad \ldots \quad L(u)=L(r_k)+c_1(u-r_k)+c_2(u-r_k)^2+\ldots$$

entwickelbar. Wir bezeichnen die ganze rationale Funktion, die entsteht, wenn wir in der Reihe (1) nur die λ_k ersten Glieder beibehalten, mit $F_k(u)$, dann ist also in der Umgebung von $u=r_k$

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; L(u) - F_k(u) = (u - r_k)^{\lambda_k} \; P(u - r_k),$$

wo, wie auch stets im Folgenden, P eine gewöhnliche, nach positiven ganzen Potenzen fortschreitende Reihe bedeuten soll. Wir trennen nun von dem rationalen Bruch $F_k(u)/h(u)$ den auf den Faktor $(u - r_k)^{\lambda_k}$ des Nenners bezüglichen Teil ab, setzen also

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; \frac{F_k(u)}{h(u)} = \frac{A_k(u)}{(u - r_k)^{\lambda_k}} + \frac{B_k(u)}{h(u)} (u - r_k)^{\lambda_k},$$

wo $A_k(u)$ und $B_k(u)$ ganze rationale Funktionen bedeuten, dann folgt aus (2) und (3), dass in der Umgebung von $u = r_k$

$$L(u) - \frac{A_k(u)\, h(u)}{(u - r_k)^{\lambda_k}} = (u - r_k)^{\lambda_k} \; P(u - r_k)$$

ist. Setzen wir also

$$g(u) = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k(u) \cdot h(u)}{(u - r_k)^{\lambda_k}},$$

so gilt in der Umgebung eines jeden Wertes $u=r_\nu$ die Entwicklung

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; L(u) = g(u) + (u - r_\nu)^{\lambda_\nu} \; P(u - r_\nu),$$

also, wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die E—Funktion nehmen,

$$u = E\,[g(u) + (u - r_\nu)^{\lambda_\nu} \; P(u - r_\nu)]$$

und indem wir jetzt im zweiten Gliede nach dem Taylorschen Satze entwickeln

$$u = E\,[g(u)] + (u - r_\nu)^{\lambda_\nu} \; P(u - r_\nu).$$

Also ist der Quotient $u - E\,[g(u)]\,/\,h(u)$ in der Umgebung eines jeden endlichen u—Wertes holomorph, somit eine ganze transzendente Funktion $f(u)$ von u, d. h. wir haben in der Tat erreicht, dass

$$u - E\,[g(u)] = h(u) \cdot f(u)$$

wird. Nach der Gleichung (4) ist $g(r_k) = L(r_k)$ und damit ist die Mehrdeutigkeit der Matrizenfunktion $g(U) = L(U)$ in Evidenz gesezt; die Werte $L(r_k)$ sind die Wurzeln der zu der Matrix $L(U)$ gehörigen charakteristischen Gleichung.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf den Fall wo $E(x)$ die Exponentialfunktion ist, liefert die Definition des Logarithmus einer Matrix; die Fälle, wo $E(x)$ mit x^2, oder allgemeiner mit x^m, m eine positive ganze Zahl, übereinstimmt, sind nach der hier dargelegten Methode schon früher behandelt worden, man vergleiche z. B. M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, 1910, S. 320 ff und Dickson-Bodewig, Höhere Algebra, 1929, S. 107 ff.

Giessen, 18 Juli 1929.

Обращение целой трансцендентной функции от матрицы.

Извлечение из письма проф. Л. Шлезингера к И. А. Лаппо-Данилевскому.

Пусть $U=E(X)$ есть целая трансцендентная функция матрицы X. Автор дает общий метод построения обратной функции $X=L(U)$.

Théorie des matrices satisfaisantes à des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires.

Par M. J. A. Lappo-Danilevski.

Mémoire premier.

§ 1.

Dans nos deux mémoires précédents [1]) nous avons donné la résolution algorithmique complète des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann, ce qui constitue le fondement de la théorie algorithmique des matrices régulières—ou, si l'on veut,— des systèmes d'équations linéaires à intégrales régulières.

En abordant maintenant une étude analogue des systèmes d'équations linéaires à coefficients rationnels arbitraires, nous remarquons, qu'un tel système, par une transformation convenable de la variable indépendante:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

se réduit toujours à la forme:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{YU_j^{(r)}}{(x - a_j)^r},$$

où les éléments $\left\{U_j^{(r)}\right\}_{kl}$ des ms substitutions différentielles, ainsi que les paramètres a_j, définissant la configuration des points singuliers à distance finie, sont indépendants de x.

Le système réduit (1) est évidemment caractérisé par la propriété, que toutes ses intégrales sont régulières au point à l'infini.

Une matrice intégrale $Y(x)$ du système (1) sera nommée „m a t r i c e à d é f i n i t i o n r a t i o n n e l l e" du rang s-1 aux

---

[1]) Journal de la Société Mathématique de Léningrad t. II fascic. 1 (1928) p.p. 94—120 et 121—154.

„substitutions différentielles" $U_j^{(1)}, \cdots, U_j^{(s)}$ aux points singuliers a_j $(j=1, 2, \cdots m)$.

Une matrice à définition rationnelle du rang zéro est évidemment une matrice régulière. Si la matrice $Y(x)$ se réduit à la matrice identique au point b, elle sera dite normale à ce point.

La matrice $Y(x)$ subit du côté gauche les „substitutions intégrales" V_j, quand x décrit les circuits, entournant les points singuliers respectivement a_j. Le groupe, généré par les substitutions V_j est un groupe de monodromie du système (1).

Supposons, que les substitutions différentielles $U_j^{(r)}$, ainsi que les points singuliers a_j sont donnés. Les problèmes fondamentaux correspondant de la théorie des matrices à définition rationnelle sont:

(A) la construction d'une représentation générale [1]) d'une matrice à définition rationnelle $Y(x)$, déterminée par les conditions initiales au point ordinaire, et la construction des expressions analytiques explicites de ses substitutions intégrales V_j. C'est évidemment le „problème irrégulier de Poincaré" sur l'intégration du système (1) et sur la détermination analytique de son groupe de monodromie.

(B) La „décomposition" d'une matrice à définition rationnelle, c'est-à-dire le dégagement de la matrice irrégulière $Y(x)$ une matrice régulière $X(x)$, jouissant de la propriété, que la deuxième composante: $X(x)^{-1} Y(x)$ soit uniforme dans tout le plan de la variable complexe, de sorte que la matrice $X(x)$ caractérise la ramification de la matrice $Y(x)$.

(C) La caractéristique analytique complète des singularités d'une matrice à définition rationnelle, concernant non seulement sa ramification, mais aussi les singularités essentielles uniformes de la composante uniforme $X(x)^{-1} Y(x)$. Une telle caractéristique sera atteinte par l'introduction des „substitutions caractéristiques" $W_j^{(r)}$ à tout point singulier a_j $(j=1, \cdots, m)$. La première de ces sub-

---

[1]) Une représentation d'une matrice $Y(x)$ sera dite générale, si elle représente cette matrice dans tout le domaine de son existence par rapport à x. Les représentations qui ne jouissent pas de cette propriété seront dites locales.

stitutions est la „substitution exposante“, liée à la substitution intégrale, par la relation

$$V_j = e^{2\pi i W_j^{(1)}} \tag{2}$$

et les autres — $W_j^{(2)}, \cdots, W_j^{(s)}$ n'exercent aucune influence sur la ramification.

Le problème classique de Riemann dans la classe des matrices considérées concerne la construction d'une matrice à définition rationnelle, les substitutions intégrales et la configuration des points singuliers étant supposé données. Ce problème renferme une indétermination essentielle, car il ne peut s'agir évidemment que de la construction d'une composante régulière $X(x)$, la composante uniforme restant complètement indéterminée.

Nous levons cette indétermination en considérant notre problème:

(D) sur la construction d'une matrice à définition rationnelle possédant les singularités complètement caractérisées, ce qui se réduit à la détermination des substitutions différentielles $U_j^{(r)}$, les substitutions caractéristiques $W_j^{(r)}$ et la configuration des points singuliers a_j étant supposé données [1]).

En se servant de notre méthode du calcul des séries des compositions des substitutions linéaires [TMR §§ 4—8] [2]), nous donnons dans le mémoire présent la résolution algorithmique des problèmes (A), (B), (C) et (D). Cette résolution ne suppose aucune restriction, concernant les problèmes (A) et (B), tandis que la résolution des problèmes (C) et (D) n'est valable, qu'à la condition, que les substitutions différentielles, ou respectivement caractéristiques, se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles [3]).

Le problème (A), sur l'intégration du système (1), a été traité jusqu'à présent dans le sens de la construction des représen-

---

[1]) Il est évident qu'en vertu de la relation (2), la résolution du problème (D) nous fournit en même temps les solutions du problème classique de Riemann.

[2]) Nous abrégerons ainsi les citations de nos deux mémoires mentionnés ci-dessus.

[3]) L'examen de ce cas particulier est d'ailleurs indispensable pour considérer le cas général.

tations locales (von Koch) ou des représentations asymptotiques (Poincaré) des matrices en question. Les représentations générales de ces matrices, ainsi que les expressions analytiques explicites pour les substitutions intégrales correspondant, manquent encore [4]).

Quant aux problèmes (B), (C) et (D), à notre connaissance, ils n'ont même pas été posés.

§ 2.

En abordant la résolution du problème (A) de Poincaré, nous introduisons le système des fonctions:

$$L_b(a_{j_1}^{r_1},\cdots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x);\ j_1,\cdots j_\nu=1,\cdots, m;\ r_1,\cdots, r_\nu= =1,\cdots, s;\ \nu=1,\ 2,\ 3,\cdots \tag{3}$$

définies par les relations de récurrence:

$$L_b(a_{j_1}^{r_1} \mid x)=\int_b^x \frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}; \tag{4}$$

$$L_b(a_{j_1}^{r_1},\cdots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x)=\int_b^x \frac{L_b(a_{j_1}^{r_1},\cdots, a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}} \mid x)\,dx}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}},$$

où b est un point, distinct des points $a_1,\cdots, a_m, \infty$.

Ces fonctions présentent une généralisation immédiate d'hyperlogarithmes:

$$L_b(a_{j_1},\cdots, a_{j_\nu} \mid x)=L_b(a_{j_1}^{1},\cdots, a_{j_\nu}^{1} \mid x)$$

[TMR § 9] et peuvent être mises sous forme de leurs combinaisons linéaires à coeffitients rationnels, comme nous le verrons plus loin [§ 3].

Toute fonction (3) peut être traitée comme une fonction uniforme sur la surface universelle de la superposition $\mathfrak{S}(a_1,\cdots,a_m,\infty)$, aux points de la ramification du type logarithmique $a_1,\cdots, a_m, \infty$.

Désignons par b_j le point superposé b sur la surface $\mathfrak{S}(a_1,\cdots, a_m, \infty)$ qu'on obtient, en suivant un lacet (a_j), entournant dans le sens positif le point a_j et n'entournant ancun d'autres

[4]) La connexion des représentations locales, des représentations asymptotiques et de nos représentations générales sera esquissée dans le § 6.

points singuliers. Les valeurs des fonctions (3) au point b_j seront fournies par les intégrales:

$$(5)\quad L_b(a_{j_1}^{r_1}\mid b_j)=P_j(a_{j_1}^{r_1}\mid b)=\int\limits_{(a_j)}\frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}};\quad L_b(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b_j)=$$

$$=P(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)=\int\limits_{(a_j)}\frac{L_b(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\mid x)\,dx}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}.$$

Les paramètres $P_j(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)$, ne dépendant que de la configuration des points singuliers $a_1,\cdots,a_m$ et du point b, sont à leur tour les combinaisons linéaires des paramètres de la configuration:

$$P_b^{(j)}(a_{j_1},\cdots,a_{j_\nu})=P_j(a_{j_1}^{1},\cdots,a_{j_\nu}^{1}\mid b)\ ^{1)}.$$

En se servant des fonctions (3) et des paramètres (5), on démontre le théorème I sur la représentation générale d'une matrice normale à définition rationnelle et le théorème II, qui fournit les expressions analytiques explicites des substitutions intégrales de la matrice indiquée.

Théorème I. La matrice à définition rationnelle possédant les substitutions différentielles $U_j^{(1)},\cdots,U_j^{(s)}$ aux points a_j $(j=1,\cdots,m)$ et normale au point b est une fonction entière des substitutions différentielles, représentable par le développement:

$$(6)\qquad \Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} & x \\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)=I+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)}U_{j_1}^{(r_1)}\cdots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\,L_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x).$$

---

[1]) Nous écrivons ici $P_j(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)$ au lieu de $P_b^{(j)}(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_\nu}^{r_\nu})$ pour conserver la symétrie des notations, car nous rencontrons dans la suite les paramètres de la forme $Q_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1},\cdots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)$, dépendant des deux indices $j=1,\cdots,m$ et $r=1,\cdots,s$.

Ce développement est uniformement convergent par rapport à x et représente la matrice considérée dans tout domaine fini de la surface de la superposition $\mathfrak{S}\,(a_1, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant a l'intérieur et sur le contour aucun des points singuliers $a_1, \ldots, a_m$.

Théorème II. La substitution intégrale au point a_j de la matrice (6) est une fonction entière des substitutions différentielles, représentée par le développement:

$$V_j = \Omega_j \left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, b \right) = I + \tag{7}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1, \ldots m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1 \ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} P_j \,(a_{j_1}^{r_1}, \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b).$$

La démonstration est complètement analogue à celle des théorèmes correspondants de la théorie des matrices régulières (*TMR*, §§ 10—11).

Considérons encore la matrice inverse par rapport à la matrice (6) Elle satisfait évidemment au système adjoint par rapport au système (1):

$$\frac{d\overset{*}{Y}}{dx} = - \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_j^{(r)} \overset{*}{Y}}{(x - a_j)^r}.$$

et se réduit à I pour $x = b$. On démontre à l'aide d'une méthode complètement analogue, que cette matrice est de même une fonction entrière des substitutions $U_j^{(r)}$:

$$\Phi_b \left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right)^{-1} = I + \tag{8}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1 \ldots m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1 \ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overset{*}{L}_b \,(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x),$$

où les coefficients sont définis par les relations linéaires:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \overset{*}{L}_b (a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa} \mid x) \; L_b (a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x) = 0 \text{ [1]}.$$

La série (8) nous fournit la représentation générale de la matrice normale inverse dans le même sens, que la série (6). Quand la variable x décrit un circuit, entournant le point a_j, la matrice inverse (8) subit une substitution intégrale $\overset{-1}{V}_j$ du côté droit. Cette substitution est une fonction entière des substitutions différentielles:

$$\overset{-1}{V}_j = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1 \ldots m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1 \ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overset{*}{P}_j (a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b),$$

où les coefficients sont définis par les formules:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \overset{*}{P}_j (a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa} \mid b) \; P_j (a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b) = 0.$$

En multipliant du côté gauche le développement (6) par une matrice C indépendant de x, on obtient la représentation générale d'une matrice arbitraire à définition rationnelle, définie par une condition initiale au point ordinaire arbitraire. Les substitutions intégrales de cette matrice seront obtenues à l'aide de la transformation des séries (7) par la matrice C.

Si le système des substitutions différentielles est commutatif les développements (6) et (7) donnent les expressions

$$(10) \qquad \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \; x \right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x - a_j}{b - a_j} \right)^{U_j^{(1)}} e^{-\sum_{r=2}^{s} U_j^{(r)} \frac{1}{r-1} \left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}} - \frac{1}{(b-a_j)^{r-1}} \right]}$$

et

$$V_j = e^{2\pi i U_j^{(1)}}.$$

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Si le système des substitutions différentielles d'un système d'équations différentielles aux co-

---

[1]) Voir *TMR* § 9, remarque à la formule (19).

efficients rationnels est commutatif, les intégrales de ce système sont représentables toujours sous la forme finie (10).

Les formules (6) et (7) fournissent évidemment la résolution algorithmique complète du problème *(A)* de Poincaré pour systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires.

§ 3.

Abordons maintenant la résolution du problème *(B)* sur la décomposition d'une matrice à définition rationnelle [§ 1].

En se servant de notre résolution algorithmique du problème régulier de Riemann et du problème irrégulier de Poincaré, nous pouvons énoncer le principe général de la décomposition:

Théorème III. La matrice à définition rationnelle, normale au point b et possédant les substitutions différentielles $U_j^{(1)}, \ldots, U_j^{(s)}$ et les substitutions intégrales V_j aux points a_j, peut être mise sous forme d'une composition d'une matrice régulière (composante régulière) et d'une matrice uniforme dans tout le plan de la variable complexe x (composante uniforme):

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \tag{11}$$

$$= \Phi_b\left(\begin{matrix} T_1, \ldots, T_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) \cdot G_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right).$$

Les substitutions différentielles de la composante régulière sont des fonctions analytiques multiformes des substitutions différentielles de la matrice à définition rationnelle considérée:

$$T_j = H_b^{(j)}\left(\begin{matrix} \frac{1}{2\pi i} \lg V_1, \ldots, & \frac{1}{2\pi i} \lg V_m \\ a_1, \ldots, & a_m \end{matrix}\right); \tag{12}$$

complètement déterminées par les algorithmes du théorème II [§ 2] et des théorèmes III ou IV de la théorie des matrices régulières [*TMR* §§ 22 et 23]*).

Il est évident, que si les substitutions T_i sont définies par les expressions (12) la matrice régulière $\Phi_b\left(\begin{matrix} T_1, \ldots, T_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right)$ possède les substitutions intégrales précisemment V_j aux points a_j. La matrice:

$$G_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \tag{13}$$

$$= \Phi_b\left(\begin{matrix} T_1, \ldots, T_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right)^{-1} \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right)$$

est, par suite, uniforme dans tout le plan de la variable complexe x et ne possède d'autres points singuliers que les points $a_1, \ldots, a_m, \infty$. Les points $a_1, \ldots, a_m$ fournissent, en général, les singularités essentielles de la composante uniforme, tandis que le point ∞ est un pôle ou un point ordinaire.

En multipliant du côté gauche les deux parties de la relation (11) par une matrice, indépendant de x, on obtient la formule de la décomposition pour une matrice arbitraire à définition rationnelle.

Si les substitutions différentielles $U_j^{(r)}$ de la matrice à définition rationnelle se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles, les substitutions différentielles (12) de sa composante régulière, ainsi que sa composante uniforme (13), peuvent être mises sous forme des séries des compositions des substitutions $U_j^{(r)}$.

En effet, conformement au théorème II les substitutions

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} lg V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^\nu \tag{14}$$

*) On prend les déterminations des logarithmes dans la formule (12) d'une telle façon, que les différences de leurs nombres caractéristiques ne soient pas entières [*TMR* § 26].

sont les fonctions holomorphes des substitutions $U_j^{(r)}$ dans un voisinage indiqué. En considérant les substitutions (14) comme les substitutions exposantes d'une composante régulière, d'après le théorème III de la théorie des martices régulières [*TMR* § 22], on conclut, que les substitutions différentielles

$$T_j = H_b^{(j)} \begin{pmatrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix}$$

de cette composante sont aussi des fonctions holomorphes des substitutions $U_j^{(r)}$ dans un voisinage du système des substitutions nulles:

$$(15) \qquad T_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1 \ldots m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1 \ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} D_j \left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right).$$

La composante régulière:

$$X = \Phi_b \left(\begin{matrix} T_1, \ldots, T_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right)$$

ainsi que la matrice inverse étant des fonctions entières des substitutions $T_1, \ldots, T_m$, il suit de la formule (13), que la composante uniforme est de même une fonction holomorphe des substitutions $U_j^{(r)}$ dans un voisinage indiqué:

$$(16) \qquad G_b \left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right) = I +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1 \ldots m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1 \ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} E_b \left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right).$$

Pour calculer les coefficients $E_b \left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right.$ et $D \left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right)$ nous remarquons que la composante régulière doit satisfaire au système:

$$\frac{dX}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{X P_j}{x - a_j}.$$

Par suite la composante uniforme est la matrice intégrale du système:

$$\frac{dG}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{GU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}-\sum_{j=1}^{m}\frac{T_jG}{x-a_j}, \tag{17}$$

se réduisant à I pour $x=b$.

En tenant compte des représentations (15) et en identifiant le système (17) par une série de la forme (16), conformement aux conditions initiales mentionnées, on obtient les relations:

$$E_b(a_{j_1}^{r_1}\mid x)=\int_b^x\left\{\frac{1}{(x-a_{j_1})^{r_1}}-\right. \tag{18}$$

$$\left.-\sum_{h=1}^{m}\frac{D_h(a_{j_1}^{r_1}\mid b)}{x-a_h}\right\}dx;\qquad E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)=$$

$$=\int_b^x\left\{\frac{E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\mid x)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}-\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{x-a_h}\left[D_h(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\varkappa=\nu-1}^{1}D_h(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\mid b)\,E_b(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)\right]\right\}dx.$$

Les fonctions $E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)$, comme coefficients du développement de la composante uniforme, générale par rapport à x, doivent être uniformes dans tout le plan de la variable complexe x. Pour qu'il soit ainsi, il faut et il suffit, que l'on ait:

$$\int_{(a_j)}\frac{d}{dx}E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)\cdot dx=0;\quad (j=1,\ldots,m),$$

ce qui donne les relations:

$$D_j(a_{j_1}^{r_1}\mid b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}; \tag{19}$$

$$D_j(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\left\{\frac{E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\mid x)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{h=1}^{m}\sum_{\varkappa=\nu-1}^{1}\frac{1}{x-a_h}D_h(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\mid b)\,E_b(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)\right\}dx.$$

Les formules (18) et (19) nous fournissent évidemment les relations de récurrence, qui déterminent consécutivement tous les coefficients $E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x)$ et $D_j(a_{j_1}^{r_1},\ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b)$ comme fonctions rationnelles de $x, a_1,\ldots, a_m, b$.

On arrive ainsi à la formule de la décomposition:

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} & x \\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)= \tag{20}$$

$$=\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)} T_{j_1}\ldots T_{j_\nu} L_b(a_{j_1},\ldots, a_{j_\nu} \mid x)\right].$$

$$\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x)\right],$$

où les substitutions $T_1,\ldots, T_m$ sont définies par les développements (15) et le calcul des coefficients $E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x)$ et $D_j(a_{j_1}^{r_1},\ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b)$ n'exige que d'opérations rationnelles. Les formules (15) et (20) nous fournissent les expressions analytiques explicites pour resoudre le problème sur la décomposition.

Les substitutions intégrales de la matrice (20) s'écriront évidemment sous forme:

$$\Omega_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} & b \\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)= \tag{21}$$

$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)} T_{j_1}\ldots T_{j_\nu} P_b^{(j)}(a_{j_1},\ldots, a_{j_\nu}).$$

Dans le cas, où le système des substitutions différentielles est commutatif, on a

$$T_j = U_j^{(1)}$$

et les expressions des composantes régulière et uniforme sont:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}T_1,\ldots,T_m\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j^{(1)}};\quad G_b\left(\begin{matrix}U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)}\\ \ldots\ldots\ldots\\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)}\\ a_1,\ldots,a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=$$

$$=\prod_{j=1}^{m} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s}\frac{1}{r-1}U_j^{(r)}\left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}}-\frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]}$$

ce qui suit immédiatement de la formule (10).

Il suit de la formule (20) que le calcul des coefficients $L_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)$ de la série entière (6), qui fournit la représentation générale d'une matrice normale aux substitutions différentielles données, s e f a i t e x c l u s i v e m e n t à l ' a i d e d e s o p é r a t i o n s h y p e r l o g a r i t h m i q u e s e t r a t i o n n e l l e s. En effet, en développant le côté droit de la formule (20) suivant les compositions des substitutions $U_j^{(r)}$ et en comparant la série obtenue à la série (6), on arrive aux identités:

$$L_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)=E_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)+\tag{22}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{\lambda}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1\ldots m)}\sum_{1\leq\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\lambda} D_{h_1}(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\mid b)\ldots$$

$$\ldots D_{h_\mu}\ldots(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\, a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\mid b)\; E_b(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)\; L_b(a_{h_1},\ldots,a_{h_\mu}\mid x)$$

qui donnent les représentations, déjà mentionnées [§ 2], des fonctions $L_b(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)$ sous forme des combinaisons linéaires d'hyperlogarithmes aux coefficients rationnels [1]). En faisant dans

[1]) Les identités (22) sont au fond les formules du calcul intégral et peuvent être déduites immédiatement des relations de récurrence (4), indépendamment du théorème sur la décomposition. Une telle démonstration exige quand même les calculs un peu trop longs.

les relations (22) $x=b_j$ [§ 2], on obtient les formules analogues pour les coefficients $P_j\,(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)$ des séries (7):

$$(23)\qquad P_j\,(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1\ldots m)}\sum_{1\leqq\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} D_{h_1}\,(a_{j_1}^{r_1}\ldots,a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\mid b)\ldots$$

$$\ldots D_{h_\mu}\,(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid b)\;P_b^{(j)}(a_{h_1},\ldots,a_{h_\mu})\,.$$

Cette remarque fournit un supplement essentiel aux théorèmes I et II: elle réduit les calculs pour obtenir la représentation générale d'une matrice intégrale et d'un groupe de monodromie d'un système irrégulier—aux opérations rationnelles près—aux calculs, qui sont nécessaires pour résoudre les mêmes problèmes relativement à un système régulier.

§ 4.

Avant d'aborder la résolution du problème (C) sur la caractéristique analytique complète des singularités des matrices à définition rationnelle, nous avons à considérer les matrices *élémentaires* à définition rationnelle, ne possédant qu'un seul point singulier à distance finie. Une telle matrice satisfait au système

$$(24)\qquad \frac{dY}{dx}=\sum_{r=1}^{s}\frac{YU^{(r)}}{(x-a)^r}\,.$$

Il est aisé de voir, que si les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution $U^{(1)}$ ne sont pas entières, le système (24) admet une matrice intégrale de la forme:

$$(25)\qquad \Theta\left(\begin{matrix}U^{(s)}\\ \vdots\\ U^{(1)}\\ a\end{matrix}\;\middle|\; x\right)=(x-a)^{U^{(1)}}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C^{(p)}\frac{1}{(x-a)^p}\right],$$

où les matrices $C^{(p)}$ sont définies par les relations de récurrence:

$$(26)\begin{cases} U^{(1)}\, C^{(p)} - p\, C^{(p)} - C^{(p)}\, U^{(1)} = \sum_{q=0}^{p-1} C^{(q)}\, U^{(p-q+1)}, \\ \qquad\qquad si\ p < s \\ U^{(1)}\, C^{(p)} - p\, C^{(p)} - C^{(p)}\, U^{(1)} = \sum_{q=p-s+1}^{p-1} C^{(q)}\, U^{(p-q+1)}, \\ \qquad\qquad si\ p \geqslant s \end{cases}$$

$$\text{et } C^{(0)} = I.$$

On démontre sans peine que la série (25) représente la matrice intégrale considérée dans tout le domaine de son existence. En conservant la terminologie de la théorie des matrices régulières, cette matrice peut être nommée „**matrice élémentaire métacanonique**", car dans un voisinage du point à l'infini on a le développement de la forme:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-U^{(1)}} \left[I + C'^{(1)} \frac{1}{x} + C'^{(2)} \frac{1}{x^2} + \cdots\right].\ ^{*)}$$

En profitant l'analogie des équations (26) aux équations (29) de la théorie des matrices régulières [TMR. § 12] et en se servant des mêmes méthodes, on établit, que les équations (26) peuvent être satisfaites par les séries des compositions des substitutions $U^{(1)}, \ldots, U^{(s)}$, qui représentent les matrices $C^{(p)}$ sous forme des fonctions holomorphes des substitutions indiquées dans un voisinage du système des substitutions nulles. La matrice

$$I + \sum_{p=1}^{\infty} C^{(p)} \frac{1}{(x-a)^p} = G(x)$$

*) Il est inutile d'insister que la matrice considérée est métacanonique précisément par rapport au point à l'infini, car comme nous le verrons plus loin, elle est en même temps métacanonique par rapport au point $x = a$. D'une telle propriété jouit la matrice régulière élémentaire métacanonique:

$$\Theta\left(\begin{matrix} U \\ a \end{matrix} \middle| x\right) = (x-a)^{U}.$$

se trouve aussi une fonction holomorphe des substitutions

$$U^{(1)}, \ldots, U^{(s)}$$

dans le même voisinage.

D'un autre côté, cette matrice satisfait au système:

$$\frac{dG}{dx}=\sum_{r=1}^{s}\frac{GU^{(r)}}{(x-a)^r}-\frac{U^{(1)}G}{x-a}$$

et se réduit a I pour $x=\infty$. En identifiant ce dernier système par une série des compositions de la forme:

$$G(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)} E_\infty(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\mid x),$$

on voit que les coefficients $E_\infty(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\mid x)$ sont définis par les relations de récurrence (18), où l'on pose:

$$b=\infty;\ D(a^{r_1}\mid\infty)=1 \ \textit{si}\ r_1=1;\ D(a^{r_1}\mid\infty)=$$

$$=0,\ \textit{si}\ r_1>1;\ D(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\mid\infty)=0,\ \textit{si}\ \nu\geqslant 2$$

$j=1$, (a_j étant remplacé par a).

En faisant les calculs d'après les relations de récurrence indiquées, on arrive aux expressions

$$E_\infty(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\mid x)=\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}},$$

où les constantes numériques $\gamma^{(r_1,\ldots r_\nu)}$ sont définies par les relations de récurrence:

$$(27)\quad\begin{cases}\gamma^{(r_1)}=-\dfrac{1}{r_1-1},\ \textit{si}\ r_1>1;\ \gamma^{(r_1)}=0,\ \textit{si}\ r_1=1\\[2ex] \gamma^{(r_1,\ldots,r_\nu)}=-\dfrac{\gamma^{(r_1,\ldots,r_\nu-1)}}{r_1+\ldots+r_\nu-\nu},\ \textit{si}\ r_1>1;\\[2ex] \gamma^{(r_1,\ldots r_\nu)}=-\dfrac{\gamma^{(r_1,\ldots r_{\nu-1})}-\gamma^{(r_2\ldots r_\nu)}}{r_1+\ldots+r_\nu-\nu},\ \textit{si}\ r_1=1.\end{cases}$$

Il en résulte, que la matrice métacanonique élémentaire est une fonction holomorphe des substitutions différentielles dans un voisinage du système des substitutions nulles:

$$(28)\quad \Theta\left(\begin{matrix} U^{(r)} \\ \vdots \\ U^{(1)} \\ a \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a)^{U^{(\;)}}\left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}\right] =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}\, N(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x),$$

où les coefficiens sont définis par les formules:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & N(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x) = \frac{\gamma^{(r_1,\ldots,r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}} \\ & N\left((\overset{1}{a})^{\lambda}a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x\right) = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda}\frac{1}{\varkappa}\lg^{\varkappa}(x-a)\frac{\gamma^{((1)^{\lambda-\varkappa}r_1,\ldots,r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}};\ r_1>1, \end{aligned}\right.$$

les lignes

$$\underbrace{\overset{1}{a},\ldots,\overset{1}{a}}_{\lambda\text{ fois}},\ a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\ \text{et}\ \underbrace{1,\ldots 1}_{\lambda\text{ fois}},\ r_1,\ldots,r_\nu$$

étant abrégées par $(\overset{1}{a})^{\lambda}, a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}$ et $(1)^{\lambda}\, r_1,\ldots,r_\nu$.

La première de ces expressions nous fournit évidemment la formule de la décomposition de la matrice métacanonique élémentaire. La représentation (28) n'est valable qu'à la condition, que les substitutions différentielles se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles. Pour obtenir une représentation explicite d'une matrice métacanonique élémentaire, générale non seulement par rapport à x, mais aussi par rapport aux substitutions différentielles, nous introduisons les certaines „fonctions numériques" des substitutions linéaires qui ne sont pas développables en séries des compositions. Soit $\xi_1,\ldots,\xi_n$ les nombres caractéristiques d'une substitution X, qui ne sont pas supposés nécessairement distincts.

Posons:

$$\Delta(X) = \prod_{k>l} \frac{e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_l}}{2\pi i\,(\xi_k - \xi_l)} \tag{30}$$

On a évidemment

$$\Delta(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(X) \tag{31}$$

où

$$\left| \begin{array}{l} \delta_0(X) = 1;\ \delta_\nu(X) = \displaystyle\sum_{\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_{\frac{n(n-1)}{2}} = \nu} p_{\varkappa_1}(\xi_n, \xi_{n-1}) \ldots p_{\varkappa_{\frac{n(n-1)}{2}}}(\xi_2, \xi_1) \end{array} \right. \tag{32}$$

$$p_0(\xi_k, \xi_l) = 1;\ p_\varkappa(\xi_k, \xi_l) = \frac{(2\pi i)^\varkappa}{(\varkappa+1)!}\left(\xi_k^\varkappa + \xi_k^{\varkappa-1}\xi_l + \ldots + \xi_k \xi_l^{\varkappa-1} + \xi_l^\varkappa\right).$$

Les expressions $\delta_\nu(X)$ sont des polynomes symétriques et homogènes du dégré ν par rapport aux racines $\xi_1, \ldots \xi_n$ de l'équation caractéristique de la substitution X. Par suite, ces expressions représentent les polynomes homogènes du dégré ν des éléments $\{X\}_{kl}$ de la substitution considérée. Il en résulte que l'expression $\Delta(X)$ est une fonction entière des éléments $\{X\}_{kl}$ dont le développement de Taylor est fourni par la série (31). La matrice

$$\Delta(X) = [\Delta(X), \ldots, \Delta(X)]\ ^{*)}$$

peut être traitée comme une fonction numérique entière de la substitution X, et les matrices

$$\delta_\nu(X) = [\delta_\nu(X), \ldots, \delta_\nu(X|$$

sont des fonctions numériques polynomiales.

