

40-60-2.309.

ПРОТОКОЛЫ

С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО

МАТЕМАТИЧЕСКАГО

ОБЩЕСТВА.

1890—1899.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія В. Киршбаума, Дворц. пл., д. М-ва Финансовъ.

1899.

Протоколъ засѣданія 20 октября 1890 года.

Среди лицъ, интересующихся математическими науками, созрѣла мысль устроить въ С.-Петербургѣ Математическое Общество. Съ этою цѣлью 20 октября 1890 года, по приглашенію В. И. Шиффъ, на ея квартире собрались слѣдующія лица: В. Г. Имшенецкій, О. А. Баклундъ, Ю. В. Сохонскій, А. А. Марковъ, П. Е. Рошинъ, Д. А. Граве, В. В. Витковскій, П. М. Новиковъ, И. Л. Пташицкій, Д. Ф. Селивановъ, Н. А. Забудскій, И. В. Мещерскій, И. А. Клейберъ, В. И. Станевичъ, И. И. Ивановъ, Н. П. Коломійцевъ, В. И. Шиффъ и П. А. Шиффъ. Сверхъ того получена телеграмма отъ Н. Я. Цингера съ выражениемъ сочувствія зарождающемуся обществу и сожалѣнія, что онъ не можетъ присутствовать на этомъ засѣданіи; К. А. Поссе, А. Н. Коркинъ, Д. К. Бобылевъ и А. М. Ждановъ увѣдомили, что они не могутъ присутствовать на этомъ засѣданіи, причемъ Д. К. Бобылевъ просялъ включить въ число отдѣловъ математики, которые будутъ подлежать занятіямъ общества, — математическую физику.

Въ этомъ засѣданіи происходило слѣдующее:

1) Присутствовавшіе просили В. Г. Имшенецкаго руководить занятіями въ этомъ засѣданіи и сообщить собранію, какимъ образомъ возникло, при его содѣйствіи, математическое общество въ Харьковѣ. В. Г. Имшенецкій исполнилъ желаніе присутствовавшихъ.

2) Происходили выборы членовъ бюро, причемъ выбраны: предсѣдателемъ В. Г. Имшенецкій, товарищемъ предсѣдателя — Ю. В. Сохонскій и секретаремъ — П. А. Шиффъ.

3) Обсуждался вопросъ о цѣляхъ общества и о желательности вообще учрежденія его. Относительно послѣдняго вопроса были высказаны мнѣнія за и противъ учрежденія общества.

4) Обсуждался вопросъ, гдѣ собирается для слѣдующихъ засѣданій общества.

При этомъ предсѣдатель заявилъ, что, имѣя въ виду удобство большинства членовъ, и желая поэтому, чтобы засѣданія происходили въ центральномъ по возможности мѣстѣ, онъ обратился къ Директору Физического Кабинета Академіи Наукъ Генриху Ивановичу Вильду съ просьбою разрѣшить обществу собираться въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ. На эту просьбу Г. И. Вильдъ не только изъявилъ согласіе, но обѣщалъ заботиться о нѣкоторыхъ удобствахъ, необходимыхъ для запятій общества, для чего нужно только его заблаговременно уведомлять о днѣ засѣданія. Кромѣ того необходимо на это испросить разрѣшеніе Его Императорскаго Высочества Президента Академіи Наукъ. Испросить это разрѣшеніе у Его Императорскаго Высочества взялъ на себя предсѣдатель общества.

Заявленіе предсѣдателя было встрѣчено весьма сочувственно присутствовавшими и рѣшено выразить Г. И. Вильду признательность общества за его согласіе устроить его засѣданія въ физическомъ кабинетѣ Академіи Наукъ.

5) Для засѣданія рѣшено собираться одинъ разъ въ мѣсяцъ, въ день, по возможности, однообразный, если возможно, послѣ 15-го числа.

6) Рефераты допускаются по слѣдующимъ отдѣламъ математики:

- 1) по чистой математикѣ,
- 2) по теоретической механикѣ,
- 3) по теоретической астрономіи,
- 4) по математической физикѣ.

Рефераты должны быть направлены къ секретарю, который по указанію предсѣдателя и его товарища, устанавливаетъ имъ очередь и сообщаетъ членамъ, какие рефераты будутъ доложены въ данномъ засѣданіи.

7) Въ новые члены общества избираются лица по предложению членовъ общества.

8) О днѣ и часѣ засѣданія секретарь извѣщаетъ членовъ поѣстками. Слѣдующее засѣданіе назначено 20 ноября.

Протоколъ засѣданія 20 ноября 1890 года.

1) Секретарь прочелъ протоколъ прежняго засѣданія и списокъ членовъ общества; всѣхъ членовъ оказалось 36.

2) Предсѣдатель сообщилъ собранію: 1) что Его Императорское Высочество Президентъ Академіи Наукъ разрѣшилъ обществу имѣть свои засѣданія въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ, и 2) что объ основаніи С.-Петербургскаго математическаго общества имъ пресѣдателемъ доложено Господину Министру пароднаго просвѣщенія, причемъ Его Сиятельство Господинъ Министръ, выразивъ сочувствіе обществу, сказалъ, что общество, если желаетъ, можетъ не торопиться представлениемъ на утвержденіе устава, и что до утвержденія устава общества — никакихъ препятствій его занятіямъ не предвидится.

3) Обсуждался вопросъ слѣдуетъ ли назначить для засѣданій общества, имѣющихъ быть одинъ разъ въ мѣсяцъ, какой нибудь опредѣленный день недѣли, или же слѣдуетъ фиксировать число мѣсяца.

Имѣя въ виду, что при назначеніи для засѣданій какогонибудь дня недѣли, многіе члены, вслѣдствіе своихъ занятій, не въ состояніи будутъ вовсе посѣщать засѣданія общества, собраніе постановило назначить засѣданія общества на каждое 15-е число мѣсяца, если къ тому не встрѣтится препятствій.

4) Для покрытия пѣкоторыхъ мелкихъ расходовъ собраніе постановило сдѣлать складчину по одному рублю, предоставивъ секретарю, если сумма окажется недостаточною, доложить объ этомъ обществу.

5) В. Г. Имшепецкій сообщилъ собранію содержаніе законченной имъ работы: «Объ интегрированіи общихъ линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій и о способѣ находженій вспомогательныхъ уравненій, изъ которыхъ одно есть известное союзное уравненіе Лагранжа, другія же аналогичны уравненію Лагранжа».

6) Слѣдующее засѣданіе назначено на 15-е декабря.

Протоколъ засѣданія 15 декабря 1890 г.

Въ этомъ засѣданіи были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ. «Объ интегрированіи системы совокупныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ втораго порядка вида:

$$a \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \Delta_2 U_1 = \frac{\partial^2 U_1}{\partial t_2} + X_1(x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \Delta_2 U_2 = \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + X_2(x_1, \dots x_n)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial x_n} + \Delta_2 U_n = \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} + X_n(x_1, x_2 \dots x_n),$$

гдѣ: $\theta = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial U_n}{\partial x_n}$; $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$;

a — постоянное».

2) И. И. Ивановъ. «О нѣкоторыхъ суммахъ, зависящихъ отъ простыхъ чиселъ».

3) Г. Ф. Вороной, по поводу сообщенія И. И. Иванова, привезъ нѣкоторая библиографическая справки.

4) Д. Ф. Селивановъ. «О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ». Были изложены новыя доказательства теоремъ, относящихся къ вопросу о разложеніи корня уравненія 2-й степени въ непрерывную дробь.

5) Были предложены и приняты въ члены общества: Аксель Робертовичъ Бонсдорфъ, Вѣра Владиміровна Щиглева и Николай Николаевичъ Пироговъ.

6) Слѣдующее засѣданіе назначено на 15 января.

Протоколъ засѣданія 15 января 1891 г.

1) Были предложены и приняты въ члены общества: Николай Йльевичъ Старынкевичъ, Сергѣй Евгеньевичъ Савичъ, Александръ Ивановичъ Гольденбергъ и Александръ Васильевичъ Муромцевъ.

2) Присланы въ даръ обществу слѣдующія сочиненія: 1) Бугаевъ. Одна общая теорема теоріи алгебраическихъ кривыхъ высшаго порядка, 2) Бугаевъ и Лахтинъ. Объ уравненіяхъ пятой степени, разрѣшаемыхъ въ радикалахъ.

3) Д. Ф. Селивановъ, возвратясь изъ Москвы, заявилъ, что Московское Математическое Общество просило его передать привѣтствіе и выразить сочувство С.-Петербургскому Математическому Обществу.

4) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) А. Д. Путята. «Замѣчаніе относительно формулъ, выражаютъ соотношеніе между радиусами кривизнъ нормальныхъ сѣченій поверхности». Была выведена мнемоническая формула для суммы и произведенія кривизнъ нормальныхъ сѣченій.

б) Г. Ф. Вороной. «Объ опредѣленіи суммы квадратичныхъ вычетовъ простаго числа p — вида: $4m+3$ при помощи чиселъ Бернуллі». Было показано, что соответствующая сумма R можетъ быть опредѣлена изъ слѣдующаго сравненія первой степени по простому модулю p :

$$\left(4 \frac{R}{p} + 1 \right) \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} 4B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$$

$B_{\frac{p+1}{4}}$ — обозначаетъ $\left(\frac{p+1}{4}\right)^c$ Бернулліево число

Такъ какъ $\frac{R}{p}$ положительно и всегда меньше $\frac{p}{2}$, то наименьшее положительное рѣшеніе указанного сравненія вполнѣ опредѣляетъ величину $\frac{R}{p}$.

в) Н. Н. Пироговъ. «О примѣненіи счисления вѣроятностей къ аналитической механикѣ». Заявлено о слѣдующихъ теоремахъ:

1) Безконечно малое измѣненіе начального состоянія системы N тѣлъ (или N частицъ), если $N > 2$, производить конечное измѣненіе траекторій ея частицъ;

2) Дифференціальные уравненія движенія системы изъ N частичъ, въ общемъ случаѣ, кромѣ извѣстныхъ десяти, уже больше не имѣютъ аналитическихъ интеграловъ;

3) Траекторіи частицъ такої системи, въ общемъ случаѣ, имѣютъ характеръ случайно начертанныхъ кривыхъ и потому въ изслѣдованію ихъ свойствъ приложимо счисленіе вѣроятностей.

Протоколъ засѣданія 15 февраля 1891 г.

1) Предсѣдатель сообщилъ собранію о потерѣ, которую наука понесла въ лицѣ члена корреспондента Академіи Наукъ, профессора стокгольмскаго университета С. В. Ковалевской, и предложилъ собранію почтить память усопшей.

Собраніе почтило память С. В. Ковалевской вставаніемъ съ мѣста.

2) Были предложены и приняты въ члены общества: Викторъ Николаевичъ Стрекаловъ и Иванъ Францевичъ Синайльло.

3) Въ письмѣ на имя предсѣдателя проф. С. П. фонъ Глазенапъ сообщилъ, что Францъ Рейнгольдовичъ Бенкенъ желаетъ принести въ даръ обществу книги. Предсѣдатель поручилъ секретарю общества снести съ г. Бенкеномъ по этому поводу; при этомъ г. Бенкенъ прислалъ въ даръ обществу слѣдующія книги:

Lacroix. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1818.

Sawitsch. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Berechnung der Beobachtungen. 1863.

Minding. Handbuch der Differential — und Integral-Rechnung 1836.

Minding. Anfangsgründe der höheren Arithmetik.

Fort und Schlömilch. Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Auflage 1863.

Schlömilch. Handbuch der algebraischen Analysis. 3-e Auflage 1862.

Dienegger. Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 2-e Auflage 1861.

Dienegger. Die Differential — und Integralrechnung. 2-e Auflage 1862.

Schneuse. Die Theorie und Auflösung der höhern algebraischen und der transcendenten Gleichungen. 1850.

Magnus. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. I und II Theil. 1833.

Schlömilch. Grundzüge der Geometrie des Maasses. 3-e Auflage 1859.

Durège. Theorie der elliptischen Functionen. 1861.

Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. 2-e Auflage. 1864.

Baltzer. Die Elemente der Mathematik. 2-e Auf. 1865.

Heimling. Studien zur Integralrechnung. 1866.

Steiner. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. 1832.

Brioschi. Theorie der Determinanten. 1856.

Собраніе рѣшило выразить Ф. Р. Бенкену признательность общества за его даръ.

Д. Ф. Селивановъ доставилъ отдельный оттискъ его статьи: «О функцияхъ разностей корней данного уравненія».

4) Предсѣдатель прочелъ письмо, адресованное на его имя Харьковскимъ Математическимъ Обществомъ, въ которомъ сообщается, что Харьковское Математическое Общество, будучи уведомлено объ открытии деятельности С.-Петербургскаго Математического Общества, постановило выразить послѣднему его живое сочувствіе и искреннія пожеланія быстрыхъ и блестящихъ успѣховъ въ достижениіи научныхъ цѣлей; а также надежду, что единство цѣлей и взаимность интересовъ будутъ всегда служить прочностью основою для связи и спошений обоихъ обществъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ оно прислало для библиотеки С.-Петербургскаго Общества одинъ экземпляръ II-ой серии сообщеній харьковскаго математического общества.

Собраніе просило предсѣдателя письменно поблагодарить Харьковское Математическое Общество отъ имени С.-Петербургскаго Общества за выраженія сочувствіе и пожеланія, а также за высланныя сообщенія.

5) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) И. А. Клейберъ. «Объ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ». Гауссъ высказалъ ту мысль, что для опредѣленія вѣковыхъ возмущеній въ движепіи какой-нибудь планеты подъ вліяніемъ притяженія, оказываемаго на нее другою планетою, можно замѣнить возмущающую планету эллиптическимъ кольцомъ, распредѣляя массу притягивающей планеты вдоль ея орбиты пропорционально времени, употребляемому планетою на прохожденіе каждого элемента. Однако никто не пробовалъ примѣнить этотъ принципъ къ дѣйствительному вычисленію вѣковыхъ возмущеній.

Если возмущающая планета описываетъ круговую орбиту, то ее можетъ замѣнить равномѣрное круговое кольцо, притяженіе котораго имѣеть характеръ центральной силы. Такимъ образомъ можетъ быть найдено въ конечной формѣ, въ квадратурахъ, уравненіе промежуточной орбиты тѣла весьма малой массы, движущагося подъ вліяніемъ двухъ тѣлъ произвольныхъ массъ, описывающихъ около общаго центра тяжести окружности круговъ, если взятое тѣло движется въ плоскости этихъ круговъ.

Притяженіе кругового кольца радиуса R на внутреннюю точку, отстоящую на разстояніе r отъ центра кольца, — есть:

$$F = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{(1+k')^2}{2k'(1-k')} (E - k'K) \quad \dots \quad (1),$$

гдѣ: m — масса кольца, E и K — эллиптические интегралы, модуль которыхъ k и дополнительный модуль k' зависятъ отъ отношенія $r:R$, а именно:

$$k' = \frac{R-r}{R+r}.$$

Вѣковые возмущенія въ движепіи массы M сводятся къ перемѣщенію линіи анеидъ. Для этого перемѣщенія изъ написанной формулы получается слѣдующее выраженіе:

$$\Delta\theta = m \frac{1-k'}{2} \left(E \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k'^2} \right) - K \right) \quad \dots \quad (2),$$

вѣрное, если орбита M — близка къ кругу.

Прилагая эту формулу къ опредѣленію перемѣщенія перигелія земли подъ вліяніемъ Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, получены числа, весьма близкія, во всѣхъ случаяхъ,

кромѣ Сатурна, къ тѣмъ, которые найдены Leverrier обыкновеннымъ разложеніемъ пертурбаціонной функции въ рядъ, а именно:

Перемѣщеніе перигелія земли подъ вліяніемъ:

	По формуле (2).	у Leverrier.
Марса	0",0187	0",0189
Юпитера	0",1182	0",1166
Сатурна	0",0055	0",0031
Урана	0,000098	0,00009
Нептуна	0,000042	0,00004

б) Д. К. Бобылевъ. «О движепіи по шероховатой горизонтальной плоскости полаго шара, заключающаго въ себѣ врачающійся волчокъ, ось котораго неподвижна по отношенію къ шару».

Предполагая, что катаніе шара совершаются безъ скольженія, будемъ въ этомъ случаѣ имѣть шесть связей обыкновенныхъ и два условія катанія безъ скольженія, такъ что число интегрированій, которая придется выполнить для решенія вопроса, будетъ равно десяти. Всѣ эти интегрированія можно выполнить. Движеніе системы выразится помошью эллиптическихъ Вейерштрассовыхъ функций p и σ .

в) А. А. Марковъ. «О доказательствѣ Сильвестера трансцендентности числа π ». Въ CXI томѣ Comptes Rendus (№ 23, 8 D閑cembre 1890) Сильвестръ, основываясь на формулахъ Ламберта для числителя и знаменателя приближеній непрерывной дроби вида:

$$\tau(0) = \frac{q}{1-q^2} \cdot \frac{3-q^2}{5-\dots}$$

$$\text{именно: } \frac{q}{1-q^2} \cdot \frac{3-q^2}{5-\dots} = \frac{B_{r+1}(q)}{A_{r+1}(q)},$$

$$\frac{q^3}{2r-1}$$

гдѣ:

$$A_{r+1} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2r-1) \left[1 - \frac{q^2}{2} \frac{2r-2}{2r-1} + \frac{q^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{(2r-4)(2r-6)}{(2r-1)(2r-3)} - \dots \right]$$

$$B_{r+1} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2r-1) \left[0 - \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{2r-4}{2r-1} + \dots \right]$$

старается доказать трансцендентность числа π ; причемъ, пропустивъ, вѣроятно случайно, численный множитель у выражения $A_{r+1}(0)$, основываетъ свое доказательство на утверждениі, что высший предѣлъ модуля отношенія $\frac{A_{r+1}(\theta_i)}{A_r(\theta_i)}$ при достаточно большомъ r зависитъ отъ θ_i , между тѣмъ совершенно ясно, что въ этомъ случаѣ отношение можетъ быть сдѣлано болѣе всякой данной величины.

Протоколъ засѣданія 16 марта 1891 г.

1) Были предложены и приняты въ члены общества: Антоніпа Дмитріевна Львова, Наталья Николаевна Акимова, Михаилъ Захарьевичъ Образцовъ и Евгений Васильевичъ Борисовъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) Ю. В. Сохонцій. «О геодезическихъ линіяхъ». Указавъ на условіе необходимое и достаточное, чтобы всѣ линіи въ системѣ:

$$x = \varphi(t, c)$$

$$y = \Psi(t, c)$$

$$z = \theta(t, c),$$

были геодезическими, и сдѣлавъ одно замѣчаніе относительно теоремы обратной теоремѣ Гаусса, выражающей дифференціальь длины дуги геодезической линіи, докладчикъ указалъ на аналитическое выражение условія необходимаго и достаточнаго, чтобы всѣ линіи въ системѣ:

$$f(u, v, c) = 0,$$

были геодезическими, причемъ обратилъ вниманіе собранія на нѣкоторыя важнѣйшия слѣдствія. Затѣмъ докладчикъ далъ новый выводъ дифференціальныхъ уравненій Гаусса для геодезическихъ линій въ криволинейныхъ координатахъ. Эти уравненія представляются, какъ уравненія характеристики уравненія въ частныхъ производныхъ вида:

$$\frac{\partial \sqrt{A} \cos \theta}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{C} \cos (\omega - \theta)}{\partial u} \dots \dots \dots \quad (1)$$

гдѣ: A и C означаютъ коэффициенты извѣстнаго выраженія квадрата дифференціала дуги, θ изображаетъ величину угла, образуемаго въ данной точкѣ геодезическою кривою съ координатною кривою: $v = \text{const}$, а ω — уголъ между координатными линіями. Наконецъ, было указано, какъ при помощи уравненія (1) интегрировать дифференціальныя уравненія геодезическихъ кривыхъ на поверхности вращенія и на поверхности эллипсоида.

- б) О. А. Баклундъ демонстрировалъ приборъ Репсольда для изученія фотографій частей неба.
в) И. А. Клейберъ — «о пѣкоторыхъ интегралахъ отъ полныхъ эллиптическихъ интеграловъ».

Протоколъ засѣданія 15 апрѣля 1891 г.

1) Въ библіотеку общества доставлены слѣдующія брошюры:
1) В. Г. Имшнерцій — «Интегрированіе линейныхъ однородныхъ уравненій посредствомъ частныхъ рѣшеній другихъ уравненій того-же вида и порядка равнаго или меншаго», 2) В. Г. Имшнерцій — «Замѣтка о геометрическомъ значеніи формулы Эйлера для приближенного вычисленія квадратуръ», 3) Н. В. Бугаевъ — «Прерывная геометрія», 4) И. М. Покровскій — «О преобразованіи Ультра — эллиптическихъ интеграловъ», 5) Д. А. Граве — «Аналитическая геометрія» (литографированный курсъ).

2) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

а) Ю. В. Сохонцій предложилъ желающимъ решить слѣдующую задачу: дано семейство кривыхъ, опредѣляемыхъ параметромъ a ; изъ нѣкоторой точки плоскости проведена къ одной изъ кривыхъ касательная, длина которой, положимъ, есть S , длина же дуги, отсчитываемой отъ пѣкоторой точки кривой до точки касанія — есть σ ; доказать, что: $\frac{\partial(S + \sigma)}{\partial a}$ не изменяется вдоль касательной и изменяется при переходѣ отъ одной касательной къ другой. Обобщить ту же теорему и для поверхности. Эта теорема имѣть большое значеніе при изученіи пѣкоторыхъ свойствъ геодезическихъ линій.

б) Д. Ф. Селивановъ. «О разложении чиселъ на множители». Розысканіе простыхъ дѣлителей чиселъ вида: $t^2 - Du^2$ —приводится къ рѣшенію уравненія:

$$\left(\frac{D}{x}\right) = 1,$$

левая часть которого есть символъ Якоби. Всѣ рѣшенія этого уравненія легко найти при помощи слѣдующихъ теоремъ, высказанныхъ Эйлеромъ (несколько въ иной формѣ):

$$1) \left(\frac{D}{x}\right) = \left(\frac{D}{x+4\Delta}\right), (\Delta = |D|),$$

$$2) \left(\frac{D}{x}\right) = \left(\frac{D}{4D-x}\right), D > 0$$

$$3) \left(\frac{D}{x}\right) = -\left(\frac{D}{4\Delta-x}\right), D < 0$$

$$4) \left(\frac{D}{x}\right) = -\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right) \text{ при } D \text{ — четномъ}$$

$$5) \left(\frac{D}{x}\right) = \left(\frac{D}{x+2\Delta}\right) \text{ при } D \equiv +1 \pmod{4}$$

$$6) \left(\frac{D}{x}\right) = -\left(\frac{D}{x+2\Delta}\right) \text{ при } D \equiv -1 \pmod{4}$$

Доказательство теоремъ 1) и 5) находимъ въ сочиненіяхъ Дирихле и Ю. В. Сохоцкаго. Докладчикомъ было показано, какъ доказываются всѣ названныя теоремы и какъ при помощи ихъ разложить данное число на множители.

в) П. А. Шиффъ показалъ, что уравненіе въ частныхъ производныхъ вида:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k} + \frac{\partial^k u}{\partial x_2^k} + \dots + \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} = a_0 u + a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \dots + a_p \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \dots \quad (1)$$

допускаетъ интеграль, удовлетворяющій уравненію:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + t \frac{\partial u}{\partial t} = b_0 u + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \dots + b_q \frac{\partial^q u}{\partial t^q} \dots \quad (2)$$

(въ частномъ случаѣ—одпородный) только въ томъ случаѣ, когда всѣ постоянные коэффициенты: $a_0, a_1 \dots$; за исключениемъ a_k , равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая лѣвую часть уравненія (1) черезъ: $\Delta_k u$ и правую — черезъ $P(u)$, будемъ имѣть:

$$\Delta_k u = P(u) \dots \dots \dots \quad (1');$$

Обозначая, далѣе, правую часть уравненія (2) черезъ $Q(u)$, будемъ имѣть:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + t \frac{\partial u}{\partial t} = Q(u) \dots \quad (2');$$

Совершая надъ частями равенства (2') операцию Δ_k , получаемъ:

$$x_1 \Delta_k \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \Delta_k \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \Delta_k \frac{\partial u}{\partial x_n} + t \Delta_k \frac{\partial u}{\partial t} + k \Delta_k u = \\ = \Delta_k Q(u) = Q(\Delta_k u) = Q[P(u)]$$

или:

$$x_1 P\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + x_2 P\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \dots + k P(u) + t P\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = Q[P(u)]$$

иначе сказать:

$$P\left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + t P\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + k P(u) = Q[P(u)]$$

принимая во вниманіе уравненіе (2'), будемъ имѣть:

$$P[Q(u)] - P\left(t \frac{\partial u}{\partial t}\right) + t P\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + k P(u) = Q[P(u)]$$

совершая на самомъ дѣлѣ дѣйствіе, обозначенное символомъ P и принимая во вниманіе, что $P[Q(u)] = Q[P(u)]$ (въ виду того, что коэффициенты $a_0, a_1 \dots b_0, b_1 \dots$ предполагаются постоянными), мы получаемъ:

$$ka_0 u + (k-1)a_1 \frac{\partial u}{\partial t} + (k-2)a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots + (k-p)a_p \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = 0 \dots \quad (3)$$

равенство (3) непремѣнно представляетъ собою тождество, т. е. всѣ коэффициенты равны нулю, поэтому напр.: $a_0 = a_1 = a_2 \dots a_{p-1} = 0, k = p$; въ противномъ случаѣ мы изъ уравненія (3) получили бы:

$$u = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \dots + C_p e^{a_p t},$$

гдѣ $C_1, C_2 \dots C_p$ — суть произвольныя функціи $x_1 \dots x_n$, а это противорѣчить уравненію (2) въ чмъ легко убѣдиться непосредственно подстановкою.

Протоколъ засѣданія 16 сентября 1891 г.

- 1) Въ библіотеку общества доставлены слѣдующія изданія:
- 1) Сообщенія харьковскаго математическаго общества, 2-я серія, томъ III № 1.
 - 2) Д. Ф. Селивановъ. — «О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ».
 - 3) Д. Ф. Селивановъ. — «О разложеніи чиселъ на множители.
 - 4) N. N. Pirogow. «Ueber das Gesetz Boltzmann's» (Separat-abdruck aus dem Repertorium der Physik).
 - 5) П. А. Шиффъ. «Опытъ приложенія теоріи упругости къ изученію дѣйствія выстрѣла на лафетъ».
 - 6) R. Schiff. «Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles d'ordre supérieur».
- 2) Были предложены и припяты въ члены общества: Федоръ Васильевичъ Корвинъ-Круковской и Николай Борисовичъ Делоне.
- 3) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:
- а) Н. Б. Делоне «По теоріи осей вращенія». Докладчикъ указалъ на слѣдующее: 1) Удары, нормальные къ плоскості стѣнкѣ тѣла, ограниченнаго съ прочихъ сторонъ какою бы то ни было поверхностью и имѣющіе одинаковую приведенную массу, пересѣкаютъ плоскую стѣнку въ точкахъ, расположенныхъ по эллипсу.
 - 2) Соответственныя этимъ ударамъ радиусы эллипсоида инерціи, сопряженные съ плоскостями ударовъ, лежать въ пѣкоторой плоскости N .
 - 3) Соответственныя тѣмъ же ударамъ винтовыя оси лежать па линейчатой поверхности S — десятаго порядка, образующія коей параллельны плоскости N и касательны къ пѣкоторому эллиптическому цилиндру C .
 - 4) Поверхность S пересѣкается съ цилиндромъ C по кривой пересѣченія этого цилиндра съ поверхностью K — третьаго порядка, дающею въ пересѣченіяхъ съ плоскостями, параллельными плоскости N — эллипсы подобные, одинаково расположенные, проходящіе чрезъ нормаль къ плоскости N , проведенную черезъ центръ

тажести тѣла, и имѣющіе оси, направленныя параллельно осямъ сѣченій тѣми же плоскостями цилиндра C .

б) П. А. Шиффъ. «О пѣкоторыхъ формулахъ для вычислениія опредѣленныхъ интеграловъ». Докладчикъ показалъ, какимъ образомъ изъ формулъ Грина для функцій съ двумя переменными получаются формулы: Коши, Нуассона, Абеля, Фруляни, Фурье, Куммера, Парсиваля и Давидова.

в) Д. А. Граве. «Къ интегрированію системы дифференціальныхъ уравненій линейныхъ въ частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ».

Если дана система уравненій вида:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{11}(u_1) + \Delta_{12}(u_2) + \dots + \Delta_{1n}(u_n) = 0 \\ \Delta_{21}(u_1) + \Delta_{22}(u_2) + \dots + \Delta_{2n}(u_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_{n1}(u_1) + \Delta_{n2}(u_2) + \dots + \Delta_{nn}(u_n) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

гдѣ

$$\Delta_{ij}(u) = \Sigma A \frac{d^k u}{dx_1^p dx_2^q \dots dx_n^r},$$

причемъ A — постоянныя, то обозначая символомъ D слѣдующую операцио:

$$D(u) = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} (u)$$

и имѣя въ виду, что операциі Δ имѣютъ свойство перемѣстимости, т. е. что: $\Delta_{ik} \Delta_{lm}(u) = \Delta_{lm} \Delta_{ik}(u)$, легко убѣдиться, что система (1) приводится къ уравненіямъ слѣдующаго вида:

$$D(u_1) = 0, D(u_2) = 0, \dots D(u_n) = 0.$$

Протоколъ засѣданія 15 октября 1891 г.

I. Были предложены и приняты въ члены общества: Александръ Дмитріевичъ Дмитріевъ, Евгений Петровичъ Рощинъ, Алексѣй Львовичъ Корольковъ и Константинъ Михайловичъ Семеновъ.

II. Секретарь общества доложилъ собранію слѣдующій краткій отчетъ о состояніи общества за истекшій годъ: 20 октября истекаетъ первый годъ существованія С.-Петербургскаго математическаго общества. Первое засѣданіе 20 октября 1890 г. исключительно посвящено было рѣшенію организаціонныхъ вопросовъ, касающихся общества и выбору членовъ бюро.

Благодаря милостивому разрѣшенію Его Императорскаго Высочества Президента Академіи Наукъ, общество получило возможность собираться въ центральномъ для большинства членовъ мѣстѣ, — именно: въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ. Въ теченіи этого года общество имѣло 8 засѣданій, во время которыхъ происходилъ обмѣнъ мнѣній по сдѣланымъ 19 сообщеніямъ.

Въ настоящее время общество состоитъ изъ 55 членовъ.

Въ теченіи года въ библіотеку общества доставлено 30 книгъ и брошюръ (29 названій).

Въ засѣданіи 20 ноября 1890 г. собраніе постановило: для покрытія мелкихъ расходовъ — сдѣлать складчину по 1 рублю. Эта складчина дала въ суммѣ 41 рубль; израсходовано — 54 руб. 66 коп.; такъ что излишекъ расходовъ, сравнительно съ доходомъ, составляетъ 13 р. 66 к. Въ виду этого, а также для покрытія расходовъ въ текущемъ году, секретарь обратился къ собранію съ просьбою сдѣлать вторично складчину по два рубля, на что собраніе изъявило согласіе.

III. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

a) В. I. Шиффъ. «О кривыхъ четвертаго порядка».

Исходя изъ опредѣленій криволинейныхъ діаметровъ кривыхъ высшихъ порядковъ, данныхъ Сальмономъ, докладчица показала, какимъ образомъ, пользуясь уравненіями этихъ діаметровъ, найти оси симметріи кривыхъ четвертаго порядка и какъ, возможно просто, вычислить коэффициенты преобразованного уравненія кривой четвертаго порядка, отнесенной къ осамъ симметріи.

б) Д. А. Граве. «Объ интегрированіи системы дифференціальныхъ уравненій линейныхъ въ частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ».