En se servant des fonctions numériques introduites et en tenant compte des relations de récurrence (26) on démontre aisement le théorème suivant:

Théorème IV. La matrice métacanonique élémentaire (25) est une fonction méromorphe des substitutions différentielles, dont les singularités sont produites par les valeurs de la substitution $U^{(1)}$ aux différences entières des nombres caracté-

---

*) Nous désignons ainsi les matrices diagonales [*PMR* § 8].

ristiques distincts. La représentation générale explicite de cette matrice sous forme d'un quotient des deux fonctions entières est:

$$(33)\qquad \Theta\left(\begin{matrix} U^{(s)} \\ \vdots \\ U^{(1)} \\ a \end{matrix}\middle|\, x\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta(U^{(1)})}\left[(x-a)^{U^{(1)}} \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{r_1\ldots r_\varkappa}^{(1\ldots s)} U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\varkappa)}\,\delta_{\nu-\varkappa}(U^{(1)})\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\varkappa)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\varkappa-\varkappa}}\right]\text{*)}$$

La substitution intégrale de la matrice métacanonique élémentaire (33) au point a est évidemment $e^{2\pi i U^{(1)}}$.

La matrice métacanonique élémentaire inverse jouit évidemment des propriétés analogues. Si les substitutions différentielles se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles, elle admet la représentation:

$$(35)\qquad \Theta\left(\begin{matrix} U^{(s)} \\ \vdots \\ U^{(1)} \\ a \end{matrix}\middle|\, x\right)^{-1} = \left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U^{(r_1)}\frac{\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}\right](x-a)^{-U^{(1)}} = I+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}\overset{*}{N}(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x),$$

où les constantes numériques $\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1,\ldots r_\nu)}$ et les fonctions $\overset{*}{N}(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x)$ sont définies par les relations:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1,\ldots r_\varkappa)}\,\gamma^{(r_{\varkappa+1}\ldots r_\nu)} = 0$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\overset{*}{N}(a^{r_1},\ldots,a^{r_\varkappa}\,|\,x)\,N(a^{r_{\varkappa+1}},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x) = 0.$$

---

* Les mêmes fonctions numériques nous fournissent la représentation générale analogue d'une matrice métacanonique régulière [*TMR* § 12]:

$$(34)\qquad \Theta_j\left(\begin{matrix} U_1,\ldots, U_m \\ a_1,\ldots, a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta(U_j)}\left[(x-a)^{U^{(j)}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{j\ldots j_\varkappa}^{(1\ldots m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\,\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\,\overline{N}_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_\varkappa}\,|\,x)\right]$$

La représentation générale de la matrice (35) est fournie par l'expression (33), où les constantes $\gamma^{(r_1, \ldots, r_\nu)}$ sont remplacées par les constantes $\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1, \ldots, r_\nu)}$ et le facteur $(x-a)^{U^{(1)}}$ du côté droit — par le facteur $(x-a)^{-U^{(1)}}$ du côté gauche.

Dans quelques cas particuliers, les matrices élémentaires métacanoniques se trouvent étroitement liées aux fonctions de Bessel. On a, par exemple, la représentation:

$$J_n(x) = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ \Theta \left(\begin{matrix} \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} -n, & 0 \\ 0, & n+1 \end{Vmatrix} \\ 0 \end{matrix} \middle| \frac{1}{x} \right) \right\}_{11}$$

d'une fonction de Bessel d'ordre n sous forme d'un élément d'une matrice élémentaire métacanonique.

Si les substitutions différentielles forment un système commutatif, la formule (28) nous fournit la représentation de la matrice élémentaire métacanonique sous la forme finie:

$$(38) \qquad \Theta \left(\begin{matrix} U^{(s)} \\ \vdots \\ U^{(1)} \\ a \end{matrix} \middle| x \right) = (x-a)^{U^{(1)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} U^{(r)} \frac{1}{r-1} \frac{1}{(x-a)^{r-1}}}.$$

§ 5.

En passant à la résolution du problème (C), sur la détermination analytique complète des singularités d'une matrice à définition rationnelle aux substitutions différentielles données, nous nous rappelons la méthode, dont nous nous sommes servi pour résoudre le problème analogue relativement aux matrices régulières. Nous avons introduit les substitutions exposantes $W_1, \ldots W_m$, comme fonctions des substitutions différentielles, telles qu'il avait lieu les représentations:

$$(39) \qquad \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right) =$$

$$= (x-a_j)^{W(j)} \overline{\Phi}_b^{(j)} \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right) =$$

$$= \Theta \left(\begin{matrix} W_j \\ a_j \end{matrix} \middle| x \right) \overline{\Phi}_b^{(j)} \left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right),$$

où les matrices

$$\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right) \text{ et } \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right)^{-1}$$

restaient holomorphes dans un voisinage du point $x = a_j$ (*TMR* § 17). La substitution exposante W_j fournit dans ce cas non seulement une détermination de la ramification, mais une caractéristique analytique complète de la matrice (39) au point a_j, à l'aide d'une matrice régulière élémentaire:

$$\Theta\left(\begin{matrix} W_j \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right).$$

Avant d'aborder la généralisation de cette méthode pour le cas d'une matrice irrégulière, nous démontrerons un théorème préliminaire, dû à M. V. Smirnoff.

Théorème V. Si une matrice à définition rationnelle ainsi que la matrice inverse sont holomorphes à tout point à distance finie sur le plan de la variable complexe x, les substitutions différentielles $U_j^{(r)}$ $(j=1, \ldots, m;\ r=1, \ldots, s)$ sont nulles et les matrices considérées sont indépendantes de x.

La démonstration est immédiate. Il suit des équations (1) que

$$U_j^{(r)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(a_j)} Y^{-1} \frac{dY}{dx} (x - a_j)^{r-1} dx. \tag{40}$$

Les matrices $Y(x)$, $Y(x)^{-1}$ et, par suite, la matrice $Y^{-1}\dfrac{dY}{dx}$, en vertu des conditions du théorème, sont évidemment formées de polynomes en x.

Donc les intégrales (40) ce réduisent à zéro et on a:

$$U_j^{(r)} = 0; \quad (j=1, \ldots, m;\ r=1, \ldots, s).$$

Le théorème fondamental sur la caractéristique analytique complète des singularités d'une matrice normale à définition rationnelle peut être énoncé comme il suit:

Théorème VI. Les séries des compositions:

$$W_j^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} Q_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b), \tag{41}$$

où les coefficients sont définis par les relations de récurrense:

$$
(42)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& Q^{(r)}_j(a^r_j \mid b) = 1, \ si \ j_1 = j; \ r_1 = r; \quad Q^{(r)}_j(a^{r_1}_{j_1} \mid b) = 0 \text{ en tous autres cas;} \\
& Q^{(1)}_j(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid b) = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{1 \leq \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} P_j(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_{\varkappa_1}}_{j_{\varkappa_1}} \mid b) \ldots P_j(a^{r_{\varkappa_{\mu-1}}+1}_{j_{\varkappa_{\mu-1}}+1}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid b) \\
& Q^{(r)}_j(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid b) = \\
& = -\frac{r-1}{2\pi i} \int_{(a_j)} \Big\{ L_b(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid x) + \\
& + Q^{(1)}_j(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid b) \overset{*}{N}(a^1_j \mid x) + \\
& + \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{q_1=1}^{s} Q^{(q_1)}_j(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_\lambda}_{j_\lambda} \mid b) \, L_b(a^{r_\lambda+1}_{j_{\lambda+1}}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid x) \overset{*}{N}(a^{q_1}_j \mid x) + \\
& + \sum_{\lambda=2}^{\nu} \sum_{\mu=2}^{\lambda} \sum_{q_1, \ldots, q_\mu}^{(1, \ldots, s)} \sum_{1 \leq \varkappa_1 \leq \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \lambda} Q^{(q_1)}_j(a^{r_1}_{j_1}, \ldots, a^{r_{\varkappa_1}}_{j_{\varkappa_1}} \mid b) \ldots \\
& Q^{(q_\mu)}_j(a^{r_{\varkappa_{\mu-1}}+1}_{j_{\varkappa_{\mu-1}}+1}, \ldots, a^{r_\lambda}_{j_\lambda} \mid b) \, L_b(a^{r_\lambda+1}_{j_{\lambda+1}}, \ldots, a^{r_\nu}_{j_\nu} \mid x) \times \\
& \times \overset{*}{N}(a^{q_1}_j, \ldots, a^{q_\mu}_j \mid x \Big\} (x - a_j)^{r-2} dx \\
& \text{si } r = 2, \ldots s,
\end{aligned}
\right.
$$

représentent les fonctions holomorphes des substitutions $U^{(r)}_j$ $(j=1, \ldots, m; \ r=1, \ldots, s)$ dans un voisinage du système des substitutions nulles, jouissant de la propriété, qu'on a les représentations:

$$
(43)\quad \Phi_b\left(\begin{matrix} U^{(s)}_1, \ldots, U^{(s)}_m \\ \ldots\ldots\ldots \\ U^{(1)}_1, \ldots, U^{(1)}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = \Theta \left(\begin{matrix} W^{(s)}_j \\ \vdots \\ W^{(1)}_j \\ a_j \end{matrix} \middle| \, x \right) \cdot \bar{\Phi}^{(j)}_b \left(\begin{matrix} U^{(s)}_1, \ldots, U^{(s)}_m \\ \ldots\ldots\ldots \\ U^{(1)}_1, \ldots, U^{(1)}_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right),
$$

où les matrices:

$$\overline{\Phi}_b^{(i)}\left(\begin{matrix} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi}_b^{(i)}\left(\begin{matrix} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)^{-1}$$

restent holomorphes par rapport à x dans un voisinage du point a_j. Il n'existe point d'autre système des substitutions $W_j^{(r)}$ satisfaisant aux conditions indiquées.

Démonstration: Il suit immédiatement du théorème V que dans le cas où $U_j^{(r)}=0$ $(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$ il n'existe qu'un seul système des sudstitutions $W_j^{(r)}=0$, satisfaisant aux conditions du théorème. En passant au cas général nous remarquons, que la condition nécessaire, pour que les substitutions $W_j^{(r)}$ jouissent des propriétés du théorème, peut être énoncée comme il suit: les substitutions $W_j^{(r)}$ sont les solutions du système de sm équations:

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} & e^{-2\pi i W_j^{(1)}}\,\Omega_j\left(\begin{matrix} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, b\right)-I=0 \\ & \int_{(a_j)} \Theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle|\, x\right)^{-1} \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} \\ a_1,\ldots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right)(x-a_j)^{r-2}\,dx=0, \end{aligned}\right.$$

$$r=2,\ldots,s;\ j=1,\ldots,m$$

se réduisant aux substitutions nulles pour $U_j^{(r)}=0$. Le déterminant du système (44) étant distinct de zéro, ces solutions sont des fonctions holomorphes des substitutions $U_j^{(r)}$ dans un voisinage indiqué, représentées par les séries des compositions (41), où les coefficients sont définis par les relations de récurrence (42). Outre cela, un tel système des solutions est évidemment unique. Il ne reste qu'à démontrer, que les substitutions $W_j^{(r)}$, que nous venons de construire, jouissent effectivement des propriétés demandées. A cet égard nous considérons la matrice

$$(45)\qquad \overline{Y}_b^{(j)}(x) = \Theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right)^{-1} \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix}\middle| x\right).$$

Elle est évidemment une fonction holomorphe des substitutions $U_j^{(r)}$ dans un voisinage du système des substitutions nulles et admet la représentation générale par rapport à x:

$$\overline{Y}_b^{(j)}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$$

ce qui vient immédiatement des formules (41) et (5). Il résulte d'ailleurs des équations (44) que les fonctions $\overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$ satisfont aux relations:

$$\overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b_j\right) = 0$$

$$\int_{(a_j)} \overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) (x - a_j)^{r-2}\, dx = 0; \quad \begin{matrix} r = 2, \ldots, s \\ j = 1, \ldots, m \end{matrix}.$$

La matrice

$$(46)\qquad \widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \Theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} \overline{Y}_b^{(j)}(x) = I +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$$

jouit des mêmes propriétés et les coefficients $\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$ satisfont aux relations:

$$(47)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b_j\right) = 0. \\ \displaystyle\int_{(a_j)} \widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) (x - a_j)^{r-2}\, dx = 0; \quad \begin{matrix} r = 2, \ldots, s \\ j = 1, \ldots, m \end{matrix} \end{array} \right.$$

D'un autre côté, il est évident que la matrice (46) est une matrice intégrale du système:

$$\frac{d\widetilde{Y}_b^{(j)}}{dx}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{Y}_b^{(j)}U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r}-\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{W}_j^{(r)}\widetilde{Y}_b^{(j)}}{(x-a_j)^r}$$

se réduisant à I pour $x=b$, où:

$$\widetilde{W}_j^{(r)}=\Theta\left(\begin{array}{c|c} W_j^{(s)} & \\ \cdots & b \\ W_j^{(1)} & \\ a_j & \end{array}\right)W_j^{(r)}\,\Theta\left(\begin{array}{c|c} W_j^{(r)} & \\ \cdots & b \\ W_j^{(1)} & \\ a_j & \end{array}\right)^{-1}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\ldots\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\widetilde{Q}_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right).$$

Il en résulte que les fonctions $\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)$ sont définies par les relations de récurrence:

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned}
&\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,x\right)=\int_b^x\left\{\frac{1}{(x-a_{j_1})^{r_1}}-\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{Q}_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,b\right)}{(x-a_j)^r}\right\}dx.\\
&\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)=\int_b^x\left\{\frac{\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,\middle|\,x\right)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}-\right.\\
&\left.-\sum_{r=1}^{s}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(x-a_j)^r}\widetilde{Q}_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\,\middle|\,b\right)\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_\varkappa+1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right\}dx.
\end{aligned}\right.$$

En vertu des relations (47) et (48) toutes les fonctions $\widetilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)$ se trouvent holomorphes dans un voisinage du point a_j. On en conclut que les matrices (46) et (45) jouissent de la même propriété.

La matrice inverse $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ admet le développement:

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\overset{*}{\widetilde{L}}{}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right).$$

où les coefficients sont définis par les relations:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \overset{*}{\widetilde{L}}{}^{(j)}_{b}\left(\overset{r}{a}{}^{1}_{j_1},\ldots,\overset{r}{a}{}^{\varkappa}_{j_\varkappa}\,\middle|\,x\right)\widetilde{L}^{(j)}_{b}\left(\overset{r}{a}{}^{\varkappa+1}_{j_{\varkappa+1}},\ldots,\overset{r}{a}{}^{\nu}_{j_\nu}\,\middle|\,x\right)=0.$$

Par suite, les matrices $\widetilde{Y}^{(j)}_{b}(x)^{-1}$ et $\overline{Y}^{(j)}_{b}(x)^{-1}$ sont aussi holomorphes par rapport à x dans un voisinage du point a_j. Le théorème est ainsi démontré.

Les s substitutions $\overset{(1)}{W}_j,\ldots,\overset{(s)}{W}_j$ fournissent une détermination analytique complète de la singularité de la matrice (43) au point a_j à l'aide d'une matrice élémentaire métacanonique. La ramification de la matrice considérée se trouve d'ailleurs déterminée par la première de ces substitutions: $\overset{(1)}{W}_j$, car la substitution intégrale correspondant est:

$$V_j = e^{2\pi i \overset{(1)}{W}_j}. \tag{49}$$

Les substitutions $\overset{(1)}{W}_j,\ldots,\overset{(s)}{W}_j$ seront nommées „substitutions caractéristiques" de la matrice (43) au point a_j.

En remarquant qu'une matrice arbitraire à définition rationnelle ne diffère de la martice normale que par un facteur constant du côté gauche, on obtient le théorème général:

Théorème VII. Si les substitutions différentielles $\overset{(r)}{U}_j$, $(j=1,\ldots,m; r=1,\ldots,s)$ d'une matrice arbitraire à définition rationnelle se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles, il existe un système unique des „substitutions caractéristiques" $\overset{(r)}{W}_j$ $(j=1,\ldots,m,\ r=1,\ldots,s)$, jouissant de la propriété que la matrice considérée admet les représentations:

$$\Phi\left(\begin{array}{ccc|c} \overset{(s)}{U}_1, & \ldots, & \overset{(s)}{U}_m & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \overset{(1)}{U}_1, & \ldots, & \overset{(1)}{U}_m & x \\ a_1, & \ldots, & a_m & \end{array}\right) = \Theta\left(\begin{array}{c|c} \overset{(s)}{W}_j & \\ \vdots & x \\ \overset{(1)}{W}_j & \\ a_j & \end{array}\right)\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{array}{ccc|c} \overset{(s)}{U}_1, & \ldots, & \overset{(s)}{U}_m & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \overset{(1)}{U}_1, & \ldots, & \overset{(1)}{U}_m & x \\ a_1, & \ldots, & a_m & \end{array}\right), \tag{50}$$

où les matrices

$$(51) \qquad \overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} \overset{(s)}{U}_1, \ldots, \overset{(s)}{U}_m & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \overset{(1)}{U}_1, \ldots, \overset{(1)}{U}_m & x \\ a_1, \ldots, a_m & \end{array}\right),$$

ainsi que les matrices inverses restent holomorphes par rapport à x dans un voisinage des points respectivement a_j $(j=1,..,m)$.*)

La matrice (51). sera nommée „composante holomorphe" de la matrice (50) au point a_j. Elle se trouve définie évidemment de même d'une façon unique.

En résumant les résultats de ce paragraphe, nous arrivons à la conclusion suivante:

Toutes les singularités possibles des matrices à définition rationnelle du rang $s-1$ à m points singuliers à distance finie, sont équivalentes dans le sens des relations (50) aux singularités de certaines matrices métacanoniques élémentaires du même rang $s-1$, n'admettant qu'un seul point singulier à distance finie. Par conséquent ces matrices métacanoniques élémentaires représentent tous les types possibles des singularités des matrices à définition rationnelle les plus générales.

Cette proposition, qui fournit évidemment la résolution du problème (C) sur la caractéristique analytique complète des singularités des matrices à définition rationnelle a été démontrée à la condition, que les substitutions différentielles se trouvent dans un certain voisinage du système des substitutions nulles. L'étude de cette question dans toute sa généralité sera effectué dans notre mémoire suivant.

§ 6.

Nous avons vu, que dans la théorie des matrices régulières ont joué un rôle important les certaines matrices intégrales, que nous avons nommée „matrices régulières métacanoniques". Nous

*) Il ne s'agit ici que de l'unicité dans la classe des substitutions, dont les éléments sont des fonctions analytiques des éléments des substitutions différentielles.

généralisons cette notion pour la classe des matrices à définition rationnelle du rang arbitraire.

La normalisation au point singulier a_j étant, en général, défendue, on peut, quand même, construire une matrice à définition rationnelle, *dont la composante holomorphe par rapport au point a_j soit normalisée à ce point.*

En effet, étant donné un système des substitutions différentielles $U_j^{(r)}$ $(j=1,\dots,m;\ r=1,\dots,s)$ dans un voisinage du système des substitutions nulles, il existe un système unique des fonctions holomorphes de ces substitutions dans le voisinage indiqué:

$$H_j^{(r)}\ (j=1,\dots,m;\ r=1,\dots,s)$$

qui jouissent de la propriété, que le système d'équations différentielles (1) admet une matrice intégrale de la forme:

$$(52)\quad \Theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)=\Theta\left(\begin{array}{c|c} H_j^{(s)} & \\ \vdots & x \\ H_j^{(1)} & \\ a_j & \end{array}\right)\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right),$$

où la composante holomorphe est représentable dans un voisinage du point a_j par une série:

$$(53)\quad \overline{Z}_j(x)=\overline{\Theta}_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)=I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}\left(\begin{array}{c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} \\ a_1,\dots,a_m \end{array}\right)(x-a_j)^p,$$

les matrices $A_j^{(p)}$ étant indépendantes de x.

Pour le faire voir, conformement à la relation (43), il suffit de poser:

$$(54)\quad \Theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & a_j \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)$$

$$(55)\quad H_j^{(r)} = \overline{\Phi}_b^{(j)} \left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}, \dots, U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(1)}, \dots, U_m^{(1)} & a_j \\ a_1, \dots, a_m & \end{array} \right)^{-1} W_j^{(r)}(b)\, \overline{\Phi}_b^{(j)} \left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}, \dots, U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(1)}, \dots, U_m^{(1)} & a_j \\ a, \dots, a_m & \end{array} \right),$$

où b est un point de normalisation arbitraire et $W_j^{(r)}(b)$ sont les substitutions caractéristiques de la matrice normale au point b, qui entre dans la formule (54).

Il est évident de plus, que la matrice satisfaisant aux conditions énoncées, est unique.

La matrice (52) sera nommée „matrice métacanonique par rapport au point a_j“, aux substitutions différentielles $U_h^{(1)}, \dots, U_h^{(s)}$ aux points a_h $(h=1, \dots, m)$. Les substitutions $H_j^{(1)}, \dots, H_j^{(s)}$ sont évidemment les substitutions caractéristiques de la matrice considérée au point a_j. Elles seront dites „substitutions caractéristiques métacanoniques“ par rapport au point indiqué. La substitution intégrale de la matrice métacanonique (52) au point a_j est:

$$e^{2\pi i H_j^{(1)}}.$$

La matrice métacanonique élémentaire, dont nous nous somme servi dans les paragraphes précédents, est évidemment métacanonique, dans le sens actuel, par rapport à tous les deux points singuliers à la fois: a et ∞.

Si le rang est égal à zéro, la formule (55) donne

$$H_j^{(1)} = U_j^{(1)}\ ;\ j=1, \dots, m$$

et la matrice métacanonique (52) se réduit immédiatement à la matrice régulière métacanonique, dans le sens de la théorie des matrices régulières [*TMR*, § 12].

Les expressions explicites des matrices métacanoniques, libres du paramètre superflu b, qui entre dans les formules (54) et (55) sont fournies par le théorème suivant:

Theoreme VIII. Les substitutions caractéristiques métacanoniques et la composante uniforme d'une matrice métacanonique (52), ainsi que les coefficients du développement de cette composante en série de Taylor (53) sont des fonctions holomorphes des substitutions différentielles dans un voisinage du système des substitutions nulles:

$$(57)\qquad H_j^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{1,\dots,m} \sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})$$

$$(58)\qquad \overline{\Theta}_j\left(\begin{matrix} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} \\ \dots\dots\dots \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} \\ a_1,\dots,a_m \end{matrix}\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} \sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\, x\right).$$

$$(59)\qquad A_j^{(p)}\left(\begin{matrix} U_1^{(s)},\dots,U_m^{(s)} \\ \dots\dots\dots \\ U_1^{(1)},\dots,U_m^{(1)} \\ a_1,\dots,a_m \end{matrix}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} \sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}) \quad .$$

$$j=1,\dots,m;\ r=1,\dots,s;\ p=1,2,\dots$$

où les coefficients sont définis par les relations de récurrence:

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned}
& I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})=1, \text{ si } j=j_1,\ r=r_1,\ I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})=0 \text{ en tous autres cas;} \\
& \qquad I_j^{(s)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})=0, \text{ si } \nu \geqq 2; \\
& I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}) = -\sum_{q=r+1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} I_j^{(q)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa})\, K_j^{(q-r)}(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}), \\
& \qquad \text{si } r<s,\ j_\nu \neq j; \text{ ou si } r<s,\ j_\nu=j \text{ et } r \geqq r_\nu; \\
& I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}) = K_j^{(r_\nu-r)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}) - \\
& \qquad - \sum_{q=r+1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} I_j^{(q)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa})\, K_j^{(q-r)}(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}); \\
& \qquad \text{si } r<s,\ j_\nu=j \text{ et } r<r_\nu;
\end{aligned}\right.$$

$$(61)\begin{cases} K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1})=0, \text{ si } j_1=j;\ K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1})=\dfrac{(-1)^{r_1} r_1(r_1+1)\dots(r_1+p-2)}{p!\,(a_{j_1}-a_j)^{r_1+p-1}}, \text{ si } j_1\neq j; \\ K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})= \\ =\dfrac{1}{p}\Big[(-1)^{r_\nu}\displaystyle\sum_{q=1}^{p-1}\frac{r_\nu(r_\nu+1)\dots(r_\nu+p-q-2)}{(p-q-1)!\,(a_{j_\nu}-a_j)^{r_\nu+p-q-1}}K_j^{(q)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}})- \\ -\displaystyle\sum_{q=p}^{p+s-1}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} I_j^{(q-p+1)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa})\,K_j^{(q)}(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})\Big], \\ \text{si } j_\nu\neq j,\quad \displaystyle\sum_{q=1}^{p-1}=0, \quad \text{si } p=1; \\ K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})=\dfrac{1}{p}\Big[K_j^{(r_\nu+p-1)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}})- \\ -\displaystyle\sum_{q=p}^{p+s-1}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} I_j^{(q-p+1)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa})\,K_j^{(q)}(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})\Big], \\ \text{si } j_\nu=j; \end{cases}$$

$$(62)\begin{cases} \overline{N}_j(a_{j_1}^{r_1}\,|\,x\,|=\displaystyle\int_{a_j}^{x}\Big[\frac{1}{(x-a_{j_1})^{r_1}}-\sum_{r=1}^{s}\frac{I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})}{(x-a_j)^r}\Big]dx \\ \overline{N}_j(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)=\displaystyle\int_{a_j}^{x}\Big[\frac{\overline{N}_j(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,|\,x)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}- \\ -\displaystyle\sum_{r=1}^{s}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(x-a_j)^r}I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa})\,\overline{N}_j(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)\Big]dx. \end{cases}$$

Les coefficients $K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})$ et $I_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu})$ sont ainsi les fonctions rationnelles de $a_1,\dots,a_m$. La série (58) représente la composante holomorphe dans chaque domaine fini de la surface universelle $\mathfrak{S}(a_1,\dots,a_m,\infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m$ et des points a_j distincts de celui, qui entre dans la définition de la matrice métacanonique.

Démonstration. Toutes les propositions du théorème, concernant la convergence des séries, viennent immédiatement des relations (54) et (55).

Il ne reste à établir que les relations de récurrence pour les coefficients. A cet égard nous remarquons, qu'en vertu de la relation (52) la composante holomorphe (58) est la matrice intégrale du système

$$(63) \qquad \frac{d\overline{Z}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} \frac{\overline{Z}_j U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r} - \sum_{r=1}^{s} \frac{H_j^{(r)} \overline{Z}_j}{(x-a_j)^r}$$

se réduisant à I pour $x = a_j$. En remplaçant dans ce système les substitutions $H_j^{(r)}$ par les séries (57), en l'identifiant par une série de la forme (58) et en tenant compte des conditions initiales, on obtient les relations de récurrence (62). La holomorphie de la composante holomorphe dans un voisinage du point a_j entraîne la holomorphie des coefficients $\overline{N}_j(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} | x)$ dans le même voisinage, de sorte qu'on a les développements de Taylor:

$$(64) \qquad \overline{N}_j(a_{j_1}^{r_1}, \ldots, a_{j_\nu}^{r_\nu} | x) = \sum_{p=1}^{\infty} \boldsymbol{K}_j^{(p)}(\boldsymbol{a}_{j_1}^{r_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_\nu}^{r_\nu})(x-a_j)^p.$$

Conformement à la première des relations (62), les coefficients $\boldsymbol{I}_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})$ se trouvent définis alors par les relations (60) et les coefficients $\boldsymbol{K}_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1})$ par les relations (61). Pour $\nu \geqslant 2$, en substituant les développements de la forme (64) dans la formule (62) et en comparant les coefficients d'après les mêmes puissances de $x - a_j$, on arrive aux relations de récurrence (60) et (61).

En vertu des formules (52) et (28) le théorème démontré nous donne la représentation générale par rapport à x

d'une matrice métacanonique aux substitutions différentielles données:

$$
(65)\quad \Theta_j\left(\begin{array}{c|c} \overset{(s)}{U_1},\ldots,\overset{(s)}{U_m} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & x \\ \overset{(1)}{U_1},\ldots,\overset{(1)}{U_m} & \\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)=(x-a)^{H_j^{(1)}}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C^{(p)}\begin{pmatrix} H_j^{(s)} \\ \vdots \\ H_j^{(1)}\end{pmatrix}\frac{1}{(x-a_j)^p}\right]\Bigg[I+
$$

$$
+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\ \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\,\overline{N}_j\,(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\mid x)\Bigg],
$$

$$
\text{où}\quad C^{(p)}\begin{pmatrix} H_j^{(s)} \\ \vdots \\ H_j^{(1)}\end{pmatrix}=\sum_{r_1+\ldots+r_\nu-\nu=p} H_j^{(r_1)}\ldots H_j^{(r_\nu)}\,\gamma^{(r_1,\ldots,r_\nu)},
$$

la sommation étant étendue sur toutes les valeurs des indices $r_1, \ldots, r_\nu = 1, \ldots, s$; $\nu = 1, 2, \ldots,$ satisfaisant à l'égalité indiquée. Cette représentation met d'ailleurs complètement en évidence la nature de la singularité de la matrice considérée au point a_j: la première composante caractérise la ramification et la deuxième— la singularité uniforme essentielle. Si l'on remplace la troisième composante par la série de Taylor (53) on obtient la représentation locale:

$$
(66)\quad \Theta_j\left(\begin{array}{c|c} \overset{(s)}{U_1},\ldots,\overset{(s)}{U_m} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & x \\ \overset{(1)}{U_1},\ldots,\overset{(1)}{U_m} & \\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)=(x-a_j)^{H_j^{(1)}}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C^{(p)}\begin{pmatrix} H_j^{(s)} \\ \vdots \\ H_j^{(1)}\end{pmatrix}\frac{1}{(x-a_j)^p}\right]\Bigg[I+
$$

$$
+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}\begin{pmatrix} \overset{(s)}{U_1},\ldots,\overset{(s)}{U_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{(1)}{U_1},\ldots,\overset{(1)}{U_m} \\ a_1,\ldots,a_m \end{pmatrix}(x-a_j)^p\Bigg],
$$

qui est valable à l'intérieur du cercle, dont le centre est au point a_j et dont le rayon est la distance minimale de ce point aux points $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_m$, sauf le point a_j même. En multipliant la matrice (66) du côté gauche par une substitution, réduisant la substitution $H_j^{(1)}$ à la forme canonique et en effectuant la composition des deux séries, on les remplace par une série de Laurent et on arrive à la représentation locale étudiée par M. H. von Koch. Cette dernière représentation locale ne laisse dégagée que la composante, caractérisant la ramification, et la nature specifique de la singularité uniforme essentielle n'est plus patente. Outre cela, la méthode de M. von Koch fournit les expressions des coefficients sous forme des déterminants infinis, tandis que les coefficients de la représentation (66) se calculent à l'aide des séries des compositions des substitutions différentielles aux coefficients rationnelles en $a_1, \ldots, a_m$.

Il est à remarquer une différence intrinsèque entre les méthodes dont nous nous sommes servi, en démontrant l'existence des matrices métacanoniques régulières et irrégulières.

Dans le premier cas [*TMR*, § 12] nous avons identifié le système de la forme

$$\frac{d\,\overline{Z}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\overline{Z}_j U_h}{x - a_h} - \frac{H_j \overline{Z}_j}{x - a_j}$$

par une série de Taylor:

$$\overline{Z}_j = I + \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)} (x - a_j)^p \tag{67}$$

et, en comparant les coefficients d'après les mêmes puissances de $x - a_j$, nous avons formé une infinité d'équations linéaires. Ces équations ont déterminé d'une façon unique la substitution $H_j = U_j$ et toutes les matrices $A_j^{(p)}$, comme fonctions rationnelles des substitutions différentielles.

Dans le deuxième cas nous avons fondé la déduction sur l'existance d'une matrice normale à définition rationnelle et nous avons utilisé essentiellement la représentation générale de cette matrice sous forme d'une série des compositions des substitutions différentielles.

Considérons maintenant, ce que peut donner la première méthode dans le deuxième cas, où les matrices sont irrégulières.

En substituant la série (67) dans le système de la forme (63), qui doit être satisfait par la composante holomorphe d'une matrice métacanonique au point a_j, et en comparant les coefficients d'après les mêmes puissances de $(x-a_j)$, on arrive aux équations:

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{p}\left(A_j^{(q)} U_j^{(s+q-p)} - H_j^{(s+q-p)} A_j^{(q)}\right) = 0;\quad p=0,1,\ldots,s-1;\\ &\sum_{q=p-s+1}^{p}\left(A_j^{(q)} U_j^{(s+q-p)} - H_j^{(s+q-p)} A_j^{(q)}\right) = (p-s+1)\, A_j^{(p-s+1)} -\\ &-\sum_{h \mp j}\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{p-s} \frac{(-1)^r\, r\,(r+1)\ldots(r+p-s-q-1)}{(p-s-q)!\,(a_h-a_j)^{r+p-s-q}} A_j^{(q)} U_h^{(r)};\\ &\qquad\qquad p=s,\ s+1,\ldots \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations donne:

$$H_j^{(s)} = U_j^{(s)}.$$

Il est évident, que les équations suivantes admettent une infinité de systèmes des solutions par rapport aux substitutions inconnues:

$$H_j^{(1)},\ldots, H_j^{(s-1)},\ A_j^{(1)},\ A_j^{(2)},\ \ldots$$

D'un autre côté. en écrivant les équations (68) sous forme:

$$H_j^{(r)} = U_j^{(r)} + \sum_{q=r+1}^{s}\left(A_j^{(q-r)} U_j^{(q)} - H_j^{(q)} A_j^{(q-r)}\right);\quad r=s,\ s-1,\ldots,1;$$

$$A_j^{(p)} = \frac{1}{p}\left[\sum_{h \mp j}\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{p-1} \frac{(-1)^r\, r\,(r+1)\ldots(r+p-q-2)}{(p-q-1)!\,(a_h-a_j)^{r+p-q-1}} A_j^{(q)} U_h^{(r)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=p}^{p+s-1}\left(A_j^{(q)} U_j^{(q-p+1)} - H_j^{(q-p+1)} A_j^{(q)}\right)\right]$$

et en les identifiant par les séries des compositions de la forme (57) et (59) on obtient immédiatement les relations de récurrence (60) et (61) du théorème VIII. Donc les séries des compositions (57) et (59) représentent un système spécial des solutions des équations (68). Ce système des solutions n'est d'ailleurs le plus simple, mais, comme nous l'avons vu, c'est le système des solutions unique, qui définit les substitutions caractéristiques et la composante holomorphe de la matrice métacanonique considérée.

Les considérations de la théorie ordinaire des équations différentielles linéaires correspondent aux choix du système le plus simple des solutions des équations (68), où l'on attribue aux substitutions $H_j^{(r)}$ la forme canonique:

$$H_j^{(r)} = [\tau_1^{(r)} \ldots, \tau_n^{(r)}]\ ^{1)}.$$

Le système des substitutions $H_j^{(1)}, \ldots, H_j^{(s)}$ devient ainsi commutatif, et, conformement à la formule (38), on arrive à l'expression de la matrice métacanonique cherchée sous la forme:

$$\text{(69)} \qquad \left[(x - a_j)^{\tau_1^{(r)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} \frac{\tau_1^{(r)}}{(r-1)(x-a_j)^{r-1}}}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, (x - a_j)^{\tau_n^{(1)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} \frac{\tau_n^{(r)}}{(r-1)(x-a_j)^{r-1}}} \right] \Big[I +$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)} (x - a_j)^p \Big]$$

qui ne peut fournir, en général, que les représentations asymptotiques, car la série de Taylor se trouve en général, divergente. Donc, en général, la matrice élémentaire de la forme finie ne caractérise point la singularité de la matrice considérée au point a_j. Le cas contraire se présente sûrement, quand le système des substitutions différentielles est commutatif. Mais dans ce cas on a la représentation totale sous la forme finie:

$$\Theta_j \left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}, \ldots, U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(1)}, \ldots, U_m^{(1)} & x \\ a_1, \ldots, a_m & \end{array} \right) =$$

$$= \prod_{h=1}^{m} (x - a_h)^{U_h^{(1)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} U_h^{(r)} \frac{1}{(r-1)(x-a_h)^{r-1}}} \prod_{h \neq j} (a_j - a_h)^{-U_h^{(1)}}$$
$$e^{\sum\limits_{r=2}^{s} U_h^{(r)} \frac{1}{(r-1)(a_j - a_h)^{r-1}}},$$

ce qui résulte immédiatement des relations (38) et (10).

Ces considérations mettent en évidence la relation entre notre représentation (65) et les représentations asymptotiques (69) des matrices métacanoniques.

---

[1]) Je suppose ici, pour abréger l'écriture, que la substitution $U_j^{(s)} = [\tau_1^{(s)}, \ldots, \tau_n^{(s)}]$ est déjà donnée sous la forme canonique.

§ 7.

Le problème fondamental de la théorie des fonctions à une variable complexe c'est, comme il est bien connu, le problème sur la construction d'une fonction, ou d'une matrice des fonctions possédant des singularités d'un type donné.

Le type d'une singularité d'une matrice à définition rationnelle est complètement déterminé par les substitutions caractéristiques correspondant, comme le type de la singularité d'une matrice métacanonique élémentaire.

Par conséquent, le problème indiqué ci-dessus, dans la classe des matrices à définition rationnelle, se réduit à notre problème (D), concernant la construction d'une matrice à définition rationnelle du rang $s-1$, les substitutions caractéristiques $W_j^{(1)}, \dots, W_j^{(s)}$ et la configuration des points singuliers à distance finie a_j $(j=1, \dots, m)$ étant supposées données.

La résolution algorithmique de ce problème, à condition, que les substitutions caractéristiques sont données dans un voisinage système des substitutions nulles, est fournie par le théorème suivant:

Théorème IX. Les séries des compositions:

$$U_j^{(r)} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} W_{j_1}^{(r_1)} \dots W_{j_\nu}^{(r_\nu)} R_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b), \tag{70}$$

$$j=1, \dots, m; \; r=1, \dots, s,$$

où les coefficients sont définis par les relations de récurrence

$$(71) \left\{ \begin{aligned} & R_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1} \mid b) = 1, \text{ si } j_1 = j, \; r_1 = r; \\ & R_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1} \mid b) = 0 \text{ en tous autres cas;} \\ & R_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b) = \\ & = -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1, \dots, h_\mu}^{(1, \dots, m)} \sum_{q_1, \dots, q_\mu}^{(1, \dots, s)} \sum_{1 \leqq \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} R_{h_1}^{(q_1)}(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j\varkappa_1}^{r\varkappa_1} \mid b) \dots \\ & \dots R_{h_\mu}^{(q_\mu)}(a_{j\varkappa_{\mu-1}+1}^{r\varkappa_{\mu-1}+1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b) \, Q_j^{(r)}(a_{h_1}^{q_1}, \dots, a_{h_\mu}^{q_\mu} \mid b) \text{ [1]}, \end{aligned} \right.$$

[1]) Les paramètres $Q_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu})$ ont été définis par les relations de récurrence (42).

représentent les fonctions holomorphes des substitutions $W_j^{(r)}$ $(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$ dans un voisinage du système des substitutions nulles, jouissant de la propriété que la matrice normale à définition rationnelle:

$$(72)\qquad \Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)},\ldots,W_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ W_1^{(1)},\ldots,W_m^{(1)} & \\ a_1\ ,\ldots,\ a_m & \end{array}\right)=\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)},\ldots,U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)},\ldots,U_m^{(1)} & \\ a_1\ ,\ldots,\ a_m & \end{array}\right)$$

possède les substitutions caractéristiques $W_j^{(1)},\ldots,W_j^{(s)}$ aux points a_j $(j=1,\ldots,m)$. Il n'existe point d'autre système de substitutions $U_j^{(r)}$, satisfaisant aux conditions indiquées.

Démonstration. Il est évident que si $W_j^{(r)}=0$, $(j=1,\ldots,m;$ $r=1,\ldots,s)$ le système des substitutions $U_j^{(r)}$ satisfait aux conditions du théorème. En vertu du théorème V c'est d'ailleurs le système des substitutions unique, jouissant des propriétés demandées. Donc, si les substitutions $W_j^{(r)}$ se trouvent dans un voisinage du système des substitutions nulles, le système des substitutions $U_j^{(r)}$, satisfaisant aux conditions du théorème est représentable par le système unique des solutions du système d'équations (41):

$$U_j^{(r)}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\ \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\cdots\ U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\ Q_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1},\ldots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\ \middle|\ b\right)=W_j^{(r)};$$

$$(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s),$$

se réduisant aux substitutions nulles pour $W_j^{(r)}=0$. Les séries (70) aux coefficients définis par les relations de récurrence (71) fournissent précisément les solutions indiquées du système considéré.

En se servant des formules (6) et (70), on obtient l'expression explicite de la matrice cherchée (72) sous forme d'une fonction holomorphe des substitutions caractéristiques dans un voisinage du système des substitutions nulles:

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)},\dots,W_m^{(s)} & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ W_1^{(1)},\dots,W_m^{(1)} & x \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)} W_{j_1}^{(r_1)}\cdots\cdots W_{j_\nu}^{(r_\nu)}\, M_b(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}|x),$$

où

$$M_b(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}|\,x)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1,\dots,h_\mu}^{(1,\dots,m)}\sum_{q_1,\dots,q_\mu}^{(1,\dots,s)}\sum_{1\leq\varkappa_1<\dots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_{h_1}^{(q_1)}(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}|\,b)\cdots$$

$$\cdots R_{h_\mu}^{(q_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}|\,b)\;L_b\,(a_{h_1}^{q_1},\dots,a_{h_\mu}^{q_\mu}|\,x).$$

Si le système donné des substitutions caractéristiques est commutatif, cette matrice peut être mise sous la forme finie:

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)},\dots,W_m^{(s)} & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ W_1^{(1)},\dots,W_m^{(1)} & x \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j^{(1)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} W_j^{(r)}\frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}}-\frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]}.$$

La solution de notre problème (D) fournit en même temps les solutions de problème classique de Riemann, dans la classe des matrices à définition rationnelle, qui concerne la construction d'une matrice à définition rationnelle du rang s—1, possédant les substitutions intégrales données V_j aux points respectivement a_j.

En effet, si les substitutions V_j sont données dans un voisinage du système des substitutions identiques, en vertu de la relation (49) une matrice satisfaisant aux conditions indiquées est:

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)},\dots,W_m^{(s)} & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ W_1^{(2)},\dots,W_m^{(2)} & x \\ \frac{1}{2\pi i}\lg V_1,\dots,\frac{1}{2\pi i}\lg V_m & \\ a_1,\dots,a_m & \end{array}\right),$$

où l'on prend les déterminations des logarithmes (14), se réduisant à la substitution nulle pour $V_j = I$, et les substitutions $W_j^{(r)}$ $(j=1,\ldots,m;\ r=2,\ldots,s)$ restent arbitraires.

Теория матриц, удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами.

И. А. Лаппо-Данилевский.

Автор рассматривает систему линейных уравнений с рациональными коэффициентами

$$(1)\quad \frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{Y \cdot U_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}$$

и дает прежде всего общие аналитические выражения для интегральной матрицы $Y(x)$ и для подстановок V_j $(j=1, 2, .., m)$ группы этой системы.

Затем матрица $Y(x)$ представляется в виде произведения двух матриц, из которых одна регулярна в смысле Фукса и другая однозначна на всей плоскости.

Дальнейшие исследования относятся к тому случаю, когда элементы таблиц $U^{(r)}$ близки к нулю. Здесь автор выделяет из матрицы $Y(x)$ в каждой точке a_j, как множитель, характеризующий разветвление, так и множитель, характеризующий однозначную существенную особенность, при чем произведение этих двух множителей удовлетворяет некоторой системе вида (1) с одной особой точкой a_j на конечном расстоянии. Коэффициенты этих систем дают „характеристические подстановки" матрицы $Y(x)$ в точках a_j $(j=1,\ 2, .., m)$.

Кроме упомянутых прямых задач, автор ставит и обратную задачу — определить систему (1) и ее интегральную матрицу, если заданы точки a_j и „характеристические подстановки" в этих точках. Решение этой задачи, являющейся естественным обобщением известной задачи Римана, дается при предположении, что элементы заданных „характеристических подстановок" близки к нулю.

Наконец, указываются случаи, когда решение задач получается в конечном виде.

Закон десяти третей и классификация соударений в общей задаче трех тел.

А. Марков (младший).

В настоящей работе рассматриваются простые соударения в общей задаче трех тел. При этом предполагается, что общий момент количества движения относительно центра инерции отличен от нуля. В этом случае существует так называемая „неизменяемая плоскость“—плоскость, проходящая через центр инерции и нормальная к вектору общего момента количества движения.

Предметом настоящей работы является исследование движения тела, не участвующего в соударении, а именно выяснение характера изменения расстояния этого тела от неизменяемой плоскости в моменты времени, близкие к моменту соударения.

Основную роль при этом играют некоторые результаты классических исследований Sundman'а *).

§ 1. **Обозначения. Некоторые результаты исследований Sundman'a.** Пусть P_0, P_1, P_2 материальные точки, движущиеся под влиянием взаимного притяжения по закону Newton'a m_0, m_1, m_2 их массы; $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ их декартовы координаты относительно центра инерции; x, y, z координаты точки P_1, относительно P_0; ξ, η, ζ координаты P_2 относительно центра инерции совокупности P_0, P_1; r_0, r_1, r_2 взаимные расстояния $P_1 P_2$, $P_2 P_0$, $P_0 P_1$; t время. Выбирая единицу массы таким образом, чтобы постоянная тяготения равнялась единице и вводя обозначения

$$M = \sum_{j=0}^{2} m_j, \quad \lambda = \frac{m_1}{m_0+m_1}, \quad \mu = \frac{m_0}{m_0+m_1}, \tag{1}$$

*) Acta Soc. Scient. Fennicae, 34, № 6 (1906); 35, № 9 (1909); Acta Math. 36 (1913), p.p. 105—179.

имеем формулы преобразования **Jacobi-Radau**

$$x_0 = -\lambda x - \frac{m_2}{M}\xi, \quad x_1 = \mu x - \frac{m_2}{M}\xi, \quad x_2 = \frac{m_0+m_1}{M}\xi, \ldots *) \tag{2}$$

и систему дифференциальных уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + (m_0+m_1)\frac{x}{r} = X = -m_2 x\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\xi\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right), \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Xi = -M\xi\left(\frac{\lambda}{r_0^3}+\frac{\mu}{r_1^3}\right) + M\lambda\mu x\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right), \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$r = r_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad r_0 = \sqrt{(\xi-\mu x)^2+(\eta-\mu y)^2+(\zeta-\mu z)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{(\xi+\lambda x)^2+(\eta+\lambda y)^2+(\zeta+\lambda z)^2} \; **). \tag{4}$$

Классические интегралы имеют здесь вид

$$\left.\begin{aligned} g(y\dot{z}-z\dot{y})+h(\eta\dot{\zeta}-\zeta\dot{\eta}) &= a, \\ g(z\dot{x}-x\dot{z})+h(\zeta\dot{\xi}-\xi\dot{\zeta}) &= b, \\ g(x\dot{y}-y\dot{x})+h(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}) &= c, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$
$$g(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+h(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2) = 2U-K,$$

где

$$g = \frac{M}{m_2(m_0+m_1)}, \quad h = \frac{m_0+m_1}{m_0 m_1}, \quad U = \sum_{j=0}^{2}\frac{M}{m_j r_j},$$

где точки над буквами означают производные по времени и где a, b, c, K суть постоянные, зависящие от начального состояния движения. В частности a, b, c лишь постоянным множителем отличаются от составляющих общего момента количества движения относительно центра инерции.

Будем рассматривать лишь те движения, которые удовлетворяют условию

$$f = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0. \tag{6}$$

Пусть такое движение регулярно ***) при $t_0 \leqq t < t_1$ $(t_0 < t_1)$ и перестает быть таковым при $t = t_1$. В этом случае, как по-

---

*) Здесь и в дальнейшем многоточие означает уравнения или совокупности уравнений, получающиеся из написанных после одновременных циклических перестановок (x, y, z), (ξ, η, ζ), (X, Y, Z), (Ξ, H, Π), (a, b, c), (α, β, γ).

**) Здесь и в дальнейшем подразумеваются положительные значения квадратных корней.

***) Согласно Sundman'у движение называется регулярным если x_j, y_j, z_j $(j = 0, 1, 2)$ суть голоморфные функции t.

казал Sundman, одно из взаимных расстояний трех „тел" стремится к нулю при стремлении t к t_1, тогда как два других стремятся к общему положительному пределу. Полагая для определенности

$$\lim_{t\to t_1} r_2 = \lim_{t\to t_1} r = 0, \quad \lim_{t\to t_1} r_0 = \lim_{t\to t_1} r_1 = \lim_{t\to t_1} \rho = \rho_1 > 0 \text{ *)}, \tag{7}$$

где

$$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

имеем следующие результаты исследований Sundman'a **):

1°. Существуют конечные пределы величин $x, y, z, r, \xi, \eta, \zeta$, $\rho, \dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta, \dot\rho, \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{z}{r}\right), \sqrt{r}\,\dot r, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ при $t\to t_1$:

$$\lim_{t\to t_1} x = \lim_{t\to t_1} y = \lim_{t\to t_1} z = \lim_{t\to t_1} r = 0; \tag{8}$$

$$\lim_{t\to t_1} \xi = \xi_1, \quad \lim_{t\to t_1} \eta = \eta_1, \quad \lim_{t\to t_1} \zeta = \zeta_1, \quad \lim_{t\to t_1} \rho = \rho_1; \tag{9}$$

$$\lim_{t\to t_1} \dot\xi = \dot\xi_1, \quad \lim_{t\to t_1} \dot\eta = \dot\eta_1, \quad \lim_{t\to t_1} \dot\zeta = \dot\zeta_1, \quad \lim_{t\to t_1} \dot\rho = \dot\rho_1; \tag{10}$$

$$\lim_{t\to t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right) = \lim_{t\to t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right) = \lim_{t\to t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{z}{r}\right) = 0; \tag{11}$$

$$\lim_{t\to t_1} \sqrt{r}\,\dot r = -\sqrt{2(m_0+m_1)}\,; \tag{12}$$

$$\lim_{t\to t_1} \frac{x}{r} = \varphi, \quad \lim_{t\to t_1} \frac{y}{r} = \chi, \quad \lim_{t\to t_1} \frac{z}{r} = \psi, \tag{13}$$

где

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1.$$

2°. Величины $y\dot z - z\dot y, \ldots$ представляются под видом $Nr^2(t_1-t)$ где величины N остаются конечными при $t\to t_1$.

§ 2. **Дальнейшие предельные соотношения.** Координаты движущихся точек относительно центра инерции суть линейные функции $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, согласно формулам (2). Они поэтому также стремятся к конечным пределам при $t\to t_1$. Прямую проходящую через точку с координатами $\lim\limits_{t\to t_1} x_0 = \lim\limits_{t\to t_1} x_1$, $\lim\limits_{t\to t_1} y_0 = \lim\limits_{t\to t_1} y_1$, $\lim\limits_{t\to t_1} z_0 = \lim\limits_{t\to t_1} z_1$, имеющую направляющие косинусы φ, χ, ψ будем называть линией соударения. Угол между

*) Условия простого соударения тел P_0 и P_1 в момент времени t_1.

**) См. напр., Acta Math. t 36, pp. 105—179. В частности pp. 122—126.

линией соударения и неизменяемой осью обозначим через ω. Тогда

$$\cos\omega = \frac{a\varphi + b\chi + c\psi}{f}. \tag{14}$$

Обозначим через V величину скорости точки P_2 относительно центра инерции совокупности P_0, P_1; через V_1, предел V при $t \to t_1$. По определению и формулам (10) имеем:

$$V = \sqrt{\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2}, \qquad V_1 = \sqrt{\dot\xi_1^2 + \dot\eta_1^2 + \dot\zeta_1^2}.$$

Уравнения (5) в пределе дают

$$\eta_1\dot\zeta_1 - \zeta_1\dot\eta_1 = \frac{a}{h}, \quad \zeta_1\dot\xi_1 - \xi_1\dot\zeta_1 = \frac{b}{h}, \quad \xi_1\dot\eta_1 - \eta_1\dot\xi = \frac{c}{h} \tag{15}$$

(см. предложение 2° предыдущего параграфа). Отсюда, принимая во внимание условие (6), усматриваем, что $V_1 > 0$ и что угол между векторами (ξ_1, η_1, ζ_1) и $(\dot\xi_1, \dot\eta_1, \dot\zeta_1)$ не есть целократное π. Обозначая, наконец, через ϑ угол между векторами (x, y, z) и (ξ, η, ζ), через θ угол между (x, y, z) и $(\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta)$ через ϑ_1 и θ_1 их пределы при $t \to t_1$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho}, & \cos\theta &= \frac{x\dot\xi + y\dot\eta + z\dot\zeta}{rV}, \\ \cos\vartheta_1 &= \frac{\varphi\xi_1 + \chi\eta_1 + \psi\zeta_1}{\rho}, & \cos\theta_1 &= \frac{\varphi\dot\xi_1 + \chi\dot\eta_1 + \psi\dot\zeta_1}{V_1}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

убеждаясь при этом в существовании предельных углов ϑ_1 и θ_1

Возьмем производную от $\rho\cos\vartheta$ по времени. Формула (16_1) дает

$$\frac{d}{dt}(\rho\cos\vartheta) = \xi\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right) + \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right) + \zeta\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{x\dot\xi + y\dot\eta + z\dot\zeta}{r},$$

откуда, по формулам (9), (11) и (16_2)

$$\lim_{t\to t_1}\frac{d}{dt}(\rho\cos\vartheta) = V_1\cos\theta_1. \tag{17}$$

Определим порядок малости величины $r_1^2 - r_0^2$ относительно r при $t \to t_1$. По формулам (4), (1) и (16_1) имеем

$$\begin{aligned} r_1^2 - r_0^2 &= 2(\lambda + \mu)(x\xi + y\eta + z\zeta) + (\lambda^2 - \mu^2)(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= 2r\rho\cos\vartheta + \frac{m_1 - m_0}{m_0 + m_1}r^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда

$$\lim_{t\to t_1}\frac{r_1^2 - r_0^2}{r} = 2\rho_1\cos\vartheta_1$$

и следовательно, при $\cos\vartheta_1 \neq 0$, $r_1^2 - r_0^2$ бесконечно малая первого порядка.

При $\cos\vartheta_1 = 0$ правило l'Hospital'я дает:

$$\lim_{t\to t_1} \frac{\rho\cos\vartheta}{r^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to t_1} \frac{2}{3} \frac{\frac{d}{dt}(\rho\cos\vartheta)}{\sqrt{r}\,\dot{r}}.$$

В силу равенств (12) и (17) правая часть существует, и мы имеем:

$$\lim_{t\to t_1} \frac{\rho\cos\vartheta}{r^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{V_1\cos\theta_1}{\sqrt{m_0+m_1}}.$$

Отсюда и из равенства (18) заключаем, что

$$\lim_{t\to t_1} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r^2} = \frac{m_1 - m_0}{m_0 + m_1} \qquad \text{при } \cos\vartheta_1 = 0$$

$$\lim_{t\to t_1} \frac{r_1^2 - r_0^2}{r^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3} \frac{V_1\cos\theta_1}{\sqrt{m}} \qquad \text{при } \cos\vartheta_1 = 0 \text{ и } m_0 = m_1 = m.$$

Таким образом порядок величины $r_1^2 - r_0^2$ относительно r равен 2 при $\cos\vartheta_1 = 0$ и $m_0 \neq m_1$; $\frac{5}{2}$ при $\cos\vartheta_1 = 0$, $m_0 = m_1$ и $\cos\theta_1 \neq 0$.

Переходя к рассмотрению величины $\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}$, фугурирующей в правых частях уравнений (3), имеем тождество

$$\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} = \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0 + r_1} \frac{r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2}{r_0^3 r_1^3}.$$

Но согласно условиям (7)

$$\lim_{t\to t_1} \frac{r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2}{(r_0 + r_1) r_0^3 r_1^3} = \frac{3}{2\rho_1^5}.$$

Мы можем поэтому утверждать на основании предыдущего, что

$$\lim_{t\to t_1} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = \frac{3\cos\vartheta_1}{\rho_1^4} \qquad \text{во всех случаях,} \tag{19}$$

$$\lim_{t\to t_1} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = \frac{3}{2} \frac{m_1 - m_0}{m_0 + m_1} \frac{1}{\rho_1^5} \qquad \text{при } \cos\vartheta_1 = 0, \tag{20}$$

$$\lim_{t\to t_1} \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{V_1\cos\theta_1}{\rho_1^5} \qquad \text{при } \cos\vartheta_1 = 0 \tag{21}$$

и $m_0 = m_1 = m$.

Величина $\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}$ бесконечно малая 1-го порядка при $\cos\vartheta_1\neq 0$; 2-го порядка при $\cos\vartheta_1=0$, $m_0\neq m_1$; порядка $\frac{5}{2}$ при $\cos\vartheta_1=0$, $m_0=m_1$, $\cos\theta_1\neq 0$.

§ 3. **Закон десяти третей.** Будем называть величины

$$s_j=\frac{ax_j+by_j+cz_j}{f}\qquad (j=0,1,2)\tag{22}$$

высотами точек P_j. $|s_j|$ очевидно есть расстояние точки P_j от неизменяемой плоскости. Знак же s_j зависит от того, по какую сторону неизменяемой плоскости находится точка P_j.

Полагая, кроме того,

$$s=\frac{ax+by+cz}{f},\qquad \sigma=\frac{a\xi+b\eta+c\zeta}{f},\tag{23}$$

имеем согласно формулам (2)

$$s_0=-\lambda s-\frac{m_2}{M}\sigma,\quad s_1=\mu s-\frac{m_2}{M}\sigma,\quad s_2=\frac{m_0+m_1}{M}\sigma.\tag{24}$$

Умножая далее уравнения (5) соответственно на $\frac{\xi}{f}$, $\frac{\eta}{f}$, $\frac{\zeta}{f}$ и складывая, получаем:

$$\sigma=\frac{g}{f}\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix},\tag{25}$$

что согласно предложениям 1° и 2° § 1 представляется под видом

$$\sigma=Nr^2(t_1-t),$$

где N остается конечным при $t\to t_1$. Отсюда

$$\lim_{t\to t_1}\frac{\sigma}{r^2}=0\tag{26}$$

и a fortiori

$$\lim_{t\to t_1}\sigma=0.$$

А так как формулы (8) и (23) дают с другой стороны

$$\lim_{t\to t_1}s=0,$$

то в силу формул (24)

$$\lim_{t\to t_1}s_j=0\quad (j=0,1,2).$$

Мы доказали таким образом теорему Chazy: в задаче трех тел всякое простое соударение происходит в неизменяемой плоскости *).

Определим теперь порядок бесконечно малой величины σ относительно r при $t \to t_1$. Задача заключается в нахождении такого числа n, при котором

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\sigma}{r^n}$$

существует и отличен от нуля. Но по правилу l'Hospital'я

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\sigma}{r^n} = \lim_{t \to t_1} \frac{\dot{\sigma}}{nr^{n-\frac{3}{2}} \sqrt{r}\,\dot{r}}, \tag{27}$$

если последний предел существует. А в силу предельного соотношения (12)

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\dot{\sigma}}{nr^{n-\frac{3}{2}} \sqrt{r}\,\dot{r}} = \lim_{t \to t_1} \left\{ - \frac{\dot{\sigma}}{n\sqrt{2(m_0+m_1)}\, r^{n-\frac{3}{2}}} \right\}. \tag{28}$$

Но по формулам (23) и (5)

$$\dot{\sigma} = \frac{g}{f} \begin{vmatrix} \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix},$$

откуда, аналогично предыдущему,

$$\lim_{t \to t_1} \sigma = 0.$$

Таким образом при $h > \frac{3}{2}$ числитель и знаменатель выражения в скобках в правой части формулы (28) стремятся к нулю при $t \to t_1$. Применяя вторично правило l'Hospital'я, получаем равенство:

$$\lim_{t \to t_1} \left\{ - \frac{\dot{\sigma}}{n\sqrt{2(m_0+m_1)}\, r^{n-\frac{3}{2}}} \right\} =$$

$$= \lim_{t \to t_1} \left\{ - \frac{\frac{d^2\sigma}{dt^2}}{n\left(n-\frac{3}{2}\right)\sqrt{2(m_0+m_1)}\, r^{n-3}\sqrt{r}\,\dot{r}} \right\}, \tag{29}$$

*) CR 169, (1919) p. 81; Ann. de l'École Norm. Sup., 3 ser. t 39, № 4, p. 127 (1922).

справедливое при существовании его правой части и $n > \frac{3}{2}$. Формулы (3) и (23) дают с другой стороны:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -M\sigma\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + M\lambda\mu\, s\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right).$$

Предположив поэтому, что

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\sigma}{r^{n-3}} = 0, \tag{30}$$

имеем в силу соотношения (12) и условий (7):

$$\lim_{t \to t_1} \left\{ \frac{\frac{d^2\sigma}{dt^2}}{n\left(n - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2(m_0+m_1)}\, r^{n-3}\sqrt{r}\,\dot{r}} \right\} =$$

$$= \lim_{t \to t_1} \left\{ \frac{M\lambda\mu}{n\left(n - \frac{3}{2}\right) 2(m_0+m_1)} \frac{s}{r^{n-3}} \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \right\}. \tag{31}$$

Это равенство справедливо, если его правая часть существует. Но в силу формул (23), (13) и (14)

$$\lim_{t \to t_1} \frac{s}{r} = \cos\omega.$$

Таким образом, на основании формул (27), (28), (29), (31), (1) можно утверждать, что равенство

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\sigma}{r^n} = \frac{M m_0 m_1 \cos\omega}{n(2n-3)(m_0+m_1)^2} \lim_{t \to t_1} \frac{1}{r^{n-4}} \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \tag{32}$$

справедливо, если его правая часть имеет смысл, $n > \frac{3}{2}$ и условие (30) соблюдено.

При $n = 5$ условие (30) совпадает с доказанным равенством (26). Формулы (32) и (14) дают поэтому

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\sigma}{r^5} = \frac{3}{35} \frac{M m_0 m_1}{(m_0+m_1)^3} \frac{\cos\omega\cos\vartheta}{\rho_1^4}. \tag{33}$$

Отсюда усматриваем, что при $\cos\omega \neq 0$ и $\cos\vartheta_1 \neq 0$ величина σ бесконечно малая 5-го порядка относительно r.

При $\cos\vartheta_1 = 0$, формула (33) дает

$$\lim_{t \to t_1} \frac{\sigma}{r^5} = 0$$

и условие (30) оказывается соблюденным при $n=6$ и при $n=\frac{13}{2}$. Из формул (32), (20), (21) заключаем, что

$$\lim_{t\to t_1}\frac{\sigma}{r^6}=\frac{1}{36}\,\frac{Mm_0m_1(m_1-m_0)}{(m_0+m_1)^4}\,\frac{\cos\omega}{\rho^5}\quad \text{при } \cos\vartheta_1=0 \tag{34}$$

$$\lim_{t\to t_1}\frac{\sigma}{r^{\frac{13}{2}}}=-\frac{1}{520}\,\frac{M}{m^{\frac{3}{2}}}\,\frac{V_1\cos\omega\cos\theta_1}{\rho_1^5} \tag{35}$$

при $\cos\vartheta_1=0$ и $m_0=m_1=m$.

Таким образом порядок бесконечно малой величины σ равен 6 при $\cos\omega\neq0$, $\cos\vartheta_1=0$, $m_0\neq m_1$; $\frac{13}{2}$ при $\cos\omega\neq0$, $\cos\vartheta_1=0$, $m_0=m_1$, $\cos\theta_1\neq0$.

Чтобы узнать порядок σ и пропорциональной ей s_2 относительно t_1-t применим правило l'Hospital'я к отношению $\frac{r^{\frac{3}{2}}}{t_1-t}$. В силу равенства (12) имеем:

$$\lim_{t\to t_1}\frac{r^{\frac{3}{2}}}{t_1-t}=-\frac{3}{2}\lim_{t\to t_1}\sqrt{r}\,\dot r=3\sqrt{\frac{m_0+m_1}{2}},$$

откуда

$$\lim_{t\to t_1}\frac{r}{(t_1-t)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{9}{2}(m_0+m_1)}. \tag{36}$$

Это известный закон двух третей: при простом соударении в задаче трех тел расстояние между сталкивающимися телами стремится к нулю, как $(t_1-t)^{\frac{2}{3}}$, где t время, t_1 момент соударения.

Из формул (24), (33), (34), (35), (36) заключаем, что

$$\lim_{t\to t_1}\frac{s_2}{(t_1-t)^{\frac{10}{3}}}=\frac{81}{140}\,6^{\frac{1}{3}}\,\frac{m_0m_1}{(m_0+m_1)^{\frac{1}{3}}}\,\frac{\cos\omega\cos\vartheta_1}{\rho_1^4} \tag{37}$$

во всех случаях

$$\lim_{t\to t_1}\frac{s_2}{(t_1-t)^4}=\frac{9}{16}\,\frac{m_0m_1(m_1-m_0)}{m_0+m_1}\,\frac{\cos\omega}{\rho_1^5}\quad \text{при } \cos\vartheta_1=0 \tag{38}$$

$$\lim_{t\to t_1}\frac{s_2}{(t_1-t)^{\frac{13}{3}}}=-\frac{81}{260}\,3^{\frac{1}{3}}\,m^{\frac{5}{3}}\,\frac{V_1\cos\omega\cos\theta_1}{\rho_1^5} \tag{39}$$

при $\cos\vartheta_1=0$ и $m_0=m_1=m$

Будем говорить, что соударение пространственное, если $\cos\omega \neq 0$; что оно плоское, если $\cos\omega = 0$. При плоском соударении линия соударения лежит в неизменяемой плоскости; при пространственном не лежит. Будем называть пространственное соударение анортогональным, если $\cos\vartheta_1 \neq 0$: ортогональным, если $\cos\vartheta_1 = 0$. Ортогональное соударение будем называть неравнобедренным при $m_0 \neq m_1$; равнобедренным при $m_0 = m_1$. Равнобедренное соударение будем называть асимметричным при $\cos\theta_1 \neq 0$; симметричным при $\cos\theta_1 = 0$.

Все эти виды соударений, кроме пространственного анортогонального можно рассматривать, как исключительные случаи. В их определениях содержится, по крайней мере, одно равенство (либо $\cos\omega = 0$, либо $\cos\vartheta_1 = 0$) и лишь простран-странственное анортогональное соударение определяется двумя неравенствами ($\cos\omega \neq 0$, $\cos\vartheta_1 \neq 0$). Нижеследующий закон десяти третей относится к этому общему типу соударений.

Если в задаче трех тел в момент времени t происходит пространственное анортогональное соударение двух тел, то при приближении времени t к t_1 высота третьего тела стремится к нулю, как $(t_1 - t)^{\frac{10}{3}}$ *).

Количественно это выражается формулой (37).

Порядок s_2 относительно $t_1 - t$ равен 4 при ортогональном неравнобедренном соударении (см. формулу (38)); $\frac{13}{3}$ при равнобедренном асимметричном соударении (см. формулу (39)). Остаются два случая, которым посвящены §§ 5, 6—соударения плоское ($\cos\omega = 0$) и симметричное ($\cos\omega \neq 0$, $\cos\vartheta_1 = 0$, $m_0 = m_1$, $\cos\theta_1 = 0$). § 4 играет вспомогатнльную роль.

§ 4. **Регуляризация простого соударения по способу Sundman'a.** Введем вспомогательную переменную Sundman'a:

$$u = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} \text{ **)}.$$

*) Намек на закон десяти третей имеется в работе J. Chazy „Sur l'allure du mouvement dans le probleme des trois corps“ Ann. de l'Ecole Norm. Sup. ser 3, t 39, № 4, p. 128 (1922). Chazy доказывает, что порядок s_2 относительно $t_1 - t$ не ниже $\frac{10}{3}$.