Докладчикъ, напомнивъ собранію способъ исключенія неизвѣстныхъ функций изъ уравненій, изложенный имъ въ предыдущемъ засѣданіи, показалъ, какъ, пользуясь интеграломъ Фурье, освободиться отъ членовъ, стоящихъ во вторыхъ частяхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11}(u_1) + \Delta_{12}(u_2) + \dots + \Delta_{1n}(u_n) &= X_1 \\ \Delta_{21}(u_1) + \Delta_{22}(u_2) + \dots + \Delta_{2n}(u_n) &= X_2 \\ \dots &\dots \\ \Delta_{n1}(u_1) + \Delta_{n2}(u_2) + \dots + \Delta_{nn}(u_n) &= X_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ:

$$\Delta_{ij}(u) = \sum A \frac{d^k u}{dx_i^p dx_j^q \dots dx_n^r},$$

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$$

причёмъ вопросъ объ интегрированіи системы (1) приводится къ интегрированію уравненія:

$$D(\sigma) = 0,$$

гдѣ

$$D(\sigma) = \left| \begin{array}{cccccc} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} & & \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} & & \end{array} \right| (\sigma).$$

Далѣе, показавъ, какимъ образомъ интеграль составляется изъ частныхъ интеграловъ, докладчикъ обратилъ вниманіе собранія на интегрированіе уравненій вихреваго движенія, именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} &= X_1 \\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} &= X_2 \\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} &= X_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Такъ какъ символъ D , въ этомъ случаѣ, обращается тождественно въ нуль, то функции X_1 , X_2 и X_3 должны находиться между собою въ нѣкоторой зависимости, именно, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} = 0;$$

въ этомъ случаѣ функции U , V и W изъ уравненій (2) всѣ не опредѣляются,—одна изъ нихъ остается произвольно.

в) В. Г. Имшенецкій. «О способахъ опредѣленія рациональныхъ дробныхъ решеній дифференціальныхъ уравненій».

Протоколъ засѣданія 16 ноября 1891 г.

I. Былъ предложенъ и принятъ въ члены общества Захарь Захарьевичъ Вулихъ.

II. Въ библіотеку общества доставлена слѣдующая книга: «Бобилевъ. Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику. I Кинематика. СПБ. 1890 г.»

III. Обсуждался проектъ устава общества; при этомъ постановлено было, чтобы бюро общества, раньше внесенія на окончательное утвержденіе, дополнило и проредактировало разсмотрѣнный проектъ устава въ окончательной формѣ.

IV. А. А. Марковъ сдѣлалъ сообщеніе: «О разысканіи рациональныхъ решеній дифференціальныхъ уравненій.

Протоколъ засѣданія 17 января 1892 г.

I. Предсѣдательствовавшій въ засѣданіи товарищъ предсѣдателя Ю. В. Сохощкій сообщилъ собранію, что общество понесло утрату въ лицѣ скончавшихся его двухъ членовъ: Маріана Альбертовича Кросновскаго и Николая Николаевича Пирогова и предложилъ собранію почтить память скончавшихся вѣстапіемъ съ мѣстъ. Собрание исполнило предложеніе предсѣдательствующаго.

II. Въ библіотеку общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Д. К. Бобылевъ. «Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику. II Кинетика».

2) П. В. Преображенскій. «Теорія бинарныхъ квадратичныхъ формъ».

3) Н. В. Бугаевъ. «Начало наибольшихъ и наименьшихъ показателей въ теоріи дифференціальныхъ уравненій. ІІІІ частная решенія».

4) Н. В. Бугаевъ. «Дробная частная решенія дифференціальныхъ уравненій».

5) Н. Е. Жуковскій. «О пареніи птицъ».

III. Были предложены и приняты въ члены общества: Елизавета Федоровна Литвинова и Владимиръ Васильевичъ Преображенскій.

IV. Въ предшествовавшемъ засѣданіи общества, 16 ноября, при обсужденіи проекта устава, было постановлено, чтобы бюро общества, раньше внесенія на окончательное утвержденіе, дополнило и проредактировало разсмотрѣнный проектъ устава въ окончательной формѣ. Согласно съ этимъ постановленіемъ, для болѣе основательной выработки сказанного Устава, бюро обратилось съ просьбою о содѣйствіи къ нѣкоторымъ сочленамъ общества, которые, составивъ редакціонную комиссию, выработали проектъ устава.

Въ составъ комиссіи вошли слѣдующіе члены общества: А. В. Гадолинъ (предсѣдатель комиссіи), Ю. В. Сохощкій, К. А. Пессе, А. А. Марковъ, Д. Ф. Селивановъ и П. А. Шиффъ.

Выработанный комиссию проектъ устава былъ напечатанъ и разосланъ всѣмъ членамъ общества съ просьбою, ознакомившись съ означеннымъ проектомъ устава, письменно высказать свои мнѣнія по этому поводу.

По поводу проекта устава получены были письменныя замѣчанія отъ слѣдующихъ членовъ общества: А. В. Муромцева, А. А. Маркова, Д. А. Граве, В. И. Станевича, А. Р. Бондорфа, В. В. Витковскаго, П. М. Новикова, А. Н. Крылова и Н. Ю. Странкевича.

Собрание, ознакомившись съ высказанными замѣчаніями и нѣсколько измѣнивъ, согласно съ этими замѣчаніями, редакцію нѣкоторыхъ параграфовъ проекта устава, утвердило таковой и уполномочило

номочило бюро представить проектъ устава на утверждение правительства.

IV. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) А. А. Марковъ, въ дополненіе къ его сообщенію, сдѣланному имъ въ прошломъ засѣданіи, указалъ на то, что сказанное имъ относительно способа Ліовиля, именно, что при употребленіи способа Ліовиля не требуется вовсе рѣшенія уравненій, высказано самимъ авторомъ въ его статьѣ, помещенной въ 22 тетради *Journal de l'Ecole Polytechnique*, на 175 страницѣ.

2) В. И. Станевичъ сдѣлалъ сообщеніе по поводу замѣтки Poincaré «О распредѣленіи простыхъ чиселъ вида: $4n+1$ », напечатанной въ *Comptes rendus* 14 октября 1891 г.

Исходя изъ приближенныхъ выраженийъ пѣкоторыхъ суммъ, находящихся въ статьѣ Mertens'a (*Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, *Crell's Journal*, t. 78) и примѣнія къ нимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$-\int_{p_1}^x F(x)f'(x)dx = \sum_{p_1}^x f(p) - F(x)f(x)$$

и

$$F(x) = \frac{\sum_{p_1}^x f(p)}{f(x)} + \int_{p_1}^x \frac{f'(x)}{f^2(x)} \sum_{p_1}^x f(p)dx,$$

докладчикъ доказалъ обѣ теоремы Poincaré, а также слѣдующія болѣе общія теоремы:

1) Число простыхъ чиселъ вида: $kn+l$, меньшихъ x , безчисленное множество разъ меньше: $\frac{ax}{\varphi(k)lyx}$, если $a > 1$ и безчисленное множество разъ больше $\frac{ax}{\varphi(k)lyx}$ если $a < 1$.

2) Сумма логарифмовъ простыхъ чиселъ вида $kn+l$, меньшихъ x , безчисленное множество разъ меньше $\frac{ax}{\varphi(k)}$, если $a > 1$ и безчисленное множество разъ больше $\frac{ax}{\varphi(k)}$, если $a < 1$.

Здѣсь k и l — взаимнопростыя числа, а $\varphi(k)$ обозначаетъ число чиселъ простыхъ съ k и меньшихъ k .

Протоколъ засѣданія 15 февраля 1892 г.

I. Предсѣдательствовавшій въ засѣданіи товарищъ предсѣдателя Ю. В. Сохонцкій сообщилъ собранію объ утратѣ, понесенной обществомъ въ лицѣ скончавшихся двухъ его членовъ: Іосифа Андреевича Клейбера и Николая Владимировича Маievскаго и предложилъ собранію почтить память скончавшихся вставаніемъ съ мѣстъ. Собрание исполнило предложеніе предсѣдателя.

II. Въ библіотеку общества доставлена статья Д. К. Бобылева «Поляризующія призмы, устроенные наивыгоднѣйшимъ образомъ».

III. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Е. С. Федоровъ. «О симметріи на плоскости». Докладчикъ началъ съ изложенія краткаго историческаго очерка этого предмета, изъ котораго видно, что два основные вопросы ученія о симметріи: — выводъ возможныхъ видовъ симметріи и выводъ правильныхъ системъ точекъ — получили, для случая пространства трехъ измѣреній, окончательное рѣшеніе.

Докладчикъ, кромѣ того, выразилъ эти выводы алгебраическими уравненіями и предложилъ особый простой способъ графического изображенія осей совмѣщенія правильныхъ системъ.

Для графического изображенія этихъ системъ онъ проектируетъ оси на одну изъ плоскостей, причемъ направлениа осей условно выражаются буквами, а абсолютное наклоненіе въ пространствѣ дается точкою пересѣченія осей съ плоскостью проекціи.

Переходъ отъ этихъ выводовъ къ соответствующимъ выводамъ на плоскости есть переходъ отъ общаго къ частному и совершается, благодаря алгебраическому выражению выводовъ, почти съ механическою простотою, такъ какъ остается только выбрать изъ уравненій, относящихся къ пространству, тѣ, которые находятъ приложеніе и въ случаѣ плоскости, и приравнять нулю одну изъ координатъ.

Такимъ образомъ выведено 17 правильныхъ системъ точекъ вместо 13, выведенныхъ L. Sohncke въ специальной статьѣ, напечатанной въ журналѣ Борхардта въ 1874 году.

2) А. А. Марковъ вывелъ соотношениe между двумя последовательными коэффициентами A_i и A_{i-1} ряда:

$$y = \sum_i A_i x^{2i} F(\alpha + 2i, \beta + 2i, \gamma + i, \delta + 2i, \epsilon + 2i, x), \quad (1)$$

удовлетворяющаго дифференциальному уравнению вида:

$$x^2(1-x^2)y''' + (ax+b)x(1-x)y'' + (cx^2+dx+e)y' + (fx+g)y = 0,$$

которому, въ частномъ случаѣ, удовлетворяетъ произведеніе двухъ интеграловъ уравненія, опредѣляющаго гипергеометрическій рядъ. Функция F въ выражениі (1) выражается слѣдующимъ образомъ:

$$F(\lambda, \mu, \nu, \varsigma, \sigma, x) = 1 + \frac{\lambda\mu\nu}{1\cdot\varsigma\cdot\sigma} x + \frac{\lambda(\lambda+1)\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)}{1\cdot2\varsigma(\varsigma+1)\sigma(\sigma+1)} x^2 + \dots$$

Протоколь засѣданія 29 февраля 1892 г.

I. Въ библіотеку общества доставлена статья В. И. Шиффъ. «Объ осиахъ симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка».

II. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Кояловичъ. «Объ одномъ способѣ интегрированія обыкновенныхъ дифференциальныхъ уравненій 1-го порядка».

Идея о пользѣ частныхъ рѣшеній для полученія въ замкнутомъ видѣ общаго интеграла обыкновенныхъ дифференциальныхъ уравненій первого порядка служитъ основаніемъ для многихъ методовъ интегрированія. Въ однихъ изъ этихъ методовъ требуемыя для интеграціи частные рѣшенія могутъ быть какими угодно (напр. при интегрированіи уравненія типа: $\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R$ при помощи подстановки: $y = y_0 + \frac{1}{u}$), въ другихъ— эти частные рѣшенія должны удовлетворять еще нѣкоторымъ конечнымъ условіямъ. Напр. если уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+P}$$

допускаетъ интегральную форму:

$$(y - y_1)^{m_1}(y - y_2)^{m_2} = \text{пост.},$$

то частные рѣшенія: y_1 и y_2 должны удовлетворять условію: $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$.

Методы первой группы страдаютъ безплодностью, методы второй—трудностью указать конечныя условія для частныхъ рѣшеній. Докладчикъ предлагаетъ такой методъ интегрированія, въ которомъ эта послѣдняя трудность устранена.

Если искать условія, при которыхъ уравненіе:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+P} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

имѣеть интегральную форму:

$$(y - \alpha_1)^{m_1}(y - \alpha_2)^{m_2} \dots (y - \alpha_n)^{m_n} = \text{пост.} \quad \dots \dots \quad (2).$$

гдѣ: $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ — суть нѣкоторыя функции отъ x ,

то:

1) $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ — суть частные рѣшенія уравненія (1)

2) они удовлетворяютъ условію:

$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \dots + m_n \alpha_n = \text{пост.} \quad \dots \dots \quad (2)$$

Причина, почему условіе получилось такъ просто, лежить въ томъ, что производная функции $\log(y - \alpha_i)$ ($i = 1, 2 \dots n$) разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ не зависитъ отъ y , а другой отъ α_i , такъ какъ

$$\frac{d}{dx} \log.(y - \alpha_i) = -\frac{1}{y+P} \cdot \frac{1}{\alpha_i+P} \quad \dots \dots \quad (4)$$

Обобщеніе этого замѣчанія и приводить къ методу, которому можно присвоить название *метода частныхъ рѣшеній*.

Пусть будетъ дано какое угодно обыкновенное дифференциальное уравненіе первого порядка, которое мы предположимъ заданнымъ въ формѣ:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad \dots \dots \dots \quad (5).$$

Пусть будетъ:

$$\frac{dz}{dx} = \psi(x, z) \quad \dots \dots \dots \quad (6),$$

другое дифференциальное уравненіе, которое мы назовемъ вспо-

могательнымъ. Назовемъ, черезъ: $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ n частныхъ рѣшений уравненія (6), пока не опредѣлия ихъ.

Пусть будеть f такая функція отъ x, y и α_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$), полная производная которой распадается на произведение функцій отъ x и y на функцію отъ x и α_i , т. е. пусть f удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \varphi(x, y) + \frac{df}{d\alpha_i} \gamma(x, \alpha_i) = \Psi(x, y) \omega(x, \alpha_i). \quad (7)$$

Разсмотримъ сумму:

$$W = m_1 f(x, y, \alpha_1) + m_2 f(x, y, \alpha_2) + \dots + m_n f(x, y, \alpha_n). \quad (8)$$

гдѣ: $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ — постоянныя.

Полная производная $\frac{dW}{dx}$ будетъ, на основаніи уравненія (7):

$$\frac{dW}{dx} = \Psi(x, y) \{ m_1 \omega(x, \alpha_1) + m_2 \omega(x, \alpha_2) + \dots + m_n \omega(x, \alpha_n) \}. \quad (9)$$

Если

$$m_1 \omega(x, \alpha_1) + m_2 \omega(x, \alpha_2) + \dots + m_n \omega(x, \alpha_n) = 0; \quad (10)$$

то уравненіе:

$$W = \text{пост.} \quad (11)$$

будеть общимъ интеграломъ уравненія (5).

Такимъ образомъ нужно сначала удовлетворить уравненію (7) соотвѣтственнымъ выборомъ функцій: f, χ, Ψ и ω , а затѣмъ искать для уравненія (6) такихъ частныхъ рѣшеній, которые удовлетворили бы условію (10).

Если известно число n частныхъ рѣшеній α_i ; удовлетворяющихъ условію (10), то всѣ они могутъ быть найдены изъ новыхъ интеграцій.

Методъ сохраняетъ свою пригодность и тогда, когда во второй части уравненія (7) стоитъ сумма нѣсколькихъ произведеній такихъ, какъ: $\Psi(x, y) \omega(x, \alpha_i)$.

Всякая функція f , удовлетворяющая уравненію (7), называется интегрирующей функціею для уравненія (5).

Методъ частныхъ рѣшеній есть обобщеніе метода множителей, потому что интегрирующей множитель Эйлера есть частная про-

изводная по y отъ интегрирующей функціи, взятой въ томъ частномъ предположеніи, что она не зависитъ отъ α_i и вторая часть уравненія (7) равна нулю.

Одна изъ интегрирующихъ функцій для уравненія:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P+y}$$

есть, какъ было видно выше, ly ($y = z_i$); другая имѣеть форму:

$$f = \int^{y-\alpha_i} e^z \frac{dz}{z} \quad \dots \dots \dots \quad (12),$$

причемъ для частныхъ рѣшеній получается условіе:

$$m_1 e^{-\alpha_1} + m_2 e^{-\alpha_2} + \dots + m_n e^{-\alpha_n} = \text{пост.} \quad \dots \dots \quad (13)$$

Примѣръ. Уравненіе.

$$\begin{aligned} gydy + dy [ke^{-t} \log(g - ke^{-t})] &= \\ &= ke^{-t} [t - \lg(g - ke^{-t})] dt \quad \dots \dots \quad (14) \end{aligned}$$

допускаетъ два частныхъ рѣшенія:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\log [g - ke^{-t}] \\ \alpha_2 &= t, \end{aligned}$$

удовлетворяющихъ условію (13) при $n_2 = km$, и потому общей интеграль уравненія (14) есть:

$$\int^{y-\alpha_1} \frac{e^z}{z} dz + k \int^{y-\alpha_2} \frac{e^z}{z} dz = \text{пост.}$$

2) Н. Б. Делоне. «О движениі твердаго тѣла, опредѣляемомъ интегралами С. В. Ковалевской». Докладчикъ показалъ, что:

1) Интегралы Ковалевской могутъ быть представлены въ видѣ:

$$2p^2 + 2q^2 + r^2 = 2c_0\gamma + bl'$$

$$2p\gamma + 2q\gamma' + r\gamma'' = 2l$$

$$(p^2 - q^2 + c_0\gamma)^2 + (2pq + c_0\gamma')^2 = l^2$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

2) Въ случаѣ $k = 0$, уравненія подвижнаго годографа суть:

$$4p^2 + r^2 = 6l'$$

$$6l'(p^2 + q^2)^2 + 8c_0lp(p^2 + q^2) + 4c_0^2l^2 = c_0^2r^2$$

а неподвижный годографъ лежитъ на поверхности вращенія (около вертикали) 8-го порядка.

- 3) Когда не только $k = 0$, но и $6l' = 4l^2$ — подвижный годографъ есть пересѣченіе цилиндровъ кругового и эллиптическаго, а неподвижный годографъ лежитъ на поверхности вращенія 4-го порядка.
- 4) Параллелепипедъ съ ребрами $2a < 2b < 2c$, подвѣшній, напр. помошью шарнира Гука за точку, лежащую на спицѣ, пропущенной черезъ его центръ параллельно ребру $2a$, причемъ разстояніе точки привѣса отъ центра $= \sqrt{\frac{b^2-a^2}{3}}$ и между b и c существуетъ зависимость: $c^2 = 3b^2$, — движется по законамъ Ковалевской.
- 5) Придавъ параллелепипеду такое положеніе, чтобы b и a были горизонтальны и сообщивъ ему начальную скорость около вертикали, получимъ движеніе, указанное въ положеніи 3-мъ.
- 6) Придавъ параллелепипеду опредѣленное начальное положеніе и опредѣленную начальную скорость, получимъ движеніе, указанное въ положеніи 2-мъ.
- 3) В. А. Марковъ доказалъ слѣдующую теорему: если двѣ алгебраїческія функціи степени n имѣютъ всѣ корни вещественные и перемежающіеся, то ихъ производныя одного и того же порядка имѣютъ корни тоже перемежающіеся.

Протоколъ засѣданія 16 марта 1892 г.

I. Былъ предложенъ и принятъ въ члены общества Илья Семеновичъ Аладовъ.

II. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Коаловичъ. «Приложеніе метода частныхъ рѣшеній къ одному уравненію первого порядка».

Въ дополненіе къ предыдущему сообщенію докладчикъ указалъ на то, что опредѣленіе интегрирующей функціи не требуетъ интегрированія уравненій съ частными производными, и что, поэтому, является возможность построить интегрирующую функцію для такихъ уравненій, для которыхъ не можемъ найти интегрирующаго множителя. Въ подтвержденіе этого докладчикъ доказалъ, что для уравненія:

$$y' [L_0y^k + L_1y^{k-1} + \dots + L_k] = M_0y^h + M_1y^{h-1} + \dots + M_k^h \quad (1),$$

гдѣ $L_0, L_1 \dots L_k, M_0, M_1 \dots M_k$ — какія угодно функціи отъ x , а h и k — какія угодно цѣлые положительныя числа, одна изъ интегрирующихъ функцій есть: $\lg(y - \alpha_i)$, гдѣ α_i — есть рѣшеніе уравненія (1).

Выводя условія для частныхъ рѣшеній, докладчикъ показалъ, что для существованія интеграла уравненія (1) въ видѣ:

$$(y - \alpha_1)^{m_1} (y - \alpha_2)^{m_2} \dots (y - \alpha_n)^{m_n} = \text{пост.} \dots \quad (2)$$

необходимо, если только

$$h \geq k + 2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

существованіе слѣдующаго уравненія:

$$m_1 \alpha_1^r + m_2 \alpha_2^r + \dots + m_n \alpha_n^r = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (4),$$

гдѣ r — какое угодно цѣлое положительное число.

Исходя изъ уравненія (4), докладчикъ доказалъ слѣдующую теорему:

Если въ уравненіи (1) число h больше или равно числу $k+2$, то уравненіе (1) не допускаетъ интеграла формы (2) ни при какомъ значеніи числа n .

Въ заключеніи было показано приложеніе той же интегрирующей функции: $\lg(y - \alpha_i)$ къ уравненію риккатіевскаго типа:

$$y' = y^2 + Q$$

и былъ предложенъ весьма легкій путь къ выводу извѣстнаго соотношенія между четырьмя решеніями: y_0, y_1, y_2, y_3 этого уравненія, именно:

$$\frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2} \cdot \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{пост.}$$

2) П. М. Новиковъ. «О наивыгоднѣйшемъ числѣ пробъ при решеніи трансцендентныхъ уравненій и уравненій высшихъ степеней».

Если приходится отдѣлить корни уравненія пробами, то пробы ведутся такимъ образомъ: промежуточъ между предѣлами, между которыми заключены корни, дѣлится на m равныхъ частей и пробуютъ границы этихъ частей; такимъ образомъ корни окажутся заключенными между двумя крайними числами двухъ послѣдовательныхъ частей. Далѣе, промежуточъ между новыми границами дѣлится на n равныхъ частей и пробуютъ границы этихъ частей и т. д.

Обозначая черезъ A —разницу первоначальныхъ границъ корня и черезъ S —сумму наиболѣшаго числа пробъ, которымъ могутъ потребоваться для достаточнаго сближенія границъ, имѣемъ:

$$A = m \cdot n \cdot p \dots$$

$$S = m - 1 + n - 1 + p - 1 + \dots$$

Легко убѣдиться, что S будетъ наименьшимъ для опредѣленаго числа подраздѣленій на группы при $m = n = p = \dots$

Обозначая число подраздѣленій черезъ y , число пробъ въ каждомъ подраздѣленіи черезъ x , имѣемъ:

$$A = x^y$$

$$S = y(x - 1) = \lg A \left(1 + \frac{\lg a}{1 \cdot 2} + \frac{\lg^2 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right);$$

откуда видно: 1) что для того, чтобы наиболѣшее число пробъ было наименьшимъ, нужно взять: $x = 2$, и 2) что при возрастаніи

x, S непрерывно возрастаютъ. Другими словами — удобнѣе всего, въ этомъ смыслѣ, вести вычисленіе по двоичной системѣ.

Для сравненія отношенія выгоды десятичной и двоичной системъ, находимъ:

$$\frac{S_{10}}{S_2} = \frac{9 \cdot \lg_{10} A}{\lg_2 A} = 9 \lg_{10} 2 = 2,7 \dots,$$

но, принимая во вниманіе, что въ десятичной системѣ число цифръ, вводимыхъ въ вычислениѣ, сначала незначительно и постепенно возрастаютъ, между тѣмъ какъ при двоичной системѣ испытаній, если мы числа выражаемъ въ десятичной системѣ, число цифръ сразу будетъ наиболѣшее, и, принимая во вниманіе, что трудность вычислениѣ пропорціональна числу цифръ, вводимыхъ въ вычислениѣ, находимъ отношеніе трудности вычислениѣ пробами по десятичной и двоичной системамъ, въ этомъ смыслѣ, для $A = m$ — значнаго числа, въ такомъ видѣ:

$$\frac{S'_{10}}{S'_2} = \frac{\frac{m(m+1)}{2} \cdot 9}{m \lg_2 A} = \frac{(m+1) 9 \lg_{10} 2}{2 \lg A} = \frac{m+1}{m-1} 9 \frac{\lg_{10} 2}{2},$$

гдѣ $0 > 0$ и $0 < 1$.

При m безпредѣльно возрастающемъ это отношеніе, уменьшаясь, стремится къ $\frac{9 \lg_{10} 2}{2}$, т. е. къ половинѣ прежнаго отношенія. Наконецъ, можно еще различнага системы пробъ сравнить между собою въ смыслѣ средняго математическаго ожиданія трудности при испытаніи по той или другой системѣ. Это сравненіе подобно сравненію выгоды различныхъ лотерей, въ которыхъ всѣ билеты съ выигрышами, но выигрыши раздѣлены по различнагмъ системамъ и различной стоимости. Легко убѣдиться, что среднее математическое ожиданіе равняется суммѣ испытаній, пужныхъ для заключенія искомаго корня между двумя изъ A отдѣльныхъ чиселъ, содержащихся въ предѣлахъ корней, раздѣленной на A^2 , и что, вообще, отношеніе ожиданій трудности различныхъ системъ прямо пропорціонально суммамъ всѣхъ испытаній, пужныхъ, чтобы перебрать всѣ A чиселъ.

Поэтому нужно найти эту сумму.

Полагая число отдельныхъ чиселъ, заключающихся въ предѣлахъ, въ которыхъ мы производимъ испытанія, равнымъ A , обозначая основаніе системы, по которой производимъ пробы, черезъ x , черезъ y — число опредѣляемое равенствомъ:

$$x^y = A$$

и, наконецъ, черезъ S_x — сумму всѣхъ испытаній, нужныхъ для заключенія искомаго числа между всѣми парами последовательныхъ отдельныхъ A — чиселъ, получимъ:

$$S_x = yA \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{\lg A}{\lg x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right).$$

Легко убѣдиться, что S_x имѣетъ наименьшее практическое значеніе при $x = 2$, и возрастаетъ съ возрастаніемъ x . Сравнимъ значенія S_x для $x = 10$ и $x = 2$. Имѣемъ:

$$\frac{S_{10}}{S_2} = \frac{\lg 2}{\lg 10} \cdot 5,4 = \lg_{10} 2 \cdot 5,4 = 1,62.$$

Изъ этого видно, что двоичная система испытаній приближительно въ $\sqrt[8]{5}$ выгоднѣе десятичной.

Извѣстно, что двоичная система считалась дающею наивыгоднѣйшую систему разновѣсокъ для взвѣшиванія и эталонныхъ проволокъ въ реостатѣ, въ томъ смыслѣ, что она даетъ наименьшее число эталонныхъ проволокъ; но мы видимъ, что наивыгоднѣйшее и въ томъ смыслѣ, что она требуетъ наименьшаго труда, или наименьшаго количества времени для производства извѣстныхъ опредѣленій. Если число требуемыхъ опредѣленій и ихъ разнообразіе неопределено увеличиваются, то, какъ мы видѣли, отношеніе времени или труда при двоичной системѣ ко времени или труду, расходуемому при десятичной, стремится къ $\sqrt[8]{5}$.

Протоколъ засѣданія 15 апрѣля 1892 г.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. Ф. Селивановъ изложилъ съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями изслѣдованія Люка (Lucas) о дѣлности чиселъ вида:

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad v_n = a^n + b^n,$$

гдѣ a и b — корни квадратнаго уравненія съ цѣлыми коэффициентами:

$$x^2 - Px + Q = 0.$$

Кромѣ того были перечислены случаи, указанные Эйлеромъ: Первушинъ и Зельгофъ (Seelhof), въ которыхъ число:

$$a_n = 2^{n^n} + 1$$

оказывается составнымъ, вопреки мнѣнію Фермата.

2) Людіантъ Юльяновичъ Маткевичъ показалъ нѣкоторыя слѣдствія тождества:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x f(x)\varphi(x)\Psi(x)dx + \int_{f(x_0)}^{f(x)} f_{-1}(x)\varphi f_{-1}(x)\Psi f_{-1}(x)dx + \\ & + \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \varphi_{-1}(x)f\varphi_{-1}(x)\Psi\varphi_{-1}(x)dx + \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} \Psi_{-1}(x)f\Psi_{-1}(x)\varphi\Psi_{-1}(x)dx = \\ & = xf(x)\varphi(x)\Psi(x) - x_0f(x_0)\varphi(x_0)\Psi(x_0), \end{aligned}$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} y &= f(x), \quad z = \varphi(x), \quad u = \Psi(x) \\ x &= f_{-1}(y), \quad z = \varphi f_{-1}(y), \quad u = \Psi f_{-1}(y) \\ x &= \varphi_{-1}(z), \quad y = f\varphi_{-1}(z), \quad u = \Psi\varphi_{-1}(z) \\ x &= \Psi_{-1}(u), \quad y = f\Psi_{-1}(u), \quad z = \varphi\Psi_{-1}(u) \end{aligned}$$

3) Е. С. Федоровъ представилъ собранію гоноэдрическіе демонстративные приборы, предназначенные для наглядного ознакомленія съ видами симметріи. Приборы эти двоякаго рода: шары и зеркала.

Виды симметрии совмѣщенія демонстрируются шарами съ на-
мѣченными на нихъ полюсами осей симметрии. Около этихъ полю-
совъ вращаются пластинки, вырѣзанныя подъ угломъ $\frac{2\pi}{p}$ (гдѣ p —
наименование оси симметрии).

Для этого въ вершинахъ угловъ этихъ пластинокъ и перене-
дикулярно къ нимъ припаиваются иголочки. Кроме того, къ
тѣмъ же вершинамъ, но въ плоскости пластинокъ, припаиваются
еще проволочки, дѣлящія уголь пополамъ. Пластинки съ проволо-
ками изгибаются по поверхности шара.

Если теперь расположить эти пластинки такъ, чтобы ихъ
вершины находились въ полюсахъ сосѣднихъ осей симметрии, а
равнодѣлящія проволочки пересѣкались въ одной точкѣ, то сами
пластинки очертятъ на сфере нѣкоторый сферической многоуголь-
никъ, и вся сфера разбьется на симметрически расположенные
равные ему «элементарные» сферические многоугольники (а про-
странство около одной точки на соотвѣтствующіе гонодры).

Получается одинъ изъ возможныхъ случаевъ дѣленія сферы
на равныя части; число частей равно величинѣ симметрии.

Очертанія элементарныхъ сферическихъ многоугольниковъ со-
отвѣтствуютъ очертаніямъ граней типическихъ изоэдроръ, а точки,
въ которыхъ пересѣкаются проволочки, ихъ точкамъ касанія или
вершинамъ соотвѣтствующихъ подтипическихъ изогоновъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда данный видъ симметрии характери-
зуется постоянными (при всякомъ положеніи полюсовъ граней
типовическихъ изоэдроръ) очертаніями элементарныхъ сферическихъ
многоугольниковъ по плоскостямъ симметрии, для демонстрирова-
нія вида симметрии употребляются трехгранные (и двухгранные)
зеркала; у нихъ ребра также соотвѣтствуютъ тремъ ближайшимъ
неравнымъ осямъ симметрии.

Плоскости и оси симметрии каждого случая непосредственно
наблюдаются въ зеркалахъ. Для демонстрированія типическихъ изо-
эдроръ въ нихъ наливается грязная ртуть съ плоскою матовою
пленкою на поверхности. Въ этихъ зеркалахъ можно видѣть не
только обыкновенные выпуклые типические изоэдры 1-й степени,

но и типические изокойлоэдры, соотвѣтствующіе многогранникамъ
высшихъ степеней.

Наконецъ, для демонстрированія сложной симметрии доклад-
чикъ опять пользуется угловыми пластинками съ нѣкоторымъ
усложненіемъ.

Приборы эти впервые были демонстрированы въ Император-
скомъ Минералогическомъ Обществѣ въ началѣ 1883 года. Те-
орія, на которой они основаны, изложена въ сочиненіи доклад-
чика «Начала ученія о фигурахъ», представленномъ для напечат-
танія въ томъ же году.

Описаніе и изображеніе этихъ приборовъ находится въ крат-
комъ руководствѣ по кристаллографіи докладчика.

Протоколъ засѣданія 15 сентября 1892 года.

Предсѣдательствующій сообщилъ собранію, что весною сего
года Общество понесло чувствительную потерю въ лицѣ скончав-
шагося его предсѣдателя Василія Григорьевича Иминенецкаго.
Покойный оказалъ Обществу громадныя услуги: онъ былъ однимъ
изъ самыхъ дѣятельныхъ его учредителей, былъ первымъ его пред-
сѣдателемъ, выхлопоталъ помѣщеніе для собраній Общества, въ
которомъ оно засѣдало въ теченіи двухъ лѣтъ и всегда принималъ
самое горячее участіе во всѣхъ дѣлахъ Общества.

По предложению предсѣдательствовавшаго Собрание почтило
память усопшаго вставаніемъ съ мѣстъ. Въ библіотеку Общества
доставлены слѣдующія сочиненія:

- 1) Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, Т. XVI вып. 1 и 2.
- 2) Д. Ф. Селивановъ. О разложеніи чиселъ на множители (замѣтка 2-я).
- 3) Е. С. Федоровъ. Краткое руководство по кристаллографіи, ч. I. 1891 г.
- 4) Д. К. Бобылевъ. Краткій историческій очеркъ открытия основныхъ принциповъ и общихъ законовъ теоретической механики.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ. Нѣкоторыя слѣдствія теоремы Ролля и приложение теоремы Ролля къ доказательству теоремы В. А. Маркова о распределеніи корней двухъ функцій и ихъ производныхъ.

2) И. И. Ивановъ въ дополненіе къ вышесказанному сообщенію, показалъ другое доказательство теоремы В. А. Маркова, именно:

Пусть корни алгебраического уравненія:

$$f(x) = 0 \dots \dots \dots \quad (1)$$

отдѣляются корнями уравненія:

$$F(x) = 0 \dots \dots \dots \quad (2);$$

причёмъ всѣ корни предполагаются вещественными и показатель степени уравненія (1) равенъ или на единицу менѣе показателя степени уравн. (2). Пусть, далѣе, корни уравненія (2) будутъ:

$$x_1, x_2 \dots x_n$$

Имѣемъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{F'(x_k)} \frac{1}{x-x_k} + A \dots \dots \quad (3),$$

гдѣ A —число постоянное.

Принимая во вниманіе вышесказанное о корняхъ и теорему Ролля, легко убѣждаемся, что всѣ коэффициенты: $\frac{f(x_k)}{F'(x_k)}$ имѣютъ одинаковый знакъ.

Взявъ производный по x отъ обѣихъ частей равенства (3), находимъ:

$$\frac{f'(x)F(x) - f(x)F'(x)}{[F(x)]^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{F''(x_k)} \frac{1}{(x-x_k)^2} \dots \dots \quad (4),$$

Обозначимъ два смежныхъ корня уравненія: $F'(x) = 0$, черезъ y_m и y_{m+1} и подставимъ послѣдовательно эти значенія вмѣсто x въ равенство (4), тогда увидимъ, что $f'(y_m)$ и $f'(y_{m+1})$ будутъ имѣть разные знаки, что и доказываетъ теорему.

3) Н. Б. Делоне показалъ нѣсколько моделей новыхъ сочиненій.

Протоколь засѣданія 15 октября 1892 г.

Секретарь Общества доложилъ собранію, что прежнее помѣщеніе, въ которомъ собиралось Общество, въ настоящее время понадобилось Академіи Наукъ для установки нѣкоторыхъ приборовъ и для производства опытовъ, поэтому Общество лишено возможности собираться въ Физическомъ Кабинетѣ Академіи Наукъ.

Въ виду этого, секретарь обратился къ члену Комитета Общества для доставленія средствъ Высшимъ Женскимъ курсамъ, Ольгѣ Константиновнѣ Нечаевой съ просьбою походатайствовать о разрѣшеніи собираться Обществу, по крайней мѣрѣ хоть 15 октября, въ зданіи Высшихъ Женскихъ курсовъ.

Въ письмѣ на имя В. І. Шиффа, О. К. Нечаева увѣдомляется, что Комитетъ Общества для доставленія средствъ высшимъ женскимъ курсамъ выразилъ полную готовность оказать ежемѣсячное гостепріимство Математическому Обществу, начиная съ 15 октября, для чего уже сдѣланы соотвѣтствующія распоряженія.

Собрание, выслушавъ заявленіе секретаря, постановило: поручить бюро Общества письменно выразить признательность Общества Комитету Общества для доставленія средствъ Высшимъ Женскимъ курсамъ за радушіе и готовность, съ которою Комитетъ отозвался на нужды Общества, предоставивъ ему такое прекрасное помѣщеніе, какъ домъ Высшихъ Женскихъ курсовъ.

При обсужденіи же вопроса, слѣдуетъ ли воспользоваться любезнымъ предложеніемъ Комитета, были высказаны нѣкоторыя принципіальные причины, вслѣдствіе которыхъ неудобно Обществу собираться въ помѣщеніи Высшихъ Женскихъ курсовъ. Въ виду этого собраніе обратилось къ своимъ сочленамъ гг. профессорамъ университета съ просьбою походатайствовать о разрѣшеніи Обществу собираться въ зданіи университета, на что гг. профессора изъявили свое согласіе.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) К. А. Пессе. «Maxima и Minima функцій двухъ переменныхъ».
- 2) Б. М. Коиловичъ. «О, такъ называемомъ, петербургскомъ парадоксѣ».

3) В. А. Марковъ—пѣкоторыя обобщенія найденой имъ тѣоремы о распределеніи корней двухъ функцій и ихъ производныхъ: Теорема 1. Пусть 1) для каждого конечнаго значенія вещественной переменной x , которая не можетъ получать значеній, меньшихъ нѣкотораго вещественнаго числа ς и получаетъ всѣ остальныя (случай $\varsigma = -\infty$ не исключается), вещественные функціи: $f(x)$ и $F(x)$ отъ этой переменной имѣютъ конечныя производныя и отношеніе:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = G(x),$$

гдѣ $G(z)$ — нѣкоторая дробная (m  etomorphe) функція отъ комплексной переменной z на нѣкоторой части A плоскости, содержащей часть оси абсциссъ, лежащую справа отъ точки $:z = \varsigma$, и не имѣть на этой части плоскости другихъ бесконечностей, кроме корней функціи $F(x)$; 2) между каждыми двумя последовательными корнями (включая эти корни) любой изъ функцій: $f(x)$ и $F(x)$ заключается только одинъ корень ея производной, который мы будемъ называть соответствующимъ большему изъ этихъ двухъ корней самой функціи; 3) каково бы ни было значеніе переменной x , модуль интеграла

$$\int_{C_{x,t}} \frac{G(z)dz}{(z-x)^2},$$

взятаго по сомкнутой линіи $C_{x,t}$, не выходящей изъ части A плоскости, содержащей внутри себя точку x и зависящей отъ x и отъ нѣкотораго параметра t , который можно изменять такъ, что точки пересѣченія линіи $C_{x,t}$ съ осью абсциссъ, лежащиа справа отъ точки $z = x$, будутъ удаляться въ бесконечность, будетъ какъ угодно малъ, если линія $C_{x,t}$ —не проходитъ черезъ бесконечности функціи $G(z)$ и точки пересѣченія ея съ осью абсциссъ, лежащиа справа отъ точки $z=x$, достаточно далеки отъ начала координатъ; 4) корни функцій $f(x)$ и $F(x)$ перемежаются между собою.

Въ такомъ случаѣ корни производныхъ $f'(x)$ и $F'(x)$, соответствующие корнямъ самыхъ функцій, также перемежаются

между собою и при томъ если α —корень производной $f'(x)$, соответствующій корню a функціи $f(x)$, β —корень производной $F'(x)$, соответствующій корню b функціи $F(x)$, то разности $\beta - a$ и $b - \alpha$ —одного знака.

Замѣчаніе 1. Мы здѣсь предположили, что кратность каждого корня любой изъ функцій $f(x)$ и $F(x)$ равна единицѣ, но распространивъ нѣкоторымъ образомъ попытіе о перемежаемости корней двухъ функцій отъ вещественной переменной и попытіе о корняхъ производной, соответствующемъ корню самой функціи, высказанную теорему можно распространить и на тотъ случай, когда функціи $f(x)$ и $F(x)$ имѣютъ корни, кратность которыхъ отлична отъ единицы.

Замѣчаніе 2. Если функція $G(z)$ дробная на всей плоскости и не имѣть другихъ бесконечностей, кроме корней функціи $F(x)$ и около каждой бесконечности функціи $G(z)$ можно описать нѣкоторый сомкнутый контуръ, такъ, что контуры, соответствующіе различнымъ бесконечностямъ функціи $G(z)$, не будутъ пересѣкаться между собою и вѣвъ этихъ контуровъ модуль функціи $G(z)$ будетъ постоянно менѣе нѣкотораго положительнаго числа M , то условіе третье павѣрно выполнено. Второе условіе будетъ павѣрно выполнено, если для каждого значенія переменной x — функціи: $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ и $\frac{F'(x)}{F(x)}$ — не возрастающія.

Примѣръ. Пусть $g(x)$ какая угодно вещественная функція вещественной переменной x , производная которой конечна и не возрастающая функція x для каждого конечнаго значенія x , $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ —цѣлые рациональныя функціи комплекснаго переменнаго z , неимѣющія минимыхъ корней, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ —такія цѣлые рациональныя функціи отъ z , что всѣ корни уравненій:

$$\omega(z) = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z) (z-1) = 0$$

$$\varsigma(z) = \Psi_1^2(z) + \Psi_2^2(z) (z-1) = 0$$

вещественные и заключаются между -1 и $+1$.

Пусть при томъ степень функціи $\varphi(z)$ не выше степени функціи $\Psi(z)$, а степень функціи $\varsigma(z)$ не выше степени $\omega(z)$.

Если корни функций:

$$f(x) = e^{g(x)} \left[\varphi_1(\sin x) + \varphi_2(\sin x) \cos x \right] \varphi(x)$$

$$F(x) = e^{g(x)} \left[\Psi_1(\sin x) + \Psi_2(\sin x) \cos x \right] \Psi(x)$$

отъ вещественной переменной x перемежаются между собою, то и корни ихъ производныхъ тоже перемежаются между собою.

Замѣчаніе 3. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяютъ условіямъ теоремы и второму условію, высказанному въ замѣчаніи 2-мъ (т. е. функции: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ и $\frac{F'(x)}{F(x)}$ ни для какого значенія x не возрастаютъ), то и функции:

$$e^{\int_s^x h(x)dx} f(x) \text{ и } e^{\int_s^x h(x)dx} F(x),$$

гдѣ $h(x)$ — какая угодно возрастающая вещественная функция x , конечная для каждого конечнаго значенія x , также удовлетворяютъ этимъ условіямъ.

Отсюда получаемъ слѣдующую теорему: если функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяютъ условіямъ теоремы 1-й и второму условію замѣчанія 2-го, то корни функций:

$$f'(x) + h(x)f(x) \text{ и } F'(x) + h(x)F(x),$$

гдѣ $h(x)$ — какая угодно вещественная, невозрастающая функция x , конечная для конечныхъ значеній x , соответствующихъ корнямъ

функций $f(x)e^{\int_s^x h(x)dx}$ и $F(x)e^{\int_s^x h(x)dx}$ — перемежаются между собою.

Не трудно распространить эту теорему па всѣ корни функций: $f'(x) + h(x)f(x)$ и $F'(x) + h(x)F(x)$, а также и на тотъ случай, когда функция $h(x)$ обращается въ бесконечность для нѣкотораго значенія x , отличныхъ отъ корней функций $f(x)$ и $F(x)$.

Теорема 2. Пусть:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}, \quad F(x) = \frac{\varsigma(x)}{\omega(x)}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1} \prod_{k=1}^{k=n} (x - a_k), \quad \Psi(x) = \frac{1}{b_{n+m}} \prod_{k=n+1}^{k=n+m} (x - b_k)$$

$$\varsigma(x) = \prod_{k=1}^{k=n} (x - b_k), \quad \omega(x) = \prod_{k=n+1}^{k=n+m} (x - a_k)$$

и вещественные числа:

$$a_1, a_2 \dots a_n, a_{n+1} \dots a_{n+m}; \quad b_1, b_2 \dots b_n, b_{n+1} \dots b_{n+m}$$

удовлетворяютъ неравенствомъ:

$$a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq b_2 \dots \leqq a_n \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \dots \leqq a_{n+m} \leqq b_{n+m}$$

(причемъ не исключаются случаи: $a_1 = -\infty$, $b_{n+m} = +\infty$).

Обозначимъ корни уравненія:

$$\varphi'(x)\Psi(x) - \Psi'(x)\varphi(x) = \Psi^2(x) \frac{df(x)}{dx} = \varphi^2(x) \frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{dx} = 0$$

буквами c съ различными значками, а корни уравненія:

$$\varsigma'(x)\omega(x) - \omega'(x)\varsigma(x) = \omega^2(x) \frac{dF(x)}{dx} = \varsigma^2(x) \frac{d\left(\frac{1}{F(x)}\right)}{dx} = 0$$

буквами d съ различными значками,

и предположимъ, что разности: $c_k - c_k$, $d_k - d_k$ и $h - h$ не противныхъ знаковъ. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

1) при $n > m$

$$c_1 \leqq d_1 \leqq c_2 \leqq \dots \leqq c_{n-1} \leqq d_{n-1} \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq d_n \leqq c_n \dots \leqq d_{n+m-1} \leqq c_{n+m-1};$$

2) при $n = m$

$$c_1 \leqq d_1 \leqq c_2 \leqq d_2 \dots \leqq c_{n-1} \leqq d_{n-1} \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq d_n \leqq c_n \dots \leqq d_{n+m-2} \leqq c_{n+m-2};$$

3) при $n < m$

$$c_1 < d_1 \leqq c_2 \leqq d_2 \dots \leqq c_n \leqq d_n \leqq b_n \leqq a_{n+1} \leqq d_{n+1} \leqq c_{n+1} \dots \leqq d_{n+m-1} \leqq c_{n+m-1}$$

и равенство: $c_k = d_k$ при $n \leqq m$, $k \leqq n-1$ имѣетъ мѣсто только тогда, когда $a_k = a_{k+1} = b_k = b_{k+1}$; при $n \leqq m$, $n \leqq k < n+m-1$ только тогда, когда $a_{k+1} = a_{k+2} = b_{k+1} = b_{k+2}$; при $n < m$, $1 \leqq k \leqq n$ только тогда, когда $a_{k-1} = a_k = b_{k-1} = b_k$, при $n < m$, $k > n$ только

тогда, когда $a_k = a_{k+1} = b_k = b_{k+1}$ [мы предполагаемъ, что $f(x)$ не $= F(x)$]. Слѣдовательно корни уравненій (1) и (2), меньшие b_n перемежаются между собою, а корни уравн. (1) и (2) большиe b_n перемежаются между собою.

Эта теорема можетъ быть распространена и на ираціональныя функціи, удовлетворяющія условіямъ, аналогичнымъ условіямъ теоремы 1-й.

Протоколъ засѣданія 13 ноября 1892 года.

Предсѣдатель, сообщивъ собранію, что, благодаря ходатайству профессоровъ К. А. Пессе и А. А. Маркова, Ректоръ Университета разрѣшилъ Обществу имѣть свои засѣданія въ зданіи Университета, — предложилъ собранію выразить признательность Общества К. А. Пессе и А. А. Маркову за ихъ хлопоты по устройству Общества.

Собраніе отозвалось па предложеніе Предсѣдателя весьма сочувствіемъ и выразило благодарность К. А. Пессе и А. А. Маркову громкими рукоплесканіями. Вмѣстѣ съ тѣмъ было предложено поблагодарить Ректора Университета П. В. Никитина за гостепріимство и академика Вильда за разрѣшеніе Обществу собираться, до сего времени, въ физическомъ кабинетѣ Академіи Наукъ.

Собраніе постановило: поручить бюро Общества письменно выразить г. ректору Университета признательность Общества и поручить секретарю лично поблагодарить отъ имени Общества академика Вильда.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) А. А. Марковъ. «Случаи, когда интегралъ вида:

$$\int \frac{x^dx}{(x^3+B)\sqrt{x^4-1}} \text{ выражается въ логарифмахъ.}$$

- 2) И. С. Аладовъ. «О наивысшемъ предѣлѣ числа рѣшеній сравненія: $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, меньшихъ p при p — простомъ».

Определение наивысшаго предѣла числа решений сравненія

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

меньшихъ p при p — простомъ.

Рѣшеніе этой задачи основано на нѣкоторыхъ свойствахъ корней p сравненій

$$x - x^p \equiv hp \pmod{p^2}, \dots \quad (1)$$

гдѣ $h = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Предположимъ что число $n > 1$, меньшее p , удовлетворяетъ сравненію:

$$x - x^n \equiv 0 \pmod{p^2}$$

и посмотримъ, какому изъ сравненій (1) будетъ удовлетворять число $p-n$; положивъ $p-n=n_1$ и вставивъ величину $n=p-n_1$ въ предыдущее сравненіе, находимъ:

$$n_1 - n_1^p \equiv p \pmod{p^2}$$

Возьмемъ теперь сравненіе:

$$\partial y \equiv 1 \pmod{p}.$$

Каждой величины ∂ , взятой изъ ряда: 1, 2, 3, ..., $p-1$, соответствуетъ нѣкоторая величина для y изъ того же ряда. Положимъ $\partial = n$ и посмотримъ, какому изъ сравненій (1) удовлетворяетъ соответствующая величина y ; сравненіе (1) $ny \equiv 1 \pmod{p}$ даетъ $ny = ap + 1$, гдѣ a меньше n и y ; отсюда $y = \frac{ap+1}{n}$ полагая: $y - y^p \equiv rp \pmod{p^2}$ и вставляя сюда $y = \frac{ap+1}{n}$, находимъ:

$$\frac{ap+1}{n} - \left(\frac{ap+1}{n}\right)^p \equiv rp \pmod{p^2},$$

или, принимая во внимание сравненіе: $n - n^p \equiv 0 \pmod{p^2}$,

$$ap \equiv nrp \pmod{p^2}, \dots \quad (2)$$

т. е. $a \equiv nr \pmod{p}$. Отсюда заключаемъ, что r не можетъ равняться ни нулю, ни единице, такъ какъ $a < n$. Итакъ $r > 1$.

Посмотримъ, наконецъ, какому изъ сравненій (1) удовлетворяетъ величина $p - y = y_1$; имѣемъ

$$p - y_1 = (p - y_1)^p \equiv rp \pmod{p^2},$$

откуда

$$y_1 - y_1^p \equiv r_1 p \pmod{p^2}, \dots \dots \dots \quad (3)$$

гдѣ $r_1 \equiv 1 - r \pmod{p}$, и такъ какъ $p > r > 1$, то и $r > 1$. Изъ этого видно, что каждой величинѣ $n < 1$ $\frac{n}{p} > 1$, удовлетворяющей первому изъ сравненій (1), соответствуютъ три величины $p - n$, y и $p - y$, большія единицы и меньшія p , изъ которыхъ первая удовлетворяетъ второму изъ сравненій (1), а другія двѣ—какимъ-либо двумъ другимъ [въ частномъ случаѣ можетъ быть и одному и тому же, именно, если $r = \frac{p+1}{2}$]. Теперь легко уже решить нашу задачу. Въ самомъ дѣлѣ, въ ряду $p - 3$ сравненій:

$$\begin{array}{l} 2y_2 \equiv 1 \\ 3y_3 \equiv 1 \\ \dots \dots \dots \\ (p-2)y_{p-2} \equiv 1 \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \text{мод. } p \\ \end{array} \right\}, \dots \dots \quad (4)$$

лишь половина изъ нихъ, т. е. $\frac{p-3}{2}$, различны между собою, и если $\frac{p-3}{2}$ —число четное, то эти $\frac{p-3}{2}$ сравненій могутъ быть распределены попарно такимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} \partial_1 u_1 \equiv 1 \\ (p - \partial_1)(p - u_1) \equiv 1 \\ \partial_2 u_2 \equiv 1 \\ (p - \partial_2)(p - u_2) \equiv 1 \\ \dots \dots \dots \\ \partial_{\frac{p-3}{4}} u_{\frac{p-3}{4}} \equiv 1 \\ (p - \partial_{\frac{p-3}{4}})(p - u_{\frac{p-3}{4}}) \equiv 1 \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \text{мод. } p \\ \end{array} \right\},$$

гдѣ всѣ d , u , $p - d$ и $p - u$ (заключ. въ предѣлахъ отъ 2 до $p - 1$ включит.) различны между собою.

Изъ доказанного выше слѣдуетъ, что неболѣе $\frac{p-3}{4}$ изъ этихъ величинъ могутъ удовлетворять первому изъ сравненій (1); прибавивъ сюда единицу, найдемъ, что всѣхъ величинъ меньшихъ p удовлетворяющихъ сравненію $x^{p-1} - 1 = 0$ (мод. p^2) не можетъ быть болѣе $\frac{p+1}{4}$. Если $\frac{p-1}{2}$ —число четное, то въ числѣ $\frac{p-3}{2}$ различныхъ между собою сравненій (4) находится сравненіе: $\partial(p - d) \equiv 1 \pmod{p}$ и по доказанному выше (сравп. 2 и 3), ни это d , ни $p - d$ не могутъ удовлетворять сравненію $x - x^p \equiv 0$ (мод. p^2); остальные $\frac{p-5}{2}$ сравненій можно распределить попарно такимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} \partial_1 u_1 \equiv 1 \\ (p - \partial_1)(p - u_1) \equiv 1 \\ \dots \dots \dots \\ \partial_{\frac{p-5}{4}} u_{\frac{p-5}{4}} \equiv 1 \\ (p - \partial_{\frac{p-5}{4}})(p - u_{\frac{p-5}{4}}) \equiv 1 \end{array} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \text{мод. } p \\ \end{array} \right\},$$

гдѣ всѣ d , u , $p - d$ и $p - u$ различны между собою. Отсюда заключаемъ, принимая во вниманіе доказанное выше, что не болѣе $\frac{p-5}{4}$ изъ этихъ величинъ могутъ быть корнями сравненія $x - x^p \equiv 0$ (мод. p^2), и прибавивъ сюда единицу, находимъ, что это сравненіе не можетъ имѣть болѣе $\frac{p-1}{4}$ рѣшеній, меньшихъ p . Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, въ которой и заключается рѣшеніе папіей задачи: *Если простое число p таково, что $\frac{p-1}{2}$ есть четное число, то сравненіе:*

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

не можетъ имѣть болѣе $\frac{p-1}{4}$ рѣшеній, меньшихъ p ; если же p —таково, что $\frac{p-1}{2}$ —число нечетное, то число рѣшеній предыдущаго сравненія, меньшихъ p , не можетъ превышать $\frac{p+1}{4}$.

Нужно замѣтить, что это есть самое общее рѣшеніе предложеній задачи, такъ можно указать два простыя числа, для которыхъ число рѣшеній сравненія $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (мод. p^2), меньшихъ p , достигаетъ найденного высшаго предѣла; числа эти суть: 5 и 11; сравненіе: $x^4 - 1 \equiv 0$ (мод. 5^2) имѣетъ лишь одно рѣшеніе < 5 , именно единицу; сравненіе же $x^{10} - 1 \equiv 0$ (мод. 11^2) имѣетъ три рѣшенія < 11 , именно: 1, 3 и 9, чѣмъ соотвѣтствуетъ наивысшему предѣлу числа подобныхъ рѣшеній. Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, какъ слѣдствіе, слѣдующее предложеніе: если простое число p таково, что $\frac{p-1}{2}$ есть четное число, то не менѣе $\frac{3}{4} \varphi(p-1)$ *) первообразныхъ корней числа p , меньшихъ p , суть также первообразные корни числа p^m . Если же $\frac{p-1}{2}$ число нечетное, то по меньшей мѣрѣ $\frac{1}{2} \varphi(p-1)$ первообразныхъ корней p , меньшихъ p , суть также первообразные корни числа p^m .

Доказательство этого предложенія вытекаетъ изъ вышеизложенныхъ разсужденій, если примемъ во вниманіе, что числа связанныя отношеніемъ:

$$dy \equiv 1 \pmod{p}$$

суть одновременно первообразные или непервообразные корни числа p , и что при $\frac{p-1}{2}$ — четномъ, d и $p-d$ — обладаютъ тѣмъ же свойствомъ.

Протоколъ экстреннаго засѣданія 16 Декабря 1892 года.

Товарищъ предсѣдателя предложилъ Собранию попросить П. Л. Чебышева предсѣдательствовать въ этомъ засѣданіи.

Предложеніе это было встрѣчено громкими рукоплесканіями и П. Л. Чебышевъ занялъ мѣсто предсѣдателя.

Предсѣдательствующій сообщилъ собранію о громадной потерѣ, которую понесла наука, Академія Наукъ, С.-Петербургскіе

*) $\varphi(N)$ означаетъ число чиселъ простыхъ съ N и не превышающихъ его.

Математическое Общество и Артиллерія въ лицѣ скончавшагося члена нашего Общества академика Акселя Вильгельмовича Гадолина.

Собрание почтило память скончавшагося вставаніемъ съ мѣстъ. Были сдѣлавы слѣдующія сообщенія (на французскомъ языке).

- 1) Г. Миттагъ-Леффлеръ. «О неалгебраическихъ особенностяхъ дифференціального уравненія, независящихъ отъ постоянной».
- 2) П. Л. Чебышевъ. «О приближенномъ вычисленіи одного определенного интеграла».

Исходя изъ формулы, данной Пафнутіемъ Львовичемъ, для приближенного выраженія квадратнаго корня изъ единицы дѣленной на переменную, черезъ простыя дроби (приложение къ LXI тому записокъ Имп. Академіи Наукъ № 1, 1889 г., стр. 10), именно:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sum \frac{\sqrt{h} dn \frac{2mK}{2n+1}}{xsn^2 \frac{2mK}{2n+1} + hcn^2 \frac{2mK}{2n+1}}}{\sum dn \frac{2mK}{2n+1}}$$

можно, замѣнивъ переменную x — другою переменною, получить приближенныя выраженія для нѣкоторыхъ определенныхъ интеграловъ.

Если напр. положить:

$$x = \frac{1+r^2-2r \cos \varphi}{(1-r)^2},$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r \cos \varphi}} = \sum_i \frac{A_i (1-r)}{C_i (1-r)^2 + 1 + r^2 - 2r \cos \varphi} \dots \quad (1),$$

гдѣ:

$$A_i = \frac{2\sqrt{h} dn \frac{2iK}{2n+1}}{lsn^2 \frac{2iK}{2n+1} \sum dn \frac{2iK}{2n+1}},$$

$$C_i = h \frac{cn^2 \frac{2iK}{2n+1}}{sn^2 \frac{2iK}{2n+1}}$$

$$r < 1, h = \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2}, K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{1}{h}} = \frac{2\sqrt{r}}{1+r}.$$

Разлагая въ рядъ по косинусамъ кратныхъ дугъ функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r \cos \varphi}},$$

будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r \cos \varphi}} = B_0 + B_1 \cos \varphi + \dots + B_m \cos m\varphi + \dots \quad (2),$$

при этомъ коэффициенты выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos m\varphi}{\sqrt{1+r^2-2r \cos \varphi}} d\varphi,$$

поэтому, принимая во вниманіе равенство (1), будемъ имѣть:

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum \frac{A_i (1-r) \cos m\varphi}{C_i (1-r)^2 + 1 + r^2 - 2r \cos \varphi} d\varphi \quad \dots \quad (3)$$

Съ другой стороны известная формула Пуассона даетъ:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(e^{\alpha i})}{1 - \sin \alpha \cos \varphi} d\varphi = \frac{2\pi f(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha},$$

поэтому, полагая въ равенствѣ (2)

$$\sin \alpha_i = \frac{2r}{C_i (1-r) + 1 + r^2} \quad \dots \quad (4),$$

получимъ:

$$B_m = \sum \frac{2A_i (1-r)}{C_i (1-r)^2 + 1 + r^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{m\alpha_i}{2}}{\cos \alpha_i}$$

или:

$$B_m = \sum \frac{A_i (1-r)}{r} \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \frac{m\alpha_i}{2} =$$

$$= \frac{\sum \frac{1+r}{r} dn \frac{2iK}{2n+1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \frac{m\alpha_i}{2} : \operatorname{sn}^2 \frac{2iK}{2n+1}}{\frac{1}{2} + \sum dn \frac{2iK}{2n+1}}$$

$$\sin \alpha_i = \frac{2r}{r^2 + 1 + (r+1)^2 \frac{C_n^2 \frac{2iK}{2n+1}}{S_n^2 \frac{2iK}{2n+1}}}$$

Погрѣшность E при этомъ вычисленіи будетъ меньше:

$$\frac{32K}{\pi(r+1) \left[e^{(2n+1)\pi \frac{K}{K}} - 16 \right]},$$

гдѣ:

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \varphi}}, k_1 = \sqrt{1-k^2} = \frac{r-1}{r+1}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ Нафпутій Львовичъ показалъ формулу, слу-
жащую для приближенного выражения дроби:

$$\frac{1}{H-x}$$

въ предѣлахъ отъ $-h$ до $+h$, при помощи полинома $n-1$ сте-
пени; именно: обозначая:

$$F(H) = (H + \sqrt{H^2 - h^2})^n + (H - \sqrt{H^2 - h^2})^n,$$

будемъ имѣть:

$$(5) \quad \frac{1}{H-x} = \frac{E \left[\frac{F(H)}{H} \right]}{F(H)} + \frac{E \left[\frac{F(H)}{H^2} \right]}{F(H)} x + \frac{E \left[\frac{F(H)}{H^3} \right]}{F(H)} x^2 + \dots$$

гдѣ черезъ $E \left(\frac{F(H)}{H^k} \right)$ обозначена цѣлая часть этой функціи.

Въ частномъ случаѣ, полагая $h = 0$ будемъ имѣть: $F(H) = 2^n H^n$ и тогда

$$\frac{1}{H-x} = \frac{1}{H} + \frac{x}{H^2} + \dots$$

— известное разложение:

Помноживъ равенство (5) на $f(x)dx$ и интегрируя въ предѣлахъ между $-h$ и $+h$, будемъ имѣть:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{f(x)dx}{H-x} = \frac{E\left[\frac{F(H)}{H}\right]}{F(H)} \int_{-h}^{+h} f(x)dx + \\ + \frac{E\left[\frac{F(H)}{H^2}\right]}{F(H)} \int_{-h}^{+h} xf(x)dx + \dots$$

съ погрѣшностью, не превосходящею:

$$\pm \frac{2h^4}{F(H)}$$

Оба сообщенія: г. Миттага-Леффлера и П. Л. Чебышева встрѣчены были собраніемъ громкими и продолжительными рукоплесканіями.

Протоколъ засѣданія 21 декабря 1892 года.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) Ю. В. Сохоцкій. «Принципъ общаго наибольшаго дѣлителя въ теоріи алгебраическихъ чиселъ. Очеркъ».
- 2) В. А. Марковъ. «О решеніи въ цѣлыхъ числахъ уравненія: $x^n + y^n = z^n$ ».

Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія книги:

- 1) Сборникъ Московскаго Математическаго Общества т. XVI вып. 3.
- 2) Соколовъ Н. П. Теорія симметрическихъ многогранниковъ.

Протоколъ засѣданія 15 Января 1893 года.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) С. Е. Савичъ. «О рациональныхъ интегралахъ одного нелинейнаго дифференціального уравненія 3-го порядка (пріемъ Perrin)».

2) М. З. Образцовъ. «О приведеніи ультраэллиптическихъ дифференціаловъ къ эллиптическимъ».

3) И. В. Мещерскій. «Къ задачѣ n — тѣль». Прірода и обыденная жизнь представляютъ намъ такие случаи движенія, въ которыхъ массы движущихся тѣль измѣняются съ теченіемъ времени; поэтому разсмотрѣніе движеній тѣль съ измѣняющимися массами должно имѣть мѣсто въ теоретической механикѣ.