**) Acta Math. 36, p. 127.

Эта величина возрастающая функция времени в промежутке $[t_0, t_1]$. Она стремится к конечному пределу u_1 при $t \to t_1$ *). Обратно: время есть возрастающая функция u в промежутке $[0, u_1]$, изменяясь от t_0 до t_1 когда u возрастает от нуля до u_1. Принимая u за новую независимую переменную, будем рассматривать $x, y, z, r, \xi, \eta, \zeta, t$, как функции u. Вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} x' = r\dot{x}, \quad \alpha = \frac{\dot{r}'}{\dot{r}} x' - \frac{(m_0+m_1)\,x}{r}, \ldots \\ r' = r\dot{r}, \ L = xX + yY + zZ + \\ + 2m_2(m_0 + m_1)\left(\frac{1}{m_0 r_0} + \frac{1}{m_1 r_1}\right) - \frac{h}{g}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \frac{}{g}, \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

имеем систему восемнадцати дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{du} = x', \ \frac{dx'}{du} = \alpha + r^2 X, \ \frac{d\alpha}{du} = Xrr' + Lx', \ \frac{d\xi}{du} = r\dot{\xi}, \ \frac{d\dot{\xi}}{du} = r\Xi, \ldots \\ \frac{dr}{du} = r', \ \frac{dr'}{du} = m_0 + m_1 + rL, \quad \frac{dt}{du} = r \ ^{**}) \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Восемнадцать неизвестных: $x, y, z, x', y', z', \alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, r, r', t$, оказываются голоморфными функциями u при $u = u_1$ ***), причем

$$\lim_{u \to u_1} x' = \lim_{u \to u_1} y' = \lim_{u \to u_1} z' = \lim_{u \to u_1} r' = 0 \ ^{****}), \quad (42)$$

$$\lim_{u \to u_1} \alpha = \varphi(m_0 + m_1), \quad \lim_{u \to u_1} \beta = \chi(m_0 + m_1) \quad \lim_{u \to u_1} \gamma = \psi(m_0 + m_1) \ ^{*****}). \quad (43)$$

§ 5. **Плоское соударение.** Помножим первую строку уравнений (41) на $\frac{a}{f}$; две следующих (подразумеваемых) на $\frac{b}{f}$ и на $\frac{c}{f}$. Складывая соответстенные уравнения, получим, принимая во внимание формулы (3):

---

*) ibid p. 132.

**) ibid. pp. 128, 129.

***) ibid. p. 139.

****) ibid. p. 134.

*****) ibid. p. 135.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{ds}{du}=s',\\
&\frac{ds'}{du}=\delta-m_2r^2\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right)s+m_2r^2\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\sigma,\\
&\frac{d\delta}{du}=-m_2rr'\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right)s+m_2rr'\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\sigma+Ls',\\
&\frac{d\sigma}{du}=r\dot{\sigma},\\
&\frac{d\dot{\sigma}}{du}=-Mr\left(\frac{\lambda}{r_0^3}+\frac{\mu}{r_1^3}\right)\sigma+M\lambda\mu r\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)s,
\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

где

$$s'=r\dot{s}=\frac{ax'+by'+cz'}{f},\qquad \delta=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{f}.\tag{45}$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно 5 неизвестных: s, s', δ, σ, $\dot{\sigma}$. Для этого надо выразить коэффициенты

$$-m_2r^2\left(\frac{\mu}{r_0^3}+\frac{\lambda}{r_1^3}\right),\quad m_2r^2\left(\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_1^3}\right),\ldots$$

при s, $\sigma,\ldots$ в правых частях уравнений (44) через независимую переменную u. Но коэффициенты эти голоморфные функции переменных системы (41) при $u=u_1$, каковые голоморфны относительно u. Таким образом величины s, s', δ, σ, $\dot{\sigma}$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений с голоморфными (при $u=u_1$) относительно независимой переменной коэффициентами. По теореме Cauchy такая система однозначно определяет s, s', δ, σ, $\dot{\sigma}$, если заданы пределы этих величин при $u\to u_1$.

Но по формулам (45), (43), (14)

$$\lim_{u\to u_1}\delta=(m_0+m_1)\cos\omega,$$

что обращается в нуль при плоском соударении; по доказанному в § 3

$$\lim_{u\to u_1}s=\lim_{u\to u_1}\sigma=\lim_{u\to u_1}\dot{\sigma}=0;$$

наконец из формул (45) и (42) следует, что

$$\lim_{u\to u_1}s'=0.$$

Этим предельным значениям соответствует очевидное решение системы (44):

$$s\equiv s'\equiv\delta\equiv\sigma\equiv\dot{\sigma}\equiv0\qquad(0\leqq u\leqq u_1)$$

какова бы ни была (голоморфная) зависимость коэффициентов от u. И это решение единственное. Отсюда по формулам (24)

$$s_j \equiv 0 \qquad (j=0,1,2) \qquad (t_0 \leqq t < t_1). \tag{46}$$

Эти тождества доказаны нами для промежутка $t_0 \leqq t < t_1$. Очевидно, однако, что они справедливы при всех значениях t, если условиться аналитически продолжать движение после каждого соударения по способу Sundman'a*).

Мы доказали таким образом, что в задаче трех тел плоское соударение возможно только при плоском движении. В этом случае высоты трех тел тождественно равны нулю.

§ 6. **Симметричное соударение.** Полагая $m_0=m_1=m$, имеем по формуле (18):

$$r_1^2-r_0^2=2(x\xi+y\eta+z\zeta).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} X&=-\frac{m_2}{2}Bx+2m_2A(x\xi+y\eta+z\zeta)\xi,\\ \Xi&=-\frac{M}{2}B\xi+\frac{M}{2}A(x\xi+y\eta+z\zeta)x,\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где

$$A=\frac{r_0^2+r_0r_1+r_1^2}{r_0^3r_1^3}, \qquad B=\frac{1}{r_0^3}+\frac{1}{r_1^3}. \tag{48}$$

С другой стороны равенства (40) дают:

$$x=\frac{r'x'-r\alpha}{2m}, \qquad y=\frac{r'y'-r\beta}{2m}, \qquad z=\frac{r'z'-r\gamma}{2m};$$

$$x\xi+y\eta+z\zeta=\frac{r'w_3-rw_1}{2m}, \quad x\dot\xi+y\dot\eta+z\dot\zeta=\frac{r'w_4-rw_2}{2m}, \tag{49}$$

где

$$\left.\begin{aligned} w_1&=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta, & w_2&=\alpha\dot\xi+\beta\dot\eta+\gamma\dot\zeta,\\ w_3&=x'\xi+y'\eta+z'\zeta & w_4&=x'\dot\xi+y'\dot\eta+z'\dot\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

С помощью формул (49) равенства:

$$X\xi+Y\eta+Z\zeta=\frac{m_2}{m}\left(A\rho^2-\frac{B}{4}\right)(-rw_1+r'w_3),$$

$$X\dot\xi+Y\dot\eta+Z\dot\zeta=\frac{m_2}{m}A(\xi\dot\xi+\eta\dot\eta+\xi\dot\xi)(-rw_1+r'w_3)-$$

$$-\frac{m_2}{4m}B(-rw_2+r'w_4),$$

---

*) ibid. pp. 141, 151.

$$\alpha\Xi+\beta H+\gamma\Pi=-\frac{M}{2}Bw_1+$$
$$+\frac{M}{4m}A(r'^2-2mr)\ (-rw_1+r'w_3),$$
$$x'\Xi+y'H+z'\Pi=-\frac{M}{2}Bw_3+\frac{M}{4m}Arr'(-rw_1+r'w_3)$$

проверяются подстановкой вместо X, Y, Z, Ξ, H, Π правых частей формул (47). Эти равенства и уравнения (41) дают:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dw_1}{du}&=-\frac{m_2}{m}Cr^2r'w_1+rw_2+\left(\frac{m_2}{m}Crr'^2+L\right)w_3,\\
\frac{dw_2}{du}&=-\left[\frac{Ar^2}{m}\left(Dr'-\frac{Mm}{2}r\right)+\frac{M}{2}Br\right]w_1+\\
&\quad+\frac{m_2}{4m}Br^2r'w_2+\frac{Arr'}{m}\left(Dr'-\frac{Mm}{2}r\right)w_3+\\
&\qquad+\left(-\frac{m_2}{4m}Brr'^2+L\right)w_4,\\
\frac{dw_3}{du}&=\left(1-\frac{m_2}{m}Cr^3\right)w_1+\frac{m_2}{m}Cr^2r'w_3+rw_4\\
\frac{dw_4}{du}&=-\frac{ADr^3}{m}w_1+\left(1+\frac{m_2}{4m}Br^3\right)w_2+\\
&\quad+\left(\frac{ADr^2r'}{m}-\frac{M}{2}Br\right)w_3-\frac{m_2}{4m}Br^2r'w_4,
\end{aligned}\right|$$

где

$$C=A\rho^2-\frac{B}{4},\qquad D=\frac{M}{4}r'+m_2(\xi\dot{\xi}+\eta\dot{\eta}+\zeta\dot{\zeta}).\tag{52}$$

Коэффициенты при w_j $(j=1,2,3,4)$ в уравнениях (51) суть голоморфные функции переменных системы (41) [см. формулы (40), (48), (52)], каковые голоморфны в u. Таким образом, аналогично предыдущему случаю, величины w_j удовлетворяют системе четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка с голоморфными коэффициентами. Пределы w_j при $u\to u_1$ однозначно определяют решение в промежутке $[0,\ u_1]$.

Но по формулам (50), (43), (9), (10), (16)

$$\lim_{u\to u_1}w_1=2m(\varphi\xi_1+\chi\eta_1+\psi\zeta_1)=2m\rho_1\cos\vartheta_1$$
$$\lim_{u\to u_1}w_2=2m(\varphi\dot{\xi}_1+\chi\dot{\eta}_1+\psi\dot{\zeta}_1)=2mV_1\cos\theta_1,$$

каковые величины обращаются в нуль при симметричном соударении; по формулам (50), (9), (10), (42)

$$\lim_{u\to u_1}w_3=\lim_{u\to u_1}w_4=0.$$

Таким образом

$$\lim_{u\to u_1} w_j = 0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

и потому во всем промежутке $[0,\ u_1]$

$$w_j \equiv 0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{53}$$

или, что то же самое,

$$\left.\begin{aligned} \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta\equiv 0, \quad \alpha\dot{\xi}+\beta\dot{\eta}+\gamma\dot{\zeta}\equiv 0, \\ x'\xi+y'\eta+z'\zeta\equiv 0, \quad x'\dot{\xi}+y'\dot{\eta}+z'\dot{\zeta}\equiv 0 \end{aligned}\right\} (0 \leqq u \leqq u_1). \tag{54}$$

Но в силу равенств (15) и условия (6) определители второго порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{Vmatrix}$$

не стремятся одновременно к нулю при $u \to u_1$. А так как эти определители аналитические функции u в закрытом промежутке $[0,\ u_1]$, то одновременное их исчезновение возможно лишь в конечном числе точек этого промежутка. Во всех остальных точках промежутка $[0,\ u_1]$ равенства (54) дают

$$\alpha=c_1(\eta\dot{\zeta}-\zeta\dot{\eta}), \quad \beta=c_1(\zeta\dot{\xi}-\xi\dot{\zeta}), \quad \gamma=c_1(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}),$$
$$x'=c_2(\eta\dot{\zeta}-\zeta\dot{\eta}), \quad y'=c_2(\zeta\dot{\xi}-\xi\dot{\zeta}), \quad z'=c_2(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}),$$

где c_1 и c_2 конечные величины. Таким образом равенства

$$\beta z'-\gamma y'=0, \quad \gamma x'-\alpha z'=0, \quad \alpha y'-\beta x'=0$$

могут нарушаться лишь в изолированных точках промежутка $[0,\ u_1]$. А так как левые части этих равенств непрерывные функции u, то

$$\beta z'-\gamma y'\equiv 0, \quad \gamma x'-\alpha z'\equiv 0, \quad \alpha y'-\beta x'\equiv 0$$

во всем промежутке $[0,\ u_1]$.

Отсюда по формулам (40), (5), (49), (53), (23), (24)

$$y\dot{z}-z\dot{y}\equiv 0, \dots; \quad a\equiv h(\eta\dot{\zeta}-\zeta\dot{\eta}), \dots;$$
$$bz-cy\equiv h\left[z(\zeta\dot{\xi}-\xi\dot{\zeta})-y(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})\right]\equiv h\left[\dot{\xi}(x\xi+y\eta+z\zeta)-\right.$$
$$\left.-\xi(x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta})\right]\equiv 0, \dots; \tag{55}$$
$$\sigma\equiv s_2\equiv 0; \tag{56}$$
$$s_0+s_1\equiv 0. \tag{57}$$

Все эти тождества относятся к промежутку $t_0 \leqq t < t_1$. Они показывают, что в этом промежутке: 1) тело P_2, не участвующее в соударении, находится в неизменяемой плоскости [форм. (56)]; 2) тела P_0 и P_1 с одинаковыми массами симметричны относительно неизменяемой плоскости [форм. (55) и (57)].

Продолжение движения по способу Sundman'а дает возможность распространить аналитические соотношения (55), (56), (57) на бесконечный промежуток времени. Мы имеем таким образом утверждение:

Если в момент t_1 происходит симметричное соударение тел P_0 и P_1, то 1) тело P_2 всё время остается в неизменяемой плоскости; 2) тела равных масс P_0 и P_1 все время симметричны друг другу относительно неизменяемой плоскости.

§ 7. **Сводка результатов** может быть представлена следующей таблицей:

Классификация соударений				Пор. s относ. $t_1 - t$	Первый член разложения s по степеням $(t-t_1)^{\frac{1}{3}}$
Пространственное соударение $\cos\omega \neq 0$	Анортогональное $\cos\vartheta_1 \neq 0$			$\frac{10}{3}$	$\frac{81}{140}\, 6^{\frac{1}{3}} \frac{m_0 m_1}{(m_0+m_1)^{\frac{1}{3}}} \frac{\cos\omega\cos\vartheta_1}{\rho_1^4} (t-t_1)^{\frac{10}{3}}$
	Ортогональное $\cos\vartheta_1 = 0$	Неравнобедр. $m_0 \neq m_1$		4	$\frac{9}{16} \frac{m_0 m_1 (m_1 - m_0)}{m_0+m_1} \frac{\cos\omega}{\rho_1^5} (t-t_1)^4$
		Равнобедр. $m_0 = m_1$	Асим. $\cos\theta_1 \neq 0$	$\frac{13}{3}$	$\frac{81}{260}\, 3^{\frac{1}{3}} m^{\frac{5}{3}} \frac{V_1 \cos\omega\cos\theta_1}{\rho_1^5} (t-t_1)^{\frac{13}{3}}$
			Симметр $\cos\theta_1 = 0$	∞	$s_2 \equiv 0$
Плоское соударение $\cos\omega = 0$				∞	$s_2 \equiv 0$

Последний столбец этой таблицы получается на основании формул (37), (38), (39), (46), (56) и теоремы Weierstrass'а—Sundman'а*):

*) ibid p. 140; Acta Math. 35 p. 57.

Если в задаче трех тел t_1 момент простого соударения, то слева от t_1 координаты трех тел разлагаются в степенные ряды по целым положительным степеням $(t-t_1)^{\frac{1}{3}}$.

Наша таблица исчерпывает все случаи.

The law of ten thirds and the classification of collisions in the general problem of three bodies.

A. Markoff (jun.).

Simple collisions in the general problem of three bodies are considered. Studying the variation of the distance s_2 of the body not partaking at the collision from the invariable plane *), I establish that in general s_2 tends to zero like $(t_1-t)^{\frac{10}{3}}$ as the time variable t tends to the time of collision t_1 **). Exceptionally the order of s_2 relatively to t_1-t may be equal to 4 or to $\frac{13}{3}$. Finally in two cases s_2 is identically zero. Namely:

1° in the case of a symmetric collision, when the colliding masses are equal and the line of collision is normal to the inva riable plane.

2° in the case of a plane collision, when the line of collision lies upon the invariable plane.

In the case 1° the three bodies form an isosceles triangle symmetric with reference to the invariable plane throughout the motion. In the case 2° the motion is plane.

As for the three other cases, when s_2 is not identically zero formulae are given expressing $\lim\limits_{t\to t_1} s_2(t_1-t)^{-\frac{10}{3}}$, $\lim\limits_{t\to t_1} s_2(t_1-t)^{-4}$, $\lim\limits_{t\to t_1} s_2(t_1-t)^{-\frac{13}{3}}$ respectively in terms of intrinsic characteristics of the collision.

The classification of simple collisions here given is complete.

---

*) The total angular momentum vector with reference to the center of gravity of the system is supposed to be different from the zero vector.

**) An indication on this „law of ten thirds" can be found in the paper of J. Chazy „Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps" Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup., 39 (1922), p. 128. Chazy establishes that the order of s_2 relatively to t_1-t is not less than $\frac{10}{3}$.

Ueber einen neuen Beweis eines Satzes von Gauss-Jacobi.

W. Kretzschmer.

Ist p eine Primzahl von der Form $8n+1$ und

$$p = x^2 + 2y^2$$
$$p = \alpha^2 + \beta^2$$

wobei β eine gerade Zahl ist, so ist, wenn

$$x \equiv \pm 1 \pmod 8 \qquad \text{ist, } \beta \equiv 0 \pmod 8$$

ist dagegen

$$x \equiv \pm 3 \pmod 8, \text{ so ist } \beta \equiv 4 \pmod 8.$$

Dieser Satz ist zuerst von Gauss *) durch Vergleich zweier verschiedener Kriterien für den biquadratichen Character der Zahl 2 und später von Jacobi **) neben anderen analogen Sätzen durch Vergleich von Reihenentwicklungen zweier von den Verhältnissen der Perioden elliptischer Funktionen abhängenden Ausdrücke bewiesen worden.

Der vorliegende Artikel hat den Zweck einen Beweis sowohl des oben erwähnten Satzes, als auch gleichzeitig einiger anderer ihm ähnlicher Sätze auf einem Wege zu geben, der, wie es uns scheint, näher das Wesen der betreffenden Frage aufklärt.

Wir betrachten den biquadratischen Körper, welcher durch Hinzufügen der Primitivwurzel θ der Gleichung

$$x^8 = 1$$

zu dem Gebiet der rationalen Zahlen entsteht.

Die Hauptbasis dieses Körpers wird dann, bekanntlich:

$$1,\ \theta,\ \theta^2,\ \theta^3$$

---

*) C. F. Gauss. Theoria residuorum biquadraticorum.

**) Jacobi. Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind. Werke Bd. 2.

und die Diskriminante

$$D=4^4.$$

Es ist leicht zu bestätigen, dass die Anzahl der Idealklassen dieses Körpers gleich 1 ist *) und folglich dass jede Primzahl der Form $8\,n+1$ als Norm einer ganzen Zahl dieses Körpers dargesfellt werden kann.

Es sei:

$$p=N\ (a+b\theta+c\theta^2+d\theta^3).$$

Die zu θ konjugierten Zahlen θ_1, θ_2, θ_3 sind Wurzeln der Gleichung

$$x^4+1=0.$$

Es ist:

$$(1)\quad p=(a+b\theta+c\theta^2+d\theta^3)\ (a+b\theta_1+c\theta_1^2+d\theta_1^3)\ (a+b\theta_2+c\theta_2^2+d\theta_2^3)\ (a+b\theta_3+c\theta_3^2+d\theta_3^3)$$

wo

$$\theta=e^{\frac{\pi i}{4}},\ \theta_1=e^{\frac{3\pi i}{4}},\ \theta_2=e^{\frac{5\pi i}{4}},\ \theta_3=e^{\frac{7\pi i}{4}}\ \text{ist.}$$

Durch Kombinationen des ersten Faktors mit dem zweiten erhalten wir:

$$p=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+2\,(ab-bc+dc+ad)^2$$

durch Kombinationen des ersten Faktors mit dem dritten dagegen:

$$p=(a^2-c^2+2bd)^2+(d^2-b^2+2ac)^2$$

folglich:

$$y=\pm(ab-bc+dc+ad)$$
$$x=\pm(a^2-b^2+c^2-d^2).$$

Ferner ist $\pm\beta$ gleich der geraden unter den beiden Zahlen:

$$a^2-c^2+2bd$$

und

$$d^2-b^2+2ac.$$

Es ist leicht zu sehen, dass entweder drei der Zahlen a, b, c, d, gerade und eine ungerade ist, oder dass eine gerade und die drei übrigen ungerade sind.

Nehmen wir an: $b\equiv c\equiv d\equiv 0$ (mod. 2), $a\equiv 1$ (mod. 2) so wird:

$$\beta\equiv 0\ (\text{mod}\ 4)\qquad x\equiv\pm 1\ (\text{mod}\ 4).$$

---

*) D. Hilbert. Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Seite 50

Es sei $x \equiv \pm 1 \pmod 8$; dann ist $\beta \equiv 0 \pmod 8$, denn auf Grund unserer Aufnahmen ist:

$$a^2+c^2+2ac-2b^2 \equiv 1 \pmod 8$$
$$a^2-b^2+c^2-d^2 \equiv 1 \pmod 8 \text{ und folglich}$$
$$d^2-b^2+2ac \equiv \pm\beta \equiv 0 \pmod 8.$$

Im Falle

$$x \equiv \pm 3 \pmod 8, \quad \text{ist}$$
$$a^2+c^2+2ac-2b^2 \equiv 1 \pmod 8$$
$$a^2-b^2+c^2-d^2 \equiv -3 \pmod 8$$
$$2ac-b^2+d^2 \equiv 4 \pmod 8,$$

so dass

$$\pm\beta \equiv 4 \pmod 8.$$

Der Satz für den Fall $b \equiv c \equiv d \equiv 0 \pmod 2$, $a \equiv 1 \pmod 2$ ist also bewiesen. Ahnlich werden auch die übrigen Fälle erledigt, wo von den Za len a, b, c, d drei gerade sind und eine ungerade ist.

Wir betrachten jetzt den Fall dass drei von den Zahlen a, b, c, d ungerade, eine dagegen gerade ist.

Es sei:

$$b \equiv d \equiv c \equiv 1 \pmod 2, \quad a \equiv 0 \pmod 2.$$

Dann ist

$$a^2+c^2+2ac-2b^2 \equiv -1 \pmod 8.$$

Nehmen wir an

$$x \equiv \pm 1 \pmod 8,$$

so ist

$$a^2-b^2+c^2-d^2 \equiv -1 \pmod 8,$$

woraus

$$2ac-b^2+d^2 \equiv 0 \pmod 8,$$

und endlich

$$\beta \equiv 0 \pmod 8$$

folgt.

Ist dagegen

$$x \equiv \pm 3 \pmod 8$$

so folgt

$$a^2-b^2+c^2-d^2 \equiv 3 \pmod 8$$

und

$$\beta \equiv 4 \pmod 8.$$

Durch Diskussionen der übrigen Fälle, wo von den Zahlen a, b, c, d drei ungerade sind und eine gerade ist, gewinnen wir einen vollständigen Beweis des Satzes von Gauss-Jacobi.

Durch Kombination des ersten Faktors mit dem vierten in der Gleichung (1) erhalten wir ferner eine Darstellung der Primzahl p durch die unbestimmte Form x^2-2y^2:

$$p=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2\,(ab-ad+bc+dc)^2. \tag{2}$$

Es giebt, bekanntlich, unendlich viele Darstellungsmôglichkeiten der Zahl p durch die Form x^2-2y^2; wir beschränken uns auf diejenigen bei denen $x>0$ ist.

Betrachten wir die Gleichung

$$X^2-2\,Y^2=1.$$

Die kleinste positive Lösung dieser Gleichung ist $X_0=3$, $Y_0=2$ und alle übrigen Lösungen werden durch die Gleichung

$$X-Y\sqrt{2}=\pm(3-2\sqrt{2})^n$$

gegeben.

Wir beschränken uns auf die positiven Lösungen.

Es ist

$$X\equiv 1 \text{ oder } 3 \pmod 8,\quad Y\equiv 0 \pmod 2.$$

Wenn x_0, y_0 eine Lösung der Gleichung

$$x^2-2y^2=p,\ (x_0>0)$$

bilden, so werden alle übrigen Lösungen dieser Gleichung $(x>0)$ sau der Formel

$$x-y\sqrt{2}=(x_0-y_0\sqrt{2})\,(X-Y\sqrt{2})\ (X>0)$$

gewonnen.

Daraus schliessen wir, dass falls

$$x_0\equiv 1{,}3 \pmod 8 \text{ ist},\quad x\equiv 1{,}3 \pmod 8 \text{ ist},$$

falls

$$x_0\equiv 5{,}7 \pmod 8 \text{ ist},\quad x\equiv 5{,}7 \pmod 8 \text{ ist}.$$

Es kann also für eine gegebene Primzahl p bei allen ihren Darstellungen durch die Form

$$x^2-2y^2 \quad (x>0)$$

stets nur eine der folgenden Möglichkeiten eintreten: entweder ist stets

$$x\equiv 1.3 \pmod 8)$$

oder aber

$$x \equiv 5,7 \pmod 8.$$

Jetzt sind wir im Stande folgenden Satz auszusprechen.
Wenn

$$p = \alpha^2 - 2\beta^2 = x^2 + 2y^2 \quad (\alpha > 0) \quad p \equiv 1 \pmod 8 \text{ ist}$$

so ist nur eine der vier folgenden Fälle möglich:

Ist $x \equiv \pm 3 \pmod 8$, $y - \beta \equiv 0 \pmod 4$, so ist $\alpha \equiv 5 \pmod 8$.
Ist $x \equiv \pm 3 \pmod 8$, $y - \beta \equiv 2 \pmod 4$, so ist $\alpha \equiv 7 \pmod 8$.
Ist $x \equiv \pm 1 \pmod 8$, $y - \beta \equiv 0 \pmod 4$, so ist $\alpha \equiv 1 \pmod 8$.
Ist $x \equiv \pm 1 \pmod 8$, $y - \beta \equiv 2 \pmod 4$, so ist $\alpha \equiv 3 \pmod 8$.

Bei dem Beweise dieses Satzes werden wir uns nicht aufhalten, denn er lässt sich mittels der Darstellung (2) ganz analog dem vorhergehenden durchführen.

Betrachten wir nun den Körper, der durch die primitive Wurzel θ der Gleichung

$$x^{12} - 1 = 0$$

bestimmt wird.

Die irreduzible Gleichung, die durch θ befriedigt wird ist folgende:

$$x^4 - x^2 + 1 = 0$$

Die Diskriminante des Körpers ist gleich 12^2 und die Anzahl der Idealklassen ist 1.

Die Hauptbasis des Körpers ist:

$$1,\ \theta,\ \theta^2,\ \theta^3.$$

Es seien θ_1, θ_2, θ_3 die zu θ konjugierten Grössen.
Es sei ferner p eine Primzahl von der Form $12\,n+1$.
Dann sei:

$$p = (a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3)\ (a + b\theta_1 + c\theta_1^2 + d\theta_1^3)\ (a + b\theta_2 + c\theta_2^2 + d\theta_2^3)$$
$$(a + b\theta_3 + c\theta_3^2 + d\theta_3^3).$$

Betrachten wir das Product der ersten zwei Faktoren, so erhalten wir

(3) $$p = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - bd + ac)^2 + (ab - bc + dc + 2\,ad)^2$$

durch Betrachten des ersten und dritten dagegen folgt:

(4) $$p = \left(a^2 + d^2 + bd + ac - \frac{b^2 + c^2}{2}\right)^2 + 3\left(ac - bd + \frac{c^2 - b^2}{2}\right)^2.$$

Mit Hilfe dieser Zerlegungen lässt sich der folgende Satz beweisen:

Wenn p eine Primzahl von der Form $12n+1$ und gleichzeitig

$$p=\alpha^2+\beta^2$$
$$p=x^2+3y^2$$

ist,
so ist nur einer der vier folgenden Fällen möglich:

Ist $x\equiv\pm1 \pmod{12}$, $\beta\equiv0 \pmod 3$, so ist $\alpha\equiv\pm2 \pmod{12}$.
Ist $x\equiv\pm1 \pmod{12}$, $\beta\equiv0 \pmod 3$, so ist $\alpha\equiv\ \ 0 \pmod{12}$.
Ist $x\equiv\pm5 \pmod{12}$, $\beta\equiv0 \pmod 3$, so ist $\alpha\equiv\pm4 \pmod{12}$.
Ist $x\equiv\pm5 \pmod{12}$, $\beta\equiv0 \pmod 3$, so ist $\alpha\equiv\pm6 \pmod{12}$.

Bei dem Beweise selbst halten wir uns nicht auf, denn dieser folgt unmittelbar aus den letzten beiden Formeln (3) und (4).

О новом доказательстве одной теоремы Gauss'a—Jacobi.

В. А. Кречмар.

Автор, рассматривая биквадратичную область, получаемую присоединением к области рациональных чисел первообразного корня θ уравнения

$$x^8=1,$$

доказывает следующую теорему аддитивной теории чисел „если p есть простое число формы $8n+1$ и

$$p=x^2+2y^2$$
$$p=\alpha^2+\beta^2$$

причем β четно, то если

$$x\equiv\pm1 \pmod 8, \text{ то } \beta\equiv0 \pmod 8$$

если же

$$x\equiv\pm3 \pmod 8, \text{ то } \beta\equiv4 \pmod 8\text{“}.$$

Рассмотрением этой же области, а также области определяемой уравнением

$$x^{12}=1$$

автор показывает приложимость метода для получения аналогичных теорем.

О замкнутых односторонних трехмерных пространствах [1]).

В. Львовский.

Введение понятия о *„конических элементах“*, как достаточного условия односторонности пространства, дает возможность, при симетричном их определении, использовать в качестве ограничений замкнутые односторонние поверхности; полученное таким образом трехмерное замкнутое пространство уже будет односторонним. Это позволяет распространить на такие односторонние пространства все непрерывные преобразования, введенные для двусторонних замкнутых трехмерных пространств [2]).

В первых двух параграфах подробно рассматриваются преобразования односторонних поверхностей, так как на них базируется определение односторонних пространств тем более, что все основные операции в дальнейшем непосредственно обобщаются. Рассмотрение преобразований двойных линий односторонних поверхностей дает возможность с одной стороны, установить специальный вид нормальных форм, с другой — позволяет обобщить определение односторонних пространств на случай, когда ограничением является односторонняя поверхность с кратными точками двойной линии.

Содержание следующего параграфа составляет общее определение индикатрисы, конических элементов и односторонних n-мерных пространств; в частности дано симетричное определение трехмерного замкнутого одностороннего пространства и два конкретных примера.

Последний параграф посвящен преобразованиям конических линий, где 1°—обобщаются методы преобразований односторон-

---

[1]) Доложено 18 февраля 1928 года на 82 заседании Ленинградского Мат. О-ва.

[2]) См. „О замкнутых двусторонних трехмерных пространствах“. Журнал Ленинградского Физ. Мат О-ва, т. I, в. 2 (1927), стр. 169—181.

них поверхностей на случай трех измерений, 2°—методы преобразований двусторонних трехмерных пространств обобщаются на односторонние.

Содержание.

§ 1.—Элементарные двойные линии односторонних поверхностей.

10.—Введем несколько определений: условимся неприводимой двойной линией (∂_1) называть такую ∂_1, для которой существует на поверхности замкнутый путь, проходящий чрез нее, меняющий знак индикатрисы; с такими ∂_1 мы все время будем иметь дело в дальнейшем; примером приводимой ∂_1 (не меняющей индикатрису) будет двойная линия цилиндра, построенного на лемнискате. Назовем ∂_1 без кратных точек элементарными. Введем операцию $[1]_\alpha$ (см. ф. 100), значок α показывает, что преобразование произведено с частями поверхности, лежащими по одну сторону оси α — поменялись местами верхний и нижний листы; эта операция явилась причиной возникновения двойной линии и обратная операция (ее будем обозначать $[1]_\alpha^{-1}$) — причиной ее исчезновения. Как будет выяснено в дальнейшем, возможны только три вида элементарных ∂_1; определением и исследованием их мы сейчас займемся.

11.—Элементарную ∂_1, имеющую один конец „*внутри*", другой „*снаружи*" наз. ∂_1 1-го рода (см. ф. 110). Образовать такую ∂_1 можно так: на куске сферической поверхности M делается разрез ABC (см. ф. 111), склеиваются точки A и C, B' и B'', и, наконец, склеиваются накрест линии AB' с CB' и AB'' с CB' — получаем ∂_1 1-го рода AB [1]). Можно иначе получить ее: берем область критической точки двулистной римановой поверхности (ф. 112), обратим ее в одностороннюю,— перекинем мостик с верхнего листа на нижний (ф. 113); пре-

[1]) См. Kerekjarto-Topologie 1, 1923, стр. 151, ф. 28.

образования, приведенные на ф. 114 показывают получение ∂_1. Конечно, этот кусок поверхности, как всякий кусок с элементарной ∂_1 1-го рода не будет элементарно связным, так как существует кольцевое сечение, не отделяющее от поверхности нового куска и уничтожающее ∂_1 (см. ф. 115); если нарушить неприкосновенность контура нашего куска, то ясно, что прибавление соединительного сечения AB (ф. 115) обратит кусок в элементарно связный; таким образом для обращения куска в элементарно связный трębуется одно σ-образное сечение, начинающееся на контуре или что то же, одно сечение, начинающееся и кончающееся на контуре. Это не представляет ничего особенного, так как такой кусок есть не что иное как лист Мебиуса — преобразование его в лист Мебиуса приведено на ф. 116; кольцевое сечение, не делящее его и уничтожающее ∂_1 (см. ф. 115) для листа Мебиуса будет сечением уничтожающим его односторонность (см. ф. 117). Очевидно, что результаты преобразований, приведенных на ф. 115 и 117 будут тожественны (см. ф. 118); необходимо заметить, что эти преобразования, как все преобразования с двойными линиями непрерывны в E_4. В заключение всему сказанному о ∂_1 1-го рода, можно привести преобразование, выявляющее внутреннюю тожественность строения концов двойной линии 1-го рода (см. ф. 119); на ф. 1190 представлен тот же кусок в симетричном виде.