Принципы: возможныхъ перемѣщеній, д'Аламбера, Гаусса — сохраняютъ свое значеніе и въ этомъ случаѣ, но другіе принципы, вообще говоря, не имѣютъ мѣста; дифф. ур. движения получаются такой видъ, какъ будто бы массы были постоянны. Простѣйшій случай представляется тогда, когда массы точекъ системы измѣняются по одному и тому же закону:

$$m_i = k_i f(t) \quad (k_i = const).$$

Въ этомъ случаѣ задача о движеніи n точекъ, взаимно притягивающихъ или отталкивающихъ, допускаетъ шесть интеграловъ центра инерціи и три интеграла, аналогичные интеграламъ площадей.

Теорема. Задача о движеніи системы точекъ, массы которыхъ измѣняются по закону:

$$m_i = k_i(a + \alpha t)^{-s-3} \dots (a, \alpha \dots const),$$

при дѣйствіи силъ притягательныхъ или отталкивательныхъ, пропорціональныхъ массамъ и 3-ей степени разстоянія, приводится къ задачѣ о движеніи системы точекъ съ постоянными массами при дѣйствіи тѣхъ же силъ.

Слѣдствія, вытекающія изъ этой теоремы для случая *трехъ и двухъ тѣль*, взаимно притягивающихъ по закону Ньютона. Указанный при этомъ случаѣ задачи двухъ тѣль есть частный случай задачи Гильдена (Astr. Nachr. 2593) замѣчательный тѣмъ, что допускаетъ точное решеніе.

Протоколъ засѣданія 15 февраля 1893 года.

I. По предложенію предсѣдателя единогласно избранъ въ почетные члены Общества Пафнютій Львовичъ Чебышевъ.

II. Производились выборы въ члены Совѣта, причемъ избранными оказались слѣдующія лица: К. А. Пессе, Ю. В. Сохопкій, А. А. Марковъ, П. А. Шиффъ, Д. К. Бобылевъ, А. Н. Коркинъ, И. Л. Пташицкій, О. А. Баклундъ, Д. Ф. Селивановъ и В. И. Шиффъ.

III. Секретарь Общества представилъ Собранию отчетъ о состояніи суммъ Общества и просилъ обсудить вопросъ о назначеніи обязательнаго членскаго взноса. Собрание постановило: отъ каждого вступающаго въ Общество члена взимать по *пяти* рублей, и, затѣмъ, ежегодный членскій обязательный взносъ устанавливается въ *три* рубля. Что же касается до состоящихъ въ настоящее время членами Общества, то они въ этомъ году считаются какъ бы вступающими въ Общество и должны поэтому внести по 5 рублей.

IV. По предложенію предсѣдателя Собрание постановило выразить благодарность Инспектору классовъ Михайловской Артиллерійской Академіи и училища полковнику Карлу Егоровичу Гуку за матеріальное содѣйствіе, которое онъ постоянно оказываетъ Обществу.

V. Предлагаются въ члены Общества.

- 1) Николай Александровичъ Булгаковъ; предлагаются: П. А. Шиффъ и Б. М. Кошевичъ;
- 2) Дмитрій Дмитріевичъ Ефремовъ; предлагаются К. А. Пессе и Ю. В. Сохопкій.

VI. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) Е. В. Борисовъ. «О критическихъ центрахъ кривыхъ 3-го порядка».
- 2) Д. К. Бобылевъ. «Объ одномъ частномъ рѣшеніи дифференціальныхъ уравненій вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, если центръ инерціи находится на наименьшей главной оси эллипсоида инерціи».

При этомъ частномъ рѣшеніи проекція угловой скорости на направление средней оси эллипсоида равна нулю, но для этого надо, чтобы наибольшій главный моментъ инерціи былъ вдвое болѣе наименьшаго. Въ томъ случаѣ, когда вращеніе вокругъ наименьшей оси эллипсоида инерціи совершается безъ остановокъ, каждая точка этой оси описываетъ сферическую кривую съ точками возврата на одномъ изъ предѣльныхъ круговъ.

Протоколъ засѣданія 17 марта 1893 года.

I. Предсѣдатель Совѣта Ю. В. Сохопкій предложилъ избрать предсѣдателемъ этого засѣданія Н. В. Бугаева. Предложеніе это встрѣчено громкими рукоплесканіями и Н. В. Бугаевъ занялъ мѣсто предсѣдателя.

II. Въ библіотеку Общества доставлены сочиненія:

- 1) Д. К. Бобылевъ. «О шарѣ съ гирроскопомъ внутри, катящемся по горизонтальной плоскости безъ скольженія»,
- 2) Извѣстія СПБ. Технологического института за 1891 и 1892 г.
- 3) П. А. Шиффъ. «О нѣкоторыхъ слѣдствіяхъ теоремы Ролля».

III. Избраны въ члены Общества: Николай Александровичъ Булгаковъ и Дмитрій Дмитріевичъ Ефремовъ.

IV. Сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) А. С. Домогаровъ. «Объ одной теоремѣ Якоби».
- 2) Н. Б. Делоне. «О новомъ эллисографѣ».
- 3) Е. С. Федоровъ. «О проблемѣ — minima въ области учёнія о симметріи».

Протоколъ засѣданія 17 апрѣля 1893 года.

I. Въ библіотеку Общества доставлены сочиненія:

- 1) 4-й выпускъ XVI тома Математического сборника Московского Математического Общества.

2) С. Е. Савичъ. О линейныхъ обыкновенныхъ дифференциальныхъ уравненіяхъ съ правильными интегралами.

II. Предлагаются въ члены Общества:

1) Павель Семеновичъ Селезневъ (предлагаются Д. Ф. Селивановъ и Б. М. Кояловичъ).

2) М. М. Филипповъ (предлагаются Ю. В. Соходкій и П. А. Шиффъ).

3) Николай Павловичъ Трынковскій (предлагаются В. И. Станиевичъ и С. Е. Савичъ).

III. Читано письмо А. В. Васильева о чествованіи памяти Н. И. Лобачевского по случаю столѣтія годовщины его рожденія.

IV. Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) О. А. Баклундъ. «Общія выраженія для возмущеній, производимыхъ внутренними планетами въ движеніи кометъ по верхнимъ частямъ ихъ орбітъ».

2) Н. Б. Делоне. «О механизмахъ съ рычагами, шарнирами и прорѣзями».

Засѣданіе 18 сентября 1893 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

а) Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

1) Е. С. Федоровъ. «Проблема — minimum въ ученіи о симметріи».

2) И. И. Ивановъ. «Къ теоріи цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ».

3) Н. Б. Делоне. «О нѣкоторыхъ новыхъ механизмахъ».

4) А. В. Васильевъ. «Переводъ мемуаровъ: Гельмгольца — счетъ и измѣреніе и Кронекера — понятіе о числѣ».

б) Избрани въ члены Общества: Павель Семеновичъ Селезневъ, Михаилъ Михайловичъ Филипповъ и Николай Павловичъ Трынковскій.

в) Предлагаются въ члены Общества:

1) Николай Платоновичъ Цытовичъ (предлагаются П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

2) Евгения Александровна Максимова (предлагаются В. И. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

г) Предсѣдатель напомнилъ собранію о необходимости напечатать уставъ Общества и Протоколы Собраний; для этой цѣли нужно, чтобы гг. члены Общества поторошились доставкою членскихъ взносовъ за 1893 г.

И. И. Ивановъ, «Нѣкоторыя предложенія о простыхъ числахъ».

д) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

I) Простыхъ чиселъ формы $8m + 3$ — бесконечное множество. Допустимъ, что всѣ числа этой формы будутъ:

$$3, 11, \dots, p$$

и пусть

$$(3.11\dots p) = P.$$

Составимъ число:

$$P^2 + 2.$$

Такъ какъ P^2 имѣеть форму $8n + 1$,

то

$$P^2 + 2 = 8n + 3.$$

По крайней мѣрѣ одинъ изъ дѣлителей этого числа будетъ формы: $4s + 3$, т. е. или формы $8s + 3$ или $8z + 7$.

Но $P^2 + 2$ дѣлится только на тѣ простыя числа, для которыхъ (-2) квадратичный вычетъ и, следовательно, ни одинъ изъ дѣлителей $P^2 + 2$ не можетъ имѣть форму $8m + 7$. Такимъ образомъ мы обнаруживаемъ существование простого дѣлителя $8s + 3$, не заключающагося въ рядѣ: $3, 11, \dots, p$ и теорема доказана.

2) Простыхъ чиселъ формы: $8m + 7$ — бесконечное множество. Допустимъ, что всѣ числа этой формы будутъ:

$$7, 23, \dots, p,$$

и пусть

$$P = 7.23\dots p.$$

Составляемъ число:

$$P^2 + 2.$$

Дальнѣйшія разсужденія аналогичны съ предыдущимъ.

3) Простыхъ чиселъ формы $8m + 5$ — бесконечное множество. Пусть всѣ числа этой формы будутъ:

$$5, 13, \dots p.$$

Составляемъ число:

$$P^2 + 2^2,$$

которое будетъ имѣть форму: $8m + 5$; дѣлители его будутъ имѣть форму: $4n + 1$, т. е. или форму $8m + 5$ или $8m + 1$; но, такъ какъ само число $P^2 + 2^2$ имѣть форму $8m + 5$, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ дѣлителей будетъ формы $8m + 5$ и теорема доказана.

4) Простыхъ чиселъ формы $8m + 1$ — бесконечное множество. Пусть всѣ числа этой формы будутъ:

$$17, 41, \dots p.$$

Составляемъ число:

$$(2P)^2 + 1.$$

Такъ какъ (-1) — биквадратичный вычетъ только для чиселъ формы $8m + 1$, то, следовательно, всѣ дѣлители этого числа имѣютъ форму: $8m + 1$ и теорема доказана.

П. Д. А. Граве. «О черченіи географическихъ картъ».

III. Н. Б. Делоне. 1) «О сферопланѣ и о черченіи географическихъ картъ». Соединяя инверторъ Peaucellier съ пантографомъ, можно получить снарядъ для черченія стереографическихъ проекцій кривыхъ, начертенныхъ на глобусѣ. 2) «О новомъ способѣ механическаго черченія трохоидъ». Если имѣются два кривошипа, вращающіеся около двухъ неподвижныхъ центровъ съ постояннымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей, то середина разстоянія между концами этихъ кривошиповъ чертитъ трохоиду. Поэтому, если соединить шарнирами концы кривошиповъ съ концами равносторонняго пантографа, то средняя вершина пантографа опишетъ трохоиду.

Засѣданіе 20 октября 1893 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохопскій.

I. Избраны въ члены Общества: Николай Платоновичъ Цытовичъ и Евгения Александровна Максимова.

II. Предлагаются въ члены Общества: Марія Людовиковна Бронская (предлагаютъ В. И. Шиффъ и О. А. Баклундъ), Александра Иеронимовна Стебницкая, (предлагаютъ В. И. Шиффъ и О. А. Баклундъ), Александръ Николаевичъ Толмачевъ (предлагаютъ Д. Ф. Селивановъ, Е. В. Борисовъ и Д. А. Граве), Сергій Федоровичъ Влезковъ (предлагаютъ Д. Ф. Селивановъ и П. М. Новиковъ) и Федоръ Алексѣевичъ Покровскій (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

III. Предсѣдатель напомнилъ Собранию, что черезъ два дня исполнится сто лѣтъ со дня рождения знаменитаго русскаго геометра Николая Ивановича Лобачевскаго и предложилъ посвятить засѣданіе памяти этого замѣчательнаго ученаго. Секретарь Общества прочелъ письмо Ректора Императорскаго Казанскаго Университета съ приглашеніемъ С.-Петербургскаго Математическаго Общества принять участіе въ празднованіи столѣтія дня рождения Н. И. Лобачевскаго. Вмѣстѣ съ тѣмъ былъ прочитанъ привѣтственный адресъ, посланный С.-Петербургскимъ Математическимъ Обществомъ Императорскому Казанскому Университету по случаю этого многознаменательнаго для русской науки дня. Затѣмъ С. Е. Савичъ, сообщивъ собранію нѣкоторыя біографическія свѣдѣнія о жизни Н. И. Лобачевскаго, изложилъ содержаніе работъ послѣдняго, преимущественно по геометріи, и указалъ на высокое ихъ научное и философское значеніе.

Послѣ взаимнаго обмѣна мнѣній между членами Общества о выдающихся научныхъ заслугахъ Н. И. Лобачевскаго, былъ сдѣланъ перерывъ засѣданія.

По возобновленіи засѣданія, послѣ перерыва были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) И. И. Ивановъ. «Нѣкоторыя предложения о простыхъ числахъ» (продолженіе сообщенія, сдѣланнаго въ засѣданіи 18 сентября).

Докладчикъ доказалъ еще четыре предложенія, которыя могутъ быть формулированы такъ: *Простыхъ чиселъ, заключающихся въ каждой изъ линейныхъ формъ: $12m + 5$, $12m + 7$, $12m + 11$ и $12m + 1$, бесконечное множество.*

Пріемъ, которымъ онъ пользовался, аналогиченъ съ тѣмъ, при помощи которого онъ доказалъ четыре предложенія въ предыдущемъ засѣданіи 18 сентября, именно: предполагая всякий разъ, что число простыхъ чиселъ, заключающихся въ данной линейной формѣ, конечное и обозначая ихъ произведеніе черезъ P , онъ рассматриваетъ слѣдующія формы: 1) $(2P)^2 + 3$ — для чиселъ формы $12m + 7$, 2) $P^2 - 3$ — для чиселъ формы $12m + 11$, 3) $P^2 + 2^2$ — для чиселъ формы $12m + 5$ и 4) $(2P)^6 + 1 = [(2P)^2 + 1][(2P)^2 + 1]^2 - 3(2P)^2$ — для чиселъ формы $12m + 1$.

Пользуясь извѣстными предложеніями, заключающимися въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$\left(-\frac{3}{n}\right) = 1$$

для простыхъ n формъ: $12m + 7$ и $12m + 1$ и

$$\left(\frac{3}{n}\right) = 1$$

для простыхъ n формъ: $12m + 1$ и $12m + 11$ и

$$\left(-\frac{1}{n}\right) = 1$$

для простыхъ n формъ: $12m + 1$ и $12m + 5$,

онъ въ каждомъ случаѣ обнаруживаетъ существование простыхъ чиселъ данной линейной формы, на которыя P не дѣлится, что и доказывало предложеніе.

2) K. A. Posse сдѣлалъ сообщеніе о доказательствѣ трансцендентности числа e , предложенномъ Горданомъ (*Comptes rendus № 19 Т. CXVI*) и обобщеніе Гордановскихъ соображеній, ведущее къ доказательству трансцендентности числа π .

Равенство вида

$$A_0e^{\alpha_0} + A_1e^{\alpha_1} + \dots + A_ke^{\alpha_k} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — алгебраическія числа, различныя между собою, а A_0, A_1, \dots, A_k — цѣлые обыкновенные числа, не равныя нулю, преобразовывается въ виду: (см. *A. A. Марковъ* «Доказательство трансцендентности чиселъ e и π » (по статьямъ Эрмита и Линденмана) С.-Петербургъ, 1883)

$$(2) D_1\Sigma e + D_2\Sigma e + \dots + D_n\Sigma e = 0,$$

гдѣ D_1, D_2, \dots, D_n , и σ обыкновенные цѣлые числа, а ξ_{i_k} — цѣлые алгебраическія числа, корни неприводимыхъ уравненій

$$F_1(z) = 0, F_2(z) = 0, \dots, F_n(z) = 0.$$

Равенство (2) замѣняется равенствомъ:

$$(I) D_0 + D_1\Sigma e + D_2\Sigma e + \dots + D_n\Sigma e = 0,$$

гдѣ x_i, y_i, \dots, u_i — цѣлые алгебраическія числа, между которыми нѣтъ чиселъ, равныхъ нулю; суммированія, обозначенныя знакомъ Σ , распространяются:

$$\begin{array}{lll} \text{первое на все корни уравненія } X = 0 \\ \text{второе } > > > > Y = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{послѣднее } > > > U = 0 \end{array}$$

Полагая

$$\Omega(z) = X \cdot Y \dots U = z^N + p_1z^{N-1} + \dots + p_N = (z-x_1)(z-x_2)\dots(z-y_1)\dots(z-u_g),$$

гдѣ p_1, p_2, \dots, p_N — цѣлые числа и p_N не $= 0$,

составляемъ функцію

$$\varphi(z) = \frac{\sigma^{p-1} z^{p-1}}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} [\Omega(\sigma z)]^p, \text{ гдѣ } p \text{ есть простое число, большее наибольшаго изъ чиселъ } p_N, D_0 \text{ и } \sigma. \text{ Введя символъ Гордана, опредѣляемый равенствами}$$

$k^k = 1 \cdot 2 \dots k$, для всякаго цѣлаго и положительнаго k , такъ что, если

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

то

$$\varphi(h) = a_0 + a_1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + 1 \cdot 2 \cdots n \cdot a_n;$$

находимъ, что $\varphi(h)$ есть цѣлое число не дѣляющееся на p ,

$$a \Sigma \varphi\left(h + \frac{x_i}{\sigma}\right), \Sigma \varphi\left(h + \frac{y_i}{\sigma}\right), \dots \Sigma \varphi\left(h + \frac{u_i}{\sigma}\right) \text{ числа кратныя отъ } p.$$

При достаточно большомъ p , $Mod. \varphi(z)$ для конечнаго значенія z , можно сдѣлать менѣе всякаго заранѣе заданнаго положительнаго числа; то же самое справедливо для $Mod. \psi(z)$, гдѣ $\psi(z)$ есть цѣлая функция отъ z , въ которой коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z имѣютъ модули, меньшіе чѣмъ соотвѣтствующіе коэффиціенты въ $\varphi(z)$.

Изъ разложенія e^z въ рядъ выводится символическое равенство

$$\varphi(h) e^z = \varphi(h+z) + \psi(z)e,$$

а отсюда, на основаніи равенства (1) слѣдующее:

$$\begin{aligned} D_0 \varphi(h) + D_1 \Sigma \varphi\left(h + \frac{x_i}{\sigma}\right) + \dots + D_n \Sigma \varphi\left(h + \frac{u_i}{\sigma}\right) = \\ = - D_1 \Sigma \psi\left(\frac{x_i}{\sigma}\right) e^{si} - D_e \Sigma \psi\left(\frac{y_i}{\sigma}\right) e^{si} - D_u \Sigma \psi\left(\frac{u_i}{\sigma}\right) e^{si}, \end{aligned}$$

невозможность котораго, на основаніи свойствъ функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ очевидна.

3) К. А. Пессе сдѣлалъ сообщеніе по поводу статьи проф. П. А. Некрасова «Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ рациональныхъ дробныхъ рѣшеній линейнаго дифференціального уравненія», содержащей въ себѣ, между прочимъ, ссылку на «Извлеченіе изъ письма проф. К. А. Пессе (отъ него лично и отъ имени проф. А. Н. Коркина и проф. Д. К. Бобилева) Мат. Сб. т. XVII вып. 2; 1-е приложение къ протоколу засѣданія 20 апрѣля 1893 года, п разными замѣчанія, касающіяся возраженій, содержащихся въ этомъ письмѣ».

Такъ какъ упомянутый здѣсь выпускъ Мат. Сб. еще не разосланъ въ настоящее время подписчикамъ, то, въ предупрежденіе возможныхъ недоразумѣній на счетъ содержанія вышеуказаннаго «Письма», К. А. Пессе счелъ нужнымъ прочитать по черновой рукописи извлеченіе изъ своего письма и обратить вниманіе

ние членовъ С.-Петербургскаго Мат. Общ. на то, что справедливость возраженій, приведенныхъ въ этомъ письмѣ нетолько не опровергается, а напротивъ подтверждается статьею проф. Некрасова. Статья эта содержитъ въ себѣ: 1) дополненія и измѣненія способа В. Г. Имшенецкаго, на необходимость которыхъ обращено было вниманіе въ упомянутомъ письмѣ, 2) доказательство основъ способа Имшенецкаго, обѣ отсутствія котораго въ первомъ изъ мемуаровъ автора и неубѣдительности во второмъ, говоритъ самъ проф. Некрасовъ на стр. 5 своей статьи; о недостаточности мотивированіи способа Имшенецкаго въ его мемуарахъ также упоминается въ письмѣ К. А. Пессе.

На основаніи вышесказаннаго К. А. Пессе полагаетъ, что формулировка результата сообщенія В. Г. Имшенецкаго въ засѣданіи Моск. Мат. Об. 19 мая 1892 года (см. протоколь 19 мая 1892 года въ приложеніяхъ къ 1-му выпуску XVI тома Мат. Сб.), а именно: «Въ этомъ сообщеніи В. Г. Имшенецкій разъяснилъ, что возраженія К. А. Пессе противъ статьи Имшенецкаго основаны на недоразумѣніи проф. Пессе», должна считаться совершенно неправильпою.

Относительно заключенія, къ которому пришелъ проф. П. А. Некрасовъ въ своей статьѣ, будто бы при указанномъ имъ развитіи способа Имшенецкаго, способъ Ліувилля безусловно долженъ уступить способу Имшенецкаго, К. А. Пессе высказалъ, что по его мнѣнію такое заключеніе слишкомъ абсолютно. Изъ статьи проф. П. А. Некрасова можно только заключить, что авторъ болѣе интересовался развитіемъ способа Имшенецкаго, чѣмъ подробнымъ изученіемъ способа Ліувилля, за которымъ, при правильномъ къ нему отношеніи, останется пѣчто большее, чѣмъ «историческое значеніе».

Засѣданіе 15 ноября 1893 г.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

а) Избрани въ члены Общества: Марія Людовиковна Бронскага, Александра Іеронимовна Стебницкая, Александръ Николаевъ

вичъ Толмачевъ, Сергѣй Федоровичъ Влезковъ и Федоръ Алексѣевичъ Покровскій.

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Н. А. Булгаковъ. «О распространеніи электрическихъ колебаній вдоль проволоки, окруженнѣй кристаллическимъ діэлектрикомъ».

Авторъ изложилъ сначала коротко решеніе I. I. Thomson'a *), относящееся къ случаю изотропнаго діэлектрика. При колебаніяхъ вдоль проволоки дѣлается предположеніе, что всѣ функціи, опредѣляющія электрическое поле около проволоки, суть такія функціи, въ которыхъ z и t (z — координата, взятая по оси проволоки, t — время) входятъ только посредствомъ множителя $e^{i(\rho t + mz)}$, на который умножена функція отъ x и y . Томсонъ, исключивъ постоянныя изъ данныхъ имъ уравненій, получаетъ некоторое уравненіе, изъ котораго можетъ вывести величину $\frac{p}{m}$ и находить, что она весьма мало разнится отъ величины скорости распространенія электродинамического дѣйствія, если трактовать задачу по теоріи Максуэлля.

Затѣмъ авторъ перешелъ къ вопросу о кристаллическомъ діэлектрикѣ. Трактуя, на основаніи теоріи Максуэлля, придется для случая, взятаго авторомъ, въ концѣ концовъ, интегрировать такую систему уравненій

$$\begin{aligned} \Delta F - \frac{dI}{dx} &= -p^2 K F && \text{Здѣсь} \\ \Delta G - \frac{dI}{dy} &= -p^2 K' G & I = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \\ \Delta H - \frac{dI}{dz} &= -p^2 K H & \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \end{aligned}$$

Авторъ именно останавливается на случаѣ равенства двухъ постоянныхъ (случай однооснаго кристалла) и проволока расположена въ плоскости, перпендикулярной къ оси симметріи (случаѣ проволоки, расположенной вдоль по оси симметріи весьма просто выводится изъ решения Томсона). Выписанная уравненія

относятся къ діэлектрику, внутри же проводника F , G и H суть интегралы уравненія

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = n^2 T, \text{ причемъ } I = 0.$$

Здѣсь n зависитъ отъ свойствъ проводника и растетъ съ величиной p .

Итакъ, для проводника нужно определить двѣ функціи F и G , а H опредѣлится изъ нихъ по условію $I = 0$. Равнымъ образомъ для діэлектрика F , G , H такъ могутъ быть определены по двумъ функціямъ ψ и χ : $F = \frac{d\psi}{dxdy} + Kp^2\psi$, $G = \frac{d\psi}{dyz} + Kp^2\chi$, $H = im \frac{d\psi}{dy} + \frac{Kp^2 i}{m} \frac{d\psi}{dx}$, гдѣ ψ и χ удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 \psi}{dx^3} + \frac{d^3 \psi}{dy^3} &= k^2 \psi \\ \frac{d^3 \chi}{dx^3} + \frac{K'}{K} \frac{d^3 \chi}{dy^3} &= k'^2 \chi \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} \text{причемъ} \\ k^2 &= m^2 - Kp^2 \\ k'^2 &= m^2 - K'p^2 \end{aligned}$$

На поверхности цилиндра $\rho = a$ (a — радиусъ съченія проволоки) должны сохранять непрерывность слѣдующія величины: H , $-F \sin \varphi + G \cos \varphi$, χ , $-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi$: подъ φ тутъ разумѣется азимутъ, величины же α , β , γ опредѣляются такъ: $\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$, $\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$, $\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$ (μ — постоянное, которое для діэлектрика = 1).

Составивъ эти четыре условія, авторъ могъ для случая na — очень большой величины свести эти условія къ двумъ, въ которыхъ входятъ производные по x и y отъ функціи ψ и χ (первая и вторая) умноженные на $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$.

Сначала разбирается случай среди изотропной. Въ этомъ случаѣ χ удовлетворяетъ такому же уравненію, какъ и ψ , и обѣ эти функціи могутъ быть представлены въ видѣ рядовъ Фурье, въ которыхъ $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ умножены на Бесселевы функции порядка l , т. е. $I_l(ika)$ (надо взять для вида пространства второй интеграль, а въ выраженіи F и G для проводника входили бы $I_l(ina)$, но эти величины исключены благодаря свойству (при очень большомъ na) $I_l(ina) = i$) и еще на постоян-

*) Статья Томсона помѣщена въ 17 томѣ Lond. Math. Soc. Proceed.

ныя. Назовемъ постоянныя при $\cos l\varphi$ чрезъ A_l для ψ и a_l для χ , B_l для ψ , b_l для χ .

Затѣмъ авторъ показываетъ, какъ зпая A_l и B_l опредѣлить постоянныя въ $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$ etc. (всѣ эти величины суть интегралы того же уравненія, которому удовлетворяетъ ψ) *). Подставивъ выраженія производныхъ отъ ψ и χ въ условныя уравненія, получаемъ первыя ихъ части въ видѣ рядовъ Фурье и останется только приравнять нулю отдѣльные коэффиціенты. Постоянныя оказываются разбитыми на 4 независимыхъ группы и одна изъ нихъ состоить изъ постоянныхъ A_{2l+1} и b_{2l+1} , которые входятъ въ коэффиціенты при $\cos'ax$ четной кратности въ одномъ условіи и при $\sin'ax$ четной кратности въ другомъ. Именно, при $\cos 2l\varphi$ и $\sin 2l\varphi$ входятъ 4 постоянныхъ A_{2l-1} , b_{2l-1} , A_{2l+1} , b_{2l+1} , такъ что 2 послѣднія могутъ быть опредѣлены чрезъ 2 первыя или въ концѣ-концовъ чрезъ A_1 и b_1 , а эти послѣднія входятъ въ свободный членъ одного изъ условій, по такъ, что они вмѣстѣ выдѣляются въ одинъ множитель, а другой множитель, уравненный нулю, даетъ то самое условіе для опредѣленія k , по которому Томсонъ дѣлаетъ заключеніе о величинѣ $\frac{p}{m}$. З другія серіи постоянныхъ не играютъ роли при сравненіи съ решеніемъ Томсона, а указанная серія даетъ какъ разъ его решеніе.

Переходя къ случаю K' не равнаго K , авторъ обращаетъ

$$\text{вниманіе на выражение } \chi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x'k(\cos in + \sqrt{\frac{K}{K'}} y \sin in)} \cdot \Sigma du,$$

гдѣ Σ есть сумма $\cos lin$ и $\sin lin$, умноженныхъ на соответствую-

*) Мало того, имѣя въ виду, что $\cos x$ есть интегралъ уравненія $-\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + T = 0$ можно, вынесавъ выраженіе для T , опредѣлить постоянныя изъ условія $\frac{d^4T}{dx^4} + T = 0$ и этимъ путемъ разложить $\cos(r \cos \varphi)$ въ рядъ Фурье, изъ которого легко вывести выраженія $I_n(r)$ въ видѣ опредѣленныхъ интеграловъ.

ющія постоянныя. Подъ интеграломъ можно выдѣлить множитель $-\frac{k'}{e} \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right) y \sin in$ и разложить его въ рядъ. Можно разсматривать тогда χ какъ сумму функций, получаемой изъ χ , если вычерткнуть $\sqrt{\frac{K}{K'}}$ (а такая функция разлагается въ рядъ Фурье, гдѣ $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ умножены, кроме постоянныхъ, на $I_l(ik'a)$) и разныхъ ея производныхъ по y , умноженныхъ на степени y , т. е. на $\sin \varphi$, и степени величинъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right)$ и x' . Всѣ производные такой функции можно выразить рядами Фурье, степени $\sin \varphi$ можно разложить на сумму \sin' овъ или \cos' овъ кратныхъ дугъ, и окончательно можно функцию χ представить въ видѣ ряда Фурье, а равно и $\frac{d\chi}{dx}$, $\frac{d\chi}{dk}$ etc. Вставляя эти выраженія въ условія для поверхности, первыя ихъ части можно опять представить въ видѣ рядовъ Фурье, но множители при $\cos l\varphi$ и $\sin l\varphi$ уже будутъ содержать не 4 только смежные коэффиціенты, но и всѣ остальные, только эти послѣдніе войдутъ умноженными на степень $\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1$ съ показателемъ тѣмъ болышиимъ, чмъ дальше они находятся въ первоначальномъ разложеніи χ отъ 4 коэффиціентовъ, входящихъ не умноженными на степень $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right)$. Замѣтимъ, что раздѣленіе всѣхъ постоянныхъ на 4 независимыя группы и здѣсь имѣеть мѣсто. Далѣе въ частяхъ зависящихъ отъ χ и ея производныхъ фигурируютъ Бесселевы функции $I_l(ik'a)$ и степени k' . Такъ какъ $k'^2 = k^2 + (K - K')p^2$, то мы можемъ разложить эти функции въ рядъ Тайлора по степенямъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right)$, а затѣмъ представимъ коэффиціенты A_3 , $A_5 \dots b_3$, b_5 etc. въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ того же количества, т. е. поло-живимъ

$$A_{2l+1} = A_{2l+1,0} + \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right) A_{2l+1,1} + \\ + \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right)^2 A_{2l+1,2} + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} b_{2t+1} = & b_{2t+1,0} + \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right) b_{2t+1,1} + \\ & + \left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1 \right)^2 b_{2t+1,2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Вставляя эти выражения въ условные уравнения, можно последовательно (т. е. сначала во всѣхъ уравненіяхъ, отбирая члены не зависящіе отъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1\right)$, потомъ отбирал члены съ 1 степенью этой величины, потомъ съ 2 и т. д.) опредѣлить $A_{3,0}$, $A_{5,0} \dots b_{3,0}$, $b_{5,0}$ и т. д. чрезъ A_1 и b_1 (они будутъ выражены совершенно также, какъ выражали A_3 , $A_5 \dots b_3$, $b_5 \dots$ при $K=K'$), затѣмъ $A_{3,1}$, $A_{5,1} \dots$ чрезъ A_1 и b_1 и уже найденные величины $A_{3,0}$, $A_{5,0}$ etc.; слѣд. $A_{3,1}$, $A_{5,1}$ можно выразить линейно чрезъ A_1 и b_1 . Точно также выражаются чрезъ A_1 и b_1 и дальнѣйшіе коэффиціенты.