12.—Элементарную ∂_1, имеющую оба конца „*внутри*", наз. ∂_1 2-го рода (см. ф. 120). Получить такую ∂_1 можно так: берем кусок сферической поверхности (см. ф. 121), делаем два разреза A_1B_1 и A_2B_2, склеиваем точки A_1 и $A_2 \to A$, B_1 и $B_2 \to B$; склеиваем борты $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ накрест и получаем элементарную ∂_1 2-го рода AB. Для упрощения построения можно взять цилиндр с двойной линией, полученный способом, указанным на ф. 122 и вклеить его в места разрезов (ф. 121, вторая фигура серии), так чтобы контур M_1 совпал с $A_1\beta\beta_1\alpha$, контур M_2 с $A_2\alpha B_2\beta$, с соблюдением указанных направлений вращения; нетрудно убедиться, что в конечном результате получим ∂_1 2-го рода. Если при вклеивании совместить M_1 с $A_2\alpha B_2\beta$ и M_2 с $A_1\beta B_1\alpha$ с соблюдением указанных направлений вращения, то получим образование, приведенное на ф. 123. В дальнейшем будет выяснен гомеоморфизм этих образований. Двойную линию 2-го рода можно еще получить способом, указанным на ф. 124, вследствие чего вытекает, что кусок поверхности с одной ∂_1 2-го рода гомеоморфен куску поверхности с двумя ∂_1 1-го рода; обозначая через N_1 число ∂_1 1-го рода, N_2 — ∂_1 2-го рода, получаем символическое равенство $2N_2 \equiv N_1$. (Необходимо отметить, что равенство это имеет существенное значение лишь для замкнутых поверхностей, для которых оно имеет место в силу того, что в преобразованиях контур не участвует; это замечание нужно всегда иметь в виду, когда контур не участвует в преобразованиях, представляя дело таким образом, что будто мы из рассматриваемой поверхности выделили некоторый кусок посредством проведения одного кольцевого сечения и занимаемся его преобразованием). Из равенства вытекает, что кусок ф. 120 не элементарно связен и на основании предыдущего, для него существует два независимых неделящих кольцевых сечения. Но известно, что всякую одностороннюю поверхность одним кольцевым сечением можно обратить в двустороннюю — в данном случае таким сечением будет кольцевой контур окружающий ∂_1 (см. ф. 125). Интересно, что такое сечение по своим результатам равносильно двум ранее примененным кольцевым (см. ф. 117), так как оно после себя оставляет два новых контура. Для более подробного выяснения этого рассмотрим преобразование куска с ∂_1 2-го рода в ленточный вид, что можно выполнить хотя бы следующими двумя способами: см. ф. 126 и 127; сечения по способу ф. 117 показаны на ф. 128, сечение равносильное им на ф. 129, в этом нетрудно убедиться, проследив получение этих кусков. Сечения ф. 128 указывают на то, что этот кусок можно получить склеивая два листа Мебиуса — чем объясняется существование двух таких сечений. Сечение ф. 129 указывает на другую сторону строения куска — существование моста M; это сечение имеет два борта и не будь моста, кусок был бы поделен на две части, так как это была бы двусторонняя лента.

13. — Прежде чем перейти к рассмотрению элементарных ∂_1 3-го рода, необходимо остановиться на преобразованиях, связанных с появлением замкнутых ∂_1; рассмотренные ранее ∂_1 не были замкнуты и поэтому естественно возникает вопрос об их существовании, природе и получении. Оказывается, что с получением неприводимых замкнутых ∂_1 из ∂_1 1-го рода связано появление дыр и кратных точек ∂_1. Случай приводимой

замкнутой ∂_1 можно иллюстрировать таким примером: возьмем сферическую поверхность и около круга α произведем операцию $[1]_\alpha$ и мы получим замкнутую ∂_1 (см. ф. 130).

Задача построения замкнутых ∂_1 из элементарных заключается в изыскании способов сращивания концов двойных линий; тут представляются три случая сращивания: 1°—сращивание внешних концов, 2°—сращивание внутренних концов, 3°—сращивание внутреннего и внешнего конца.

Предварительно введем новую операцию. Образование MN ф. 131 назовем хоботом; получение его представлено на ф. 132; существенной частью хобота является двойная линия, появившаяся в результате применения операции $[1]_\alpha$. Цель введения новой операции заключается в возможности осуществить частичное удаление двойной линии, в то время как операция $[1]_\alpha$ нацело ее удаляет. Нетрудно видеть, что это достигается преобразованием указанным на ф. 133. Эту операцию условимся называть разъединением ∂_1 в точке A и обозначать $[2]_A$; обратную операцию—сращиванием двойных линий в точке A и обозначать $[2]_A^{-1}$; здесь существенно, чтобы при сращивании ∂_1 концы хоботов находились в области A на одной стороне поверхности. Из операции $[2]^{\pm 1}$ следует допустимость преобразований ∂_1, заключающихся в удлинении и укорочении их. Совершенно ясно, что операции $[2]^{\pm 1}$ суть непрерывные преобразования, не меняющие связности и ориентации поверхности.

14.—Имея в виду вышесказанное, можно производить сращивание концов ∂_1 следующим образом:

1°—случай внешних концов; так как вопрос о сращивании концов ∂_1 был разобран применительно к хоботам, то преобразуем концы ∂_1 так, чтобы в их устройстве сразу усмотреть формы концов хоботов. На ф. 140 указано такое преобразование для одного конца, пользуясь чем можно операцию сращивания двух концов произвести как показано на ф. 141. У нас ранее был случай аналогичного преобразования (см. ф. 124), когда мы перешли от двух ∂_1 1-го рода к одной ∂_1 2-го рода, т.-е. от двух внутренних и двух внешних концов перешли к двум внутренним—как бы уничтожив внешние концы. Теперь можно это преобразование сделать не пользуясь операцией [1], а просто сращивая внешние концы, как показано на ф. 142 [1]).

---

[1]) См. Boy—Über die Curvatura integra... Diss. Göttingen 1901, стр. 40 ф. 21.

2° — случай внутренних концов; опять сначала преобразуем один внутренний конец (ф. 143) и тогда ясно будет, что сращивание можно произвести так, как приведено это на ф. 144. Сравнивая этот случай с предыдущим, мы видим, что разница между ними, в смысле способа применения операции [2], заключается в том, что в первом случае сращивание происходит „*снаружи*“, во втором „*внутри*“ поверхности; как мы увидим далее, в третьем случае сращивание можно произвести и „*снаружи*“ и „*внутри*“.

3° — случай внутреннего и внешнего конца. Здесь придется предпослать такое замечание: рассмотрим случай операции удлинения хобота, когда эта операция вызывает появление кратных точек двойной линии: на ф. 145 приведен обычный случай удлинения конца хобота, на ф. 146—тот случай, когда в процессе удлинения хобота, ∂_1 пересекла другую двойную линию. В последнем случае существенно, что получившаяся на ∂_1 кратная точка тройная и одновременно с появлением ее мы получили еще одну кольцевую двойную линию. На ф. 147 изображена область кратной точки ∂_1: здесь одна ∂_1 это AB, двойная линия хобота, другая ∂_1 — это CD, та двойная линия, которую хобот пересек, третья — есть пересечение хобота с листом DCM — она имеет кольцевую форму и проходит чрез точку O, точку пересечения AB и CD, таким образом точка O есть трехкратная точка ∂_1. При этом переходе хобота чрез ∂_1 произошло еще и другое: хобот перешел с одного листа на другой, это обстоятельство играет важную роль при сращивании разноименных концов ∂_1; действительно применяя сказанное для сращивания концов A и B (см. первую фигуру серии 148), мы видим, что так как концы A и B находятся на разных сторонах поверхности, то при сращивании их придется пересечь ∂_1; при этом ясно, что самое сращивание можно производить как „*внутри*“, так и „*снаружи*“ (на ф. 148 приведен последний вариант).

15.— Элементарную ∂_1, имеющую оба конца „*снаружи*“ наз. ∂_1 3-го рода (см. ф. 123). Способы получения ее из ∂_1 1-го и 2-го рода приведены на ф. 150 и 151. Эти преобразования показывают, что в результате сращивания ∂_1 при получении ∂_1 3-го рода, появляется дыра (ее нетрудно усмотреть еще и на ф. 144); с другой стороны из этих преобразований вытекает новое символическое равенство $N_2 \equiv N_3$, где N_2 и N_3

количества ∂_1 2-го и 3-го рода (см. ф. 152). Таким образом можно считать, что ∂_1 2-го рода потенциально заключают в себе дыры, которые выявляются при переходе к ∂_1 3-го рода; это замечание в дальнейшем понадобится, так как в некоторых случаях ∂_1 3-го рода можно удалить не уничтожая дыры, благодаря чему можно свести к *min.* число ∂_1. Теперь проще можно объяснить, почему для куска с ∂_1 2-го рода может существовать сечение ф. 129, действ. ручка отвечающая дырке, будет иметь кольцевое сечение A (см. ф. 153), а это сечение обращает его в двустороннюю поверхность (см. ф. 154).

16.—В заключение необходимо остановиться на замкнутых элементарных ∂_1 [1]); в процессе получения ∂_1 3-го рода мы имели случай образования такой ∂_1. Для упрощения вопроса будем рассматривать замкнутые поверхности с ∂_1 только 3-го рода. Общий случай будет отличаться только большим количеством возможных комбинаций. Условимся обозначать чрез D числа пустых дыр, без ∂_1 3-го рода и возьмем сначала поверхность, у которой $N_3 = 1$, $D = 0$; на ф. 160 приведен простейший случай, на ф. 161 дан другой, на ф. 162—соответствующий последнему типу усложнения гомологический ряд поверхностей, где ∂_1 винтообразно завивается на ручке (тут, конечно, будут два ряда—левый и правый). Пусть $N_3=1$, $D=1$; на ф. 163 и 164 даны простейшие случаи использования ручки при замыкании ∂_1, на ф. 165 и 166—соответствующие этим типам усложнения гомологические ряды поверхностей, отличающиеся тем, что они отвечают двум различным неделящим кольцевым сечениям ручки (и тут также ряды удваиваются соответственно правому и левому винтам). Ясно, что при $N_3=1$ и $D=n$, мы получим более усложненную картину, так как можно завинтовывать одной ∂_1 несколько ручек. Случай $N_3=m$, $D=0$ допускает либо независимое замыкание каждой ∂_1; в этом случае ничего нового не будет; либо при замыкании всех ∂_1 в одну, как показано на ф. 167 возможно комбинированное завинтовывание ∂_1 в ручках, полученных от ∂_1 3-го рода; наконец, смешанный случай замыкания будет комбинацией этих двух. Соответственные усложнения будут при $N_3=m$, $D=n$, при чем, если все ∂_1 будут замкнуты в одну, то здесь вместо одного моста (ручки) будет n мостов; при самозамыкании ∂_1

[1]) Простейшие примеры см. König—Az analysis situs elemei. Budapest, 1918, стр. 110, ф.ф. 90, 92; там же даны литературные указания.

ничего нового не получим и смешанный случай замыкания даст комбинации двух предыдущих. При всех этих построениях возможно совмещать оба способа завивания в том смысле, чтоб ∂_1 завивало ручки и „*свои*" (т.-е. по ф. 162) и „*чужие*" (т.-е. по ф.ф. 165, 166). Таким образом элементарные замкнутые ∂_1 могут представлять большое разнообразие своих структурных форм.

§ 2. Преобразования двойных линий односторонних поверхностей.

20.— Предварительно установим лемму, связанную с вопросом о структуре дыр: в предыдущих рассмотрениях появление дыры или ручки не составляло для нас особой разницы; теперь же необходимо уточнить отношение к этому вопросу: рассматривать форму с дырами удобнее, так как отсутствует выбор, при переходе же к ручечной форме приходится для образования ручек распорядиться поверхностью некоторым уже вполне определенным образом. Для пояснения достаточен будет следующий пример: на ф. 200 дана поверхность с 4 дырами; на ф. 201 представлено образование ручки из перешейка A; на ф. 202 из перешейка B, на ф. 203 из C. Отсюда видно, что переход к ручечной форме может быть совершен различным образом; пока отсутствуют ∂_1 это не имеет значения, но в случае наличности ∂_1, необходимо доказать следующую лемму:

21.—**Лемма.** Замкнутая поверхность в E_3 вполне определяется заданием D, N_1, N_2 и N_3.

Об определении M_2 в E_3 здесь сказано, потому что преобразования леммы не требуют E_4 (изотопные в E_3). На поверхности M_2 из особенностей допустимы лишь ∂_1 1-го, 2-го и 3-го рода в конечном числе. Под выражением „*вполне определяется*" будем понимать, что если эти числа заданы, т.-е. если на поверхности с конечным числом D дыр двумя различными способами распределить $N_1 - \partial_1$ 1-го рода, $N_2 - \partial_1$ 2-го рода и $N_3 - \partial_1$ 3-го рода, то обе эти поверхности изотопны в E_3.

Пусть заданы числа D, N_1, N_2, N_3; возьмем поверхности M'_2 и M''_2 с различным распределением ∂_1, докажем, что можно отожествить эти поверхности $M'_2 \equiv M''_2$.

1°. Из структуры ∂_1 1-го рода вытекает, что их можно перемещать по поверхности, и, следует ясно, что, если $N_2 = N_3 = 0$, то $M'_2 \equiv M''_2$.

2°. Пусть $N_1=N_2=0$ и пусть D и N_3 одинаковы для M'_2 и M''_2; в силу высказанного перед леммой замечания мы видим, что распределение ∂_1 3-го рода может быть произвольным. Для пояснения на ф. 210 дан пример преобразования для $N_3=1$, $D=3$.

3°. Пусть $N_1=N_3=0$; тогда $M'_2 \equiv M''_2$ вследствие соображений совершенно одинаковых с 1°.

Комбинируя эти три случая можно установить, что $M'_2 \equiv M''_2$ и если $N_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3$).

Из этой леммы вытекает критерий различия поверхностей: равенство или неравенство четверки чисел $[D, N_1, N_2, N_3]$. Это признак изотопии замкнутых односторонних поверхностей в E_3.

Следствие. Число N_3 можно менять.

Возьмем поверхность с n дырами, где $N_3=1$, покажем, что можно сделать $N_3=2, 3, \ldots, n$. По лемме все поверхности ф. 211 изотопны в E_3, на ф. 212 дано превращение $N_3=1$ в $N_3=2$; на ф. 213 $N_3=1$ в $N_3=3$, остальные случаи очевидны. Отсюда вытекает формула $D+N_3=Const$.

Ранее было выведено, что ∂_1 2-го рода преобразуется в ∂_1 1-го рода по формуле $2N_2=N_1$; установим формулу $2N_2+N_1=Const$: действительно, сращивание внешних концов обращает ∂_1 1-го рода в ∂_1 2-го рода, при чем формула удовлетворяется и обратно (см. ф. 214); аналогичными рассуждениями получим формулу $2N_3+N_1=Const$. Только здесь надо сращивать внутренние концы ∂_1 (см. ф. 215). Последнюю формулу можно вывести и на основании предыдущей формулы $2N_2+N_1=Const$ и ранее выведенной эквивалентности ∂_1 2-го и 3-го рода, так как $N_2=N_3$, то из формулы $2N_2+N_1=Const$ получим $2N_3+N_1=Const$.

22.—Резюмируя это, мы видим, что ∂_1 1-го рода можно превращать в ∂_1 2-го и 3-го рода, при чем будет иметь место формула $N_1+2N_2+2N_3=Const$, присоединяя сюда результат, установленный в следствии леммы $D+N_3=Const$ получим $N_1+2(N_2+N_3+D)=Const$.

Равенству $D+N_3=Const$ можно дать иной вывод. Условимся называть ручку с одной ∂_1 3-го рода нормальной, ручку без ∂_1 пустой; рассмотрим вопрос о возможных ∂_1 на ручке: интерес представляют лишь ∂_1 3-го рода так как ∂_1 1-го и 2-го рода можно изотонно в E_3 удалить с ручки; нетрудно видеть, что на ручке может быть либо одна ∂_1 3-го рода, либо ни одной;

четное число ∂_1 3-го рода сводится к нулю, соответствующее преобразование для случая двух ∂_1 3-го рода дано на ф. 220, поэтому нечетное число ∂_1 3-го рода сведется к одной; с другой стороны присутствие ∂_1 1-го рода позволяет вовсе уничтожить ∂_1 3-го рода (см. ф. 221); это преобразование обращает при помощи ∂_1 1-го рода нормальную ручку в пустую; условимся превращение пустой ручки в нормальную называемую нормализацией ручки.

Если поверхность представлять в ручечной форме, то очевидно, что если число ручек будет n, то часть их может быть пустой — D остальные нормальные—N_3 и след. $n=D+N_3$. Докажем, что все поверхности, удовлетворяющие условию $D+N_3=n$, $N_2=0$ при прочих равных условиях гомеоморфны.

1° $N_1=0$; $N_3\neq 0$. Пусть $N_3=1$, обращая эту ∂_1 в две ∂_1 1-го рода получим вместо n $n-1$ ручек и все они будут пустые. Пользуясь одной ∂_1 1-го рода мы сможем нормализовать произвольное число $p<n$ ручек, тогда $n-p-1$ ручек останутся пустыми; обращая две ∂_1 1-го рода в одну ∂_1 3-го рода получим, что $D+N_3=(n-p-1)+(p+1)=n$.

2° $N_1=q$; пусть $N_3=0$, тогда $D+N_3=n$; ясное дело, что нормализация с помощью одной из q ∂_1 1-го рода, хотя бы p ручек, оставит $n-p$ ручек пустыми, след. $D+N_3=(n-p)+$ $+p=n$.

Таким образом формулу $N_1+2(N_2+N_3+D)=Const=K$ можно считать установленной; применим ее к замкнутым поверхностям единственными особенностями коих являются ∂_1 1-го, 2-го и 3-го рода; для них эта формула приводит к введению понятия о характеристике K: действительно, всякой поверхности можно сопоставить число K, полученное согласно этой формуле и обратно, данному числу K — характеристике будут соответствовать гомеоморфные поверхности.

23.—**Теорема.** Необходимое и достаточное условие для гомеоморфизма двух замкнутых поверхностей с элементарными ∂_1 заключается в равенстве характеристик.

Приведем очевидную лемму: две замкнутые поверхности, имеющие только ∂_1 1-го рода и притом в равном количестве изотопны в E_3.

1°. Необходимость: Пусть M'_2 и M''_2 гомеоморфны, преобразуем M'_2 в $M_2^{k'}$; все особенности коей будут K' ∂_1

1-го рода; обращая все особенности M''_2 к тому же виду, мы получим то же $M_2^{k''}$ действительно, если $K'' \neq K'$, то так как $M_2^{k'} \equiv M_2^{k''}$, то $M_2 \equiv M''_2$, что противоречит условию след. $K'' = K'$.

2°. Достаточность: Пусть M'_2 и M''_2 удовлетворяют условию K' K''; тогда преобразуя $D \to N_3$; $N_3 \to N_2$; $N_2 \to N_1$, мы преобразуем $M'_2 \to M_2^{k'}$, $M''_2 \to M_2^{k''}$; но так как $K' = K''$, то $M_2^{k'} \equiv M_2^{k''}$, а следовательно $M'_2 \equiv M''_2$.

Теперь можно установить классификацию замкнутых поверхностей, единственными особенностями коих являются ∂_1 1-го, 2-го и 3-го рода; на основании доказанной теоремы поверхности естественно распадутся на классы, составленные из групп гомеоморфных поверхностей; для приложения к трехмерным пространствам удобнее определить нормальные формы, как таких представителей этих классов, которые в случае нечетной характеристики имеют одну ∂_1 1-го рода, в случае четной — одну ∂_1 3-го рода; всякое преобразование поверхности к такому виду условимся называть приведением поверхности к нормальному виду. На основании предшествующих рассмотрений всякая односторонняя замкнутая поверхность, имеющая лишь ∂_1 1-го, 2-го и 3-го рода может быть приведена к нормальному виду.

24.—Переходим к неэлементарным ∂_1; преобразования, связанные с получением таких ∂_1, здесь рассмотрены не будут [1]), необходимо лишь высказать ряд замечаний: неэлементарные ∂_1 по построению замкнутые линии, однако их замкнутость не есть необходимое условие для существования кратных точек; легко видеть, что размыкая ∂_1 в ее обыкновенных точках, разъединением хобота мы не изменим ни числа, ни порядка кратных точек, но зато замкнутое ∂_1 обратится в незамкнутое; с другой стороны необходимо заметить, что в разбираемых вопросах никакой роли не играет то, будет ли поверхность замкнута или нет и сколько в последнем случае у нее контуров; все наши рассуждения своим предметом имеют преобразования дыр и ∂_1, при чем нетрудно убедиться в том, что всегда на поверхности найдется область, не участвующая в преобразованиях, где поэтому и можно сосредоточить все контура незамкнутой поверхности. Во всем процессе образо-

---

[1]) См. Математический Сборник т. 32, 1925 г., стр. 353—356.

вания кратных точек существенную роль играла операция удлинения хобота, это же приводит к тому результату, что обратная операция: укорочение хобота должно уничтожать кратные точки неприводимых ∂_1. Наконец, остается лишь указать, что процесс этих преобразований приводит, в случае удлинения хобота, к кратным точкам нечетного порядка, и что четный порядок кратности нарушает правильность поверхности—то свойство поверхности, что область всякой ее точки гомеоморфна области E_2 внутри круга.

25.— Рассмотрим теперь поверхность, единственной особенностью которой будут неприводимые ∂_1. Возможны два случая: 1°— ∂_1 элементарны; тогда имеющиеся замкнутые ∂_1 можно разомкнуть и укорочением хоботов привести к известным ∂_1 1-го, 2-го и 3-го рода; но по вышедоказанной теореме такая поверхность может быть приведена к нормальному виду. 2°— ∂_1 неэлементарны; тогда имеющиеся на поверхности незамкнутые неэлементарные ∂_1 замыкаются свободными концами таким образом: пусть на поверхности несколько изолированных комплексов неэлементарных ∂_1; можно или замыкать комплексы в одну замкнутую ∂_1 сращивая их концы, или замыкать отдельно каждый комплекс; при этом могут появиться и новые кратные точки; после этого можно переходить к дальнейшим стадиям преобразований, для чего необходимо замкнутые ∂_1 разомкнуть; укорачивая хоботы мы удалим с ∂_1 кратные точки и таким образом придем к разобранному 1° случаю. Теперь мы можем распространить утверждение о приведении поверхности к нормальному виду на случай замкнутой поверхности, единственной особенностью которой будут произвольные комплексы ∂_1 с кратными точками нечетного порядка. В этой форме полученный результат будет использован в дальнейшем.

§ 3. Определение n-мерных односторонних пространств.

30.—Дадим сначала определение индикатрисы.

Пусть дано M_2; возьмем круг Π_1, будем говорить, что у него есть два направления вращения, подразумевая под этим то, что если отметить две его точки, то существует два способа перейти от одной точки к другой; фиксируя один из них, получим ориентированный круг—его назовем индикатрисой M_2. Пусть имеется индикатриса Π_1, вращение коей совпадает с вращением фиксированной индикатрисы $П_1^*$, будем говорить, что она положительна, в противном случае — отрицательна; под переменой знака индикатрисы $П_1$ будем разуметь изменение ее вращения.

Пусть дано M_3; возьмем шар $П_2$, будем говорить, что у $П_2$ есть два направления вращения, подразумевая под этим то, что его индикатриса $П_1$ может иметь два знака; фиксируя один из них, получим ориентированный $П_2$—его назовем индикатрисой M_3. Индикатрису, вращение коей совпадает с вращением фиксированной индикатрисы $П_2^*$, будем называть положительной, в противном случае отрицательной; под переменой знака индикатрисы $П_2$ будем разуметь изменение ее вращения—перемену знака ее $П_1$.

И т. д.

Пусть дано M_{n+1}; возьмем гипершар $П_n$, будем говорить, что у $П_n$ есть два направления вращения, подразумевая под этим то, что его индикатриса $П_{n-1}$ может иметь два знака; фиксируя один из них, получим ориентированный $П_n$ — его назовем индикатрисой M_{n+1}. Индикатрису, вращение коей совпадает с вращением фиксированной индикатрисы $П_n^*$, будем называть положительной, в противном случае отрицательной; под переменой знака индикатрисы $П_n$ будем разуметь изменение ее вращения — перемену знака ее $П_{n-1}$.

31.— Переходим к определению конических элементов; определим сначала коническую точку (k_0): пусть дана двойная точка на плоскости, образованная пересечением прямых AA_1 и BB_1 (см. ф. 310), будем считать точки заштрихованной области двойными—образующими два многообразия M'_2 и M''_2 (*„сплошное“* и *„пунктирное“*), переходящие одно в другое на прямых AA_1 и BB_1; точку O будем называть конической точкой k_0. Для выяснения свойств такой точки можно дать другой способ ее получения: берем в E_3 кусок цилиндрической поверхности (см. ф. 122), образуем на нем ∂_1 3-го рода (вследствие чего приходится воспользоваться E_4), стягиваем в точку ∂_1 и сплющиваем остальную трубку в плоскость (эта операция заставляет перейти в E_5), тогда получается коническая точка ф. 310. Этот способ ее получения раскрывает ее существенное свойство, именно коническая точка может менять знак индикатрисы, действительно точка O возникла из ∂_1 3-го рода, эта ∂_1 может при определенных условиях изменить знак индикатрисы, следовательно при тех же условиях будет менять знак индикатрисы и коническая точка k_0; необходимо иметь в виду, что коническая точка существует в плоскости, где мы ее определили, в E_3 это уже ∂_1, а в E_4 тот элемент (круг), который дал нам k_0 уже не имеет особенностей; первое определение k_0 позволяет коническую точку получать из двойной линии, второе определение позволяет коническую точку превратить в двойную линию.

Назовем конической линией k_1, то образование, которое получим, обращая каждую точку ∂_1 в коническую; назовем ∂_2 то образование, которое мы получим, обращая каждую точку конической линии в двойную линию [1]). И т. д. Назовем коническим элементом k_n то образование, которое мы получим, обращая каждое ∂_{n-1} данного d_n в k_{n-1}; назовем двойным элементом ∂_{n+1}, то образование, которое мы получим, обращая каждое k_{n-1} данного k_n в ∂_n.

Назовем конический элемент k_{n-2} неприводимым, если существует замкнутый путь, принадлежащий рассматриваемому пространству M_n, имеющий одну общую точку с k_{n-2}. В этом случае M_n будет односторонним. Для M_2 это очевидно. Берем E_3 в нем некоторое M_3 с неприводимым элементом k_1, покажем, что M_3 будет односторонним: перейдем в E_4 так, чтобы k_1 обратилось в ∂_2; при переходе индикатрисы Π_2 чрез ∂_2, ее индикатриса Π_1 пройдет чрез некоторое ∂_1 и изменит знак, след. будет существовать замкнутый путь меняющий индикатрису. Берем E_4, в нем некоторое M_4 с неприводимым элементом k_2, покажем, что M_4 будет односторонним: перейдем в E_5 так, чтобы k_2 обратилось в ∂_3; при переходе индикатрисы Π_3 чрез ∂_3, ее индикатриса Π_2 пройдет чрез некоторое ∂_2 и изменит знак след. будет существовать замкнутый путь меняющий индикатрису. И т. д. Берем E_n, в нем некоторое M_n с неприводимым элементом k_{n-2}, покажем, что M_n будет односторонним; перейдем в E_{n+1} так, чтобы k_{n-2} обратилось в ∂_{n-1}; при переходе индикатрисы Π_{n-1} чрез ∂_{n-1}, ее индикатриса Π_{n-2} пройдет чрез некоторое ∂_{n-2} и изменит знак, след. будет существовать замкнутый путь меняющий индикатрису.

Вследствие этого наличность в M_n конического элемента k_{n-2}, когда M_n задано в E_n, или двойного

[1]) Это есть лишь сокращенная формулировка итерации определений предшествующего абзаца одним измерением выше.

элемента ∂_{n-1}, когда M_n задано в E_{n+1}, достаточно для того, чтобы M_n было бы односторонним, при соблюдении условия их неприводимости. Отсюда вытекает, что замкнутое одностороннее M_n может в E_{n+2} не иметь никаких особенностей.

32.—Теперь можно установить следующий способ рекуррентного построения односторонних пространств. Все построения будут даны для случая замкнутых пространств, при чем необходимо указать, что по методу все построения совпадают с симетричным способом определения двусторонних замкнутых n-мерных пространств.

Пусть в E_3 дано замкнутое одностороннее M_2 с неприводимой ∂_1; проведем чрез M_2 M'_3 и M''_3 так, чтобы ∂_1 обратилось в k_1; тогда замкнутое M_3, образованное M'_3 и M''_3 соединенными по M_2, будет односторонним пространством; в E_3 у него будет конический элемент k_1, который при переходе в E_4 можно обратить в ∂_2.

Пусть в E_4 дано замкнутое одностороннее M_3 с неприводимой ∂_2; проведем чрез M_3, M'_4 и M''_4 так, чтобы ∂_2 обратилось в k_2; тогда замкнутое M_4 образованное M'_4 и M''_4 соединенными по M_3, будет односторонним пространством; в E_4 у-него будет конический элемент k_2, который при переходе в E_5 можно обратить в ∂_3.

И т. д.

Пусть в E_n дано замкнутое одностороннее M_{n-1} с неприводимым ∂_{n-2}; проведем чрез M_{n-1} M'_n и M''_n так, чтобы ∂_{n-2} обратилось в k_{n-2}; тогда замкнутое M_n образованное M'_n и M''_n соединенными по M_{n-1}. будет односторонним пространством; в E_n у него будет конический элемент k_{n-2}, который при переходе в E_{n+1} можно обратить в ∂_{n-1}.

Прежде чем кончить рассмотрение n-мерных пространств, интересно сделать одно замечание относительно вопроса, касающегося изотопии односторонних пространств; известно, что одностороннее замкнутое M_k не может в E_{k+1} быть границей $(k+1)$-мерного куска, известно, что это может не иметь места, когда M_k составляет часть одностороннего M_{k+1}; приведенные построения показывают почему и когда это имеет место; ограничимся здесь указанием, что M_k может служить границей в M_{k+1} тогда когда двойные элементы M_k совпадают с коническими элементами M_{k+1}; в частности, например, ограничение трехмерного замкнутого одностороннего пространства в случае существования одного ограничения обладает этим свойством [1]).

33.—Остановимся теперь на трехмерных пространствах; построение замкнутого одностороннего трехмерного пространства исходя из данной замкнутой односторонней поверхности, может по существу совпасть с симетричным определением двусторонних замкнутых M_3. Определим одностороннее M_3 симетричным способом и убедимся, что ∂_1 действительно обратится в k_1: для простоты возьмем в E_3 замкнутую поверхность [0, 1, 0, 0]; будем считать все точки внутри этого M_2 двойными, составляющими два различные непрерывные трехмерные многообразия M'_3 и M''_3 („*сплошное*“ и „*пунктирное*“), соединенными по M_2; M'_3 и M''_3 вместе с M_2 составят одно замкнутое M_3; возьмем теперь точку A на ∂_1 поверхности M_2 (см. ф. 330) и рассмотрим точки пересечения плоскости P и M_3 — они заключены в заштрихованной области, ограниченной восьмеркой; все внутренние точки области двойные, одни принадлежат M'_3 („*сплошные*“), другие—M'_3 („*пунктирные*“), переход с одних на другие осуществляется на границе; теперь нетрудно видеть, что область точки A в этом сечении тожественна с областью конической точки O (см. ф. 310).

Отсюда вытекает следующий способ определения замкнутых односторонних M_3: среди ограничений достаточна наличность одной односторонней замкнутой поверхности, имеющей в качестве особенностей лишь ∂_1, указанного в (25) вида; далее допустимы как ограничения — замкнутые односторонние поверхности произвольно заузленные, а также зацепленные и заплетенные с другими одно- или двусторонними ограничениями.

Можно привести два примера односторонних замкнутых M_3

$$1^\circ \quad E_5(x, y, z, u, v) \begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x^2+z^2)\,u^2+2z\,(1+v)^2\,(1-u^2) \\ x^2\,(1-u^2)=v^2\,(x^2+y^2-x^2u^2) \end{cases}$$

это M_3 в $E_3(x, y, z)$ ограничением имеет поверхность *Дуск*'а [0, 1, 0, 0]

[1]) Это независимо вытекает из теоремы *Dehn*'a Math. Ann. 1910. B. 69, стр. 166—167. Соседние с этим вопросы разбирал В. А. Ефремович, см. Труды Всероссийского съезда математиков, 1927 г., стр. 77; см. также работу В. А. Ефремовича Math. Zeitschr. 1928. B. 29, стр. 55—59.

$$2^\circ \quad E_5(x, y, z, u, v) \begin{cases} x^2+y^2+5z^2+4v^2=(a^2+4b^2)(1-u^2)+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4u^2\ (v^2+z^2) \\ y^2=(v^2+y^2)\ u^2 \end{cases}$$

это M_3 в $E_3(x, y, z)$ ограничением имеет поверхность $[0, 0, 0, 1]$.

Следующей задачей является преобразование этих M_3 к более простому виду, используя две теоремы, имеющие место для двусторонних M_3: 1° — о взаимозаменимости ограничений, 2° — о понижении рода ограничений.

Пусть дано одностороннее M_3 имеющее ряд ограничений M_2^i $(i=1, 2, \ldots m)$ одно- и M_2^j $(j=1, 2, \ldots n)$ двусторонних. Пользуясь вышеприведенными теоремами, можно двусторонние ограничения M_2^i привести к *min.* ручек, удаляя все свободные ручки, очевидно, что точно так же можно со всех M_2^i удалить все свободные пустые ручки, так как при упрощающих преобразованиях можно все k_1 запунктировать. Дальнейшие упрощения будут заключаться в преобразованиях конических линий.

§ 4. Преобразования конических линий.

40.—Задачей разбираемых преобразований является: 1° — приведение односторонних ограничений к нормальному виду, в той мере, в какой части ограничения свободны, 2° — приведение конических линий к нормальному виду.

41.— Займемся первой задачей: для приведения к нормальному виду односторонних поверхностей были введены две операции $[1]_\alpha$ и $[2]_A$, их необходимо обобщить на случай M_3. Возьмем область ограничения и производя преобразования, указанные на ф. 410, сможем ввести обобщенные операции $[1]_\alpha$ и $[2]_A$; преобразование $[1]_\alpha$ явилось причиной образования хобота и конической линии (совершенно подобно ф. 100); операция $[2]_A^{-1}$, позволяющая сращивать концы ∂_1, в данном случае дает возможность сращивать концы k_1 внешнего ограничения; действительно внимательное рассмотрение ф. 141 и 144, показывает, что операции эти применимы и для сращивания концов k_1; только сращивание разноименных концов (см. ф. 148) потребует дополнительных пояснений: чтобы подойти к преобразованию, соответствующему преобразованию ф. 146, сделаем ряд вспомогательных операций: см. ф. 411 и 412; рассмотрим сначала преобразование ф. 412: дан кусок M_3 между двумя ограничениями, являющимися верхней и нижней гранями параллелепипеда; совершая перемещение нижнего ограничения сквозь верхнее, мы образуем конические линии; закономерность этого устанавливает ф. 411; после этого закономерность преобразований ф. 146 для M_3 можно усмотреть без особых затруднений; для ясности достаточно рассмотреть, приведенное на ф. 413, сечение куска ф. 147 вдоль линии AB, где заштрихованы внутренние точки M_3. Таким образом сращивание концов k_1 обобщается на все случаи и следовательно весь процесс приведения односторонней замкнутой M_2 к нормальному виду может быть обобщен на случай приведения внешнего одностороннего ограничения к нормальному виду с той оговоркой, что зацепленные, заплетенные и заузленные ручки ограничения не участвуют в преобразованиях приведения. По теореме о взаимозаменимости ограничений это утверждение распространяется на все односторонние ограничения.

Оставим временно в стороне случай несвободных ручек тогда упрощения односторонних ограничений будут заключаться 1°— в удалении пустых ручек с ограничений, что не потребует специальных пояснений, 2°— в перемещении всех k_1 на одно ограничение; в этой операции и связанных с ней преобразованиях заключено приведение k_1 к нормальному виду.

42.— Введенные до сих пор k_1 назовем внешними. k_1, полученную по способу ф. 420, назовем свободной внутренней k_1; полученную по способу ф. 421 назовем связанной внутренней k_1; первая не связана с ограничениями целиком, помещаясь внутри M_3, вторая одним концом принадлежит ограничению, эти преобразования назовем приведением k_1 к нормальному виду. Делая последовательно односторонние ограничения, уже приведенные к нормальному виду внешними ограничениями, мы получим несколько k_1 связанных со сферическими ограничениями и несколько свободных k_1. Действительно, если характеристика ограничения нечетна мы имеем первый случай, если четна второй.

Оказывается, что все связанные k_1 можно сосредоточить на одном ограничении, применяя последовательно преобразования ф. 422, при чем они переходят во внешние k_1. В результате будем иметь одно одностороннее ограничение и несколько внутренних k_1 свободных. Приводя его к нормальному виду, удаляя вновь образовавшиеся ручки и приводя k_1 к нормальному виду, получим опять либо несколько свободных k_1, если характеристика была четная, в этом случае все ограничения будут двусторонние, либо кроме них будет одна внутренняя k_1 связанная с единственным „*односторонним*“ ограничением, это если характеристика была нечетна. В первом случае все свободные k_1, кроме одной, могут быть удалены. во втором случае все свободные k_1 нацело могут быть удалены. Соответственно этим двум возможностям окончательные преобразования указаны по ф. 423 и 424 для частных случаев.

Переходя к случаю наличности несвободных ручек, можно лишь утверждать, что все вышеизложенные преобразования имеют место для свободных ручек и поэтому уменьшение числа односторонних ограничений равно как и понижение рода возможно лишь до некоторого *min.*, определяемого количеством свободных ручек, вследствие чего на ограничениях могут сохраниться внешние конические линии. Таким образом в отношении классификации симетрично определенных односторонних M_3 соображения, имеющие силу для двусторонних M_3 усложняются лишь появлением не приводящихся к нормальному виду внешних k_1.

Über geschlossene einseitige dreidimensionale Räume.

W. Lwowski.

Die „Kegelelemente“ welche hinreichende Einseitigkeitsbedingungen sind bei symmetrischen Raumdefinition, lassen alle stetigen Transformationen die für zweiseitige dreidimensionale Räume eingeführt sind („Über geschlossene zweiseitige dreidimensionale Räume“ Журнал Ленинградского Физ. Мат. О-ва V. I (1927), S. 169—180) auf diese einseitige Räume anwenden

Sur une intégrale définie et son application à la théorie des formules sommatoires.

Par N. Koschliakov.

Introduction.

Soit $k \geqslant 2$ est un nombre pair et $d_{(n)}^{(k)}$ — le nombre des diviseurs de n qui sont des puissances kiemes.

Dans ses notes récentes M. Wigert* a étudié la somme

$$\sum_{n > \alpha}^{n \leq \beta} \overset{(k)}{d}(n) f(n), \tag{1}$$

pour les cas particulaires

$$f(x) = e^{-x} \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1.$$

Il a déduit ses résultats à l'aide de la fonction entière

$$g_{k_1\alpha}^{(z)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} z^{\mu}}{\mu!\, \Gamma\left(\frac{\mu}{k} + \alpha + 1\right)}, \tag{2}$$

analogue à celle de Bessel.

Nous allons montrer, dans cet article, que l'étude de la somme (1) dépend des quelques proprietés de l'intégrales définie:

$$L_{(x)}^{(k)} = \int_0^{\infty} \cos \frac{1}{t^k} \cos x\, t \frac{dt}{t^k} \tag{3}$$

et nous arrivons de cette manière à la formule sommatoire suivante:

$$\sum_{n > \alpha}^{n \leq \beta} \overset{(k)}{d}(n) f(n) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \zeta(k) + \frac{1}{k} \zeta\left(\frac{1}{k}\right) x^{\frac{1}{k} - 1} \right\} f(x)\, dx + \tag{4}$$
$$+ 4 (2\pi)^{\frac{1}{k} - 1} \sum_{n=1}^{\infty} S_{(n)}^{(k)} \int_{\alpha}^{\beta} L^{(k)}\left[(2\pi)^{\frac{1}{k} - 1} \sqrt[k]{nx} \right] x^{\frac{1}{k} - 1} f(x)\, dx;$$

---

* Sur une extension de la série de Lambert. (Arkiv för Matem. Bd. 19A, № 8. 1925).

Sur une nouvelle fonction entiére et son application à la théorie des nombres. (Math. Ann. Bd. 96. 1926).

$\zeta(s)$ est la fonction connue de Riemann et

$$S_{(n)}^{(k)}=\sum_{n=d\delta}{}^{'}\frac{1}{d^{1-\frac{1}{k}}},$$

où l'accent, affectant la somme, signifie que d parcourt seulement les diviseurs de n complémentaires à ceux qui sont des puissances kiemes.

1. Sur les fonctions $K_{(x)}^{(k)}$ et $L_{(x)}^{(k)}$.

Considérons l'intégrale définie:

$$K_{(x)}^{(k)}=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{t^k}}\cos xt\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

En posant

$$L_{(x)}^{(k)}=\frac{e^{\frac{i\pi(k-1)}{2k}}K^{(k)}\left(e^{-\frac{i\pi}{2k}}x\right)+e^{-\frac{i\pi(k-1)}{2k}}K^{(k)}\left(e^{\frac{i\pi}{2k}}x\right)}{2}, \tag{6}$$

ou aura

$$L_{(x)}^{(k)}=\int_0^\infty\cos\frac{1}{t^k}\cos xt\frac{dt}{t^k}. \tag{7}$$

Démontrons, maintenant, que

$$\int_0^\infty e^{-x}L^{(k)}\left(\alpha\sqrt[k]{x}\right)x^{\frac{1}{k}-1}dx= \tag{8}$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}-1}\frac{\pi}{2k}\sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1}\left\{e^{\frac{(2m+1)\pi i(k-1)}{2k}-\alpha\exp\left[-(2n+1)\frac{\pi i}{2k}\right]}+\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{(2m+1)\pi i(k-1)}{2k}-\alpha\exp\left[(2m+1)\frac{\pi i}{2k}\right]}\right\}.$$

on voit que

$$\int_0^\infty e^{-x}L^{(k)}\left(\alpha\sqrt[k]{x}\right)x^{\frac{1}{k}-1}dx=\alpha^{k-1}\int_0^\infty\frac{t^k\cos t}{t^{2k}+\alpha^{2k}}dt,$$

d'autre part

$$\frac{t^k}{t^{2k}+\alpha^{2k}}=\frac{A_1}{t^2+(\alpha\varepsilon)^2}+\frac{A_2}{t^2+(\alpha\varepsilon^3)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_{\frac{k}{2}}}{t^2+(\alpha\varepsilon^{k-1})^2}+$$

$$+\frac{\overline{A}_1}{t^2+\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2}+\frac{\overline{A}_2}{t^2+\left(\frac{\alpha}{\varepsilon^3}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{\overline{A}_{\frac{k}{2}}}{t^2+\left(\frac{\alpha}{\varepsilon^{k-1}}\right)^2},$$

cu

$$\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{2k}}$$

et A_m, $\overline{A}_m$ sont des imaginaires conjuguées.

Mais

$$\overline{A}_m = (-1)^{\frac{k}{2}-1} \frac{\alpha^{2-k}}{k} e^{-\frac{(2m-1)\pi i (k-2)}{2k}}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi}{2a} e^{-a},$$

d'où il resulte l'égalité (8).

3. L'étude de la fonction $\sigma(x)$.

Désignons pour abréger, par $\sigma(x)$ le fonction de la variable complexe x

(9) $$\sigma(x) = 2 \cdot (2\pi x)^{\frac{1}{k}-1} \sum_{n=1}^{\infty} S_{(n)}^{(k)} K^{(k)} \left[(2\pi)^{\frac{1}{k}+1} \sqrt[k]{nx} \right]$$

et démontrons maintenant que la somme (9) converge uniformément dans chaque domaine de la variable x définie par les inégalités

(10) $$\sqrt[k]{(x)} \geqslant \sqrt[k]{x_0} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2},$$

où x est un nombre positif, pris arbitrairement.

En vertu de la formule (5), on obtient:

(11) $$\int_0^\infty K_{(x)}^{(k)} x^{s-1} dx = \frac{1}{k} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{k} - \frac{1}{k} + 1\right) \cos \frac{\pi s}{2},$$

$$0 < \frac{R(s)-1}{k} > 1,$$

d'où il résulte que

(12) $$K_{(x)}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho k+1-i\infty}^{\rho k+1+i\infty} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{k} - \frac{1}{k} + 1\right) \frac{\cos \frac{\pi s}{2} \, ds}{k x^s}, \quad 0 < \rho < 1.$$

A l'aide de la formule de Stieltjes

(13) $$|\Gamma(\sigma)| = 0 \left(|t|^{\tau - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \right), \quad \sigma = \tau + it,$$

on trouve

$$|K_{(x)}^{(k)}| < \frac{M_0}{r^{\rho k+1}} \int_0^\infty e^{-\left[\frac{\pi}{2k} - |\varphi|\right] t} t^{\rho k+\rho+1} dt,$$

où

$$x = re^{i\varphi};$$

M_0 est une constante indépendante de r.

En supposant

$$-\frac{\pi}{2k} < \varphi < \frac{\pi}{2k},$$

on obtient

$$|K_{(x)}^{(k)}| < \frac{M_1}{r^{\rho k+1}}, \tag{14}$$

où la constante M_1 est de la même nature que M_0.

Revenons à la relation (9) et reprenons la somme

$$\sum_{n>N}^{\infty} S_{(n)}^{(k)} K^{(k)}[(2\pi)^{\frac{1}{k}+1} \sqrt[k]{nx}],$$

où N est un nombre positif, aussi grand que l'on voudra.

En désignant

$$x = Re^{i\omega},$$

on obtiendra, en vertu de (14),

$$\left|\sum_{n>N}^{\infty} S_{(n)}^{(k)} K^{(k)}[(2\pi)^{\frac{1}{k}+1} \sqrt[k]{nx}]\right| < M_2 \sum_{n>N}^{\infty} \frac{S_{(n)}^{(k)}}{n^{\rho+\frac{1}{k}}}$$

à conditions

$$\sqrt[k]{R} \geqslant \sqrt[k]{R_0} > 0, \qquad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

où R_0 est un nombre positif, pris arbitrairement.

Or, la série infinie:

$$\zeta(ks)\zeta\left(s - \frac{1}{k} + 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{(n)}^{(k)}}{n^s} \tag{16}$$

converge absolument pour

$$R(s) > \frac{1}{k}.$$

Donc, la série (9), dont la somme représente la fonction $\sigma(x)$, est uniformément convergente dans chaque domaine de variable x, défini par les inégalites (15).

Une des propriétés les plus importantes de la fonctiion $\sigma(x)$ est, comme nous allons le demontrer, le développement de cette fonction en des fractions rationnalles:

$$(17) \qquad \sigma(x) = -\frac{1}{4\pi x} - \frac{1}{2}\zeta(k) - \frac{1}{2k}\zeta\left(\frac{1}{k}\right)\frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{\sin\frac{\pi}{2k}} + \frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{(n)}^{(k)}}{x^2+n^2}.$$

En effet, des égalités (9), (12) et (16) on déduit la relation

$$\sigma(x) = 2\cdot(2\pi x)^{\frac{1}{k}-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho+\frac{1}{k}-i\infty}^{\rho+\frac{1}{k}+i\infty}\Gamma(ks)\,\Gamma\left(s-\frac{1}{k}+1\right)\zeta(ks)\,\zeta\left(s-\frac{1}{k}+1\right)\frac{\cos\frac{\pi s}{2}ds}{(2\pi)^{(k+1)s}\,x^s},$$

où $x > 0$.

A l'aide de la formule bien connue de Riemann

$$\zeta(1-z) = \frac{2\cos\frac{\pi z}{2}\,\zeta(z)\,\Gamma(z)}{(2\pi)^z},$$

on obtient:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\rho-i\infty}^{-\rho+i\infty}\frac{\zeta(s)\,\zeta(kz)\,ds}{2x\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^s}.$$

Prenons pour le contour de l'intégration le rectangle ABCD, dont les côtés verticaux passent respectivement par les points $s = -\rho$ et $s = \rho + 1$ $(0 < \rho < 1)$.
La fonction

$$\varphi(s) = \frac{\zeta(s)\,\zeta(ks)}{2x\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^s}$$

admet les nombres

$$s = 0;\quad s = \frac{1}{k},\quad s = 1$$

comme pôles simples, et les résidus correspondants sont

$$R_0 = \frac{1}{4\pi x},\quad R_{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2k}\zeta\left(\frac{1}{k}\right)\frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{\sin\frac{\pi}{2k}},\quad R_1 = \frac{1}{2}\zeta(k).$$

Soit 2δ la hauteur du rectangle ABCD.

En faisant croître δ intéfiniment on trouve que les intégrales

$$\int_{DC} \varphi(s)\, ds \quad \text{et} \quad \int_{AB} \varphi(s)\, sd$$

tendent vers zéro.

En vertu du théorème de Cauchy, on obtient

$$\sigma(x) = R_0 + R_{\frac{1}{k}} + R_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho+1-i\infty}^{\rho+1+i\infty} \frac{\zeta(s)\,\zeta(ks)}{2x \sin\frac{\pi s}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^s}\, ds.$$

Or, la série de Dirichlet

$$\zeta(s)\,\zeta(ks) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{(n)}^{(k)}}{n^s}$$

converge absolument pour $R(s) > 1$, et nous pouvons donc écrire e résultat précédent sous la forme:

$$\sigma(x) = \frac{1}{4\pi x} + \frac{1}{2}\zeta(k) + \frac{1}{2k}\zeta\left(\frac{1}{k}\right) \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{\sin\frac{\pi}{2k}} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{(k)}^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho+1-i\infty}^{\rho+1+i\infty} \frac{ds}{2x \sin\frac{\pi s}{2} \left(\frac{n}{x}\right)^s}.$$

En tenant compte de la formule de Mellin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho+1+i\infty}^{\rho+1-i\infty} \frac{\pi\, ds}{2 \sin\frac{\pi s}{2} \cdot m^s} = \frac{1}{1+m^2}, \quad \rho > 0,$$

on trouve le développement (17) pou le cas $x > 0$.

En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

et en choisissant pour $x^{\frac{1}{k}-1}$ la détermination

$$x^{\frac{1}{k}-1} = e^{\left(\frac{1}{k}-1\right)[\log r + \varphi i]}, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

on obtient, d'après le principe fondamental du prolongement analytique, le développement (16) à condition

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

4. Sur une formule sommatoire.

Soient α et β les points où un contour fermé Γ est coupé par l'axe réel. Désignons par $\alpha\gamma'\beta$ la partie superieure et par $\alpha\gamma''\beta$ la partie inferieure de ce contour.

En supposant

$$m-1<\alpha<m, \quad n<\beta<n+1,$$

on trouve, en vertu de (17),

$$(18) \qquad \sum_{n>\alpha}^{n>\beta} d_{(n)}^{(k)} f(n) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \zeta(k) + \frac{1}{k}\zeta\left(\frac{1}{k}\right) x^{\frac{1}{k}-1} \right\} f(k)\, dx +$$

$$+ \lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{\alpha_1\gamma'\beta_1} f(z)\,\sigma(-iz)\, dz + \int_{\alpha_2\gamma''\beta_2} f(z)\,\sigma(iz)\, dz \right\},$$

où

$$\alpha_1 = \alpha + i\delta, \quad \beta_1 = \beta + i\delta; \quad \alpha_2 = \alpha - i\delta; \quad \beta_2 = \beta - i\delta.$$

En remplacant dans cette égalité $\sigma(\pm iz)$ par la série infinie (9) et en admettant que l'interversion du signe de limite avec le signe de sommation soit légitime, on trouve la formule sommatoire suivante:

$$(19) \qquad \sum_{n>\alpha}^{n<\beta} d_{(n)}^{(k)} f(n) = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\zeta(k) + \frac{1}{k}\zeta\left(\frac{1}{k}\right) x^{\frac{1}{k}-1} \right] f(x)\, dx +$$

$$+ 4(2\pi)^{\frac{1}{k}-1} \sum_{n=1}^{\infty} S_{(n)}^{(k)} \int_{\alpha}^{\beta} L^{(k)} \left[(2\pi)^{\frac{1}{k}+1} \sqrt[k]{nx} \right] x^{\frac{1}{k}-1} f(x)\, dx\,.$$

En faisant $\alpha \to 0, \beta \to 0$ et en posant $f(z) = e^{-xz}$ dans cette formule, on aura en vertu (8), le résultat de M. Wigert:

$$(20) \qquad L_k(x) = \frac{\zeta(k)}{x} + \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\zeta\left(\frac{1}{k}\right)}{x^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{4} +$$

$$+(-1)^{\frac{k}{2}-1} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{k}}}{kx^{\frac{1}{k}}} \sum_{m=0}^{\frac{k}{2}-1} \left\{ e^{\frac{(2m+1)(k-1)\pi i}{2k}} \bar{L}_k\left(\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{x^{\frac{1}{k}}} e^{-\frac{(2m+1)\pi i}{2k}} \right) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{(2m+1)(k-1)\pi i}{2k}} \bar{L}_k\left(\frac{(2\pi)^{1+\frac{1}{k}}}{x^{\frac{1}{k}}} e^{\frac{(2m+1)\pi i}{2k}} \right) \right\}.$$

où

$$L_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{(n)}^{(k)} e^{-nx}, \quad \overline{L}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{(n)}^{(k)} e^{-\sqrt[k]{n}\, x}.$$

En appliquant la formule (18) avec

$$m=1, \quad 0<\alpha<1, \quad f(x)=\frac{1}{x^s}, \quad R(s)>1,$$

on obtient

$$\zeta(ks)\,\zeta(s)=\zeta(k)\frac{\alpha^{1-s}}{s-1}+\zeta\left(\frac{1}{k}\right)\frac{\alpha^{\frac{1}{k}-1}}{sk-1}+ \tag{21}$$

$$+\int_{\alpha}^{\alpha+i\infty}\frac{\sigma(-iz)}{z^s}\,dz+\int_{\alpha}^{\alpha-i\infty}\frac{\sigma(iz)}{z^s}\,dz,$$

expression qui représente $\zeta(ks)\zeta(s)$ dans tout le plan de la variable s.

En égalant α à l'unité, on obtient la représentation intégrale suivante:

$$\zeta(ks)\,\zeta(s)=\frac{\zeta(k)}{s-1}+\frac{\zeta\left(\frac{1}{k}\right)}{sk-1}+\int_0^{\infty}\frac{\sigma(t+i)\,e^{is\operatorname{arctg} t}+\sigma(t-i)\,e^{-is\operatorname{arctg} t}}{(1+t^2)^{\frac{s}{2}}}\,dt, \tag{22}$$

où

$$R(s)>1.$$

Об одном определенном интеграле и его приложении к теории сумматорных формул.

Н. С. Кошляков.

В настоящей заметке автор применяет свойства функции $L^{(k)}(x)$, определяемой интегралом

$$L_{(x)}^{(k)}=\int_0^{\infty}\cos\frac{1}{t^k}\cdot\cos xt\cdot\frac{dt}{t^k}, \quad k\geqslant 2,$$

к построению сумматорной формулы для сумм вида

$$\sum_{n>\alpha}^{n<\beta} d_{(n)}^{(k)} f(n),$$

где $d_{(n)}^{(k)}$ означает определенного вида числовую функцию.

Verschärfung eines Satzes von Woronoi.

O. Zitomirskij.

Einleitung.

In seinen Untersuchungen über positive quadratische Formen beweist Woronoi u. A. einen geometrischen Satz, welcher die Theorie einer gewissen Klasse von Teilungen des n'dimensionalen linearen Raumes in konvexe Bereiche auf die Theorie jener Formen zurückführt. [1] Den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet die Verallgemeinerung jenes Satzes auf eine umfassendere Klasse von Teilungen.

Es sei im n'dimensionalen linearen Raume ein n'dimensionales Punktgitter gegeben. Dann entspricht jedem Gitterpunkte das Gebiet der Raumpunkte, welche zu diesem Gitterpunkte näher sind als zu den übrigen. Solche Gebiete hat B. N. Delaunay Dirichletsche Bereiche genannt [2], weil das von Dirichlet auf die Reduktionstheorie der quadratischen Formen angewandte Sechseck [3] das erste Beispiel derselben bietet. Ein Dirichletsches Bereich des n'dimensionalen Raumes ist ein n'dimensionales konvexes Polyeder. Die Dirichletschen Bereiche eines n'dimensionalen Punktgitters sind gleich und parallel orientiert. Sie erfüllen den ganzen n'dimensionalen Raum, wobei sie nur in vollen Seitenräumen zusammenstossen, d. h., zwei Dirichletsche Bereiche haben alle Punkte eines Seitenraumes gemein, sobald sie einen inneren Punkt desselben gemein haben.

Allgemein nannte Woronoi Paralleloeder gleiche und parallel orientierte konvexe Polyeder, welche den ganzen Raum erfüllen, wobei sie nur in vollen Seitenräumen zusammenstossen. Dieser von Fedorow [4] eingeführte Name stammt von der leicht zu

---

[1] Cr. J., B. 134, ss. 212—273.

[2] Proc. of the Congress of Toronto p. 697.

[3] Cr. J., B. 40.

[4] Начала учения о фигурах (1885).

beweisenden Eigenshaft der Paralleloeder durch paarweise parallele n—1'dimensionale Seitenräume begrenzt zu sein.

Die Dirichletschen Bereiche sind nicht die einzig möglichen Paralleloeder; z. B. verwandelt eine beliebige Affinität ein Dirichletsches Bereich in ein Paralleloeder, welches im Allgemeinen schon kein Dirichletsches Bereich ist.

Nun hat Woronoi folgende Frage gestellt:

Ist jedes Paralleloeder einem Dirichletschen Bereiche affin?

Diese Frage hat Woronoi für Paralleloeder, welche er primitiv nennt, bejahend gelöst, und äusserte dabei die innere Ueberzeugung, dass die Antwort für alle Paralleloeder bejahend ist. B. N. Delaunay hat neuerdings, aus ganz anderen Prinzipien als Woronoi ausgehend, tiefgehende Untersuchungen über vierdimensionale Paralleloeder aufgestellt und alle diese Paralleloeder bestimmt. [5] Dabei hat er u. A. die Woronoische Vermutung rür $n \leqq 4$ in vollem Umfange bestätigt.

Wir wollen erklären, was Woronoi unter Primitivität versteht. Ein Paralleloeder R besitzt Seitenräume $P(\nu)$ von jeder Dimensionszahl $\nu = n-1,\ n-2, \ldots, 0$. Ein $P(n-2)$ ist der Schnitt zweier $P(n-1)$, ein $P(n-3)$ ist der Schnitt wenigstens dreier $P(n-1)$, u. s. w. Allgemein ist ein $P(\nu)$ $(\nu = n-2, \ldots, 0)$ der Schnitt von wenigstens ν $P(n-1)$. Daher gehört ein $P(\nu)$ des Paralleloeders R wenigstens $\nu+1$ Paralleloedern, denn er muss ja, ausser dem Paralleloeder R selbst, noch den ihm längs jenen $P(n-1)$ anliegenden Puralleloedern gehören. Wenn in einem $P(\nu)$ gerade $\nu+1$ Paralleloeder zusammenstossen, so heisst dieser $P(\nu)$ primitiv. Wenn ein $P(\nu)$ primitiv ist, so ist auch jeder ihn enthaltender $P(\nu+1)$ primitiv, denn sonst würden alle im $P(\nu)$ zusammenstossenden Paralleloeder in diesem $P(\nu+1)$ zusammenstossen, was ein Widerspruch ist. So fortfahrend, überzeugt man sich, dass alle einen primitiven $P(\nu)$ enthaltenden $P(\nu+1)$, $P(\nu+2) \ldots .$ $P(n-3)$ und $P(n-2)$ primitiv sind. Sind also alle $P(0)$, d. h. alle Ecken, eines Paralleloeders R primitiv, so sind es auch seine $P(1)$, $P(2), \ldots,$ $P(n-3)$ und $P(n-2)$. In diesem Falle heisst das Paralleloeder primitiv.

Eine bemerkenswerte Eigenthümlichkeit der Woronoischen Beweismethode ist die, dass sie die von H. Minkowsky bewiesene zentrale Symmetrie der Paralleloeder [6] nicht voraussetzt.

[5] Mém. de l'Acad. des Sc. Leningrad. (1929).

[6] Nachr. d. K. G. d. Wiss. Cöttingen, 1897, ss. 198—219,

Ich habe bemerkt, dass man die Woronoische Methode ohne Benutzung der Symmetrie so abändern kann, dass es nur die Primitivität aller $P(n-3)$ vorauszusetzen genügt.

Wenn man aber die Symmetrie benutzt, so kann man einen darauf fussenden Hilfssatz von B. N. Delaunay [7] heranziehen, und dies erlaubt den Woronoischen Satz auch dann zu beweisen, wenn man nur die Primitivität aller $P(n-2)$ voraussetzt. Durch Benutzung der Symmetrie lassen sich ausserdem manche Teile des Woronoischen Beweises durch einfachere Betrachtungen ersetzen. Den Inhalt dieser Abhandlung bildet eben der Beweis des Woronoischen Satzes für Paralleloeder, deren alle $P(n-2)$ primitiv sind.

Die darin enthaltene Verschärfung des Woronoischen Satzes wird durch Verwendung einer besonderen Fläche erreicht, welche ich „Philter" nenne (siehe §§ 7, 8).

In der Paralleloedertheorie bin ich ein Schüler von B. N. Delaunay. Wenn es mir also gelungen ist einen Satz dieser Theorie zu verschärfen, so verdanke ich es in hohem Masse seinem Einflusse. Es ist mir eine angenehme Pflicht diesen Umstand zu betonen.

Der Hilfssatz von B. N. Delaunay.

§ 1. Für das Folgende brauchen wir zu kennen, wie die Paralleloeder in den $P(n-1)$, $P(n-2)$ und $P(n-3)$ zusammenstossen können. Im Falle $n=3$ sind dies bzw. ihre Seitenflächen, Kanten und Ecken. Die möglichen Arten des Zusammenstossens sind für alle $n \geqslant 3$ dieselben. Um lange Erklärungen zu vermeiden, möge man immer an den Fall $n=3$ denken.

In einem $P(n-1)$ berühren sich immer zwei Paralleloeder. Die möglichen Arten des Zusammenstossens in einem $P(n-2)$ oder $P(n-3)$ hat B. N. Delaunay ermittelt.

In einem $P(n-2)$ können drei oder vier Paralleloeder zusammenstossen. Wir setzen aber im Folgenden fest, dass alle $P(n-2)$ primitiv sein sollen. Also bleibt nur der erste Fall möglich.

In einem $P(n-3)$ können die Paralleloeder in fünf Arten zusammenstossen. Von diesen kommem aber nur in zwei lauter primitive $P(n-2)$ vor. In der ersten giebt es vier Paralleloeder. Ihre Winkel beim $P(n-3)$ liegen einander so an, wie die Scheine der Seitenflächen eines Tetraeders aus einem inneren Punkte.

[7] Mém. de l'Acad. des Sc. Leningrad (1929).

In der zweiten giebt es sechs Paralleloeder. Ihre Winkel beim $P(n-3)$ liegen einander so an, wie die Scheine der Seitenflächen eines Parallelopipeds aus dessen Mittelpunkte, und sind einander ebenso paarweise symmetrisch.

Für eine spätere Anwendung brauchen wir nur zu bemerken, dass in beiden Fällen die gemeinsamen $P(n-1)$, der Paralleloeder, welche eins und dasselbe Paralleloeder berühren, sich alle in einem, von den $P(n-2)$ dieses Paralleloeders verschiedenen, $n-2$'dimensionalen linearem Raume treffen.

Konstruktion der Paralleloederfunktionen.

§ 2. Wir werden Vektorbezeichnungen gebrauchen. Dabei werden wir Skalare durch lateinische, Vektoren durch griechische Buchstaben bezeichnen, und skalare Produkte und Quadrate wie in der gewöhnlichen Algebra schreiben. Gelegentlich werden wir Punkte durch ihre Polvektoren in Bezug auf einen festen Pol andeuten. Insbesondere werden wir einen veränderlichen Punkt durch ξ und den Mittelpunkt eines Paralleloeders R_i durch λ_i bezeichnen.

Wenn der Raum in Dirichletsche Bereiche D_i geteilt ist, so besitzen die Abstandsquadrate $(\xi-\lambda_i)^2$ eines veränderlichen Punktes von ihren Mittelpunkten folgende Eigenschaft: die Funktion $(\xi-\lambda_i)^2$ ist im Innern des zugehörigen Bereiches D_i kleiner als jede andere Funktion $(\xi-\lambda_j)^2$.

Anstatt der quadratischen Funktionen $(\xi-\lambda_i)^2=\xi^2-2\lambda_i\xi+\lambda_i^2$ kann man die linearen Funktionen $\xi^2-(\xi-\lambda_i)^2=2\lambda_i\xi-\lambda_i^2$ einführen, welche folgende Eigenschaft besitzen: die Funktion $2\lambda_i\xi-\lambda_i^2$ ist im Innern des zugehörigen Bereiches D_i grösser als jede andere Funktion $2\lambda_j\xi-\lambda_j^2$.

An erster Stelle werden wir nun für eine beliebige Teilung des Raumes in Paralleloeder R_i mit lauter primitiven $P(n-2)$ ein System von linearen Funktionen $U_i(\xi)$ konstruieren, welche die Eigenschaft der Funktionen $2\lambda_i\xi-\lambda_i^2$ besitzen. Durch Multiplition mit -2 und Hinzufügung eines nur von ξ abhängigen Gliedes werden wir daraus ein System von Funktionen erhalten, welche die Eigenschaft der Funktionen $(\xi-\lambda_i)^2$ besitzen. Endlich werden wir diese Funktionen durch eine passend gewählte Affinität in die Funktionen $(\xi-\lambda_i)^2$ selbst überführen. Daraus wird aber der Woronoische Satz unmittelbar fliessen. Dies ist eben der Gedanke des Woronoischen Beweises.

§ 3. Satz 1. Wenn der Raum in Paralleloeder R mit lauter primitiven $P(n-2)$ geteilt ist, so lässt sich ein System von Funktionen $U_i(\xi)=\alpha_i\xi+c_i$ konstruieren, welche die Eigenschaft besitzen: die Funktion $U_i(\xi)$ ist im Innern des zugehörigen Paralleloeders R_i grösser als jede andere Funktion $U_j(\xi)$.

Man kann dieser Eigenschaft einen anderen Ausdruck geben, nämlich, dass die Differenz $U_j(\xi)-U_i(\xi)=(\alpha_j-\alpha_i)\xi+(c_j-c_i)$ im Innern des Paralleloeders R_i negativ, im Innern des Paralleloeders R_j positiv ist, oder auch, dass die Gleichung $U_j(\xi)-U_i(\xi)=$ $=(\alpha_j-\alpha_i)\xi+(c_j-c_i)=0$ die Gleichung eines die Paralleloeder R_i, R_j trennenden $n-1$'dimensionalen Raumes ist, in welcher der Normalvektor $(\alpha_j-\alpha_i)$ von der Seite R_i nach der Seite R_j hinweist.

Für zwei sich in einem $P(n-1)$ berührende Paralleloeder R_i, R_j ist $U_j(\xi)-U_i(\xi)=(\alpha_j-\alpha_i)\xi+(c_j-c_i)=0$ eine Gleichung dieses $P(n-1)$, in welcher der Normalvektor von der Seite R_i nach der Seite R_j hinweist. Die Normalgleichung $u_{ij}(\xi)=\varepsilon_{ij}\xi-$ $-p_{ij}=0$ dieses $P(n-1)$, in welcher ε_{ij} der von der Seite R_i nach der Seite R_j hinweisender Einheitsnormalvektor ist, ist aber gegeben. Also ist die Differenz $U_j(\xi)-U_i(\xi)=a_{ij}u_{ij}(\xi)$ gegeben, sobald der Modul a_{ij} des Normalvektors des $P(n-1)$ gegeben ist.