Если всѣ эти значенія подставить въ свободный членъ одного изъ условій, по которому при $K=K'$ можно опредѣлить k , а отсюда величину $\frac{p}{m}$, то здѣсь A_1 и b_1 не будутъ входить уже за разъ умноженными на одну величину, но A_1 будетъ умножено на одинъ рядъ расположенный по степенямъ $\left(\sqrt{\frac{K}{K'}} - 1\right)$ съ коэффиціентами, представляющими функции отъ k , ab_1 — на другой подобный рядъ. Если взять решеніе, при которомъ $b_1 = 0$, A_1 — произвольно, то k опредѣлится, если уравнять нулю рядъ, умноженный на A_1 ; при $A_1 = 0$, k опредѣлится, если уравнять нулю другой рядъ. Могутъ быть, такимъ образомъ, двѣ разныя величины k , a слѣд. и скорости распространенія колебаній вдоль проволки, т. е. $\frac{p}{m}$.

2) П. А. Шиффъ. «Объ одной формулѣ въ теоріи опредѣлителей».

Засѣданіе 20 декабря 1893 года.

Предсѣдательствовалъ К. А. Поссе.

а) Въ библіотеку Общества доставлено изданіе: Schouté Revue semestrielle des publications Mathématiques. T. 1, 1 et 2 pp. Amsterdam. 1893.

б) Предлагается въ члены Общества Валеріанъ Дмитріевичъ фонъ-Дервізъ (предлагаютъ В. А. Марковъ и А. Н. Толмачевъ).

в) Предсѣдатель предложилъ Собранию послать привѣтствіе Московскому Математическому Обществу по случаю исполнившагося 25-тилѣтія его дѣятельности. Былъ прочитанъ проектъ этого привѣтствія, который одобренъ собраниемъ.

г) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) И. С. Аладовъ «О распределеніи квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ простого числа p въ ряду: $1, 2, \dots, p-1$ ».

Возьмемъ произвольное простое число p и рядъ $1, 2, 3, \dots, p-1$. Докажемъ, что по отношенію послѣдняго ряда имѣеть мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема. Если простое число p вида: $4m+1$, то въ ряду $1, 2, 3, \dots, p-1$ будетъ заключаться $x = \frac{p-1}{4}$ неквадратичныхъ вычетовъ числа p , за которыми следуютъ невычеты, $x_1 = \frac{p-1}{4}$ невычетовъ, за которыми следуютъ квадратичные вычеты, $y = \frac{p-1}{4}$ квад. вычетовъ, за которыми следуютъ невычеты и $y = \frac{p-5}{4}$ квад. вычетовъ, за которыми следуютъ квадратичные вычеты. — Если простое число p вида $4m+3$, то числа x , x_1 , y и y_1 выражаются такъ:

$$x = \frac{p-3}{4}, \quad x_1 = \frac{p-3}{4}, \quad y = \frac{p+1}{4}, \quad y_1 = \frac{p-3}{4}.$$

Доказательство. Будемъ обозначать чрезъ r или R квадратичные вычеты, чрезъ n или N невычеты и чрезъ c — числа, о

которыхъ намъ a priori неизвѣстно, въ какой изъ упомянутыхъ категорій они принадлежать. Положимъ $R = c + 1$; сравненіе:

$$1) R^{\frac{p-1}{2}} - 1 = (c + 1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

имѣеть, очевидно, за исключеніемъ $c = 0$, еще $\frac{p-3}{2}$ рѣшеній; обозначая черезъ x_1 число этихъ рѣшеній, которая суть невычеты, а черезъ y_1 число тѣхъ, которая суть квад. вычеты, найдемъ:

$$2) x_1 + y_1 = \frac{p-3}{2}.$$

Точно также, полагая: $N = c + 1$, изъ сравненія

$$3) N^{\frac{p-1}{2}} + 1 = (c + 1)^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

которое, очевидно, имѣеть $\frac{p-1}{2}$ рѣшеній, найдемъ:

$$4) x + y = \frac{p-1}{2},$$

гдѣ x означаетъ число рѣшеній сравненія (3), которая суть невычеты, а y — число тѣхъ рѣшеній, которые суть квадрат. вычеты.— Всякое рѣшеніе сравненія (1) изъ числа y_1 , а также всякое рѣшеніе сравненія (3) изъ числа x удовлетворяетъ слѣдующему сравненію:

$$5) f(c) = \frac{p-1}{2} c^{\frac{p-3}{2}} + \frac{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-3}{2}}{1 \cdot 2} c^{\frac{p-5}{2}} + \dots + \\ + \frac{p-1}{2} c + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

которое получается изъ (1) и (3) по раскрытии скобокъ и по замѣнѣ въ первомъ изъ нихъ c чрезъ r , а во второмъ — чрезъ n . Всѣ рѣшенія сравн. (1) изъ числа x_1 удовлетворяютъ сравненію:

$$6) \frac{p-1}{2} c^{\frac{p-3}{2}} + \dots + \frac{p-1}{2} c - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

и всѣ рѣшенія сравненія (3) изъ числа y_1 удовлетворяютъ сравненію:

$$7) \frac{p-1}{2} c^{\frac{p-3}{2}} + \dots + \frac{p-1}{2} c + 3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Междуду всѣми числами, заключающими въ x , y , x_1 и y_1 , нѣтъ, очевидно, лишь одного числа $= p - 1$. Такъ какъ сравненіе 5, 6 и 7, само собою разумѣется, не могутъ имѣть общихъ рѣшеній, то сравненіе (5) не можетъ имѣть другихъ рѣшеній, кромѣ тѣхъ, которая заключаются въ числахъ, обозначенныхъ нами чрезъ x и y_1 ; поэтому, если мы докажемъ, что сравненіе (5) имѣеть $\frac{p-3}{2}$ различныхъ рѣшеній, то будемъ въ состояніи заключить, что

$$8) x + y_1 = \frac{p-3}{2}.$$

Доказать это послѣднее предложеніе весьма легко; дѣйствительно, функція (5) $f(c)$ можетъ быть написана подъ видомъ:

$$f(c) = (c + 1)^{\frac{p-1}{2}} - c^{\frac{p-1}{2}},$$

и это выраженіе алгебраически дѣлить разность

$$(c + 1)^{p-1} - c^{p-1} = F(c);$$

сравненію же $(p-2)$ -ой степени $F(c) \equiv 0 \pmod{p}$ удовлетворяютъ, очевидно, всѣ числа, за исключеніемъ $p - 1$; отсюда и приходимъ къ заключенію, что сравненіе (5) имѣеть $\frac{p-3}{2}$ различныхъ рѣшеній и убѣждаемся въ вѣрности уравненія (8). Дальнѣйшія разсужденія слѣдуетъ вести отдельно для чиселъ p вида $4m + 1$ и для чиселъ вида $4m + 3$.

I) $p \equiv 1 \pmod{4}$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ число $p - 1$ есть квадрат. вычетъ, то, очевидно, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства:

$$9) \begin{cases} x + x_1 = \frac{p-1}{2}, \\ y + y_1 = \frac{p-3}{2}. \end{cases}$$

Изъ уравнений (2), (4), (8) и (9), изъ которыхъ одно есть слѣдствіе другихъ, находимъ:

$$10) \quad x = \frac{p-1}{4}; \quad y = \frac{p-1}{4}; \quad x_1 = \frac{p-1}{4}; \quad y_1 = \frac{p-5}{4}.$$

II) $p \equiv 3 \pmod{4}$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ число $p-1$ есть неквадратичный вычетъ, то вмѣсто уравненій (9), будемъ имѣть:

$$11) \quad \begin{cases} x + x_1 = \frac{p-3}{2}, \\ y + y_1 = \frac{p-1}{2}; \end{cases}$$

изъ (2), (4), (8) и (11) найдемъ:

$$12) \quad x = \frac{p-3}{4}; \quad y = \frac{p+1}{4}; \quad x_1 = \frac{p-3}{4}; \quad y_1 = \frac{p-3}{4}.$$

Формулы (10) и (12) и доказываютъ нашу теорему. Числа y , изъ (10) и y изъ (12), очевидно, могутъ служить для решенія такой задачи: найти число рѣшеній сравненій

$$u^2 + v^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

возможность котораго была впервые доказана Лагранжемъ.

Дальнѣйшія изслѣдованія будутъ касаться лишь случая $p \equiv 3 \pmod{4}$. Для простыхъ чиселъ этого вида имѣть мѣсто слѣдующая теорема:

Теорема. Если простое число p вида $8m-1$, то 1) число z группъ квадрат. вычетовъ въ ряду $1, 2, 3, \dots, p-1$ равно $\frac{p+1}{8}$; 2) число t изолированныхъ квадрат. вычетовъ равно $\frac{p+1}{8}$; 3) число v квадрат. вычетовъ, заключающихся въ группахъ, равно $\frac{3p-5}{8}$ и 4) число и тройныхъ группъ квадр. вычетовъ равно $\frac{p-7}{8}$, причемъ каждая группа изъ четырехъ чиселъ считается за двѣ тройныя, изъ пяти—за три тройныя и т. д. Если простое число p вида $8m+3$, то числа z , t , v , u и u выражаются такъ:

$$z = \frac{p-3}{8}; \quad t = \frac{p+5}{8}; \quad v = 3 \cdot \frac{p-3}{8}; \quad u = \frac{p-3}{8}.$$

Для неквадратичныхъ вычетовъ имѣетъ мѣсто та же теорема въ силу уравненія: $n = p - r$.

Доказательство. Каждому числу, за исключеніемъ единицы, начинающему или заканчивающему собою группу какъ квадратичныхъ, такъ и неквадратичныхъ вычетовъ въ ряду $1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$, соотвѣтствуетъ въ ряду $1, 2, \dots, p-1$ нѣкоторый невычетъ, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ. Эти невычеты различны какъ для различныхъ группъ, такъ и для начала и конца одной и той же группы. Дѣйствительно, пусть будетъ группа квадрат. вычетовъ, начинающаяся съ r и оканчивающаяся r_m : r, r_1, \dots, r_m ; имѣемъ; $r^2 \equiv r^{(0)}$, откуда: $r^{(0)} - 1 \equiv r^2 - 1 \equiv (r-1)r_1$, и такъ какъ, по предположенію, $r - 1 = n$, то и $r^{(0)} - 1 = n^{(0)}$, т. е. $n^{(0)}$ есть нѣкоторый невычетъ, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ. Точно также $r_m^2 \equiv r^{(m)}$ и $r^{(m)} - 1$ есть нѣкоторый невычетъ $n^{(m)}$, отличный отъ $r^{(0)} - 1$, такъ какъ r и $r_m \leq \frac{p-1}{2}$, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ. Невычеты, получаемые такимъ же способомъ изъ другихъ группъ, не могутъ, очевидно, совпасть ни между собою, ни съ найденными уже вычетами $r^{(0)} - 1$ и $r^{(m)} - 1$, такъ какъ разматриваемыя нами группы состоятъ изъ чиселъ непревышающихъ $\frac{p-1}{2}$. То же самое можно сказать и о группахъ неквадратичныхъ вычетовъ въ ряду $1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$. Обратно, всякому невычету въ ряду $1, 2, \dots, p-1$, за которымъ слѣдуетъ квадрат. вычетъ, соотвѣтствуетъ одно и только одно число, начинающее или заканчивающее собою нѣкоторую группу въ ряду: $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n^{(0)}$ будетъ такой невычетъ, т. е. $n^{(0)} + 1 = r^{(0)}$; имѣемъ $r^{(0)} \equiv c^2$, гдѣ $c \leq \frac{p-1}{2}$; отсюда: $c^2 - 1 = (c-1)(c+1) \equiv n^{(0)}$ и слѣдоват. одно изъ чиселъ $(c-1)$ и $(c+1)$ есть квад. вычетъ, а другое—невычетъ, поэтому число c въ ряду $c-1, c, c+1$ представляетъ собою начало, или конецъ нѣкоторой группы чиселъ, превышающихъ $\frac{p-1}{2}$; по доказанному выше другому концу этой группы соотвѣтствуетъ другой невычетъ $n^{(m)}$,

за которымъ слѣдуетъ квад. вычетъ. Оставивъ въ сторонѣ числа $n^{(0)}$ и $n^{(m)}$, возьмемъ новый такой невычетъ $n_1^{(0)}$, чтобы было $n_1^{(0)} + 1 = r_1^{(0)}$, и снова докажемъ, что ему соотвѣтствуетъ начальное, или конечное число нѣкоторой группы чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$ и т. д. Теперь нужно будетъ разсматривать отдельно случаи, когда $p \equiv -1$ (мод. 8) и когда: $p \equiv 3$ (мод. 8). — I) $p \equiv -1$ (мод. 8). Въ этомъ случаѣ рядъ: 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$ начинается группою квадратичныхъ вычетовъ: 1, 2, ...; конечное число этой группы даетъ, по доказанному выше, нѣкоторый невычетъ $n^{(1)}$, за которымъ слѣдуетъ квадратичный вычетъ; начальное же число — единица — не даетъ такого невычета; всѣ остальные группы чиселъ, непревышающихъ $\frac{p-1}{2}$, даютъ два различные вычета, за которыми слѣдуютъ квад. вычеты, и обратно, всѣ эти вычеты, за исключеніемъ $n^{(1)}$, могутъ быть распределены попарно такимъ образомъ, что два числа каждой пары дадутъ начало и конецъ одной и той же группы чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$. Отсюда заключаемъ, что z' группъ чиселъ, непревышающихъ $\frac{p-1}{2}$, должно удовлетворять уравненію:

$$2(z' - 1) + 1 = x_1 = \frac{p-3}{4}, \quad [x_1 \text{ опредѣлено въ форм. (12)}].$$

Откуда:

$$z' = \frac{p+1}{8}.$$

Такъ какъ каждой группѣ чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$ соотвѣтствуетъ, въ силу уравненія: $n = p - r$, группа чиселъ, большихъ $\frac{p-1}{2}$ и обратно, то число всѣхъ группъ въ ряду 1, 2, ..., $p - 1$ равно $2z' = \frac{p-1}{4}$, а такъ какъ число группъ квадратичныхъ вычетовъ, очевидно, равно числу группъ неквадратичныхъ вычетовъ, то число какъ тѣхъ и другихъ въ отдельности равно $\frac{p+1}{8}$, т. е.

$$13) z = z' = \frac{p+1}{8}.$$

Число всѣхъ квадратичныхъ вычетовъ, за которыми слѣдуютъ невычеты, равно, очевидно, числу группъ квад. вычетовъ, сложен-

ному съ числомъ изолированныхъ квад. вычетовъ, т. е., если обозначимъ это послѣднее чрезъ t , будемъ имѣть:

$$y = z + t, \quad [y \text{ опредѣлено въ формулѣ (12)}]$$

откуда

$$14) t = y - z = \frac{p+1}{4} - \frac{p+1}{8} = \frac{p+1}{8}.$$

Обозначая чрезъ v число квад. вычетовъ, заключающихся въ группахъ, найдемъ, очевидно,

$$15) v = \frac{p-1}{2} - t = \frac{3p-5}{8}.$$

Напишемъ рядъ сравненій:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) n^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0, (\beta) r^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \\ (\gamma) (c+1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0, (\delta) (c+2)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \end{array} \right\} \text{мод. } p.$$

Число общихъ рѣшеній сравненія (α) , (γ) и (δ) равно числу группъ квадрат. вычетовъ безъ единицы [первой группы].

т. е. $= \frac{p+1}{8} - 1$; число общихъ рѣшеній (γ) и (δ) равно, по доказанному выше, $\frac{p-3}{4}$, изъ нихъ одно равняется нулю, а остальная часть удовлетворяетъ сравненію (α) , частью сравненію (β) , поэтому, число рѣшеній общихъ (β) , (γ) и (δ) , которое обозначимъ чрезъ u' , равно $\frac{p-3}{4} - 1 - \left(\frac{p+1}{8} - 1\right) = \frac{p-7}{8}$. Это есть, очевидно, число тройныхъ группъ квад. вычетовъ, причемъ, конечно, каждая группа изъ четырехъ чиселъ считается за двѣ тройныя, изъ—5—за три тройныя и т. д. Число это обозначено нами чрезъ u ; такъ:

$$16) u = u' = \frac{p-7}{8}.$$

II) $p \equiv 3$ (мод. 8). Въ этомъ случаѣ числа z , t , v и u выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$17) z = \frac{p-3}{8},$$

это равенство получается изъ уравненія $2z' = x_1 = \frac{p-3}{4}$, такъ

какъ въ рассматриваемомъ случаѣ начальныя и конечныя числа всѣхъ группъ чиселъ $\leq \frac{p-1}{2}$ даютъ по одному и только по одному невычету, за которыми слѣдуютъ квадратичные вычеты и обратно;

$$18) t = \frac{p+5}{8};$$

$$19) v = 3 \cdot \frac{p-3}{8};$$

$$20) u = \frac{p-3}{8}.$$

Формулы (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19) и (20) и доказываютъ нашу теорему.

2) В. А. Марковъ «Объ аксіомахъ, лежащихъ въ основаніи геометрическихъ системъ».

Засѣданіе 15 января 1894 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

а) Избранъ въ члены Общества Валеріанъ Дмитріевичъ фонъ-Дервізъ.

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) П. А. Шиффъ «О теоремѣ Парсивала».

2) П. А. Шиффъ «Приведеніе интегрированія линейнаго уравненія 2-го порядка къ интегрированію уравненія 2-го порядка однороднаго».

3) И. И. Ивановъ «Объ интегралѣ вида:

$$R = \int \sqrt[m]{\left(x - \cos \frac{\pi}{2m}\right)\left(x - \cos \frac{3\pi}{2m}\right) \cdots \left(x - \cos \frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)} dx$$

Полагая:

$$x = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y}\right),$$

будемъ имѣть:

$$R = \int \sqrt[m]{\left(y^2 - 2y \cos \frac{\pi}{2m} + 1\right) \cdots \left(y^2 - 2y \cos \frac{(2m-1)\pi}{2m} + 1\right)} (y^2 - 1) dy$$

но

$$\left(y^2 - 2y \cos \frac{\pi}{2m} + 1\right) \cdots \left(y^2 - 2y \cos \frac{(2m-1)\pi}{2m} + 1\right) = y^{2m} + 1$$

поэтому

$$R = \int \sqrt[m]{\frac{y dy}{y^{2m} + 1}} - \int \sqrt[m]{\frac{dy}{y \sqrt[y^{2m} + 1]}}.$$

Каждый изъ этихъ интеграловъ берется въ конечномъ видѣ.

Засѣданіе 24 февраля 1894 года.

Предсѣдательствовалъ В. И. Шиффъ.

а) Въ библіотеку Общества поступили слѣдующія сочиненія:

- 1) Н. И. Гулакъ «О сферической тетраэдрометрії» (рукопись).
- 2) Н. И. Гулакъ «Аналитическая изслѣдованія» (рукопись).
- 3) Е. С. Федоровъ «Новые приборы для геометрическихъ и оптическихъ изслѣдованій кристалловъ».

4) П. В. Преображенскій «Къ вопросу объ искривленіи прямыхъ линій объективами».

5) П. В. Преображенскій «Объ одной ошибкѣ въ книгѣ Clebsch'a «Theorie der Elasticitt fester Krper».

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) В. А. Марковъ «Объ аксіомахъ, лежащихъ въ основаніи геометрическихъ системъ» (продолженіе сообщенія 20 Декабря 1893 г.).

2) П. Х. Кадикъ «О кватерніонахъ».

Засѣданіе 21 марта 1894 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

а) По предложению предсѣдателя единогласно избраны въ дѣйствительные члены Общества Ректоръ Стокгольмского университета Г. Миттагъ-Леффлеръ, Президентъ Московскаго Математическаго Общества Николай Васильевичъ Бугаевъ и Казначей того же Общества Петръ Васильевичъ Преображенскій.

б) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Коаловичъ. «О соотношеніяхъ между частными рѣшениями нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка».

Если дано какое-нибудь уравненіе первого порядка, наприм.,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{L_0y^h + L_1y^{h-1} + \dots + L_{h-1}y + L_h}{M_0y^k + M_1y^{k-1} + \dots + M_{k-1}y + M_k}. \quad (1)$$

h и k цѣлые положительныя числа, L и M функции отъ x , то можно, взять достаточное число частныхъ рѣшений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ уравненія (1), исключить x и dx изъ получающихся уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dx} &= \frac{L_0\alpha_1^h + \dots + L_h}{M_0\alpha_1^k + \dots + M_k} \\ \frac{d\alpha_2}{dx} &= \frac{L_0\alpha_2^h + \dots + L_h}{M_0\alpha_2^k + \dots + M_k} \\ \dots \dots \dots \dots & \\ \frac{d\alpha_s}{dx} &= \frac{L_0\alpha_s^h + \dots + L_h}{M_0\alpha_s^k + \dots + M_k} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если всѣ функции $L_0, L_1 \dots M_0, M_1 \dots$ заданы, то, вообще говоря, достаточно взять три рѣшения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, если же нѣкоторыя изъ нихъ предполагаются произвольными, то понадобится большее число частныхъ рѣшений $\alpha_1, \alpha_2 \dots$.

Такимъ образомъ получится уравненіе вида:

$$\Omega(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s, d\alpha_1, d\alpha_2 \dots d\alpha_s) = 0 \quad (3)$$

Въ этомъ уравненіи $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s$ разсматриваются какъ функции нѣкоторой независимой переменной и $d\alpha_1, d\alpha_2 \dots d\alpha_s$ обозначаютъ ихъ полные дифференціалы по этой переменной.

Ур. (3) можно пользоваться различнымъ образомъ. Можетъ случиться, напримѣръ, что общій интегралъ уравненія (3) можетъ быть выраженъ однимъ уравненіемъ такого вида

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{пост.} \quad (4).$$

Это будетъ случай, разсмотрѣнныи г. Eduard Weyr въ Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften (6 серія, т. VIII. 1875 г.).

Такъ, напр., для линейнаго уравненія

$$dy + Pydx + Qdx = 0$$

уравненіе (3) таково

$$\frac{d\alpha_2 - d\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{d\alpha_3 - d\alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_1}$$

откуда, интегрируя обѣ части, находимъ

$$\alpha_3 - \alpha_1 = C(\alpha_2 - \alpha_1) \quad C \text{ произв. пост.}$$

Отсюда видно, что эта метода, давая соотношенія между частными рѣшениями, общаго интеграла въ общеупотребительной формѣ дать не можетъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда ур. (3) не допускаетъ интеграла въ видѣ одного уравненія формы (4), оно можетъ иногда служить весьма полезнымъ орудіемъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ, какъ мы это сейчасъ и покажемъ.

Возьмемъ уравненіе вида

$$ydy + yPdx = Rdx \quad (5)$$

гдѣ P и R суть какія угодно функции отъ x .

Составляя ур. (3) мы найдемъ

$$\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1)(d\alpha_2 - d\alpha_1) - \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)(d\alpha_3 - d\alpha_1) = 0 \quad (6).$$

Это уравненіе не допускаетъ въ видѣ одного уравненія формы (4), но мы воспользуемся имъ иначе.

Мы положимъ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= u \\ \alpha_3 - \alpha_1 &= v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и тогда изъ ур. (6) найдемъ

$$\alpha_1 = \frac{vu(vu - du)}{vdu - udv} \quad \text{и по ур. (7) получимъ}$$

$$\alpha_2 = \frac{u(v - u)dv}{vdu - udv} \quad (8)$$

$$\alpha_3 = \frac{v(v - u)du}{vdu - udv}$$

Такимъ образомъ всякия три частныхъ рѣшения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, уравненія (5) могутъ быть представлены формулами (8). Въ этихъ формулахъ u и v суть функции одного и того-же независимаго переменнаго.

Не трудно показать, что и обратно, если мы будем считать u и v какими угодно функциями одной и той же независимой переменной, то формулы (8) дадут нам три решения одного и того же дифференциального уравнения формы (5).

Авторъ получилъ формулы, подобныя (8) и для случая четырехъ частныхъ решений, но дальше ему идти не удалось.

Воспользуемся формулами (8) для решения слѣдующаго вопроса:

Найти всѣ уравненія формы (5), общій интегралъ которыхъ можетъ быть написанъ такъ:

$$(y - y_1)^{m_1} (y - y_2)^{m_2} (y - y_3)^{m_3} = \text{пост.} \quad (9).$$

гдѣ y_1, y_2, y_3 суть функции отъ x , m_1, m_2, m_3 постоянныя

Вопросъ этотъ былъ поставленъ Эйлеромъ (*Novi Commentarii Academiae Petropolitanae T. XVII Observationes circa aequationem ydy + Maydx = Ndx*) и Лѣтниковымъ (*Ueber die Bedingungen der Integrabilitat einiger Differentialgleichungen*), но и тотъ и другой рѣшили его только для самого простого случая, соотвѣтствующаго предположенію $m_1 + m_2 + m_3 = 0$.

Мы покажемъ, что при помощи формулъ (8) этотъ вопросъ можно сразу решить въ самомъ общемъ видѣ.

Можно безъ труда показать, что если общій интегралъ ур. (5) имѣемъ формулу (9), то y_1, y_2, y_3 будутъ частными решениями ур. (5), которые мы назовемъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и между ними будетъ существовать соотношеніе

$$\frac{m_1}{\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_2} + \frac{m_3}{\alpha_3} = 0 \quad (10).$$

Функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ могутъ быть выражены формулами (8) и тогда ур. (10) приметъ видъ (отбрасывая множитель $vdu - udv$):

$$\frac{m_1}{uv(v - du)} + \frac{m_2}{u(v - u)dv} + \frac{m_3}{v(v - u)du} = 0 \quad (11).$$

Такимъ образомъ между величинами u и v получается однородное уравненіе первого порядка. Чтобы удобнѣе проинтегрировать его, мы положимъ

$$v = \lambda u, \quad dv = \mu du \quad (12).$$

гдѣ λ и μ новыя переменные. Ур. (11) приметъ видъ:

$$\frac{m_1}{\lambda(\mu - 1)} + \frac{m_2}{\mu(\lambda - 1)} + \frac{m_3}{\lambda(\lambda - 1)} = 0.$$

откуда

$$\lambda = \frac{m_1\mu - m_3\mu(\mu - 1)}{m_1\mu + m_2(\mu - 1)} \quad (13).$$

Но изъ ур. (12) находимъ

$$\frac{du}{u} = \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} \quad (14).$$

Подставляя вместо λ и $d\lambda$ ихъ выражения изъ ур. (13) и интегрируя найдемъ u . Зная u , найдемъ v по уравненію $v = \lambda u$. Зная выраженіе v и u черезъ μ выразимъ въ этой переменной u функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ по ур. (8) и затѣмъ легко найдемъ Pdx и Rdx (въ ур. (5)). Результатъ получается такой:

Всѣ искомыя уравненія заключаются въ формѣ:

$$ydy - y \frac{u}{(\lambda - \mu)^2} [(\lambda - 1) d\mu + (\lambda - 2\lambda\mu + 2\mu - \mu^2) d\lambda] = \\ = \frac{\mu(\mu - 1)\lambda(\lambda - 1)u^2 d\lambda}{(\lambda - \mu)^3} \quad (15).$$

причемъ λ дано уравненіемъ (13) а функция u такимъ:

$$u = h [(m_1 + m_2)\mu - m_2] \mu^{\frac{m_2}{M} - 1} (\mu - 1)^{\frac{m_1}{M} - 1} \quad (16).$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3; \quad h \text{ произв. пост.}$$

Общій интегралъ ур. 15 есть

$$(y - \alpha_1)^{m_1} (y - \alpha_2)^{m_2} (y - \alpha_3)^{m_3} = \text{пост.} \\ \alpha_1 = \frac{\lambda(\mu - 1)}{\lambda - \mu} u; \quad \alpha_2 = \frac{\mu(\lambda - 1)}{\lambda - \mu} u; \quad \alpha_3 = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\lambda - \mu} u \quad (17).$$

Форм. (16) становится неудобною при $M = 0$. Этотъ случай, по ур. (13), соответствуетъ условію $\lambda = \mu$. Исследование чрезвычайно упрощается при этомъ предположеніи, но мы не останавливаемся на немъ, потому что оно уже разобрано Эйлеромъ и Лѣтниковымъ.

2) П. Х. Кадикъ. «О кватернионахъ». (Окончаніе сообщенія 28 февраля).

Засѣданіе 25 апрѣля 1894 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

а) Въ библіотеку Общества поступили слѣдующія сочиненія:

1) O. Backlund. «Ueber die Anwendung einer Formel von Tchebychew zur Entwicklung der Störungsfunktion».

2) П. А. Некрасовъ. «Термодинамика и электричество. По поводу изслѣдований кн. Б. Голицына по математической физикѣ».

3) Н. Б. Делоне. «Приборъ для черченія эллипсовъ и эллипсоидографъ».

4) Указатель статей, содержащихся въ первыхъ пятнадцати томахъ Математического Сборника, издаваемаго Московскими Математическими Обществомъ.

5) Извѣстія Физико-Математического Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ. 2-я серія. Т. IV. № 1.

7) Д. К. Бобылевъ. «О времени, потребномъ для введенія судна въ плоскій каналъ».

б) Было прочитано письмо Московскаго Математическаго Общества, въ которомъ выражается благодарность за привѣтствие, принесенное С.-Петербургскимъ Математическимъ Обществомъ Московскому Обществу въ день празднованія его двадцатипятилѣтія.

в) Были прочитаны письма, полученные отъ гг. Миттаг-Леффлеръ, Н. В. Бугаева и П. В. Преображенскаго, въ которыхъ означенныя лица благодарятъ за избраніе ихъ дѣйствительными членами Общества.

г) Было прочитано письмо Е. С. Федорова, въ которомъ онъ уведомляетъ, что вслѣдствіе нѣкоторыхъ обстоятельствъ, онъ вынужденъ просить, хоть временно, не считать его членомъ Общества.

Собрание постановило: 1) выразить Е. С. Федорову глубокое сожалѣніе о томъ, что обстоятельства временно лишаютъ его возможности принимать дѣятельное участіе въ дѣлахъ Общества 2) продолжать считать его членомъ С.-Петербургскаго Математическаго Общества.

д) Въ С.-Петербургское Математическое Общество получены отъ Редакціоннаго Комитета при IX съездѣ 10 экземпляровъ Проекта Устава Русской Ассоціаціи для обезпеченія и устройства естественнонаучныхъ съездовъ, съ просьбою распространить этотъ проектъ между членами Общества. Экземпляры розданы гг. членамъ.

е) По предложенію предсѣдателя единогласно избранъ дѣйствительнымъ членомъ Общества профессоръ С.-Петербургскаго Университета Сергей Павловичъ фонъ-Глазенапъ.

ж) Было сдѣлано слѣдующее сообщеніе: Д. А. Граве. «Объ ортогональныхъ траекторіяхъ».

з) Предлагаются въ члены Общества:

1) Левъ Вильгельмовичъ Келлеръ (предлагаютъ Д. К. Бобылевъ и А. С. Домогаровъ).

2) Петръ Христофоровичъ Кадикъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

Засѣданіе 24 сентября 1894 года.

По предложенію И. Л. Пташицкаго, собраніе единогласно избрало членомъ Общества и предсѣдателемъ собранія Н. Я. Сонина.

а) Избраны въ члены Общества: Левъ Вильгельмовичъ Келлеръ и Петръ Христофоровичъ Кадикъ.

б) Предлагаются въ члены Общества:

1) Федоръ Петровичъ Миллеръ (предлагаютъ В. В. Витковскій и И. С. Аладовъ);

2) Любовь Николаевна Запольская;

и 3) Марія Васильевна Жилова (предлагаютъ В. И. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

в) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. А. Граве. «Объ одномъ вопросѣ Чебышева»;

- 2) И. В. Мещерский. «Задача о движении системы точек при действии силъ, обратно-пропорциональныхъ кубу разстояния и центральныхъ силъ, пропорциональныхъ разстоянию».

Имѣемъ систему, къ точкамъ которой приложены силы взаимодействія, обратно пропорц. кубу разстоянія, и затѣмъ силы, исходящія изъ неподвижного центра, — одинъ обратно пропорц. кубу разстоянія, другія — пропорциональныя разстоянію.