Bei der Konstruktion des Systems der Funktionen $U_i(\xi)$ werden wir nur der Bedingung zu genügen suchen, dass für je zwei sich in einem $P(n-1)$ berührende Paralleloeder R_i, R_j die Differenz $U_j(\xi)-U_i(\xi)$ im Innern des Paralleloeders R_i negativ, im Innern des Parelleloeders R_j positiv, oder, was damit gleichbedeutend ist, im Innern des Paralleloeders R_i negativ, auf dem Trennraume $P_{ij}(n-1)$ gleich Null sei. Die Gültigkeit dieser Bedingung für ein beliebiges Paar von sich auch nicht berührenden Paralleloedern R_i, R_j werden wir erst nach Beendigung der Konstruktion bestätigen.

§ 4. Von zwei sich in einem $P(n-1)$ berührenden Paralleloedern werden wir im Folgenden einfach sagen, dass sie sich berühren, dagegen von zwei sich in einem $P(\nu)$ von niedrigerer Dimension berührenden, dass sie zusammenstossen. Den Berührungsraum zweier sich berührender Paralleloeder R_i, R_j werden wir durch $P_{ij}(n-1)$ bezeichnen.

Es seien R_0, R_1 zwei Parallelceder, welche sich im $P_{01}(n-1)$ berühren. Wenn die Funktion U_0 und der Modul a_{01} gegeben sind, so ist auch die Funktion U_1 eindeutig bestimmt, denn es ist $U_1 = U_0 + a_{01} u_{01}$.

Es seien R_0, R_1, R_2 drei Parallelceder, welche in einem $P(n-2)$ zusammenstossen. Wenn die Funktion U_0 und der Modul a_{01} gegeben sind, so sind auch die Funktionen U_1, U_2 eindeutig bestimmt. In den Ausdrücken dieser Funktionen $U_1 = U_0 + a_{01} u_{01}$, $U_2 = U_0 + a_{02} u_{02}$ ist nämlich nur die Zahl a_{02} unbekannt. Die Vorderungen, welche sie befriedigen muss, sind folgende: a_{02} muss positiv sein; $U_2 - U_1 = a_{02} u_{02} - a_{01} u_{01}$ muss im Paralleloeder R_1 negativ, in allen Punkten des $P_{12}(n-1)$ gleich Null sein. In allen Punkten des $P(n-2)$ sind u_{01}, u_{02} beide gleich Null. Also ist es auch $a_{02} u_{02} - a_{01} u_{01}$, bei beliebiger Wahl von a_{02}. Wenn man also a_{02} so wählt, dass $a_{02} u_{02} - a_{01} u_{01}$ in einem weiteren Punkte ξ_0 von $P_{12}(n-1)$ gleich Null wird, d. h. a_{02} aus der Gleichung $a_{02} u_{02}(\xi_0) = a_{01} u_{01}(\xi_0)$ bestimmt, so wird $a_{02} u_{02} - a_{01} u_{01}$ in allen Punkten des $P_{12}(n-1)$ gleich Null sein, wie gefordert. Nun wollen wir dem Punkte ξ_0 eine spezielle Lage geben. Es sei ξ_1 ein innerer Punkt von $P_{01}(n-1)$ und ξ_2 ein innerer Punkt von $P_{02}(n-1)$. Die Strecke (ξ_1, ξ_2) verläuft im Innern des Paralleloeders R_0, und schneidet die Verlängerung des $P_{12}(n-1)$; den Schnittpunkt wollen wir eben für den Punkt ξ_0 nehmen. Dann sind $u_{01}(\xi_0)$, $u_{02}(\xi_0)$ beide negativ, und die Gleichung $a_{02} u_{02}(\xi_0) = a_{01} u_{01}(\xi_0)$ liefert für a_{02} einen positiven Wert, wie gefordert. Ein Punkt ξ, welcher die Gerade (ξ_1, ξ_2) in der Richtung ξ_1, ξ_2 durchläuft, überschreitet $P_{01}(n-1)$ im Punkte ξ_1 in der Richtung R_1, R_0 und $P_{02}(n-1)$ im Punkte ξ_2 in der Richtung R_0, R_2. Daher muss bei dieser Bewegung u_{01} beständig abnehmen und u_{02} beständig wachsen, also $a_{02} u_{02} - a_{01} u_{01}$ beständig wachsen. Hieraus folgt, dass $a_{02} u_{02} - a_{01} u_{01}$ im Paralleloeder R_1 negativ ist. Hiermit sind alle Vorderungen befriedigt.

Es seien nun R_1, $R_2 \ldots$ die Paralleloeder, welche ein gegebenes Paralleloeder R_0 in den $P(n-1)$ berühren, welche sich in einem $P(n-3)$ treffen. Wenn die Funktion U_0 und der Modul a_{01} gegeben sind, so sind auch in diesem Falle die übrigen Funktionen U_1, $U_2, \ldots$, eindeutig bestimmt. In den Ausdrücken dieser Funktionen $U_1 = U_0 + a_{01} u_{01}$, $U_2 = U_0 + a_{02} u_{02} \ldots$, sind zwar die Zahlen $a_{02}, \ldots$, unbekannt. Wir wissen aber (§ 1), dass die gemeinsamen Seitenräume $P_{12}(n-1)$, .., der Paralleloeder $R_1, R_2, \ldots$ sich in einem $n-2$'dimensionalen Raume schneiden, welcher mit keinem der sich im $P(n-3)$ treffenden $P(n-2)$ zusammenfällt. Wenn man in diesem Raume einen dem $P(n-3)$ nicht gehörenden Punkt ξ_0 wählt und die Zahlen $a_{02}, \ldots$, aus den Gleichungen $a_{02}u_{02}(\xi_0)=a_{01}u_{01}(\xi_0), \ldots$, bestimmt, so folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, dass für jedes Paar sich berührender Paralleloeder die Bedingung des § 3 erfüllt sein wird.

§ 5. Die Funktion $U_i=\alpha_i\xi+c_i$ des Paralleloeders R_i ist durch den Inbegriff des Punktes α_i und der Zahl c_i bestimmt. Wir wollen sie deshalb den Zahlpunkt des Paralleloeder R_i nennen. Entsprechend nennen wir: das Paar der Zahlpunkte der sich im $P_{ij}(n-1)$ berührenden Paralleloeder R_i, R_j — die Zahlstrecke des $P_{ij}(n-1)$; das Tripel der Zahlpunkte der in einem $P(n-2)$ zusammenstossenden Paralleloeder R_i, R_j, R_k — das Zahldreieck dieses $P(n-2)$; den Inbegriff der Zahlpunkte eines Paralleloeders R_i und der Paralleloeder $R_j, R_k \ldots$, welche es in den sämtlichen sich in einem $P(n-3)$ treffenden $P(n-1)$ berühren, — die Zahlpyramide dieses $P(n-3)$ des Paralleloeders R_i. Wenn man von den Zahlen c_i absieht, so erhält man wirkliche Punkte, Strecken, usw.

Wir wollen nun beweisen, dass die Zahlpunkte der sämtlichen ein gegebenes Paralleloeder R_0 in seinen $P(n-1)$ berührenden Paralleloeder $R_1, R_2, \ldots, R_\sigma$ eindeutig bestimmt sind, sobald der Zahlpunkt U_0 des Paralleloeders R_0 und die Länge a_{01} der Strecke (α_0, α_1) des Seitenraumes $P_{01}(n-1)$ gegeben sind.

§ 6. Mit Hilfe des Zahlpunktes U_0 und der Länge a_{01} lässt sich die Zahlpyramide Δ eines dem $P_{01}(n-1)$ gehörenden $P(n-3)$ konstruieren. Diesen $P(n-3)$ wollen wir mit $P_0(n-3)$ und seine Zahlpyramide Δ mit Δ_0 bezeichnen. Jeder andere $P(n-3)$ des Paralleloeders R_0 lässt sich mit $P_0(n-3)$ durch eine Kette $P_0(n-3), P_1(n-3), \ldots, P_{m-1}(n-3), P(n-3)$ von $P(n-3)$ des Paralleloeders R_0 verbinden, welche der Reihe nach durch $P(n-2)$ verbunden sind. Die Zahlpyramide Δ_0 enthält nun ein bestimmtes Zahldreieck des $P(n-2)$, welches $P_0(n-3)$ mit $P_1(n-3)$ verbindet, dieses Zahldreieck gehört einer bestimmten Zahlpyramide Δ_1 des $P_1(n-3)$, und so kann man fortfahren, bis man endlich die Zahlpyramide Δ des letzten $P(n-3)$ erhält. Bei gegebener Wahl der Zwischenkette $P_1(n-3), \ldots, P_{m-1}(n-3$

erhält man auf diese Weise eine bestimmte Zahlpyramide Δ. Wir wollen nun beweisen, dass die Zahlpyramide Δ von der Wahl der Zwischenkette nicht abhängt. Dies kommt darauf an, zu beweisen, dass für jede geschlossene Kette $P_0(n-3)$, $P_1(n-3)$, .., $P_{m-1}(n-3)$, $P(n-3) \equiv P_0(n-3)$ die Zahlpyramide Δ mit der Zahlpyramide Δ_0 identisch ist. Verbindet man zwei Glieder dieser geschlossenen Kette durch irgend eine Querkette, so genügt es den Satz für die beiden geschlossenen Ketten zu beweisen, welche aus der Querkette und den beiden durch ihre Endglieder bestimmten Teilketten der gegebenen geschlossen Kette zusammengesetzt sind. Für eine Kette, deren alle Glieder einem und demselben $P(n-1)$ gehören, ist aber die Richtigkeit des Satzes klar, denn die Zahlpyramide eines jeden Gliedes der Kette hat in diesem Falle mit der Zahlpyramide des vorhergehenden Gliedes eine bestimmte Zahlstrecke jenes $P(n-1)$ gemein, welche bereits durch die Zahlpyramide Δ, bestimmt ist und seinerseits die Zahlpyramide Δ bestimmt, wie auch die Zwischenkette gewählt werden möge. Alles kommt also darauf an, zu zeigen, dass jede geschlossene Kette mit Hilfe einer Reihe von Querketten sich immer auf mehrere geschlossene Ketten der zunächst erwähnten Art zurückführen lässt.

§ 7. Für diesen Zweck schlagen wir um einen inneren Punkt des Paralleloeders R_0 einen $n-1$'dimensionalen sphärischen Raum Σ und projizieren auf denselben mittels seiner Radien die Grenze des Paralleloeders R_0.

Dadurch wird jeder $P(\nu)$ des Paralleloeders R auf ein einfach zusammenhängendes Bereich $p(\nu)$ eines ν' dimensionalen sphärischen Raumes abgebildet.

Zwei Punkte eines $p(\nu)$ können offenbar nicht diametral entgegengesetzt sein, und der kleinste sie verbindende Kreisbogen ist immer ganz im $p(\nu)$ enthalten. Mann könnte die $p(\nu)$ konvexe Bereiche des sphärischen Raumes nennen.

Die $p(n-1)$ bilden eine Teilung des Raumes Σ, und die übrigen $p(\nu)$ sind Seitenräume derselben. Bei allseitiger Verlängerung eines $p(\nu)$ erhält man einen ν'dimensionalen sphärischen Raum, den wir mit $\bar{p}(\nu)$ bezeichnen wollen. Wir werden im Folgenden Schnitte und Verbindungen der $\bar{p}(\nu)$ und anderen sphärischen Räumen betrachten. Dabei sind bekanntlich dieselben Regeln, wie bei den vollen linearen Räumen anwendbar, mit dem einzigen Unterschiede, dass nicht mehr Punkte, sondern Paare entgegengesetzter Punkte als 0' dimensionale Räume zu betrachten sind[8]. Diesen Unterschied werden wir dadurch beseitigen, dass wir immer nur nichtentgegengesetzte Punkte verbinden, und nur die $p(\nu)$ selbst, nicht die $\overline{p}(\nu)$, durch andere sphärische Räume schneiden werden. Es wird also kein Missverständniss entstehen, wenn wir die Ausdrücke Kreislinie, Kreisbogen, Kugeloberfäche,.... durch die Ausdrücke Gerade Strecke, Ebene,... ersetzen.

Nun entspricht einer geschlossenen Kette $P_0(n-3)$, $P_1(n-3),\ldots, P_{m-1}(n-3)$, $P(n-3)$ von $P(n-3)$ des Paralleloeders R_0, welche der Reihe nach durch $P(n-2)$ verbunden sind, eine geschlossene Kette $p_0(n-3)$, $p_1(n-3),\ldots, p_{m-1}(n-3)$. $p(n-3)$ von $p(n-3)$ des Raumes Σ, welche der Reihe nach durch $p(n-2)$ verbunden sind. Man wähle im Innern eines jeden $p_i(n-3)$ irgend einen Punkt M_i und im Raume Σ, ausserhalb der verbindenden $\overline{p}(n-2)$, irgend einen Punkt S. Dann verbinde man je zwei nächstfolgende Punkte M_i, M_{i+1}[9] durch die kleinste Strecke $M_i M_{i+1}$ und jeden Punkt M der Strecke $M_i M_{i+1}$ mit dem Punkte S durch die kleinste Strecke SM. Wir müssen beweisen, dass dies möglich ist. In der Tat, die Punkte M_i, M_{i+1} gehören bzw. $p_i(n-3)$, $p_{i+1}(n-3)$, also auch dem sie verbindenden $p(n-2)$. Daher sind sie nicht entgegengesetzt, und man kann sie durch eine kleinste Strecke $M_i M_{i+1}$ verbinden. Die Strecke $M_i M_{i+1}$ gehört diesem $p(n-2)$. Also gehört auch der Punkt M diesem $p(n-2)$ und somit gehört der entgegengesetzte Punkt der Verlängerung $\overline{p}(n-2)$. Weil aber der Punkt S keinem verbindenden $\overline{p}(n-2)$ gehört, so ist er dem Punkte M nicht entgegengesetzt und kann mit ihm durch eine kieinste Streche SM verbunden werden. Die Strecken SM erfüllen ein gewöhnliches sphärisches Dreieck $SM_i M_{i+1}$. Wenn man die Dreiecke $SM_i M_{i+1}$ der Reihe nach mit einander verbindet, so entsteht die einfach zusammenhängende Fläche $S(M_0 M_1 \ldots M_{m-1} M_0)$, mit dem Streckenzuge $M_0 M_1 \ldots M_{m-1} M_0$

---

[8] Diese Regeln sind bekanntlich in der Formel $a+b=m+d$ enthalten, wo a, b, m und d bzw. die Dimensionszahlen zweier gegebener Räume, des Verbindungsraumes und des Schnittraumes sind, wobei $d=-1$ gesetzt wird, falls die gegebenen Räume punktfremd sind.

[9] Man setze allgemein $M_i \equiv M_j$, $p_i(n-3) \equiv p_j(n-3)$, $P_i(n-3) \equiv P_j(n-3)$ für $i \equiv j$ (Mod. m).

zum Rande und mit dem Punkte S im Innern. Diese Fläche wollen wir Philter nennen. Natürlich sehen wir die einzelnen Strecken SM auf dem Philter als nur im Punkte S zusammenhängend, obgleich sie cich im Raume Σ auch gänzlich oder zum Teil decken können.

Nun wollen wir zeigen, dass die Punkte S, M_i so gewählt werden können, dass jede Gerade SM_i mit allen vom $\overline{p}_i(n-3)$ verschiedenen $\overline{p}(n-3)$ des Raumes Σ punktfremd sei, mit dem $\overline{p}_i(n-3)$ aber nur den Punkt M_i gemein habe, und dass jede Ebene $SM_i M_{i+1}$ mit allen $p(n-4)$ des Raumes Σ punktfremd sei. Bis jetzt haben wir nur festgesetzt, dass die Punkte M_i im Innern der entsprechenden $p_i(n-3)$ und der Punkt S im Raume Σ und dabei in keinem verbindenden $\overline{p}(n-2)$ der Kette $p_i(n-3)$ liegen sollen. Nun wollen wir den Punkt S innerhalb eines bestimmten Bereiches $p_s(n-1)$ und dabei in keinem $n-2$' dimensionalen Raume, der zwei verschiedene $\overline{p}(n-3)$ enthält, wählen. Dies ist offenbar möglich, denn die Anzahl jener Räume ist endlich, so dass sie $p_s(n-1)$ nur in eine endliche Anzahl von Stücken teilen können, und es genügt den Punkt S im Innern irgend eines solchen Stückes zu wählen. Zu den $n-2$' dimensionalen Räumen, welche den Punkt S nicht enthalten können, gehören gewiss alle $\overline{p}(n-2)$, denn jeder $p(n-2)$ ist von mehreren $p(n-3)$ begrenzt. Um so weniger kann der Punkt S einem $p(n-3)$ gehören, denn in jedem $p(n-3)$ stossen mehrere $p(n-2)$ zusammen. Also ist der Schein eines jeden $\overline{p}(n-3)$ aus dem Punkte S ein $n-2$'dimensionaler Raum. Die Scheine aller vom $\overline{p}_i(n-3)$ verschiedener $\overline{p}(n-3)$ enthalten den $\overline{p}_i(n-3)$ nicht, denn sonst wäre ein Schein ein zwei verschiedene $\overline{p}(n-3)$ verbindender $n-2$' dimensionaler Raum, was durch die Wahl des Punktes S ausgeschlossen ist. Also schneiden alle Scheine den $\overline{p}_i(n-3)$ in $n-4$' dimensionalen Räumen. Diese können den $p_i(n-3)$ nur in eine endliche Anzahl von Stücken teilen, denn ihre eigene Anzahl ist endlich. Wir beschränken den Punkt M_i von nun an auf das innere irgend eines solchen Stückes σ_i. Dadurch ist bereits gesichert, dass die Gerade SM_i mit allen vom $\overline{p}_i(n-3)$ verschiedenen $\overline{p}(n-3)$ punktfremd ist, denn sie gehört keinem Scheine dieser $\overline{p}(n-3)$ aus dem Punkte S. Auch ist es gesichert, dass sie mit dem $\overline{p}_i(n-3)$ nur den Punkt M_i gemein hat, denn sonst wäre auch der Punkt S im $\overline{p}_i(n-3)$ enthalten, was wir schon ausgeschlossen haben. Es bleibt nur die Punkte M_i innerhalb der Stücke σ_i so zu wählen, dass jede Ebene $SM_i\,M_{i+1}$ mit allen $\overline{p}\,(n-4)$ punktfremd sei. Die Geraden SM_i sind es schon, weil sie mit allen von $\overline{p}_i(n-3)$ verschiedenen $\overline{p}\,(n-3)$ punktfremd sind und $\overline{p}_i(n-3)$ nur in einem inneren Punkie M_i des $p_i(n-3)$ schneiden, und daher mit den Begrenzungen $\overline{p}\,(n-4)$ der $p\,(n-3)$ keine Punkte gemein haben können. Daher sind die Scheine aller $\overline{p}\,(n-4)$ aus allen Geraden SM_i $n-2$'dimensionale Räume. Wir wählen nun den Punkt M_0 innerhalb des ihm zugewiesenen Stückes beliebig. Von den Scheinen der $\overline{p}\,(n-4)$ aus der Geraden SM_0 kann keiner $\overline{p}_1(n-3)$ enthalten, denn sonst hätte $\overline{p}_1(n-3)$ mit der Geraden SM_0 mindestens einen Punkt gemein, was ausgeschlossen ist. Also schneiden diese Scheine $\overline{p}_1(n-3)$ in $n-4$'dimensionalen Räumen. Diese können das dem Punkte M_1 zugewiesene Stück σ_1 nur in eine endliche Anzahl von neuen Stücken teilen, denn ihre eigene Anzahl ist endlich. Wir wählen den Punkt M_1 im Innern eines dieser Stucke τ_1. Dann ist die Ebene SM_0M_1 mit allen $\overline{p}\,(n-4)$ punktfremd, denn sie gehört keinem Scheine der $\overline{p}\,(n-4)$ aus der Geraden SM_0. Wenn wir auf dieselbe Weise der Reihe nach die Punkte M_2, $M_3, \ldots, M_{m-2}$ wählen und den Punkt M_{m-1} auf eins der durch den Punkt M_{m-2} bestimmten neuen Stücke τ_{m-1} beschränken, so werden auch die Ebenen $SM_1M_2, \ldots, SM_{m-2}\,M_{m-1}$ mit allen $\overline{p}\,(n-4)$ punktfremd sein. Den letzten Punkt M_{m-1} müssen wir innerhalb des ihm zugewiesenen Stückes τ_{m-1} so wählen, dass auch die letzte Ebene $SM_{m-1}\,M_0$ mit allen $\overline{p}\,(n-4)$ punktfremd sein möge. Das Stück τ_{m-1} kann aber durch die Scheine aller $p\,(n-4)$ aus der Geraden SM_0 nur in eine endliche Anzahl von weiteren Stecken geteilt werden, und es genügt den Punkt M_{m-1} im Innern eines dieser Stücke zu wählen. [10]

Eine Ebene $SM_i\,M_{i+1}$ kann also mit einem $\overline{p}\,(n-4)$ keine Punkte gemein haben. Um so weniger kann sie mit seinen Beg-

[10] Die vorstehenden Betrachtungen setzen nur scheinbar voraus, dass $n \geqslant 4$ ist; sie gelten noch im Falle $n=3$, wo es nur überflüssig wird von $n-4$'dimensionalen Räumen zu sprechen.

renzungen $\bar{p}(n-5)$, mit deren Begrenzungen $\bar{p}(n-6)$, usw. gemeinsame Punkte haben. Mit einem $p(n-3)$ hat die Ebene SM_iM_{i+1} immer einen einzigen Punkt gemein; denn hätte sie mit ihm eine Gerade oder eine Ebene gemein, so würde sie mit jedem bergenzenden $\bar{p}(n-4)$ bzw. einen Punkt oder eine Gerade gemein haben. Mit einem $\bar{p}(n-2)$ hat die Ebene SM_iM_{i+1} immer eine Gerade gemein; denn hätte sie mit ihm eine Ebene gemein, so würde sie mit jedem begrenzenden $\bar{p}(n-3)$ eine Gerade gemein haben.

Aus diesem Sachverhalt lässt sich leicht folgern, dass eine Ebene SM_iM_{i+1} mit einem $p(n-1)$ entweder keinen Punkt oder ein Vieleck ω gemein hat, dessen Seiten und Ecken bzw. Schnitte von $p(n-2)$ und $p(n-3)$ dieses $p(n-1)$ sind. Wir wollen darauf der Kürze halber nicht näher eingehen. Die Vielecke ω bilden eine Teilung der Ebene SM_iM_{i+1}; darunter ist notwendig das Vieleck ω_s, der Schnitt mit $p_s(n-1)$, enthalten.

Aus der Teilung der ganzen Ebene SM_iM_{i+1} wird durch die Strecken SM_i, SM_{i+1}, M_iM_{i+1} eine Teilung des Dreiecks SM_iM_{i+1} ausgeschnitten. Die Teile können ganze Vielecke oder durch die Strecken SM_i, SM_{i+1} abgeschnittene Stücke derselben sein. Mit Ausnahme der Vielecksecken M_i, M_{i+1} liegen alle Vielecksecken im Innern des Dreiecks SM_iM_{i+1}; im Innern der Strecken SM_i, SM_{i+1} können nur Stückenecken liegen; im Innern der Strecke M_iM_{i+1} giebt es gar keine Ecken. Ganze Vielecke können also entweder ganz im Innern des Dreiecks SM_iM_{i+1} liegen, oder nur der Strecke M_iM_{i+1} anliegen. Man kann sie in topologischer Hinsicht mit Kreisen vergleichen und für dessen Stücke eine entsprechende Terminologie einführen. Von Stücken giebt es dreierlei Arten: das immer vorhandene Stück des Vielecks ω_s ist sektorförmig, und hat zwei im Punkte S zusammenstossende Stücke der Strecken SM_i, SM_{i+1} zu Nebenseiten; die übrigen Stücke sind entweder segmentförmig, falls sie nur einer von den Strecken SM_i, SM_{i+1} anliegen, und haben dann innere oder den Enden M_i, M_{i+1} anliegende Stücke der Strecken SM_i, SM_{i+1} zu Basen; oder sind sie zonenförmig, falls sie den beiden Strecken SM_i, SM_{i+1} anliegen, und haben dann Paare von inneren Stücken der Strecken SM_i, SM_{i+1} zu Basen.

Durch Verbindung der Dreiecke SM_iM_{i+1} längs der Strecken SM_i gelangt man zur Teilung des ganzen Philters. Ganze Vielecke verbinden sich gar nicht, denn sie liegen den Strecken SM_i gar nicht an; dies sind kreisförmige Gebiete des Philters. Stücke von Vielecken verbinden sich längs Stücken von Strecken SM_i. Die sektorförmigen Stücke der Vielecke ω_s verbinden sich längs ihrer Nebenseiten zu einem kreisförmigen Gebiete Ω_s. Die übrigen Stücke verbinden sich längs ihrer Basen, und es können dabei zwei Fälle eintreten: entweder giebt es zwei segmentförmige Stücke und möglicherweise noch einige dazwischenliegende zonenförmige Stücke, was einen kreisförmigen Bereich ergiebt; oder es giebt nur lauter zonenförmige Stücke, was ein ringförmiges, das Bereich Ω_s umschlingendes Bereich ergiebt. Alle Philterbereiche sind Schnitte von Bereichen $p\,(n-1)$; ein gegebenes Bereich $p\,(n-1)$ kann zwar das Philter in mehreren Philterbereichen schneiden, doch liegen diese immer getrennt. Das Rand eines Philterbereiches kann, ausser den immer vorhandenen Vielecksecken, auch noch Stückenecken besitzen. Wir werden fortan nur die ersteren als Bereichsecken ansehen. Entsprechend werden wir die dazwischenliegenden Stücke des Randes als Bereichsseiten ansehen, unbekümmert darum, ob sie gerade oder gebrochen sind. Dann sind die Bereichsecken und Bereichsseiten bzw. Schnitte von $p\,(n-3)$ und $p\,(n-2)$ desjenigen $p\,(n-1)$, dessen Schnitt das Bereich selbst ist.

Wir wollen uns nun von den ringförmigen Bereichen befreien. Alle diese Bereiche umschlingen das Bereich Ω_s und daher umschlingen sie auch einander. Wir vereinigen nun das äusserste ringförmige Bereich mit allen von ihm umschlungenen ringförmigen und kreisförmigen Bereichen zu einem einzigen Bereiche. Auf diese Weise werden alle ringförmige und einige kreisförmige Bereiche durch ein einziges kreisförmiges Bereich ersetzt, dessen Rand das äussere Rand des vorigen äussersten ringförmigen Bereiches ist. Das neue Bereich ist zwar nicht mehr der Schnitt eines einzigen $p\,(n-1)$, doch sind seine Ecken und Seiten wie vorher Schnitte von $p\,(n-3)$ und $p\,(n-2)$ eines bestimmten $p\,(n-1)$, desjenigen nämlich, dessen Schnitt das äusserste ringförmige Bereich war. Also entspricht bei der neuen Teilung wie bei der alten jedem Philterbereiche ein bestimmtes Bereich $p\,(n-1)$.

Das Einanderangehören von Ecken, Seiten und Bereichen auf dem Philter bedingt das Einanderangehören der entsprechenden

$p(n-3)$, $p(n-2)$ und $p(n-1)$. Letzteres bedingt aber das Einanderangehören der entsprechenden $P(n-3)$, $P(n-2)$ und $P(n-1)$. Einer Kette von Ecken, welche der Reihe nach durch Seiten verbunden sind, entspricht also eine Kette von $P(n-3)$, welche der Reihe nach durch $P(n-2)$ verbunden sind. Insbesondere entspricht der Kette $M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}, M_0$ die Ausgangskette $P_0(n-3), P_1(n-3), \ldots, P_{m-1}(n-3), P_0(n-3)$. Nun ist aber nicht nur das Philter selbst, sondern auch alle Philterbereiche einfach zusammenhängend. Man kann also das Philter mit Hilfe einer Reihe von Querschnitten, welche allein aus Bereichsseiten zusammengesetzt sind, in die Philterbereiche zerlegen. Daraus lässt sich aber sofort ablesen, welche Reihe von Querketten einzuführen ist, um die Kette $P_0(n-3)$, $P_1(n-3), \ldots, P_{m-1}(n-3)$, $P_0(n-3)$ durch je einem $P(n-1)$ angehörende Ketten von $P(n-3)$ ersetzen zu können. Hiermit ist der Satz des § 6 bewiesen.

Damit ist aber auch der Satz des § 5 bewiesen, denn die Kettenkonstruktion ist so beschaffen, dass die Zahlpyramiden zweier $P(n-3)$, welche einem gegebenen der Paralleloeder R_0, $R_1, R_2, \ldots, R_0$ gehören, immer den Zahlpunkt jenes Paralleloeders gemein haben, und die Gültigkeit der Bedingung des § 3 ergiebt sich daraus, dass alle konstruierten Zahlstrecken konstruierten Zahlpyramiden gehören.

§ 8. Schliesslich wollen wir beweisen, dass die Zahlpunkte der sämtlichen Paralleloeder der Raumteilung eindeutig bestimmt sind, sobald der Zahlpunkt U_0 eines Paralleloeders R_0 und die Länge a_{01} der Strecke (α_0, α_1) eines seiner Seitenräume $P_{01}(n-1)$ gegeben sind.

Es sei $P_0(n-2)$ einer der dem $P_{01}(n-1)$ gehörenden $P(n-2)$. Mit Hilfe des Zahlpunktes U_0 und der Länge a_{01} lässt sich das Zahldreieck δ_0 des $P_0(n-2)$ eindeutig bestimmen. Jeder $P(n-2)$ lässt sich nun mit dem $P_0(n-2)$ durch eine Kette $P_0(n-2)$, $P_1(n-2), \ldots, P_{m-1}(n-2)$, $P(n-2)$ von $P(n-2)$ verbinden, welche der Reihe nach durch $P(n-1)$ verbunden sind. Zu jeder solchen Kette gehört eine bestimmte Kette von Zahldreiecken $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-2}, \delta$, von der Beschaffenheit, dass je zwei nächstfolgende Zahldreiecke δ die Zahlstrecke desjenigen $P(n-1)$ gemein haben, welcher die entsprechenden beiden $P(n-2)$ verbindet. Nun müssen wir beweisen, dass das letzte Zahldreieck δ von der Zwischenkette $P_1(n-2), \ldots, P_{m-1}(n-2)$ unanhängig ist.

Wie im § 6 genügt es zu beweisen, dass für eine geschlossene Kette $P_0(n-2)$, $P_1(n-2), \ldots, P_{m-1}(n-2)$, $P(n-2) \equiv P_0(n-2)$ das Schlusszahldreieck mit dem Anfangssdreiecke zusammenfällt, und beim Beweise darf man mit Hilfe von Querketten die gegebene Kette durch andere ersetzen. Für eine Kette, deren sämtliche $P(n-2)$ einem und demseblen Paralleloeder angehören, leuchtet aber die Richtigkeit des Satzes aus dem soeben bewiesenen Satze des § 5 sofort ein. Es bleibt also nur zu beweisen, dass eine beliebige Kette mit Hilfe von passend gewählten Querketten auf mehrere Ketten jener Art zurückgeführt werden kann.

Dies lässt sich wieder durch Konstruktion eines Philters beweisen. Diese ist derjenigen des § 7 ganz ähnlich, und wir wollen uns damit begnügen, die Unterschiede anzudeuten. Man bedarf jetzt keines sphärischen Hilfsraumes; die Konstruktion lässt sich im gegebenen linearen Raume vollziehen. Ebenso wie damals der sphärische Raum Σ in $p(n-1)$ geteilt war, ist jetzt der gegebene lineare Raum in Paralleloeder R geteilt. Die Anzahl aller $p(n-1)$ war aber endlich, was bei den Paralleloedern R nicht der Fall ist. Dieser Unterschied lässt sich aber dadurch beseitigen, dass man nur diejenigen Paralleloeder in Betracht zieht, welche sich im Innern irgend eines die gegebene Kette enthaltenden konvexen Körpers befinden. Beim Verbinden und Schneiden sind die Regeln für volle lineare Räume auch jetzt nicht ohne weiteres anwendbar. Es genügt aber zu bemerken, dass im Innern eines Paralleloeders R oder eines $P(\nu)$ keine unendlichfernen Punkte liegen können. Des Weiteren unterscheidet sich die Konstruktion des Philters der Kette $P_0(n-2)$, $P_1(n-2), \ldots, P_{m-1}(n-2)$, $P(n-2)$ von der Konstruktion des Philters der Kette $p_0(n-3)$, $p_1(n-3), \ldots, p_{m-2}(n-3)$, $p(n-3)$ nur dadurch, dass alle in Betracht kommenden Dimensionszahlen um 1 höher sind.

Jeder Teil des neuen Philters wird einem Paralleloeder entsprechen, und die Seiten und Ecken jenes Teiles bzw. den $P(n-1)$ und $P(n-2)$ dieses Paralleloeders. Dies erlaubt die gegebene Kette von $P(n-2)$ durch einzelnen Paralleloedern gehörende Ketten von $P(n-2)$ zu ersetzen. Hiermit ist die Eindeutigkeit der Zahldreieckskonstruktion bewiesen.

Damit ist aber der ganze Satz bewiesen, denn die Konstruktion ist so beschaffen, dass die Zahldreiecke zweier $P(n-2)$ eines und desselben Paralleloeders immer den Zahlpunkt dieses

Paralleloeders gemein haben, und die Gültigkeit der Bedingung des § 3 ergiebt sich daraus, dass alle konstruierten Zahlstrecken konstruierten Zahldreiecken gehören.

§ 9. Es bleibt ncch zu beweisen, dass das soeben konsrtuierte System von Zahlpunkten den Vorderungen des Satzes 1 in vollem Umfange genügt.