Задача о движениі этой системы приводится къ задачѣ болѣе простой, въ которой на точки системы дѣйствуютъ только вышеуказанныя силы, обратно пропорц. кубу разстоянія.

Это приведеніе будетъ сдѣлано, если въ диффер. уравненія движения вмѣсто декартовыхъ координатъ x_i точекъ системы и времени t введемъ новыя переменныя: ξ_i и τ , полагая:

$$(1) \quad \dots \quad x_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{a\xi^2 + 2b\xi + c}}, \quad dt = \frac{d\xi}{a\xi^2 + 2b\xi + c},$$

гдѣ a, b, c суть постоянныя, связанныя уравненіемъ:

$$(2) \quad \dots \quad ac - b^2 = k,$$

если k обозначаетъ пропорциональное разстоянію притяженіе центромъ единицы массы на единицѣ разстоянія.

Задача о движениі по прямой трехъ точекъ, которыхъ притягиваются — между собою силами, обратно пропорц. кубу разстояніи, и къ неподвижному центру на прямой силами, пропор. разстоянію, приводится, съ помощью преобразованія (1), къ извѣстной задачѣ Якоби (Jacobi. Ges. Werke. Bd. IV, р. 533 — 539) и, слѣдовательно, решается въ квадратурахъ.

Засѣданіе 29 октября 1894 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

- а) Предлагаются въ члены Общества: 1) Ольга Сергеевна Ростовцева и 2) Елена Осиповна Борткевичъ (предлагаютъ В. И. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

б) Избраны въ члены Общества Любовь Николаевна Запольская и Марія Васильевна Жилова.

в) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) О. А. Бакундъ. «О сопротивляющейся средѣ въ планѣтной системѣ».
- 2) М. М. Филипповъ. «О системѣ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій въ связи съ вопросами кинематики».
- 3) Н. Я. Сочинъ. I) «Объ одной символической формулѣ для n -ой производной функции» и II) «Приложеніе символического исчислѣнія къ выводу формулы Эйлера для квадратуръ съ остаточнымъ членомъ и къ вычисленію некоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ».

г) Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

- 1) А. Д. Путята. Аналитическая механика.
- 2) И. В. Мещерский. Sur un probleme de Jacobi.
- 3) Математический Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, т. XVII вып. 3.
- 4) Е. В. Борисовъ. О критическихъ центрахъ кривыхъ 3-го порядка.
- 5) Б. М. Кошловичъ. Изслѣдованіе о дифференціальномъ уравненіи

$$ydy - ydx = Rdx$$

- 6) Н. П. Соколовъ. Основные дѣйствія надъ периодическими десятичными дробями.
- 7) Н. П. Соколовъ. Значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе.
- 8) В. И. Шиффъ. Методы решеній вопросовъ элементарной геометріи.

Засѣданіе 19 ноября 1894 года.

- а) Секретарь Общества доложилъ Собранию слѣдующій краткий отчетъ о состояніи Общества за истекшій 1893—1894 годъ.

Въ настоящемъ году С.-Петербургское Математическое Общество вступаетъ въ 5-й годъ своего существованія.

Начавъ свою дѣятельность 20 октября 1890 года при весьма небольшомъ числѣ членовъ (18 лицъ), оно въ настоящее время считается въ своей средѣ 78 членовъ, причемъ въ истекшемъ году прибыло 13.

Въ теченіе 4-хъ лѣтъ Общество имѣло 34 засѣданія, во время которыхъ происходилъ обмѣнъ мнѣній по сдѣланнымъ 82 сообщеніямъ; па истекшій годъ приходится 8 засѣданій и 17 сообщеній.

Сообщенія сдѣлали слѣдующія лица:

В. Г. Имшепецкій, П. А. Шиффъ, И. И. Ивановъ, Г. Ф. Вороной, Д. Ф. Селивановъ, А. Д. Путята, Н. Н. Пироговъ, И. А. Клейбергъ, Д. К. Бобылевъ, А. А. Марковъ, Ю. В. Сохоцкій, О. А. Баклундъ, Н. Б. Делоне, Д. А. Граве, В. И. Шиффъ, В. И. Станевичъ, Е. С. Федоровъ, Б. М. Кояловичъ, В. А. Марковъ, П. М. Новиковъ, И. Ю. Маткевичъ, К. А. Поссе, И. С. Аладовъ, П. Л. Чебышевъ, г-нъ Миттагъ-Леффлеръ, С. Е. Савичъ, М. З. Образцовъ, Е. В. Борисовъ, А. С. Домогаровъ, Н. А. Булгаковъ, П. Х. Кадикъ, М. М. Филипповъ и Н. Я. Сопинъ.

Библіотека Общества составилась изъ разновременно принесенныхъ въ даръ Обществу 54 наименованій сочиненій.

До 1893 года денежныя средства Общества составлялись изъ добровольныхъ взносовъ членовъ, съ 1893 г. установленъ обязательный членскій взносъ въ 3 рубля, при чемъ съ поступающихъ вновь членовъ взимается первый годъ 5 рублей. До настоящаго времени поступило всего 389 рублей, при чемъ за истекшій годъ поступило 110 рублей.

Израсходовано всего 342 р. 66 коп., при чемъ въ истекшемъ году израсходовано 55 рублей. Въ остаткѣ на текущемъ расходы имѣются 46 руб. 34 коп.

Членъ Общества редакторъ журнала «Научное Обозрѣніе», М. М. Филипповъ — согласился безвозмездно отпечатать 250 отдельныхъ оттисковъ протоколовъ засѣданій Общества за истекшій годъ. По предложению предсѣдателя, Собрание выразило свою благодарность М. М. Филиппову рукоплесканіемъ.

б) Происходили выборы двухъ членовъ Совета, причемъ большинствомъ голосовъ оказались избранными: И. В. Мещерскій и Д. А. Граве.

в) Избраны въ члены Общества: Ольга Сергеевна Ростовцева и Елена Осиповна Борткевичъ.

г) Предлагаются въ члены Общества Николай Максимовичъ Гюнтеръ (предлагаютъ А. Н. Толмачевъ и П. А. Шиффъ).

д) Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) Б. М. Кояловичъ. «Нѣкоторыя примѣненія теоріи каноническихъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій».
- 2) И. В. Мещерскій. «Замѣтка по поводу статьи профессора Аррелья относительно задачи о движѣніи системы точекъ при дѣйствіи силъ, обратнопропорціональныхъ кубу разстоянія и центральныхъ силъ, пропорціональныхъ разстоянію».
- 3) Н. Я. Сопинъ. «О Бернулліевыхъ полиномахъ и Бернулліевыхъ числахъ».

Засѣданіе 17 декабря 1894 года.

Предсѣдательствовала В. И. Шиффъ.

а) По предложению предсѣдательствовавшей Собрание постановило посвятить особое засѣданіе Общества, спеціально предназначеннѣе для обзора научныхъ трудовъ скончавшагося почетнаго члена Общества П. Л. Чебышева.

Въ краткомъ изложеніи работъ покойнаго согласились принять участіе: Ю. В. Сохоцкій, Д. А. Граве, И. И. Ивановъ, В. И. Станевичъ, Д. Ф. Селивановъ, И. Л. Пташицкій, В. И. Шиффъ, Н. Я. Сопинъ, В. А. Марковъ, Д. К. Бобылевъ, Н. Б. Делоне и О. А. Баклундъ.

Засѣданіе это назначено на 14 Января 1895 года.

б) Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

- 1) Н. Б. Делоне. Передача врацемъ и механическое черченіе кривыхъ шарниро-рычажными механизмами.

- 2) Извѣстія Физико-математического Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ т. IV, № 3.
- 3) Н. Я. Сонинъ. «О производныхъ функцияхъ высшихъ порядковъ».
- 4) Н. Я. Сонинъ. Замѣтка по поводу письма П. Л. Чебышева къ С. В. Ковалевской.
- 5) Труды отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Общества любителей естествознанія, томъ 7-й, вып. 1-й.
- 6) П. А. Шиффъ. О некоторыхъ соотношеніяхъ въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ.
- 7) Д. А. Граве. Замѣтка, написанная въ память послѣдняго въ жизни П. Л. Чебышева математическаго разговора.
- в) Были избраны въ члены Общества: Николай Максимовичъ Гюнтеръ, Михаилъ Романовичъ Блюменфельдъ и Сергѣй Георгіевичъ Петровичъ.
- г) Были сделаны слѣдующія сообщенія:
- 1) М. М. Филипповъ. «Объ ариѳметическомъ дифференцированіи».

Разложимъ число 3 всѣми способами на слагаемыя:

$$3 = \begin{array}{l} 3 \\ 1 + 2 \\ 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Напишемъ 12 вместо 1+2, 1³ вместо 1+1+1; будемъ рассматривать нижнія цифры какъ указатели при x , а верхнія, какъ показатели x ; составимъ, слѣдовательно, комбинаціи:

$$x_3, x_1x_2, x_1^3$$

т. е. комбинаціи вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$.

При каждой такой комбинаціи поставимъ коэффиціентъ вида

$$N = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

что въ нашемъ случаѣ дастъ, полагая $n=3$, коэффиціенты

$$\frac{3!}{3!} = 1; \frac{3!}{1!2!} = 3; \frac{3!}{3!(1!)^3} = 1,$$

тогда въ результатѣ найдемъ выраженія

$$x_3, 3x_1x_2, x_1^3,$$

которые назовемъ «коэффиціентами сложнаго дифференцированія» или просто «коэффиціентами X_k ».

Пусть теперь дана y функция отъ x и, въ свою очередь, x функция отъ z . Примемъ обозначенія

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}; \frac{d^n y}{dz^n} = y_n; \frac{d^n x}{dz^n} = x_n.$$

Непосредственное дифференцированіе дастъ безъ труда третью производную отъ y по z въ видѣ

$$y_3 = x_3 y' + 3x_1 x_2 y'' + x_1^3 y'''$$

$$\text{или короче } y_3 = \sum_{k=1}^3 X_k y^{(k)},$$

т. е. коэффиціенты при $y^{(k)}$ и будутъ «коэффиціентами X_k », составленные, какъ указано выше.

Легко доказать, исходя изъ извѣстной формулы Бертрана, что то же справедливо и для y_n , т. е. имѣеть вообще

$$y_n = \sum_{k=1}^n X_k y^{(k)},$$

гдѣ X_k составляется по предыдущему, причемъ при $y^{(k)}$ стоятъ всѣ комбинаціи вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, для которыхъ $m_1+m_2+\dots+m_n = k$, съ соответственными коэффиціентами N при каждой комбинаціи.

Показавъ, такимъ образомъ, связь вопроса о разложеніи числа на слагаемыя съ вопросомъ о высшихъ производныхъ функций отъ функций, примемъ слѣдующія опредѣленія: символъ вида

$$1) \dots 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$$

назовемъ ариѳметическимъ символомъ. Сумма $m_1+m_2+\dots+m_n$ есть его степень, сумма $m_1+2m_2+\dots+nm_n$ его вѣсъ.

Мы будемъ разматривать также суммы вида

$$\Sigma 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$$

предполагая, что вѣсъ и степень каждого члена одинаковы съ вѣсомъ и степенью всѣхъ другихъ членовъ.

Если вѣ бѣлье частномъ символъ k^m возьмемъ $m=0$, то опредѣлимъ $k^0=1$, по аналогіи съ нулевою степенью чиселъ.

Взявъ $k^m=k^{m-1}k$ и увеличивъ послѣднее k единицею назовемъ это дѣйствие ариѳметическимъ дифференцированіемъ и обозначимъ такъ

$$2) \dots (k^m)_1 = k^{m-1} (k+1)$$

причёмъ будемъ считать условно «равными» выраженія, у которыхъ показатели и указатели при той же буквѣ одинаковы, тогда какъ численные коэффиціенты вполнѣ произвольны. Другими словами, здѣсь рѣчь идетъ о подобіи, а не о равенствѣ.

Символъ вида $(k^m)_n$ простымъ уменьшениемъ указателя приводится къ $(1^n)_n$, а поэтому размотримъ лишь символы этого послѣднаго вида.

Легко найти, что

$$(1^k)_n = \Sigma 1^{m_1} 2^{m_2} \dots (n+1)^{m_{n+1}}$$

гдѣ m_1 измѣняется отъ $k-n$ до $k-1$, а m_{n+1} отъ 0 до 1.

Примѣръ:

$$(1^3)_4 = 2^3 + 1^3 + 124 + 15^2.$$

Для вычислениія $(1^k)_n$ при $k > n$ полезна формула

$$3) \dots (1^k)_n = 1^{k-n} (1^n)_n$$

Доказательство: полагая $(1^k)_n = 1^{k-n} P_n$, возьмемъ сначала $k=n$; тогда $(1^n)_n = P_n$, потому что 1^0 по определенію = 1. Стало быть $(1^n)_n = 1^{k-n} (1^n)_n$.

Примѣръ:

$$(1^5)_2 = 1^3 (1^2)_2 = 1^3 (2^2 + 13) = 1^3 2^2 + 1^4 3.$$

Итакъ, символы вида $(1^k)_n$ приводятся къ такимъ, у которыхъ показатель равенъ порядку дифференцированія.

Вѣсъ символа $(1^k)_n$ есть $k+n$ и вычислениіе его рѣшаетъ задачу: разложить число $n+k$ на k слагаемыхъ; взявъ $n=0, 1, 2, \dots$

рѣшимъ задачу Эйлера о разложении цѣлаго положительного числа всѣми способами на цѣлыя положительныя слагаемыя.

Примѣръ. Разложить 7 всѣми способами на слагаемыя.

Задача сводится къ вычислению символовъ

$$(1^7)_0, (1^6)_1, (1^5)_2, (1^4)_3, (1^3)_4, (1^2)_5, (1)_6$$

откуда получимъ 1 разложение 7-ї степени, 1 шестой, 2 пятой, 3 четвертой, 4 третьей, 3 второй, 1 первой — итого 15 разложенийъ, а именно:

$$1^7; 1^5 2; 1^3 2^2 + 1^4 3; 1^2 2^3 + 1^2 3^2 + 1^3 4; 2^2 3 + 1^3 2 + 124 + 1^1 5; \\ 25 + 34 + 16; 7.$$

Какъ ни проста эта задача, но переводчикъ Эйлера, Мозерь, пропустилъ одну комбинацію, именно $2+2+3=2^2 3$, что всегда возможно, если рѣшать ее интуитивно, какъ обыкновенно дѣляютъ. Замѣчу, что число 50 можно разложить на 7 слагаемыхъ 8946 различными способами.

Степени отъ функций. Употребительныя формулы для $D^n y^k$, гдѣ $D = \frac{d}{dx}$ крайне неудобны. Такъ Шлемильхъ даетъ формулу

$$D^n y^k = k(n-k)_n \left[-\frac{(n)_1}{k-1} y^{k-1} D_n y + \frac{(n)_2}{k-2} y^{k-2} D^2 y + \dots \right]$$

Это присутствіе минусовъ показываетъ, что вѣ формулу введены члены сокращающіеся вѣ конечномъ результатаѣ; сверхъ того, формула неудобна тѣмъ, что вѣ каждомъ членѣ содержитъ производную высшаго допускаемаго задачею порядка.

Примѣняя символъ $(1^n)_k$, не трудно найти болѣе удобную формулу

$$4) D^n y^k = \frac{k!}{k-n!} y^{k-n} (1^n)_0 + \frac{k!}{k-n+1!} y^{k-n+1} (1^{n-1})_1 + \dots \\ + \frac{k!}{k-1!} y^{k-1} (1)_{n-1}$$

вѣ которой, развернувъ символы, надо вмѣсто 1 написать x_1 и т. д. и ввести коэффиціенты N вида

$$\frac{n!}{m_1 \dots m_n! (1!)^{m_1} \dots (n!)^{m_n}}$$

Примѣръ: Для $n = 3$ коэффициенты N памъ известны, а именно 1, 3, 1. Найдемъ безъ труда

$$(1^3)_0 = y_1^3, (1^2)_1 = 3 y_1 y_2, (1)_2 = y_3$$

стало быть имѣемъ

$$D^3 y^k = k(k-1)(k-2)y^{k-3}y_1^3 + 3k(k-1)y^{k-2}y_1y_2 + ky^{k-1}y_3.$$

Формулу (4) еще можно написать такъ

$$D^n y^k = \frac{d^n y^k}{dy^n} (1^n)_0 + \frac{d^{n-1} y^k}{dy^{n-1}} (1^{n-1})_1 + \dots + \frac{dy^k}{dy} (1)_{n-1}$$

или еще такъ:

$$5) D^n y^k = \sum_{p=k-n}^{h=k-1} \frac{k! y^p}{p!} N y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_n^{m_n}, \text{ на этотъ разъ безъ всякихъ символовъ.}$$

Формулу Бертрана

$$6) y_n = \Sigma N x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} y^{(k)}$$

мы замѣнимъ другою, пользуясь формулой (5)

Дифференцированіе функций отъ функций.

Вместо формулы Бертрана мы введемъ символическое равенство:

$$7) y_n = y'(1)_{n-1} + y''(1^2)_{n-2} + \dots + y^{(n)}(1^n)_0 = \sum_{k=1}^{k=n} (1^k)^{n-k} y^{(k)}.$$

Развернувъ символы, надо приписать коэффициенты N .

Примѣръ: Найти $y_4 = y'(1)_3 + y''(1^2)_2 + y'''(1^3)_1 + y^{IV}(1^4)_0$ найдемъ $(1)_3 = x_4, (1^2)_2 = 4x, x_3 + 3x_2^2$ и т. д. получимъ

$$y_4 = y'^4 + (4x_1 x_3 + 3x_2^2)y'' + 6x_1^2 x_2 y''' + y^{IV} x_1^4,$$

Перемѣнна перемѣнного независимаго.

Прежде всего обозначимъ $\frac{dx^k}{dx^k}$ черезъ $z_{(k)}$

Постараемся выразить $z_{(k)}$ въ x_1, x_2, \dots, x_k .

Легко найдемъ $z_{(1)} = x_1^{-1}; z_{(2)} = -x_2 x_1^{-3}$ и т. д. и вообще символически:

$$x_1^{2n-1} z_{(n)} = (1^{n-1})_{n-1},$$

гдѣ въ символѣ единица означаетъ x_1 и т. д.

Что касается численныхъ коэффициентовъ, они находятся по формулѣ

$$(-1)^{k+p} N_p,$$

гдѣ N_p есть стоящий при $1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}$ коэффициентъ равный тому коэффициенту N , который стоялъ бы при комбинаціи

$$1^{m_1-p} 2^{m_2} \dots n^{m_n}.$$

Перемѣнливъ въ 6) x на z и обратно нашли бы

$$y^{(n)} = \Sigma N z_{(1)}^{m_1} z_{(2)}^{m_2} \dots z_{(n)}^{m_n} y_k$$

Подставивъ же вмѣсто $z_{(1)}, z_{(2)}$ и т. д. ихъ выражения въ x_1, x_2 и т. д., придемъ къ формулѣ, рѣшающей вопросъ о замѣнѣ переменного, а именно найдемъ символическое равенство

$$8) y^{(n)} x_1^{2n-1} = (x_1^{n-1})_0 y_n - (x_1^{n-1})_1 y_{n-1} + \dots \pm (x_1^{n-1})_{n-1} y'_1.$$

Развернувъ символы, надо приписать къ нимъ коэффициенты N_p съ ихъ поперемѣнными знаками $+$ и $-$.

Найдемъ, напр., коэффициентъ при y_{n-4} , который обозначимъ чрезъ X_{n-4} .

Легко найдемъ (напр., разлагая 8 на 4 слагаемыхъ)

$$x_1^{2n-1} X_{n-4} = (x_1^{n-1})_4 = (x_1^{n-5} x_2^4 + x_1^{n-4} x_2^2 x_3 + x_1^{n-3} x_3^2 + x_1^{n-3} x_2 x_4 + x_1^{n-2} x_5).$$

Коэффициенты N_p вычисляются какъ N по комбинаціи

$$x_1^{n-5} x_2^4 - x_2^2 x_3 + (x_3^2 + x_2 x_4) - x_5.$$

Такъ для $x_1^{n-5} x_2^4$ имѣемъ

$$N = \frac{n+3!}{n-5!(2)4.4!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7(n+3)!}{n-5! 4! 5.6.7.8} = 3 \cdot 5 \cdot 7 (n+3)_8,$$

гдѣ $(n+3)_8$ есть биноміальный коэффициентъ.

Продолжая такъ, найдемъ по умноженію на $x_1^{-(2n-1)}$

$$X_{n, n-4} = 3 \cdot 5 \cdot 7(n+3)_8 x_1^{-n-4} x_2^4 - 3 \cdot 5 \cdot 7(n+2)_7 x_1^{-n-3} x_2^2 x_3 + \\ + 5(n+1)_6 x_1^{-n-2} [2x_3^2 + 3x_2 x_4] - (n)_5 x_1^{-n-1} x_5.$$

Совершенно аналогичныя формулы получилъ Н. Я. Сопинъ (Изв. Имп. Ак. Н. 1894, № 4, стр. 331), вычисляя послѣдовательно $X_{n, n}$, затѣмъ $X_{n, n-2}$ и т. д. по предложеному имъ «правилу», позволяющему найти $X_{n, n-k-1}$, когда известно $DX_{n, n-k}$. Нашъ способъ даетъ любое $X_{n, p}$ непосредственно и дѣйствие не сложнѣе того, какое требуется для одного только дифференцированія вида $DX_{n, n-k}$.

Помимо практической выгодаы наши формулы, по ихъ общности, могутъ принести пользу и для теоретическихъ изслѣдований: такъ напр. большинство формулъ, изъ которыхъ Заальшюцъ и др. авторы выводятъ теорію Бернулліевыхъ чиселъ и функций получается прямо изъ нашихъ формулъ 7) и 8). Также и въ другихъ изслѣдованіяхъ о свойствахъ чиселъ эти формулы не бесполезны. Такъ съ помощью ихъ можно изслѣдовать, напр., свойства чиселъ, называемыхъ ямейскими авторами *Facultäten-coeffizienten*, т. е. численныхъ коэффициентовъ въ разложеніяхъ по степенямъ x формулы

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = C_{n, k} x^n + C_{n, 2} x^{n-1} + \dots$$

а также формулы

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-nx)} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

Такъ, полагая $A_k = C_{-n, k}$ можно доказать, что

$$\Sigma N_{n+k, n} = C_{-n, k}$$

гдѣ $N_{n+k, n}$ есть коэффициентъ N составленный, какъ показано выше, для комбинаціи $1^{m_1} 2^{m_2} \dots (n+k)^{m_{n+k}}$ имѣющей вѣсъ $n+k$ и степень n .

Примѣръ: $C_{-2, 4}$ есть, какъ показалъ, напр., Шлемильхъ (что легко вычислить разложеніемъ частныхъ дробей), число = 31. Должны стало быть, имѣть

$$\Sigma N_{6, 2} = C_{-2, 4} = 31$$

Но коэффициенты вида $N_{6, 2}$ получаются разложеніемъ 6 на два слагаемыхъ не всѣми способами, т. е.

$$6 = \begin{cases} 1 + 5 = (15 + 24 + 3)^2 \\ 2 + 4 \\ 3 + 3 \end{cases}$$

откуда соответственныя N суть

$$\frac{6!}{1! 5!} = 6; \frac{6!}{2! 4!} = 15; \frac{6!}{3! 3! 2!} = 10$$

т. е. имѣемъ $6 + 15 + 10 = 31$, что и справедливо.

Доказать равенство вида:

$$\Sigma N_{n+k, n} = C_{-n, k} *)$$

обыкновенными аналитическими методами хотя, конечно, и возможно, но требуетъ болѣе сложныхъ вычисленій. Аналогичная теорема получается и для чиселъ $C_{n, k}$.

2) Н. Я. Сопинъ. «Объ интегрированіи уравненія

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y},$$

3) В. Д. фонъ-Дервизъ. «Объ одной теоремѣ въ теоріи ансамблей».

Засѣданіе 14 января 1895 г., посвященное памяти П. Л. Чебышева.

Засѣданіе открыто предсѣдателемъ Совѣта Общества Ю. В. Сохоцкимъ, который обратился къ собранію съ слѣдующей рѣчью:

Настоящее засѣданіе посвящается чествованію памяти нашего знаменитаго ученаго и незабвенного учителя Пафнутія Львовича Чебышева. Считаю долгомъ прежде всего прочесть обзоръ его жизни и ученой дѣятельности. Конечно, жизнь этого ученаго,

*) Изъ этой теоремы можно вывести многіе результаты, полученные Эйлеромъ относительно числа разложенийъ данного числа на слагаемыхъ.

никогда не отрывавшагося отъ книгъ и мемуаровъ, протекала тихо, безъ особенно выдающихся моментовъ.

Пафнютій Львовичъ родился въ 1821 г. въ имѣніи матери своей, селѣ Окатовѣ, Калужской губерніи, Боровскаго уѣзда. Получивъ дома первоначальное образованіе, многообѣщавшій (16 л.) юноша выдержалъ экзаменъ прямо въ московскій университетъ, на физико-математической факультетѣ, гдѣ вскорѣ обратилъ на себя вниманіе извѣстнаго проф. Брашмана, угадавшаго въ новомъ ученикѣ будущес свѣтило.

И вотъ, окончивъ кандидатомъ курсъ въ университѣтѣ на 20-мъ году своей жизни, т. е. въ 1841 г., Чебышевъ подъ руководствомъ Брашмана отдается всепрѣдѣлѣ ученымъ трудамъ и упорно не покидаетъ ихъ, относясь въ теченіи семи лѣтъ равнодушно къ стѣснительному матеріальному положенію и не помышляя о карьерѣ, но твердо продолжая избранный путь. Ученая дѣятельность Пафнютія Львовича началась двумя замѣтками по теоріи кратныхъ интеграловъ и теоріи сходимости строкъ 1845 г. Большее вниманіе обратилъ на себя «Опытъ элементарной теоріи вѣроятностей», написанной имъ для того, чтобы удовлетворить просвѣщенному желанію попечителя московскаго округа графа Строганова.

Въ 1847 г. П. Л. допущенъ былъ къ защищѣ диссертациіи «Объ интегрированіи пррадиональныx дифференціаловъ. Блистательная защита ея открыла ему мѣсто доцента Петербургскаго университета. Тогда, обезпеченный въ матеріальномъ отношеніи, молодой человѣкъ съ новымъ воодушевленіемъ принялъ за многосложные математические труды: принимаетъ участіе въ изданіи сочиненій Эйлера, издаетъ свои классическіе мемуары по теоріи простыхъ чиселъ и свою прекрасную теорію сравненій. Мемуары по теоріи простыхъ чиселъ сразу поставили его наравнѣ съ выдающимися математиками всего міра.

Выказавъ въ полномъ блескѣ необыкновенный свой талантъ въ решеніи вопросовъ чисто теоретического характера, П. Л.—уступая склонностямъ своего ума,—обращается затѣмъ по преимуществу къ созданию новыхъ методовъ, приспособленныхъ къ решенію вопросовъ, имѣющихъ значеніе на практикѣ въ прило-

женіяхъ. Избравъ себѣ новую область изслѣдованій, онъ до конца жизни идетъ по этому пути, и изслѣдованія его доставляютъ ему славу одного изъ оригинальнейшихъ математиковъ.

Къ этому времени относится избраніе П. Л. въ члены Академіи Наукъ, 1853 г.; въ 1856 г. былъ выбранъ въ члены-корреспонденты парижской Академіи Наукъ, а также въ дѣйствительные члены нашего артиллерійскаго комитета и въ почетные члены московскаго университета.

Изъ числа мемуаровъ, относящихся къ новому направлению, слѣдуетъ особенно отметить два, появившіеся въ 1853 и 1855 г.: «Théorie des mecanismes connus sous le nom de parallelogrammes» и «О непрерывныхъ дробяхъ», гдѣ решаются двѣ задачи схожія по характеру, хотя решаются методами отличными. Въ обоихъ мемуарахъ ставится вопросъ о нахожденіи приближенныхъ выражений наимѣнѣніи ближе и проще представляющіхъ функцию. Съ этихъ-то именно мемуаровъ начинается рядъ работъ въ своеобразномъ направлении, рѣзко отличающемся отъ направленія другихъ современныхъ математиковъ.

Понятна важность методовъ для решенія практическихъ вопросовъ,—методовъ, дающихъ приближенная выраженія для функций и вмѣстѣ съ тѣмъ, дающихъ возможность опредѣлить предѣлы неизбѣжной погрѣшности. Въ систематическомъ развитіи такихъ методовъ, приведшихъ его, между прочимъ, къ блестящимъ открытиямъ въ теоріи вѣроятностей, Чебышевъ почти не имѣетъ предшественниковъ.

Въ 1865 г. берлинская академія избрала его своимъ членомъ-корреспондентомъ, а въ 1874 парижская академія постила его избраніемъ въ свои члены (*associés*). Лондонское королевское общество также избрало Чебышева своимъ членомъ.

Трудно было бы перечислять всѣ работы П. Л.; кромѣ вышеуказанныхъ общею извѣстностью, какъ у насъ, такъ и заграницей, пользуются сочиненія:

- 1) Чертеніе географическихъ картъ.
- 2) О среднихъ величинахъ.
- 3) Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximatives des fonctions.

- 4) Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés.
- 5) О разложении функций въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.
- 6) О функцияхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля.
- 7) Объ интегрированіи дифференціаловъ, содержащихъ кубический корень.
- 8) Объ одномъ ариометрическомъ вопросѣ.
- 9) О функцияхъ подобныхъ функциямъ Лежандра.
- 10) О наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ суммъ.
- 11) О центробѣжномъ уравнителѣ.
- 12) О простѣйшихъ сочлененіяхъ.
- 13) О представлениі предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ.
- 14) О разложении въ непрерывную дробь рядовъ, расположенныхъ по писходящимъ степенямъ переменной.
- 15) Machine arithmetique à mouvement continue. etc. etc.

Съ течениемъ времени значеніе трудовъ П. Л. будеть возвратить, потому что вопросы, въ нихъ затрагиваемые, имѣютъ принципіальный характеръ и большую практическую важность. окончательная научно-критическая ихъ оценка потребуетъ еще не мало времени. Мы не намѣрены, да и не можемъ резюмировать послѣдняго слова науки, не намѣрены разсуждать о заслугахъ, которыхъ опѣнены по достоинству давно.

Находясь подъ впечатлѣніемъ недавно угасшей жизни П. Л., подъ обалніемъ живыхъ его словъ и разговоровъ съ нами, ученики и почитатели его заслугъ, — мы собрались сегодня, чтобы въ тѣспомъ семейномъ кругу побесѣдовать о томъ, что узнали отъ него и чѣмъ ему остаемся лично-обязанными.

Будемъ вѣрить, что П. Л. присутствуетъ здѣсь вмѣстѣ съ нами и выражимъ убѣжденіе, что труды его жизни нашли себѣ надежное и вѣрное помѣщеніе на его родинѣ, у насть; ничего не пропущено и ничего не будетъ забыто. Мы изучаемъ ихъ всесторонне; — снабдивъ необходимыми дополненіями и надлежащимъ освѣщеніемъ, своевременно мы передадимъ ихъ слѣдующему поколѣнию въ залогъ дальнѣйшаго, самостоятельного развитія математическихъ наукъ въ Россіи, и въ залогъ сохраненія неизмѣн-

ной признательности ученому соотечественнику, имя котораго будеть жить столько, сколько будетъ жить сама наука.

Предлагаю почтить память П. Л. и приглашаю всѣхъ присутствующихъ здѣсь встать.

Послѣ этого были сдѣланы краткіе очерки слѣдующихъ трудовъ П. Л.

- 1) Д. А. Граве. Задача о географическихъ картахъ.
- 2) И. И. Ивановъ. Постулатъ Бертрана.
- 3) В. И. Станевичъ. О числѣ простыхъ чиселъ.
- 4) Д. Ф. Селивановъ. Работы по теоріи вѣроятности.

17 декабря 1866 года П. Л. Чебышевъ сдѣлалъ докладъ Московскому Математическому Обществу «о среднихъ величинахъ». Этотъ докладъ былъ напечатанъ во второмъ томѣ Математического Сборника и перепечатанъ въ сочиненіи Маievскаго «Изложеніе способа наименѣшихъ квадратовъ». Въ указанной статьѣ дано вполнѣ строгое и элементарное доказательство теоремы о вѣроятности суммъ данныхъ величинъ заключаться между некоторыми предѣлами. Изъ этой теоремы вытекаетъ, какъ слѣдствіе, законъ большихъ чиселъ и его частный случай — теорема Бернулли. Доказательство отличается такою простотой, что оно доступно лицамъ едва знакомымъ съ элементарной алгеброй. Одного знанія формулы для квадрата многочлена вполнѣ достаточно. Нестрогость, встрѣчающаяся при решеніи вопросовъ теоріи вѣроятностей, здѣсь совершенно отсутствуетъ. Эта нестрогость состоить въ томъ, что функции, зависящія отъ большихъ чиселъ, выражаются приближенными формулами и допускаемая при этомъ погрѣшность не опѣнивается. П. Л. рассматриваетъ математическую ожиданія, приближенными формулами не пользуется и вполнѣ строго для искомой вѣроятности получаетъ некоторое неравенство.

Нѣть надобности входить въ подробности, такъ какъ эта работа постоянно излагается на лекціяхъ. Трудно себѣ даже представить курсъ теоріи вѣроятностей, въ которомъ бы не встрѣчалось имя П. Л. Чебышева.

- 5) И. Л. Шташицкій. Объ интегрированіи прращеніональныхъ выражений.

Послѣ перерыва засѣданія, продолжавшагося 20 минутъ, были сдѣланы слѣдующіе доклады о работахъ П. Л.

6) В. И. Шиффъ. О разности интеграла произведения двухъ функцій и произведения интеграловъ этихъ функцій.

7) Н. Я. Сонинъ. Приближенное вычисленіе опредѣленного интеграла.

8) В. А. Марковъ о функціяхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

9) Д. К. Бобилевъ. О параллелограммахъ.

Работы П. Л. Чебышева по механикѣ относятся къ прикладной механикѣ и преимущественно къ теоріи механизмовъ. Онъ самъ говорилъ, что еще съ ранней юности интересовался устройствомъ различныхъ машинъ и строилъ изъ дерева нѣкоторые простые механизмы; поэтому нельзя съ увѣренностю утверждать, чтобы известный мемуаръ: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, находящійся въ VII-мъ томѣ *Mémoires de l'Acad. Impériale des sciences de S-t Pétersb.* (1853 г.), былъ дѣйствительно первымъ трудомъ Чебышева по механикѣ. Въ этомъ мемуарѣ, говоря объ известномъ параллелограммѣ Уатта, авторъ замѣчаетъ, что нѣкоторымъ измѣненіемъ въ устройствѣ механизма можно достигнуть того, чтобы наибольшая отклоненія оконечности штанги поршня отъ прямолинейного пути уменьшились бы болѣе чѣмъ вдвое; однако въ этой «первой части» мемуара только изложены первыя основанія теоріи функцій наименѣе уклоняющихся отъ нуля и въ концѣ сказано, что въ дальнѣйшихъ параграфахъ изложенная теорія будетъ примѣнена къ опредѣленію элементовъ параллелограмма, удовлетворяющаго условіямъ наибольшей точности. Объ устройствѣ и размѣрахъ такого параллелограмма говорится позже, въ 1861 году въ IV-мъ томѣ *Bulletin de l'Academie Impériale des sciences des S-t Pétersb.* р. 433; отсюда взято описание этого механизма, помѣщенное въ механикѣ Бура.

Въ 1868 году, въ XIV томѣ записокъ Академіи Наукъ помѣщена статья П. Л. «Объ одномъ механизме», въ которой авторъ даетъ теорію новаго параллелограмма, отличающагося отъ параллелограмма Уатта видомъ кривой, вычерчиваемой при пол-

номъ оборотѣ механизма. Въ параллелограммѣ Уатта и въ первомъ параллелограммѣ Чебышева эта кривая имѣеть видъ цифры 8, а въ новомъ механизмѣ она имѣеть видъ съченія капли ртути, лежащей на стеклѣ.

Самый механизмъ представляетъ плоскій четырехсторонникъ CC_1A_1A , состоящій изъ неподвижнаго основанія CC_1 , двухъ сторонъ A_1C_1 и AC равной длины, вращающихся вокругъ точекъ C и C_1 и четвертой стороны AA_1 , соединяющей оконечности A и A_1 . Длины AC и A_1C_1 можно принять за единицу длинь, а длины сторонъ AA_1 и CC_1 означимъ буквами a и k . Если a менѣе единицы, а механизмъ находится въ такомъ положеніи, что стороны A_1C_1 и AC взаимно скрещены, образуя разные углы съ основаніемъ CC_1 , то сторона AA_1 будетъ имѣть положеніе $(AA_1)_0$, параллельное основанію CC_1 и будетъ отстоять отъ него на длину:

$$b = \sqrt{1 - \left(\frac{a+k}{2}\right)^2}.$$

При полномъ оборотѣ механизма точка N , находящаяся на серединѣ стороны AA_1 , описываетъ замкнутую кривую, прикасающуюся въ точкѣ N_1 къ прямой, совпадающей съ положеніемъ $(AA_1)_0$ этой стороны; точка N_0 находится по серединѣ длины $(AA_1)_0$.

Нетрудно доказать, что если k болѣе или равно $\frac{2+a}{3}$, т. е. одной трети суммы трехъ подвижныхъ сторонъ, то вся кривая, описываемая точкою N будетъ впѣ прямой, проведенной черезъ $(AA_1)_0$.

П. Л. Чебышевъ доказалъ, что при k равномъ $\frac{2+a}{3}$ и при a большихъ $\frac{1}{4}$, но не большихъ 0,546, нижняя часть кривой касается къ прямой $(AA_1)_0$ не только въ точкѣ N_0 , но и еще въ двухъ точкахъ N_1 и N_2 , равноотстоящихъ отъ N_0 по обѣ стороны ея на длину меньшую

$$h = \sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{4(2+a)^2}}$$

и на протяженіи разстояній $+h$ и $-h$ отъ точки N_0 , кривая

эта отступает отъ прямой на разстоянія не большія величины

$$L = \sqrt{\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}}$$

Взявъ длины AC и A_1C_1 равными одному метру, a равнымъ 0,327 метра, П. Л. Чебышевъ получаетъ по этимъ формуламъ $2h$ равнымъ, 0,64 метра и наибольшее уклоненіе L равнымъ 0,00029 метра, между тѣмъ какъ въ параллелограммѣ Уатта при одинаковой длины хода $2h$ получаются уклоненія отъ 0,00079 до 0,002 метра.

Въ 1878 году на парижской всемірной выставкѣ были выставлены различные механизмы и снаряды, придуманные П. Л. Чебышевымъ и основанные па свойствахъ найденій имъ системы параллелограммовъ. 29-го августа того же года, въ засѣданіи конгресса Association Française pour l'avancement des sciences П. Л. сообщилъ о вышесказанномъ параллелограммѣ 1868 года и о цѣлой системѣ болѣе новѣйшихъ параллелограммовъ, въ которыхъ наиболѣе уклоняющаяся отъ прямой линіи точка M находится не въ серединѣ N плеча AA_1 но на перпендикуляре, возстановленномъ изъ N къ длине AA_1 . Если означить черезъ φ возстановленное изъ N къ длине AA_1 . Если означить черезъ φ уголъ, составляемый плечами CA и C_1A_1 съ основаніемъ CC_1 въ томъ положеніи сочлененія, при которомъ плечо AA_1 параллельно основанию CC_1 , черезъ c разстояніе MN , черезъ T некоторую величину, равную:

$$T = \sqrt{\frac{2\cos\varphi-a}{\cos\varphi-a}}$$

гдѣ a есть длина AA_1 (длины AC и A_1C_1 равны единицѣ) и дать c величину

$$c = -\frac{2T-(T^2+1)\sin\varphi}{2(T^2-1)\cos\varphi},$$

то точка M будетъ описывать линію, отклоняющуюся отъ прямой на разстоянія не большія:

$$\pm L = \pm \frac{2t^2(1+2t\sin\varphi+t^2)}{T^2(1-t^2)}$$

на протяженіи длины $2h$ хода, которая равна:

$$2h = \frac{2a}{\cos\varphi} \left(\frac{T-\sin\varphi}{T^2-1} + \frac{2(1+2t\sin\varphi+t^2)t}{(1-t^2)^2} \right) \sin\alpha_1,$$

гдѣ α_1 опредѣляется по формулѣ

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{2\cos\varphi}{aT^2} (1-T^2) \left[\left(\frac{1+2t\sin\varphi+t^2}{1-2t\sin\varphi+T^2} \right)^2 - 1 \right],$$

а величина t есть корень уравненія 3-й степени:

$$t^3 + 2t^2\sin\varphi + 3t + 2\sin\varphi - T(1-t^2) = 0.$$

Теорія этихъ параллелограммовъ изложена въ XXXIV-мъ томѣ записокъ Академіи Наукъ.

Въ томъ же 1878 году, въ IX-мъ томѣ Математического Сборника, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ, П. Л. Чебышевъ, въ статьѣ «О простѣйшихъ сочлененіяхъ» (стр. 340), показалъ, что показанные имъ на парижскомъ конгрессѣ механизмы могутъ быть замѣнены другою супостативою системою, доставляющей тѣ же симметричныя кривыя, которыя вычерчиваются точкою M выписаннаго параллелограмма. Въ 1889 году, въ приложеніи къ LX-му тому записокъ Академіи Наукъ онъ изложилъ полную теорію этихъ системъ. Еще ранѣе, въ 1880 году, въ приложеніи къ XXXVI-му записокъ, въ статьѣ «О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ какихъ-либо элементовъ» онъ рассматриваетъ механизмы, въ которыхъ плечи CA и C_1A_1 не равны между собою, а также не равны между собою разстоянія точки M отъ точекъ A и A_1 .

Тщательное изученіе движений разнообразныхъ видоизмененій простѣйшихъ сочлененій дало П. Л. возможность подмѣтить многія особенности движений тѣхъ или другихъ элементовъ ел; основываясь па этомъ онъ построилъ весьма много механизмовъ, описание и объясненіе которыхъ потребовало бы много времени. Есть придуманные Чебышевымъ механизмы, основанные па другихъ соображеніяхъ; такъ напр., счетная машина съ непрерывнымъ движениемъ основана па некоторыхъ свойствахъ системъ зубчатыхъ колесъ. Насколько практичесны придуманные П. Л. механизмы — покажетъ будущее.

10) Н. Б. Делоне. О механизмахъ.

Изслѣдуя вопросъ о преобразованіи вращательного движения въ прямолинейное, Чебышевъ пришелъ къ блестящимъ результа-

тамъ и, можно сказать, покончилъ съ этимъ вопросомъ, давъ необыкновенно простые трехрычажные механизмы, преобразовывающіе непрерывное вращеніе въ прямолинейное движение, и обратно, съ высокою степенью приближенія; и едва ли этого рода механизмы могутъ получить, послѣ Чебышева, какое-либо дальнѣйшее усовершенствованіе. Но, этого мало,—на пути къ достижению такихъ важныхъ результатовъ Чебышевъ поднялъ другой, близко стоящій къ первому, вопросъ капитальнаго значенія въ учении о преобразованіи движенія: Чебышевъ первый обратилъ вниманіе на возможность устройства передачи вращенія помошью суставчатыхъ системъ безъ мертвыхъ положеній и съ увеличеніемъ числа оборотовъ. Это вопросъ совершенно новый и представляетъ собою обширное поле для изученія; но, едва поднявъ его, Чебышевъ уже успѣлъ и на этомъ поприщѣ достигнуть весьма многаго. Пользуясь тѣмъ же трехрычажнымъ механизмомъ, который извѣстенъ подъ именемъ кинематического четырехсторонника, прилагая къ нему тотъ же самый методъ функцій наименѣе отклоняющихся отъ нуля, Чебышевъ показалъ, что при извѣстныхъ размѣрахъ такого четырехсторонника и при непрерывномъ вращеніи одного изъ его плечъ, нѣкоторая точка его описываетъ замкнутую кривую, умѣщающуюся между двумя концентрическими окружностями, которыхъ, эта кривая поочередно касается. Воображая себѣ третью окружность, концентрическую съ двумя первыми и имѣющую радиусъ равный среднеарифметической отъ радиусовъ двухъ ограничивающихъ кривую окружностей, Чебышевъ принимаетъ за функцію наименѣе уклоняющуюся отъ нуля разность между радиусомъ вслѣдорѣмъ кривой, чертимой механизмомъ, и радиусомъ упомянутой средней окружности и показываетъ, что эта разность можетъ быть сдѣлана менѣе вслѣдъ данной величины хотя и не можетъ быть обращена въ пуль, потому что при этомъ вся кривая обращается въ точку и длина вращающагося плеча четырехсторонника тоже обращается въ нуль. Но всегда можно выбрать по формуламъ Чебышева такие размѣры механизма, что кривая, чертимая имъ, уклоняется отъ окружности на сотыя доли миллиметра, имѣя довольно значительныйоперечникъ. (Демонстрируются модели механизмовъ различнаго

приближенія). Этимъ механизмомъ Чебышевъ пользовался тройнымъ способомъ: 1) Предполагая что механизмъ приводится въ движение рукою, Чебышевъ удивительно находчиво изобрѣгалъ прібавленія къ своему трехрычажному механизму какихъ-либо еще рычаговъ, разсуждая, что для рабочаго совершенно нечувствительна разница между вращеніемъ рукоятки по окружности и вращеніемъ рукоятки по кривой, весьма мало уклоняющейся отъ окружности; между тѣмъ это вращеніе прекрасно преобразуется механизмомъ во вращеніе одного изъ плечъ четырехсторонника. Такая передача примѣнена была Чебышевымъ къ изобрѣтенному имъ креслу самокату. 2) Если механизмъ долженъ приводиться въ движение не рукою, а вращеніемъ какого нибудь вала, получающаго движение отъ паровой машины, гидравлическаго двигателя и т. д., то въ центрѣ упомянутыхъ концентрическихъ круговъ укрѣпляется кривошипъ, который уже не прямо надѣвается на шарниръ устроенный въ точкѣ, описывающей приближенную кривую, но соединяется съ этимъ шарниромъ добавочнымъ рычажкомъ. Такимъ образомъ одинъ конецъ этого рычажка идетъ по приближенной кривой, а другой его конецъ идетъ по окружности, описываемой концемъ кривошипа въ вращеніе одного изъ плечъ четырехсторонника преобразуется, следовательно, во вращеніе кривошипа пятирычажнымъ механизмомъ. По формуламъ Чебышева можно выбрать такие размѣры рычаговъ, при которыхъ, при равномѣрномъ вращеніи плеча четырехсторонника, получается вращеніе кривошипа весьма близкое къ равномѣрному. 3) Наконецъ давалъ кривой, чертимой механизмомъ, форму наиболѣе отличающуюся отъ окружности, но принуждая ее (выборомъ размѣровъ по формуламъ) заключаться между концентрическими окружностями и касаться ихъ, Чебышевъ соединяетъ кривошипъ, вращающейся около центра этихъ окружностей добавочнымъ рычажкомъ съ точкою механизма, описывающею упомянутую кривую, и даетъ этому рычажку такую длину, чтобы онъ могъ въ мѣстахъ наибольшаго отклоненія кривой вытягиваться въ одну прямую съ кривошипомъ. Въ такомъ механизме существуютъ мертвыя положенія, такъ что онъ требуетъ маховика; но за то на одинъ оборотъ плеча четырехсторонника получается два или четыре оборота

крайности, смотря по тому, при какомъ положениі добавочнаго рычажка перейдено было мертвое положеніе.

Замѣтчательно, что формулы, данные Чебышевымъ для приближенного веденія точки четырехсторонника по окружности совершенно идентичны съ формулами, данными имъ же для того изъ изобрѣтенныхъ имъ преобразователей вращательного движенія въ прямолинейное, которому, безъ сомнѣнія, слѣдуетъ занять первенствующее мѣсто среди всѣхъ извѣстныхъ въ науки прямыхъ. Здѣсь мы имѣемъ въ виду тотъ удивительный механизмъ Чебышева съ ломаннымъ рычагомъ, который помошью трехъ рычаговъ превращаетъ въ прямолинейное движение не колебаніе плеча, а непрерывное его вращеніе. Практика еще не достаточно знакома съ этими механизмами Чебышева, но не можетъ быть никакого сомнѣнія, что они получатъ широкое примѣненіе и распространеніе; и именно ихъ удивительная простота служитъ вѣрнымъ залогомъ будущаго ихъ успѣха. Но для науки наиболѣе важное значеніе представляетъ не то, что уже вылилось въ законченную форму а именно новый поднятый Чебышевымъ вопросъ о передачѣ вращенія суставчатыми системами. Пусть рутинна на первыхъ порахъ относится съ недовѣріемъ къ этому дѣлу; можетъ быть и первые шкивы и зубчатыи колеса были встрѣчены такимъ же недовѣріемъ. Пусть намѣченъ смѣло, но онъ намѣченъ твердою рукою и вѣрнымъ глазомъ. Чебышевъ любилъ говорить, что природа, величайшая наша учительница, широко примѣняетъ суставчатыи системы въ органахъ передвиженія животныхъ и что поэтому можно надѣяться на приобрѣтеніе этими системами въ будущемъ большаго значенія. Цожелаемъ же, чтобы надежды великаго геометра оправдались, чтобы суставчатыи системы не представляли быть предметомъ всесторонняго изученія на благо и пользу будущихъ поколѣній.

Засѣданіе 28 января 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Штацицкій.

Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе «о задачѣ Дирихле».

Засѣданіе 25 февраля 1895 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) М. М. Филипповъ. «Объ одной формулѣ общаго дифференцированія».

2) И. С. Аладовъ. «О числѣ классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ, опредѣлитель которыхъ равенъ отрицательному числу».

Дирихле доказалъ, что, если простое число p вида $4m+1$, то число классовъ квадратичныхъ формъ съ опредѣлителемъ — p равно удвоенной разности между числомъ квадратичныхъ вычетовъ и числомъ невычетовъ простого числа p въ ряду: $1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{4}$; если же p —вида $4m+3$, то число классовъ формъ съ опредѣлителемъ — p и съ дѣлителемъ, равнымъ единице, равно разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ числа p въ ряду: $1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$. Легко показать, что и во второмъ случаѣ для опредѣленія числа классовъ квадр. формъ достаточно знать числа квадр. вычетовъ и невычетовъ въ нѣкоторыхъ рядахъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числомъ пе болѣе $\frac{p+1}{4}$, если разматривать отдельно случаи, когда p вида $8m+3$ и $8m+7$, а именно имѣемъ слѣдующія теоремы: 1) Если $(\frac{2}{p}) = -1$, то число классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ — p и дѣлителемъ единицею равно разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ числа p въ ряду: $\frac{p+1}{4}, \frac{p+5}{4}, \dots, \frac{p-1}{2}$; 2) Если $(\frac{2}{p}) = +1$, то число классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ — p и дѣлителемъ единицею равно разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ числа p въ ряду: $1, 2, 3, \dots, \frac{p-3}{4}$.

Можно идти еще далѣе и доказать, что для опредѣленія числа классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ — p и съ дѣлителемъ единицею въ случаѣ, когда $p \equiv 3$ (mod. 4), достаточно знать числа квадр. вычетовъ и невычетовъ p въ нѣкоторыхъ рядахъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ числомъ, равнымъ приблизительно одной шестой

часті всіого числа цѣлыхъ ряду $1, 2, \dots, p-1$, а въ одноть случаѣ приблизительно $\frac{1}{12}$ -ої части этого числа.

Дѣйствительно, изъ предыдущихъ теоремъ Дирихле могутъ быть выведены нижеслѣдующія четыре теоремы, соотвѣтствующія случаямъ, когда $p = 8m-1$, $p = 8m+3$, $p = 8m+5$ и $p = 8m+1$. Для краткости обозначимъ число классовъ квадр. формъ съ опредѣлителемъ $-p$ чрезъ $h(-p)$ и будемъ помнить, что для первыхъ двухъ случаевъ дѣлитель формы предполагается равнымъ единицѣ. *Теорема I.* $p \equiv 3 \pmod{4}$; $\left(\frac{2}{p}\right) = +1, h(-p)$ равняется разности между числами квадр. вычетовъ и невычетовъ въ ряду:

$$1, 2, 3, \dots, \frac{p-3-2\left(\frac{3}{p}\right)}{6},$$

гдѣ $\left(\frac{3}{p}\right)$ означаетъ символъ Лежандра.

Теорема II. $p \equiv 3 \pmod{4}$; $\left(\frac{2}{p}\right) = -1, h(-p)$ равняется удвоеной разности между числомъ квадратичныхъ вычетовъ въ ряду:

$$\frac{p+1}{4}, \frac{p+5}{4}, \dots, \frac{2p-3-\left(\frac{3}{p}\right)}{6}$$

безъ разности таковыхъ же чиселъ въ ряду:

$$\frac{p+3-2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \dots, \frac{p-3}{4}.$$

Число чиселъ въ обоихъ послѣднихъ рядахъ равно:

$$\frac{p+\left(\frac{3}{p}\right)}{6}$$

Теорема III. $p \equiv 1 \pmod{4}$; $\left(\frac{2}{p}\right) = -1, h(-p)$ равняется удвоеной разности, между числомъ квадрат. и неквадратичныхъ вычетовъ въ ряду:

$$\frac{p+3+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \frac{p+9+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \dots, \frac{p-1}{4}.$$

Число чиселъ въ этомъ ряду равно:

$$\frac{p+3-4\left(\frac{3}{p}\right)}{12}.$$

Теорема IV. $p \equiv 1 \pmod{4}$; $\left(\frac{2}{p}\right) = +1, h(-p)$ равняется удвоеной суммѣ двойной разности между числами неквадратичныхъ и квадр. вычетовъ въ ряду:

$$\frac{p+3}{4}, \dots, \frac{2p-3+\left(\frac{3}{p}\right)}{6}$$

и таковой же разности въ ряду:

$$\frac{p+3+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \frac{p+9+2\left(\frac{3}{p}\right)}{6}, \dots, \frac{p-1}{4}.$$

Число чиселъ въ обоихъ послѣднихъ рядахъ равно:

$$\frac{p-\left(\frac{3}{p}\right)}{6}.$$

Засѣданіе 18 марта 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Шташицкій.

Предсѣдатель сообщилъ собранію объ утратѣ, которую Общество понесло въ лицѣ скончавшагося ея члена Аркадія Васильевича Борисова и предложилъ почтить память усопшаго вставаніемъ съ мѣстъ.

Собрание почтило память Аркадія Васильевича Борисова вставаніемъ.

Н. И. Сокинъ сдѣлалъ слѣдующія сообщенія:

1) Простой выводъ формулы П. Л. Чебышева для разложения $\frac{1}{H-x}$.

2) О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ.

Засѣданіе 21 апрѣля 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) Б. М. Коалловичъ. «Нѣсколько примѣчаній объ интегрированіи уравненія: $ydy - ydx = Rdx$ ».

Въ № 2 «Извѣстій Императорской Академіи Наукъ» появилась статья академика Н. Я. Сонина «О дифференціальномъ уравненіи $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$ ».

Докладчикъ предложилъ вниманію Общества нѣсколько замѣчаній по поводу этой статьи.

- 1) Въ § VIII акад. Сонинъ разбираетъ вопросъ о случаѣ, когда уравненіе

$$ydy - ydx = R(x)dx \quad \dots \quad (1)$$

имѣеть три каноническихъ рѣшенія x_1, x_2, x_3 , т. е. общій интегралъ представляется въ видѣ:

$$(y - \alpha_1)^{m_1}(y - \alpha_2)^{m_2}(y - \alpha_3)^{m_3} = C. \quad \dots \quad (2)$$

m_1, m_2, m_3 опредѣлены постоянными

и притомъ сумма каноническихъ постоянныхъ ($m_1 + m_2 + m_3$) равна нулю.

Задача эта была впервые поставлена и разрѣшена Эйлеромъ. (Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, T. XVII, p. 109. 1772 г.). Затѣмъ она же была рѣшена Лѣтниковымъ въ его диссертациѣ (Ueber die Bedingungen der Integralitat einiger Differentialgleichungen, Dresden, 1867. S. 18), Elliot'омъ въ его статьѣ, помѣщенной въ седьмомъ томѣ третьей серіи Annales de l'Ecole normale (1890 г.), и, наконецъ, съ иной точки зренія, разобрана докладчикомъ въ его книгѣ («Изслѣдованія о дифференціальномъ уравненіи $ydy - ydx = Rdx$ »), стр. 43 — 48.

Такимъ образомъ рѣшеніе, данное акад. Сониномъ, есть пятое по времени и результатъ можетъ быть представленъ въ болѣе про-

стой и болѣе общей формѣ, именно у акад. Сонина для функции $R(x)$ получилось такое выраженіе

$$R(x) = -\frac{2}{3}x + 6 \frac{\mu^2+3}{(\mu+3)^2} - \frac{12\mu(\mu-3)}{(\mu+3)^2} x^{-\frac{1}{2}} \quad (\mu \text{ какое угодно постоянное}).$$

вмѣсто слѣдующаго

$$R(x) = -\frac{2}{3}(x+h) + h_0 + \frac{h'}{\sqrt{x+h}}$$

данного напр. въ цитированной книгѣ («Изслѣдованія», стр. 46).

- 2) Другой случай, встрѣчающійся у акад. Сонина, именно

$$R = \frac{3}{4}(x - x^{-\frac{5}{3}})$$

тоже извѣстенъ со временъ Эйлера и кромѣ того разобранъ въ цитированной книгѣ («Изслѣдованія» стр. 189 и слѣд.).

- 3) Въ началѣ § 10 акад. Сонинъ говоритъ: «мы не рѣшаемся предпринять изслѣдованіе общаго случая, когда m_1 и m_2 (въ ур. (2) остаются произвольными, въ виду чрезмѣрной сложности вычислений».

Вопросъ этотъ въ самомъ общемъ видѣ былъ рѣшенъ докладчикомъ, рѣшеніе доложено Обществу въ засѣданіи 21 апрѣля 1894 г. и напечатано въ протоколахъ Общества.

- 4) Въ § IX акад. Сонинъ оставляетъ безъ разсмотрѣнія случай, когда при $x = \infty$ частное $\frac{R}{y}$ равно бесконечности.

Докладчикъ показалъ, что въ этомъ случаѣ на вопросъ, изучаемый акад. Сониномъ, прямо получается отрицательный отвѣтъ изъ теоремъ, данныхъ въ книгѣ докладчика. («Изслѣдованія», стр. 141, 147, 149).

- 5) Въ концѣ § XIV акад. Сонинъ получаетъ такую теорему:

Равенство $\sum \frac{m_i}{\alpha_i} = 0$ возможно не иначе, какъ подъ условіемъ $\lambda = \frac{2}{r}$ (r нѣцѣлое число).

Т. е. если всѣ каноническія рѣшенія начинаются съ одного и того же члена при разложеніи въ тѣ формы

$$\alpha_i = hx + q_1x^{1-\lambda} + q_2x^{1-2\lambda} + \dots$$

то число λ должно быть вида $\frac{2}{r}$.

Межъ тѣмъ дифференціальное уравненіе

$$ydy - ydx = Rdx \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{гдѣ } R = -\frac{5}{36}x + x^{-\frac{7}{5}},$$

имѣеть шесть каноническихъ рѣшеній, которые суть попарно корни слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{5}{3}x + A_i x^{1/5}\right)x + \frac{25}{36}x^2 - \frac{5}{6}A_i x^{5/6} + \frac{1}{2}A_i^2 x^{2/5} + \\ + 5x^{-2/5} = 0 \\ A_i^3 = -\frac{100}{3}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Для ур. (3) всѣ условія теоремы акад. Сонина выполнены, а между тѣмъ $\lambda = \frac{4}{5}$.

Это произошло оттого, что въ разсужденія акад. Сонина вкраилась ошибка, и теорема его не имѣетъ мѣста.

Ошибка состоитъ въ томъ, что системы уравненій, которые у акад. Сонина помѣчены цифрами (18) и (19) (§ XIV) далеко не вполнѣ замѣняютъ одна другую.

Авторъ упустилъ изъ виду, что среди чиселъ, которыхъ онъ обозначаетъ буквами b_k (стр. 21 его статьи впизу), могутъ оказаться равныя нулю и тогда системы (19), вовсе не существуетъ.

Къ сожалѣнію, та же самая ошибка проходитъ черезъ всѣ послѣднія 10 страницъ статьи Н. Я. Сонина, почему результаты, полученные имъ, должны быть пересмотрѣны.

6) Въ § IV акад. Сонинъ показываетъ, что если всѣ каноническія постоянныя раціональны, то сумму ихъ можно всегда считать равную нулю. Докладчикъ обратилъ вниманіе Общества на то, что теорема эта впервые дана докладчикомъ въ его книжѣ («Изслѣдованія», стр. 157).

2) Н. Я. Сонинъ. «Объ остаточномъ членѣ въ формулѣ Лагранжа для интерполированія».

Полагаемъ:

$$\Omega(z) = \left[\Psi(z) - \sum_1^n \frac{\Psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(z)}{z-x_k} \right] \cdot \left[f(x) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right]$$

$$= \left[\Psi(z) - \sum_1^n \frac{\Psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(z)}{z-x_k} \right] \cdot \left[f(z) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(z)}{z-x_k} \right].$$

Исчезаетъ при $z = x_1, x_2, \dots, x_n$. Помѣемъ корень ξ между наиб. и найм. корнемъ $\Omega(z)$, такъ что

$$\Psi''(\xi) \left[f(x) - \sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right] = f''(\xi) \left[\Psi(x) - \sum \frac{\Psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right].$$

$\Psi(x)$ — полиномъ $(n-1)$ -ой степ. дасть форм. Лагранжа.

$\Psi(x)$ — полиномъ n -ой ст. $= \varphi(x) + \text{полип. } (n-1)$ -ой степ.

$$f(x) = \sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} + \frac{f''(\xi)}{n!} \varphi(x).$$

$$\Psi(x) = xf(x).$$

$$\begin{aligned} D_{\xi}^n f(\xi) \cdot \left[f(x) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right] = \\ = f''(\xi) \left[xf(x) - \sum_1^n \frac{x_k f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right]. \end{aligned}$$

Во второй части $x_k = x - (x-x_k)$, такъ что

$$= f''(\xi) \cdot \left[f(x) - \sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} + \sum \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \varphi(x) \right]$$

откуда

$$D_{\xi}^n (\xi - x) f(\xi) \left[f(x) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right] = \varphi(x) f''(\xi) \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Остатокъ будетъ точный, если

$$D_{\xi}^n f(\xi) = af^n \text{ или } D_{\xi}^n (\xi - a) f(\xi) = 0, \text{ т. е.}$$

$$f(\xi) = \frac{\text{полиному } (n-1)\text{-ой степ.}}{\xi - a}$$

$$\Psi(x) = \sigma(x) \cdot f(x)$$

$$\begin{aligned} D_{\xi}^n \sigma(\xi) f(\xi) \left[f(x) - \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right] = \\ = f''(\xi) \left[\sigma(x) f(x) - \sum_1^n \frac{\sigma(x_k) f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} \right]; \end{aligned}$$

но

$$\sigma(x_k) = \sigma(x) - [\sigma(x) - \sigma(x_k)]$$

$$\begin{aligned} D_{\xi}^n [\sigma(\xi) - \sigma(x)] f(x) &= \sum_1^n \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} = \\ &= f^n(\xi) \sum_1^n \frac{f(x_k)}{x'(x_k)} \cdot \frac{\sigma(x) - \sigma(x_k)}{x-x_k} \cdot \varphi(x). \end{aligned}$$

Остатокъ точекъ, если

$$D_{\xi}^n \sigma(\xi) f(\xi) = a f^n(\xi) \text{ или}$$

$$D_{\xi}^n [\sigma(\xi) - a] f(\xi) = 0,$$

т. е. $f(\xi) = \frac{\text{полипому } (n-1)\text{-ой степ.}}{\sigma(\xi) - a}$

Въ этомъ случаѣ

$$f(x) = \sum_1^n \frac{f(x_k)}{x'(x_k)} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} + \frac{\varphi(x)}{a-\sigma(x)} \sum_1^n \frac{f(x_k)}{x'(x_k)} \frac{\sigma(x)-\sigma(x_k)}{x-x_k}.$$

Засѣданіе 25 сентября 1895 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Предложенъ въ члены Общества Николай Семеновичъ Михельсонъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

А. Д. Путята предложилъ привѣтствовать какимъ-нибудь образомъ Французскій Институтъ по случаю столѣтней годовщины его основанія.