Es seien R_0, R_m zwei Paralleloeder und ξ_0, ξ_{m+1} irgendwelche innere Punkte derselben Die Strecke (ξ_0, ξ_{m+1}) trifft eine endliche Anzahl von Paralleloedern. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die Strecke (ξ_0, ξ_{m+1}) nur $P(n-1)$ dieser Paralleloeder trifft oder auch $P(\nu)$ von niedrigeren Dimensionen. Im ersten Falle schneidet die Strecke jene $P(n-1)$ in inneren Punkten derselben. Dadurch wird die Strecke (ξ_0, ξ_{m+1}) in eine Reihe von Strecken (ξ_0, ξ_1), $(\xi_1, \xi_2), \ldots, (\xi_m, \xi_{m+1})$ zerlegt, deren jede im Innern eines Paralleloeders verläuft. Insbesondere gehören die Strecken (ξ_0, ξ_1), (ξ_m, ξ_{m+1}) bzw. den Paralleloedern R_0, R_m. Wenn $R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}, R_m$ die ganze Reihe der Paralleloeder ist, so berühren sich je zwei nächstfolgende Paralleloeder R_i, R_{i+1} im $P(n-1)$ welcher von der Strecke (ξ_0, ξ_{m+1}) im Punkte ξ_{i+1} geschnitten wird. Die entsprechende Differenz $U_{i+1}-U_i=(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\xi+(c_{i+1}-c_i)$ ist im Innern der Strecke (ξ_i, ξ_{i+1}) und daher auch im Punkte ξ_0 negativ. Daher ist auch $U_m - U_0 = \sum_{0}^{m-1}{}_i\,(U_{i+1}-U_i)$ im Punkte ξ_0 negativ, also U_0 im Punkte ξ_0 grösser als U_m, in Übereinstimmung mit der Bedingung des Satzes 1. Es bleibt also nur die Gültigkeit der Bedingung des Satzes 1 im zweiten Falle zu bestätigen, wo die Strecke (ξ_0, ξ_{m+1}) die von ihr getroffenen Paralleloeder auch in $P(\nu)$ von Dimensionen $\nu \leqq n-2$ trifft. Die Scheine dieser $P(\nu)$ aus der Cerade (ξ_0, ξ_{m+1}) übertreffen nicht die Dimension $n-1$, und überdies ist ihre Anzahl endlich Es gehen also durch die Gerade (ξ_0, ξ_{m+1}) unendlich viele Ebenen welche diese $P(\nu)$ nur in Punkten der Gerade (ξ_0, ξ_{m+1}) selbts treffen. Es sei ε eine solche Ebene. Bei jeder Parallelverschiebung in einer in der Ebene ε aber nicht in der Geraden (ξ_0, ξ_{m+1}) liegenden Richtung hört die Strecke (ξ_0, ξ_{m+1}) nicht auf jene $P(\nu)$ zu treffen, wenn aber die Verschiebung genügend klein ist, verlässt sie nicht das Gebiet der von ihr getroffenen Paralleloeder, und ihre Endpunkte ξ_0, ξ_{m+1} verlassen bzw. nicht das Innere der Paralleloeder R_0, R_m. Es seien (ξ'_0, ξ'_{m+1}), (ξ''_0, ξ''_{m+1}) die von der Strecke

(ξ_0, ξ_{m+1}) bei zwei gleichen und entgegengesetzten Verschiebungen von der zuletzt besprochenen Art angenommenen Lagen. Dann gehören, erstens, die Strecken (ξ'_0, ξ'_{m+1}), (ξ''_0, ξ''_{m+1}) zum ersten Falle, und man hat gewiss $U_0(\xi'_0) > U_m(\xi'_0)$, $U_0(\xi''_0) > U_m(\xi''_0)$. Zweitens, ist $\xi_0 = \frac{1}{2}(\xi'_0 + \xi''_0)$. Durch Addition und Halbierung der zuletzt gewonnenen Ungleichheiten ergiebt sich also $U_0(\xi_0) >$ $> U_m(\xi_0)$. Hiermit ist die Gültigkeit der Bedingung des Satzes 1 allgemein bewiesen.

Nähere Bestimmung der Paralleloederfunktionen.

§ 10. Jedes Paralleloeder R_i der Raumteilung ist durch seinen Mittelpunkt λ_i vollständig bestimmt. Wir wollen den Pol in den Mittelpunkt eines Paralleloeders R_0 verlegen, also $\lambda_0 = 0$ setzen. Dann ist λ_i der Vektor der Verschiebung, welche das Paralleloeder R_0 ins Paralleloeder R_i überführt. Nun setzen vir $\alpha_0 = c_0 = 0$ und geben der Strecke eines $P(n-1)$ des Paralleloeder R_0 irgend eine bestimmte Länge. Dann sind für jedes Paralleloeder R_i die zugehörigen α_i, c_i vollständig bestimmt. Also sind α_i, c_i die dem Punkt h_i entsprechenden Werte zweier im Mittelpunktsgitter definierten Funktionen: $\alpha_i = \alpha(\lambda_i)$, $c_i = c(\lambda_i)$. Diese wollen wir näher bestimmen.

Wir wollen drei Transformationen betrachten, welche in den Formeln

$$\xi - \lambda_i = \xi' = -\xi''$$

enthalten sind. Den Punkt ξ erhält man aus dem Punkte ξ' durch eine Verschiebung um den Vektor λ_i, den Punkt ξ' aus dem Punkte ξ'' durch eine Symmetrie in Bezug auf das Zentrum $\lambda_0 = 0$. Wenn man ξ mit dem Mittelpunkte λ eines Paralleloeders R zusammenfallen lässt, so erhält man

$$\lambda - \lambda_i = \lambda' = -\lambda''$$

Weil aber die Mittelpunkte der Paralleloeder ein n'dimensionales Gitter bilden, zeigt dies, dass auch λ', λ'' Mittelpunkte von gewissen Paralleloedern R', R'' sind. Daraus ist ersichtlich, dass das Paralleloeder R' mit dem um λ_i verschobenen Paralleloeder R zusammenfällt, die Paralleloeder R', R'' in Bezug auf das Zentrum $\lambda_0 = 0$ symmetrisch sind. Wir wollen nun die gegenseitige Abhängigkeit erst der Punkte α, α', α'' später der Zahlen c, c', c'' der Paralleloeder R, R', R'' bestimmen.

Es seien $P_{hk}(n-1)$, $P'_{hk}(n-1)$, $P''_{hk}(n-1)$ die Berührungsräume von irgendwelchen homologen Paralleloederpaaren (R_h, R_k), (R'_h, R'_k), (R''_h, R''_k). Sie sind alle drei parallel, nur ist die Normalrichtung R_h, R_k von $P_{hk}(n-1)$ mit der Normalrichtung R'_h, R'_k von $P'_{hk}(n-1)$ dieselbe, dagegen zur Normalrichtung R''_h, R''_k von $P''_{hk}(n-1)$ entgegengesetzt. Es ist also die Normalstrecke (α_h, α_k) mit der Normalstrecke (α'_h, α'_k) gleichgerichtet, zur Normalstrecke (α''_h, α''_k) entgegengesetzt gerichtet. Dies zeigt, dass das Punktsystem (α) dem Punktsystem (α') gleichsinnig ähnlich, dem Punktsystem (α'') ungleichsinnig ähnlich ist. Daraus erhält man für ganz beliebige, auch sich nicht berührende Paralleloeder:

$$\alpha_l - \alpha_m = \mu(\alpha'_l - \alpha'_m) = -\mu'(\alpha''_l - \alpha''_m),$$

wo μ, μ' positive Konstanten sind. Man setze hier $\lambda'_l = \lambda_j$ also $\lambda_l = \lambda_i + \lambda_j$, $\lambda''_l = -\lambda_j$ und $\lambda'_m = 0$, also $\lambda_m = \lambda_i$, $\lambda''_m = 0$. Man erhält:

$$\alpha(\lambda_i + \lambda_j) - \alpha(\lambda_i) = \mu\alpha(\lambda_j) = -\mu'\alpha(-\lambda_j).$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichheit λ_j durch $-\lambda_j$, so ergiebt sich sofort $\mu = \mu' = 1$, und man erhält:

$$\alpha(\lambda_i + \lambda_j) = \alpha(\lambda_i) + \alpha(\lambda_j),\ \alpha(-\lambda_j) = -\alpha(\lambda_j). \tag{1}$$

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eine Basis des Mittelpunktgitters. Dann ist allgemein:

$$\lambda = l_1 \lambda_1 + l_2 \lambda_2 + \ldots + l_m \lambda_n, \tag{2}$$

wo die Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Koordinaten des Mittelpunktes in Bezug auf das n'Bein $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind. Mit Hilfe der Formeln (1) erhält man entsprechend:

$$\alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_n\alpha_n. \tag{3}$$

Also ist α eine lineare Funktion von λ. Diese Funktion hat den Rang n. Denn es können, z. B., die Normalstrecken der sämtlichen $P(n-1)$ eines Paralleloeders nicht in einem linearen Raume von niedrigerer Dimension als n liegen; sonst würden die zu diesem Raume normalen Strahlen aus inneren Punkten des Paralleloeders dessen Grenzen nicht treffen. Die Punkte α bilden also auch ein n'dimensionales Gitter, von welchem α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine Basis ist.

Es seien ξ, ξ' entsprechende Punkte von entsprechenden Seitenräumen P_{hk} $(n-1)$, P'_{hk} $(n-1)$. Man hat dann:

$$(\alpha_h - \alpha_k)\,\xi + (c_h - c_k) = 0, \quad (\alpha_h - \alpha_k)\,\xi' + (c'_h - c'_k) = 0,$$

und hieraus bekommt man:

$$(c_h - c_k) - (c'_h - c'_k) = -(\alpha_h - \alpha_k)\,(\xi - \xi') = -(\alpha_h - \alpha_k)\,\lambda_i.$$

Durch Addition von solchen Formeln erhält man auch für sich nicht berührende Paralleloeder:

$$(c_l - c_m) - (c'_l - c'_m) = -(\alpha_l - \alpha_m)\,\lambda_i.$$

Dies giebt für denselben Fall wie in der Formel (1):

$$c\,(\lambda_i + \lambda_j) - c\,(\lambda_i) - c\,(\lambda_j) = -\alpha_j\,\lambda_i.$$

Vertauscht man hier λ_i, λ_j, so erhält man:

$$\alpha_i\,\lambda_j = \alpha_j\,\lambda_i. \tag{4}$$

Dies zeigt, das die lineare Funktion $\alpha_i = \alpha(\lambda_i)$ symmetrisch ist.

Nun können wir auch die Funktion $c_i = c\,(\lambda_i)$ bestimmen. Der Gleichung eines P $(n-1)$, in welchem sich zwei Paralleloeder R_h, R_k berühren,

$$(\alpha_h - \alpha_k)\,\xi + (c_h - c_k) = 0$$

genügt die Mitte $\frac{1}{2}$ $(\lambda_h + \lambda_k)$ der Mittelpunktslinie jener Paralleloeder.

Also ist:

$$c_h - c_k = -\frac{1}{2}(\alpha_h - \alpha_k)\,(\lambda_h + \lambda_k) = -\frac{1}{2}(\alpha_h\,\lambda_h - \alpha_k\,\lambda_k + \alpha_h\,\lambda_k - \alpha_k\,\lambda_h) = -\frac{1}{2}(\alpha_h\,\lambda_h - \alpha_k\,\lambda_k),$$

denn die beiden letzten Glieder heben sich wegen (4). Durch Addition von solchen Formeln erhält man auch für sich nicht berührende Paralleloeder:

$$c_l - c_m = -\frac{1}{2}(\alpha_l\,\lambda_l - \alpha_m\,\lambda_m).$$

Setzt man hier $\lambda_m=0$ also auch $\alpha_m=c_m=0$, so erhält man:

$$c_l=-\frac{1}{2}\alpha_l\lambda_l.$$

Diese Formel gilt für ein beliebiges Paralleloeder. Wir wollen sie lieber ohne Index schreiben:

(5) $$c=-\frac{1}{2}\alpha\lambda.$$

Setzt man (2), (3) in (5) ein, so ergiebt sich:

$$c=-\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{ij}\,\alpha_i\lambda_j\,l_i\,l_j=-\frac{1}{2}\sum_1^n A_{ij}\,l_i\,l_j,$$

wo wegen (4) $A_{ij}=A_{ji}$ ist.

Der Vektor α ist der Gradient der quadratischen Form c, denn seine kovarianten Komponenten in Bezug auf das n'Bein $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind $\alpha\lambda_i=\sum_1^n{}_j\,\lambda_i\,\alpha_j\,l_j=\sum_1^n{}_j\,A_{ij}\,l_j=-\frac{dc}{dl_i}$. Daraus schliesst man, dass die Form c den Rang n hat.

Im Innern des Paralleloeders R_0 ist die Funktion $U_0\equiv 0$ grösser, als jede andere Funktion $U=\alpha\xi+c$. Dies gilt insbesondere im Mittelpunkte des Paralleloeders R_0. Also ist $c<0$ für jedes $\lambda\neq 0$, d. h. die Form c ist negativ.

Beweis des Woronoischen Satzes.

11. Wir haben bewiesen, dass die Funktion $U_i(\xi)$ im Innern des Paralleloeders R_i grösser ist als jede andere Funktion $U_j(\xi)$. Daher ist die Funktion $\alpha(\xi)\xi-2\,U_i(\xi)$ im Innern des Paralleloeders R_i kleiner als jede andere Funktion $\alpha(\xi)\xi-2\,U_j(\xi)$. Wir wollen die Funktion $\alpha(\xi)\xi-2\,U(\xi)$ umformen:

$$\alpha(\xi)\xi-2\,U(\xi)=\alpha(\xi)\xi-2\alpha(\lambda)\xi+\alpha(\lambda)\lambda=\alpha(\xi)\xi-\alpha(\lambda)\xi-\alpha(\xi)\lambda+$$
$$+\alpha(\lambda)\lambda=[\alpha(\xi)-\alpha(\lambda)](\xi-\lambda)=\alpha(\xi-\lambda)\cdot(\xi-\lambda)=-2c(\xi-\lambda)=$$
$$=\sum_1^n{}_{ij}\,A_{ij}\,(x_i-l_i)\,(x_j-l_j).$$

Wenn man den Raum affin transformiert, so drücken sich die Koordinaten x, l der ursprünglichen Punkte linear aus durch die Koordinaten x', l' der transformierten Punkte, und der Wert $-2\,c\,(\xi-\lambda)$ der ursprünglichen Funktion ist dem Werte $-2\,c'\,(\xi'-\lambda')$ der transformierten Funktion gleich. Also ist die Funktion

$-2c'(\xi'-\lambda'_i)$ im Innern des transformierten Paralleloeders R'_i kleiner als jede andere Funktion $-2c'(\xi'-\lambda'_j)$. Aber die Funktion $-2c(\xi-\lambda)$ ist eine positive quadratische Form vom Range n in den Differenzen $(x-l)$. Man kann also erreichen, dass —

$$-2c'(\xi'-\lambda')=\sum_1^n {}_i\,(x'_i-l'_i)^2=(\xi'-\lambda')^2$$ wird. Dies zeigt, dass die Paralleloeder R' Dirichletsche Bereiche sind. Wir haben also den verlangten Satz gewonnen, nämlich:

Satz II. Alle Paralleloeder mit lauter primitiven P $(n-2)$ sind Dirichletschen Bereichen affin.

Обобщение одной теоремы Вороного.

О. К. Житомирский.

Доказывается теорема:

Если все $n-2$'мерные грани параллелоэдра примитивны, то соответствующим аффинным преобразованием его можно превратить в область Дирихле.

ОТЗЫВЫ О КНИГАХ, ПОСТУПИВШИХ В РЕДАКЦИЮ.

L. Lichtenstein. Grundlagen der Hydromechanik (Berlin Verlag v. Julius Springer, 1929, XVI + 506 + 1 ss. mit 54 Textfiguren).

Рецензируемая книга является XXX томом издаваемой фирмой Springer'а серии: „Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen".

Свою задачу автор определяет как попытку дать математически удовлетворительное и соответствующее современному состоянию науки изложение основ гидромеханики, не отодвигая на задний план и физическую сторону вопроса.

Первые три главы посвящены математическим, четвертая—механическим основаниям теории, V и VI главы трактуют кинематику непрерывной среды VII — X главы посвящены гидростатике и гидродинамике, наконец XI глава содержит теоремы существования.

Написанная известным специалистом книга содержит, естественно, синтез ряда оригинальных работ и исследований автора, однако необходимо отметить и внимание, уделенное автором новейшим гидродинамическим работам других ученых, в том числе русских ученых Н. М. Гюнтера и А. А. Фридмана.

L. Bieberbach. Theorie der Differentialgleichungen (Berlin, Springer, 1926, 2 Auflage).

Книга известного берлинского профессора содержит две главы посвященные обыкновенным дифференциальным уравнениям первого и второго порядка, и две,—посвященные уравнениям в частных производных тех же порядков. Особенно интересны две первые главы, где в сравнительно элементарной форме трактуются трудные вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений.

L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie I B. Die Elemente (1923). II. B. Moderne Funktionentheorie (1927) (Teubner in Berlin).

Как и другие учебники автора, книга дает изложение современного состояния избранного отдела науки. Особенно интересен второй том, содержащий между прочим главы о конформном преобразовании, униформизации, аналитическом продолжении, Римановых зетафункциях.

L. Bieberbach. Einführung in die konforme Abbildung (Berlin Göschen № 768, 2 Auflage (1927).

Маленькая книжка, предназначенная для студента, физика, инженера и трактующая трудную задачу конформного преобразования со всей возможной элементарностью. с многочисленными примерами, трудность коих возрастает постепенно.

Edmund Landau. Vorlesungen über Zahlentheorie (Drei Bände, Hirzel).

Превосходная книга, отличающаяся изумительным богатством содержания. Автор ее не только один из крупнейших специалистов в этой области, но и несравненный мастер сжатого, но точного и ясного изложения.

Книга содержит все главнейшие классические результаты теории чисел и сверх того все существенные завоевания аналитической теории чисел новейшего времени. Из содержания первого тома можно отметить подробное изложение метода Hardy и Littlewood'a и применений его к задачам Гольдбаха и Варинга. Последний вопрос дополнен изложением работы Виноградова, относящейся к нему. Второй том содержит изложение новейших достижений в теории распределения простых чисел и в теориях, связанных со счетом целых точек в некоторых областях. В третьем томе, посвященном теории алгебраических чисел, следует отметить изложение работ Axel Thue и Siegel'я, а также изложение исследований, относящихся к знаменитой теореме Фермата.

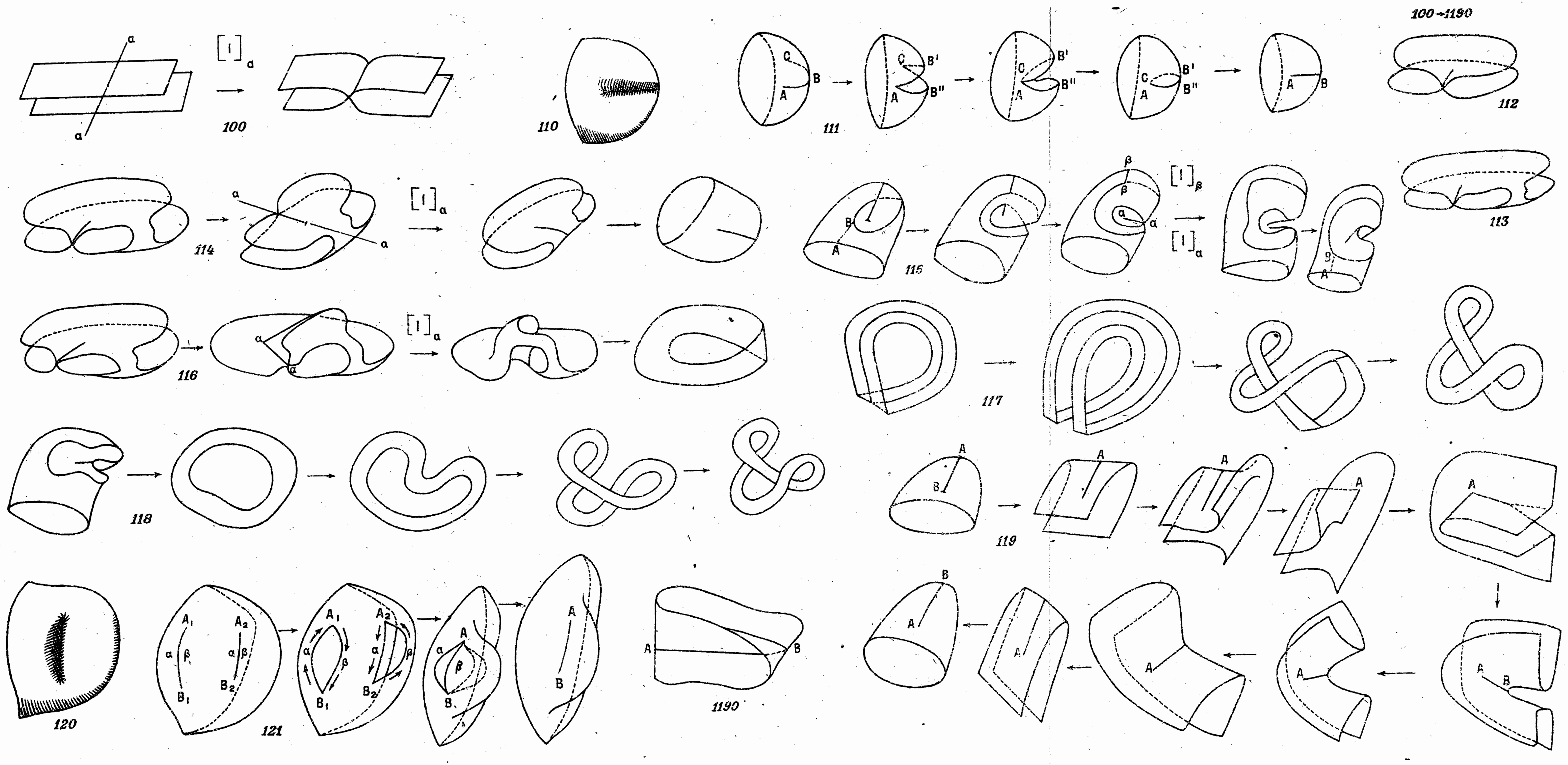
ОГЛАВЛЕНИЕ II ТОМА

ВЫПУСК 1.

Стр.

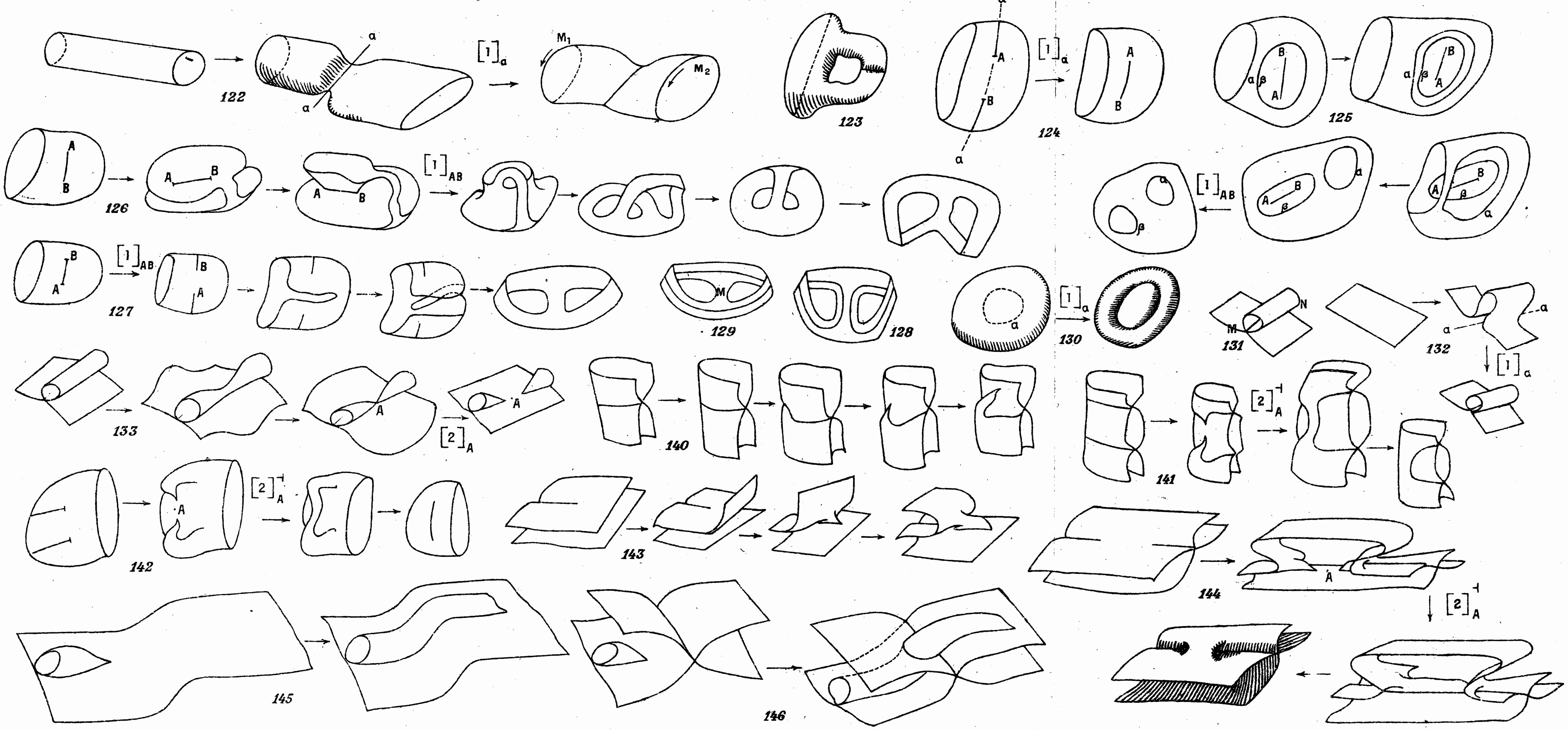
ВЫПУСК II

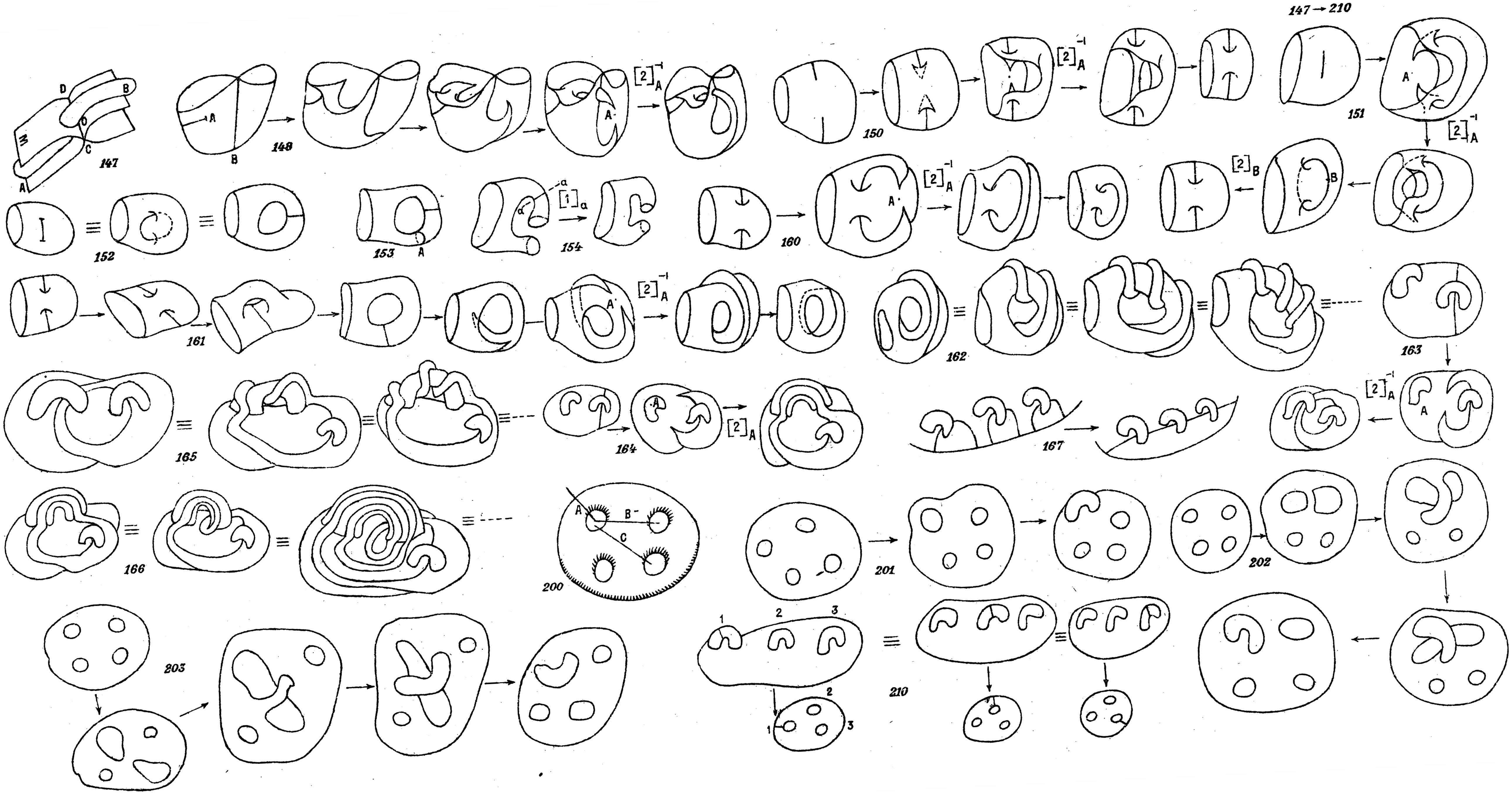
Стр.



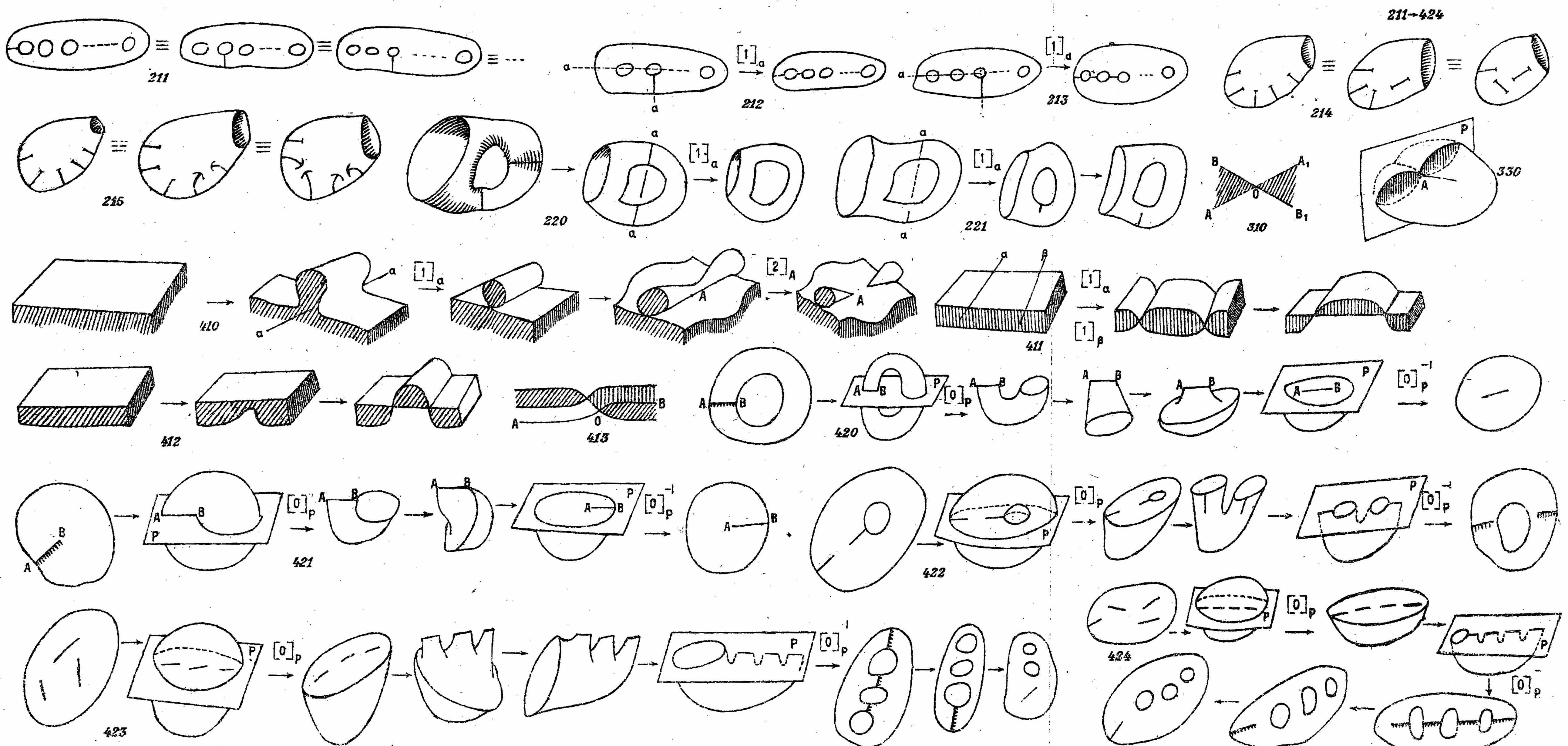
100→1190
100
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
1190

122→146


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
140
141
142
143
144
145
146
[1]α
[1]AB
[2]A
A
B
α
β
M
N
M1
M2



147 → 210
147
A
B
C
D
148
[2]A -1
A·
150
151
152
153
154
[1]a
160
[2]B
B
161
162
163
164
[2]A
165
166
167
200
A
B
C
201
202
203
210
1
2
3


211→424
211
[1]a
212
[1]a
213
214
215
220
[1]a
221
[1]a
310
330
410
[1]a
[2]A
411
[1]a
[1]β
412
413
420
[0]p
421
422
423
424