Постановлено отправить поздравительную телеграмму.

Въ библіотеку Общества доставлена книга Н. А. Забудского «Внѣшняя балистика».

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. А. Граве. а) «Объ одной эллиптической функции».

При изученіи Чебышевской проекціи *), дающей изображеніе съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ внутренней части четырехугольника, образованнаго двумя меридіапами и двумя па-

раллелями на шарѣ, я встрѣтился съ необходимостию разсмотрѣть свойства слѣдующей эллиптической функции

$$\omega(x) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}.$$

Свойства этой функции аналогичны со свойствами тригонометрической функции $\operatorname{tg} x$.

Обозначая черезъ $4K$, $2K'$, періоды функции $\operatorname{sn} x$, мы получаемъ слѣдующія соотношенія:

$$1) \omega(x) = \frac{\operatorname{sn} 2x}{1 + \operatorname{cn} 2x} = \frac{\Theta_1(0)\Pi(2x)}{\Pi_1(0)\Theta(2x) + \Theta(0)\Pi_1(2x)} \quad ?)$$

$$2) \omega(x+K) = -\frac{1}{\omega(x)}$$

$$3) \omega(x+K'i) = \frac{1}{\omega(x)}$$

$$4) \omega\left(x+\frac{K}{1}\right) = \frac{d\operatorname{sn} 2x + k' s\operatorname{sn} 2x}{c\operatorname{sn} 2x}$$

$$5) \omega\left(x+\frac{K'i}{2}\right) = k s\operatorname{sn} 2x + i d\operatorname{sn} 2x$$

Послѣднія два соотношенія показываютъ, что модуль функции $\omega(x+iy)$ равенъ единицѣ для всѣхъ точекъ прямыхъ

$$x = \frac{K}{2} + nK, \quad y = \left(\frac{K'}{2} + mK'\right),$$

гдѣ n и m произвольныя цѣлые числа.

и б) «О задачахъ предложенныхъ въ журналѣ Intérmaidière de Mathématiciens».

2) Ю. В. Сохоцкій. «О группахъ».

Засѣданіе 19 октября 1895 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Избранъ въ члены Общества Н. С. Михельсонъ.

Предлагается въ члены Общества Гурій Васильевичъ Колосовъ (предлагаютъ Д. К. Бобылевъ и И. В. Мещерскій).

*) Eisenlohr. Ueber die Flächenabbildung 1870. Journal von Crelle t. LXXII.

Въ библіотеку Общества доставлены извѣстія Физико-математического Общества при Императорскомъ Казапскомъ университѣтѣ, 2-я серія, Т. IV, № 4 и Т. V № 2.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Н. Я. Сонинъ. «О дифференціальномъ уравненіи $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$ ».

2) К. Штёрмеръ (изъ Христіаніи). «О рѣшеніи въ пѣлыхъ числахъ неопределеннаго уравненія:

$$\frac{\pi}{4} = m \operatorname{arctg} \frac{1}{p} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{q}.$$

(сообщено Д. А. Граве).

Засѣданіе 13 ноября 1895 года.

По предложенію Д. К. Бобылева единогласно избранъ въ члены Общества и предсѣдателемъ засѣданія Александръ Васильевичъ Васильевъ.

Было прочитано письмо отъ Французскаго Института, въ которомъ Институтъ благодарить С.-Петербургскное Математическое Общество за привѣтствіе, посланное Обществомъ по поводу столѣтней годовщины основанія Института.

Въ библіотеку Общества доставлена книга «Извѣстія С.-Петербургскаго Практическаго Технологическаго Института».

Въ члены Общества избранъ Гурій Васильевичъ Колосовъ.

Было сдѣлано сообщеніе:

Б. М. Коаловичъ. «О дифференціальныхъ уравненіяхъ съ частными производными 2-го порядка».

Засѣданіе 16 декабря 1895 года.

По предложенію Ю. В. Сохоцкаго единогласно избранъ въ члены Общества и предсѣдателемъ засѣданія Иванъ Ивановичъ Рахманиновъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Ю. В. Сохоцкій. «О группахъ».

2) П. А. Шиффъ. «О генерализованномъ исчислениі Ольтрамара».

Засѣданіе 22 января 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохоцкій.

Предложеніе въ члены Общества Станиславъ Клементьевичъ Каминскій (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Н. А. Забудскій).

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Б. М. Коаловичъ. «Объ уравненіи $ydy - ydx = Rdx$ ».

І. Если дифференціальное уравненіе

$$ydy - ydx = Rdx \quad (1)$$

допускаетъ каноническія рѣшенія, то всѣ эти рѣшенія разлагаются въ ряды вида

$$y = hx + q_1 x^{1-\lambda} + q_2 x^{1-2\lambda} + \dots \quad \lambda > 0$$

причёмъ λ опредѣляется изъ того условія, что въ функции R не должно содержаться члена съ $x^{1-\lambda}$, такъ что q_1 или нуль или произвольное постоянное.

ІІ. Если функция R имѣеть форму

$$R = ax + bx^{1-2\lambda} + \dots + lx^{1-\lambda}$$

то наимизшій показатель x 'а ($1-\lambda$) численно не больше $\frac{5}{3}$ и если онъ численно больше единицы, то онъ имѣеть такую форму

$$-\frac{2\tau+s}{2\tau+1}, \quad \tau \text{--- цѣлое положительное число.}$$

ІІІ. Если число a таково, что корни уравненія

$$z^2 - z = a \quad (2)$$

мнимые, или вещественные, но ирраціональныя, или же раціональныя одинаковыхъ знаковъ, то вопросъ о нахожденіи каноническихъ рѣшеній вполнѣ разрѣшенъ въ моей диссертациіи. Если

же корни уравнения (2) рациональныя одинаковыхъ знаковъ, то можно доказать слѣдующее:

Всѣ уравненія типа (1), для которыхъ корни ур. (2) рациональныя разныхъ знаковъ, должны имѣть слѣдующую форму

$$ydy - ydx = \left(\frac{\xi}{(\xi-1)^2} x + Ax - \frac{\xi+2}{\xi} \right) dx \quad (3)$$

ξ —цѣлое число, A —постоянное, какое угодно,

если только каноническія рѣшенія существуютъ.

Но для уравненій типа (3) Эйлеромъ указанъ интегрирующій множитель (*Institutiones Calculi Integralis*, Т. I, р. 323—324).

Такимъ образомъ единственный случай, въ которомъ моя метода не давала окончательного отвѣта, вполнѣ разобранъ Эйлеромъ и не представляетъ интереса съ точки зрењія теоріи каноническихъ рѣшеній.

ЛЧ) Б. М. Којловичъ. «О дифференціальныхъ уравненіяхъ съ частными производными 2-го порядка».

3) В. Ф. Каганъ. «О вѣкоторыхъ неприводимыхъ полиномахъ».

Въ Вышней Алгебрѣ пользуется извѣстностю слѣдующее предложеніе, принадлежащее Шенеману:

Полиномъ вида:

$$p(\pm 1 + a_1x + a_2x^n + \dots a_{n-1}x^{n-1}) + x^n \quad (1)$$

неприводимъ, если p есть число цѣлое и при томъ простое, а коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_{n-1} — какія угодно цѣлые числа. Слѣдующій ходъ разсужденій даетъ возможность значительно обобщить это предложеніе.

Основная теорема:

Положимъ, что въ полиномѣ

$$A_0 + A_1x + A_2x^n + \dots A_nx_n \quad (2)$$

съ цѣлыми коэффициентами A_0 дѣлится на простое число p , но не дѣлится на квадратъ этого числа; допустимъ сверхъ того, что коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_{k-1} также дѣлятся на p , по A_k не дѣлится на это число. Въ такомъ случаѣ полиномъ (2) имѣть не-

приводимый множитель, степень которого не ниже k ; первые k коэффициентовъ этого множителя дѣлятся на p .

Слѣдствія.

- a) Полиномъ вида (1) неприводимъ. Теорема Шенемана.
- b) Если полиномъ имѣть видъ:

$$p(\pm 1 + c_1x + c_2x^n + c_{n-2}x^{n-2}) + c_{n-1}x^{n-1} + x^n \quad (3)$$

гдѣ c_{n-1} не дѣлится на p (p простое число), то полиномъ либо неприводимъ, либо имѣть неприводимый множитель степени $n-1$. Дополнительный множитель въ этомъ случаѣ равенъ $(x \pm l)$ и потому:

$$c_{n-1} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

Отсюда:

Если въ полиномѣ вида (3) c_{n-1} не сравнимо съ $\pm l$ по модулю p , то онъ неприводимъ. Это предложеніе заключаетъ въ себѣ теорему Шенемана, какъ частный случай.

- c) Если полиномъ вида

$$p(\pm 1 + c_1x + c_2x^n + \dots c^{n-3}) + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + x^n \quad (4),$$

гдѣ c_{n-2} не дѣлится на p , освобожденъ отъ корней равныхъ $\pm l$, то онъ либо неприводимъ, либо имѣть неприводимый множитель степени $n-2$.

Въ послѣднемъ случаѣ

$$c_{n-2} \equiv \pm l \pmod{p}.$$

Поэтому:

Если полиномъ вида (4) не имѣетъ корней равныхъ $\pm l$ и c_{n-2} не сравнимо съ $\pm l$ по модулю p , то онъ неприводимъ.

Это предложеніе заключаетъ въ себѣ предыдущее, какъ частный случай.

Замѣтимъ, что вопросъ о томъ, разлагается ли полиномъ на множители, если сравненіе (5) имѣть мѣсто, рѣшается на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если полиномъ (4) (обозначимъ его черезъ $f(x)$) допускаетъ разложеніе, то одинъ изъ множителей будетъ квадратнымъ и притомъ вида:

$$x^n + Bx \pm 1$$

Во-первыхъ, легко обнаружить, что

$$B \equiv c_{n-1} \pmod{p}, \quad (6).$$

Во-вторыхъ

$$f(+1) = k(1 + B \pm 1), f(-1) = l(1 - B \pm 1) \quad (7)$$

гдѣ k и l цѣлые числа. Поэтому

$$2 + |f(+1)| \leq (B) \leq |f(-1)| + 2 \quad (8).$$

Соотношения (6), (7) и (8) приводятъ рѣшеніе вопроса къ восьмь небольшому числу испытаний.

d) Теорема (a) справедлива при всякомъ p , не имѣющемъ кратныхъ множителей. Это непосредственно вытекаетъ изъ основной теоремы.

e) Теорема (b) справедлива при всякомъ p , не имѣющемъ кратныхъ множителей, если $n > 2$.

Въ доказательствѣ предложения (b) то обстоятельство, что p есть простое число, играетъ только слѣдующую роль: оно даетъ право заключать, что при разложеніи многочлена на множители въ одномъ изъ составляющихъ полиномовъ свободный членъ равенъ $\pm p$, а въ другомъ ± 1 . Допустимъ, что при p составномъ, но не имѣющемъ кратныхъ множителей, полиномъ разбивается на два множителя, свободные члены которыхъ $\pm p_1, \pm p_2$ отличны отъ ± 1 ; тогда по основной теоремѣ каждому изъ составляющихъ полиномовъ соответствуетъ неприводимый множитель, степень которого не ниже $n-1$.

Поэтому

$$2(n-1) \leq n, \quad n \leq 2$$

f) Теорема (c) справедлива при всякомъ p , не имѣющемъ кратныхъ множителей, если $n > 4$.

Доказательство то же.

Засѣданіе 9 февраля 1896 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Избранъ въ члены Общества Станиславъ Клементьевичъ Каминскій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Н. Я. Сонинъ сообщилъ Собранию нижеслѣдующее. Въ виду наступающей въ мартѣ сего года 51 годовщины дня рождения ректора Стокгольмскаго университета и основателя журнала «Acta Mathematica», нашего сочленена г. Миттага Леффлера возникла среди самыхъ выдающихся математиковъ нашего времени мысль выразить сочувствіе основателю вышесказаннаго, замѣчательного въ научномъ отношеніи, журнала. Это сочувствіе инициаторы этого дѣла желаютъ выразить подношеніемъ г. Миттагу Леффлеру адреса съ подписями возможно большаго числа математиковъ, и его портрета, написаннаго маслянными красками. Съ этой цѣлью инициаторы обратились съ циркулярнымъ письмомъ ко многимъ членамъ нашего Общества съ просьбой отвѣтить, желаетъ ли кто нибудь изъ нихъ: 1) подписать только подъ адрессъ или 2) подписать подъ адрессъ и внести некоторую сумму, по желанію, на изготавленіе сказаннаго портрета.

Н. Я. Сонинъ, изложивъ истинные мотивы этого чествованія, заявилъ, что согласие членовъ на то, чтобы ихъ подписи были помѣщены на адрессъ, а также и деньги на портретъ, принимаются Н. Я. Сонинымъ (Васильев. Островъ, 6-я линія, 29) и А. А. Марковымъ (Васильев. Островъ, 7-я линія, домъ академіи наукъ); при чемъ эти заявленія гг. членовъ Общества должны быть направлены къ nimъ не позже 14-го сего февраля.

2) К. Стѣрмеръ. «О рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ неопределеннаго уравненія:

$$m \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$$

(доклад. Д. А. Граве).

Засѣданіе 14 марта 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

Н. Я. Сонинъ доложилъ Собранию, что на портретъ г. Миттагъ-Леффлеру собрано 86 рублей, которые были размѣнены на франки и пересланы въ Парижъ.

Былъ возбужденъ вопросъ относительно чествованія памяти Декарта по случаю 300-лѣтія со дня его рожденія (31 марта). Рѣшено посвятить часть слѣдующаго засѣданія обзору математическихъ работъ Декарта, при чемъ въ этомъ обзорѣ согласились привѣтствовать участіе С. Е. Савичъ и Д. Ф. Селивановъ.

Былъ возбужденъ вопросъ относительно фиксированія даты засѣданій Общества. Большинствомъ голосовъ рѣшено назначать засѣданія по средамъ послѣ 15 числа мѣсяца, или 15-го, если это число попадаетъ на среду.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Г. В. Колосовъ. «Объ одномъ случаѣ вращенія тяжелаго твердаго тѣла».

2) И. В. Мещерскій. «Замѣтка объ аналитическихъ силахъ».

Въ замѣткѣ излагается: во 1-хъ послѣдовательное развитіе того пріема для составленія интегрирующихся въ квадратурахъ системъ каноническихъ уравненій, который основанъ на примѣненіи функций отъ комплексныхъ количествъ; во 2-хъ связь этого пріема съ динамикой.

1. Первая статья *B. Г. Имшенецкаго*, посвященная разсматриваемому вопросу,—«Интегрированіе одной системы уравненій», появилась въ 1876 г. въ VIII томѣ Матем. Сборника; пріемъ, указанный въ этой статьѣ для случая системы изъ четырехъ уравненій, нѣсколько обобщенъ уже въ слѣдующей статьѣ *Имшенецкаго*, напечатанной въ томъ же 1876 г. въ «Bulletin» Darboux t. XI, и затѣмъ распространенъ на случай $4n$ уравненій въ статьѣ *Имшенецкаго*, которая появилась въ 1878 г. въ «Memoires de la Société des Sciences de Li  ge».

Дальнѣйшее развитіе пріема Имшенецкаго получилъ въ двухъ статьяхъ проф. *П. А. Некрасова*: «О совмѣстныхъ каноническихъ

диф. уравненіяхъ...» и «Къ статьѣ о совмѣстныхъ кан. диф. ур....»; статьи эти будутъ помѣщены въ XVIII томѣ Мат. Сб., но оттиски ихъ уже получены.

2) Въ 1885 г. въ «Journal de l'Ec. Polyt.» появилась статья *M. Lecornu*: «Sur les forces analytiques»; здѣсь въ первыхъ пяти теоремахъ излагаются свойства «аналитическихъ силъ», т. е. силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости, проекціи которыхъ X и Y удовлетворяютъ условію:

$$X + Y\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1});$$

а въ остальныхъ тринадцати теоремахъ — свойства движенія точки при дѣйствіи аналитическихъ силъ.

Легко показать, что диффер. уравненія точки при дѣйствіи аналитической силы представляютъ частный случай той системы уравненій, которой занимается *Имшенецкий* въ первой изъ упомянутыхъ статей 1876 года въ VIII томѣ Мат. Сб.; — они получаются изъ этой системы, если принять двѣ изъ переменныхъ: x и y за координаты точки, а двѣ другія: q и r за проекціи я скорости и положить $\varphi(r) = r$.

Аналитическія силы, за исключеніемъ единственнаго случая,

$$X = a + kx, \quad Y = b + ky,$$

гдѣ a , b , k — постоянныя, не имѣющіе потенціала, послѣ статьи *M. Lecornu* онѣ встрѣчаются въ одномъ изъ упражненій сборника задачъ *de Saint-Germain*.

Пріемъ Имшенецкаго, если двѣ изъ его переменныхъ принимать за координаты точки, а двѣ другія за проекціи я скорости, можетъ привести только къ случаю силъ аналитическихъ; но въ томъ обобщенномъ видѣ, въ какомъ этотъ пріемъ представленъ проф. *Некрасовымъ*, онъ можетъ дать диффер. уравненія движенія при дѣйствіи и иныхъ силъ, имѣющихъ потенціалъ.

Важное значеніе разсматриваемаго пріема въ динамикѣ сдѣлается несомнѣннымъ только тогда, когда онъ приведеть къ уравненіямъ, до сихъ поръ не проинтегрированнымъ, если при томъ эти уравненія встрѣчаются при решеніи задачъ о движеніи при

дѣйствіи такихъ силъ, которыя допускаются, какъ причины движений, происходящихъ въ природѣ.

Засѣданіе 17 марта 1896 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Предлагаетъ въ члены Общества Василій Васильевичъ Серафимовъ (предлагаютъ О. А. Бакундъ и И. В. Менгерскій).

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) С. Е. Савичъ. «О работахъ Декарта по геометріи».
- 2) Д. Ф. Селивановъ. «О работахъ Декарта по анализу».
- 3) Ю. В. Сохощкій. «Объ эллиптическихъ функцияхъ».
- 4) А. И. Богуславскій. «Понятіе о количествѣ, какъ основаніе рациональной механики» (введеніе къ курсу алгебры плоскости и пространства).

Засѣданіе 18 сентября 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Въ члены Общества избранъ Василій Васильевичъ Серафимовъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) Д. Ф. Селивановъ. «О числовой функции $\varphi(n)$, выражающей число чиселъ простыхъ съ n и не превосходящихъ n ».

Если числа

$$1, d, d', d'', \dots, n$$

суть всѣ дѣлители числа n , то, какъ показалъ Гауссъ, имѣеть мѣсто соотношеніе

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots + \varphi(n) = n,$$

которое для краткости обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$\Sigma \varphi(d) = n \quad \dots \quad (1).$$

Покажемъ, что отсюда можно вывести выраженіе для функции $\varphi(n)$, не пользуясь другими свойствами этой функции и не обращаясь къ символическимъ приемамъ.

Предположимъ, что разложеніе числа n на простые множители имѣеть видъ

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_\mu^{a_\mu}.$$

Дѣлители числа n раздѣлимъ на два класса: къ первому отнесемъ тѣ, которые въ разложеніи на простые множители содержать $p_1^{a_1}$; всѣ же остальные дѣлители причислимъ ко второму классу. Дѣлители первого класса имѣютъ видъ $p_1^{a_1} \cdot d_1$, где d_1 — дѣлитель числа

$$n_1 = p_2^{a_2} \dots p_\mu^{a_\mu};$$

дѣлители же втораго класса обозначимъ черезъ d' . На этомъ основаніи (1) принимаетъ видъ

$$\Sigma \varphi(p_1^{a_1} \cdot d_1) + \Sigma \varphi(d') = n.$$

Такъ какъ d' есть дѣлитель числа

$$p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_\mu^{a_\mu},$$

то по теоремѣ Гаусса

$$\Sigma \varphi(d') = \frac{n}{p_1}$$

и слѣдовательно

$$\Sigma \varphi(p_1^{a_1} d_1) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \quad \dots \quad (2)$$

Числа d_1 , дѣлители числа n_1 , можно снова разбить на два класса. Повторивъ тѣ же разсужденія, получимъ

$$\Sigma \varphi(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot d_2) + \Sigma \varphi(p_1^{a_1} \cdot d_1') = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right).$$

Здѣсь d_2 есть дѣлитель числа $p_3^{a_3} \cdot p_4^{a_4} \dots p_\mu^{a_\mu}$,

а $d_1' \rightarrow \dots \rightarrow p_2^{a_2-1} \cdot p_3^{a_3} \dots p_\mu^{a_\mu}$.

Такъ какъ

$$n = p_1^{a_1} \cdot n_1,$$

то на основаніи формулы (2)

$$\Sigma \varphi(p_1^{a_1} \cdot d_1 \cdot d_1') = \frac{n}{p_2} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$$

и слѣдов.

$$\Sigma \varphi(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot d_2) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \quad (3)$$

Разсуждая такимъ же образомъ далѣе, наконецъ получимъ

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_\mu}\right).$$

При помоши изложенного метода можно найти функцию $f(n)$, удовлетворяющую соотношению

$$\Sigma f(d) = F(n),$$

гдѣ $F(n)$ — данная функция.

2) Ю. В. Сохоцкій. «Объ эллиптическихъ функцияхъ».

Засѣданіе 16 октября 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія книги:

- 1) М. М. Филипповъ. «Элементарная теорія вѣроятностей».
- 2) Двадцатипятилѣтіе Московскаго Математическаго Общества (1867—1892).
- 3) Математический сборникъ, издаваемый Московскими Математическими Обществомъ Т. XVIII вып. 4.
- 4) D. A. Gravé. «Sur le problѣme de Dirichlet».

Было прочитано возваніе отъ Высочайше утвержденного Комитета для завѣдыванія сборомъ пожертвованій на сооруженіе памятника французскому ученому Лавуазье.

Н. Я. Сонинъ сдѣлалъ сообщеніе: «Рѣшеніе разностныхъ уравненій».

Засѣданіе 20 ноября 1896 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохоцкій.

Секретарь прочелъ краткій отчетъ о состояніи Общества въ 1895—1896 г.

Были произведены выборы членовъ Совѣта Общества на новое четырехлѣтіе, причемъ избраны:

О. А. Бакунинъ, Д. К. Бобылевъ, Д. А. Граве, И. В. Мещерскій, Е. А. Поссе, И. Л. Штацицкій, Д. А. Селивановъ, Ю. В. Сохоцкій, В. І. Шиффъ и П. А. Шиффъ.

Въ послѣдовавшемъ затѣмъ засѣданіи Совѣта избраны: Предсѣдателемъ Совѣта — Ю. В. Сохоцкій и Секретаремъ Общества П. А. Шиффъ. Предложенъ въ члены Общества Феофиль Эдуардовичъ Фризендорфъ (предлагаютъ Д. К. Бобылевъ и И. В. Мещерскій).

Н. Я. Сонинъ сдѣлалъ сообщеніе: 1) «О рѣшенії уравненія въ конечныхъ разностяхъ», 2) «Замѣтка о двухъ параграфахъ курса анализа Жордана».

Засѣданіе 18 декабря 1896 года.

По предложению Ю. В. Сохоцкаго предсѣдателемъ собранія и членомъ Общества избранъ Матвѣй Александровичъ Тихомандрицкій. Въ члены Общества избранъ Феофиль Эдуардовичъ Фризендорфъ.

Предлагается въ члены Общества Василій Федоровичъ Гартцъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: «Объ уравненіи $x = a^x$ ».

По поводу этого сообщенія В. Ф. Гартцъ показалъ выводъ рядовъ для вычисленія $x^* = y$ и $a^x = y$.

Въ библіотеку Общества поступила книга В. В. Витковскаго «Миръ планетъ».

Засѣданіе 15 января 1897 года.

Предсѣдательствовалъ В. В. Преображенскій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) Ю. В. Сохоцкій. «Объ эллиптическихъ функцияхъ».
- 2) В. В. Преображенскій. «О разложеніи раціональной дроби».

Засѣданіе 19 февраля 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Ю. В. Сохопскій.

Предсѣдатель напомнилъ собранію о потерѣ, которую понесла наука и Общество въ лицѣ скончавшагося, 18 января, нашего молодого талантливаго сочлены В. А. Маркова и предложилъ почтить память усопшаго вставаніемъ съ мѣстъ. Собраніе съ глубокой грустью почтило память такъ рано угасшаго В. А. Маркова вставаніемъ.

Точно также, по предложенію Предсѣдателя, Собраніе почтило вставаніемъ съ мѣстъ память скончавшагося знаменитаго Берлинскаго математика Вейерштрасса.

Предлагаются въ члены Общества:

1) Веніаминъ Федоровичъ Каганъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. А. Граве). 2) Александръ Александровичъ Ивановъ (предлагаютъ П. А. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

3) Валентина Петровна Теплякова (предлагаютъ В. И. Шиффъ и Д. Ф. Селивановъ).

4) Моисей Романовичъ Креверъ (предлагаютъ Д. А. Граве и Д. Ф. Селивановъ).

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. Ф. Селивановъ. «О теоріи аналитическихъ функций Вейерштрасса».

2) Ф. Э. Фризендорфъ. «О варіаціонномъ исчислениі по Вейерштрассу».

3) А. Н. Крыловъ. «О способѣ Греффе для численнаго решенія уравненій».

4) Н. Я. Соинъ. «Объ одной системѣ линейныхъ уравненій».

Засѣданіе 19 марта 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

Избраны въ члены Общества:

1) Веніаминъ Федоровичъ Каганъ,

2) Александръ Александровичъ Ивановъ,

3) Валентина Петровна Теплякова,

4) Моисей Романовичъ Креверъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) Д. А. Граве. «Объ интегрированіи уравненій гидродинамики въ случаѣ установившагося движенія».

2) Г. В. Колсовъ. «О движеніи волчка по гладкой плоскости».

Засѣданіе 23 апрѣля 1887 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Пташицкій.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) О. А. Бакундъ. «Интегрированіе дифференціального уравненія для опредѣленія долготы въ движеніи одной группы малыхъ планетъ».

2) Д. А. Граве. «О работахъ Карла Стормера:

а) Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія:

$$\operatorname{marctg} \frac{1}{x} + \operatorname{narctg} \frac{1}{y} + \operatorname{parctg} \frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}$$

и б) Нѣкоторыя теоремы, касающіяся уравненія Пелля:

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1$$

3) Ю. В. Сохопскій. «Объ эллиптическихъ функцияхъ».

Засѣданіе 24 сентября 1897 года.

По предложенію Д. К. Бобылева единогласно избраны въ члены Общества Владіміръ Николаевичъ Танненбергъ (Tannenberg, проф. Тулусского Университета) и Андрей Александровичъ Лярондъ (Laronde, ancien élève de l'Ecole Polytechnique), и предсѣдателемъ собранія В. Н. Танненбергъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

1) В. Н. Танненбергомъ. «Sur la recherche des intégrales premières des équations de 1-er ordre».

- 2) Д. А. Граве. «Объ однодной теоремѣ теоріи функцій двухъ вещественныхъ переменныхъ».

Засѣданіе 15 октября 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Было сдѣлано сообщеніе:

- 1) Н. Я. Сонинъ. «О рядѣ Ивана Бернулли».

Засѣданіе 19 ноября 1897 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Въ библіотеку Общества доставлены слѣдующія сочиненія:

- 1) Математический сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ Т. XIX вып. 4.

- 2) Извѣстія Технологического института Императора Николая I 1896 г. Т. XI.

- 3) Е. von Fedorow. Versuch einer Theorie der Thermodynamik der Krystalle.

- 4) Е. von Fedorow. Nachträgliche Studien über Symmetrielehre.

- 5) М. А. Тихомандрицкій. Нѣсколько словъ объ эваристѣ Галуа.

- 6) Синцовъ. Къ вопросу о рациональныхъ интегралахъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Казань. 1897 г.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Ю. В. Сохоцкій. «Объ уравненіяхъ 5-й степени».

- 2) Н. Я. Сонинъ. «О неравенствахъ П. Л. Чебышева».

Засѣданіе 17 декабря 1897 года.

Предсѣдательствовалъ И. В. Мещерскій.

Предсѣдатель сообщилъ собранію о потерѣ, которую понесла наука и наше Общество въ лицѣ скончавшагося его члена Ивана

Ивановича Рахманинова и предложилъ почтить память скончавшагося вставаніемъ. Собрание исполнило предложеніе Предсѣдателя.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія:

- 1) П. А. Шиффъ. «Объ уравненіяхъ гидродинамики».
- 2) М. Р. Креверъ. «Къ общей теоріи алгебраическихъ уравненій».

Засѣданіе 21 января 1898 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Шташицкій.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Н. Б. Делоне. «О поверхности имѣющихъ одну только сторону и объ особенныхъ точкахъ плоскихъ кривыхъ». (Сообщилъ И. В. Мещерскій).

- 2) Ю. В. Сохоцкій. «Объ уравненіяхъ 4-й степени».

Засѣданіе 18 февраля 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Б. М. Кољловичъ. «Объ уравненіи: $y \frac{dy}{dx} - y = R(x)$ ».

- 2) Г. В. Колосовъ. «О шарѣ съ гироскопомъ Гесса внутри, катящемся по гладкой плоскости безъ скольженія».

Дифференціальная уравненія движенія твердаго тѣла:

$$\left. \begin{array}{l} Mx'' = V_x, My'' = V_y, = Mz'' = V_z \\ Ap' = (B-C)qr + \Omega_\xi \\ Bq' = (C-A)rq + \Omega_\eta \\ Cr' = (A-B)pq + \Omega_\zeta \end{array} \right\} A > B > C \quad (1)$$

(гдѣ x, y, z координаты центра инерціи C тѣла по отношенію къ неподвижнымъ осямъ ox, oy, oz , p, q, r проекціи угловой скорости па главныя оси инерціи Ξ, Y, Z въ C , $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ про-

екції на послѣднія оси главнаго момента силъ и реакцій связей V_x, V_y, V_z проекції главнаго вектора этихъ силъ и реакцій на xo, yo, oz допускаютъ въ предположеніяхъ, что главный моментъ силъ и реакцій связей приложеній къ тѣлу вокругъ перпендикуляра въ C къ круговому съченію гираціоннаго эллипсоида построеннаго въ этой точкѣ $= 0$ частное рѣшеніе (2) $A\alpha p + C\gamma r = 0$, гдѣ $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ и $A\alpha^2(B-C) = C\gamma^2(A-B)$.

Поворотивъ систему осей E, Y, Z вокругъ оси Y такъ, чтобы новая ось Z (Z) совпадла съ вышеупомянутымъ перпендикуляромъ и обозначивъ проекціи угловой скорости на новыя оси черезъ P, Q, R , а проекціи глав. мом. силъ и реакцій черезъ $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ получимъ вмѣсто 1-хъ двухъ уравненій системы (1) систему

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= RQ + \frac{\Omega_x}{B} \\ \frac{dQ}{dt} &= -RP + \frac{\Omega_y}{B},\end{aligned}$$

а вмѣсто 3-го уравненія системы (1) примемъ уравненіе (2), которое послѣ нашего поворота приметъ видъ

$$R - \frac{B(C-A)\alpha\gamma}{AC} P = 0.$$

Эти результаты показываютъ что при рѣшеніи задачи о движении тѣла въ рассматриваемомъ частномъ случаѣ можно замѣнить его материальными стержнемъ, совпадающими съ осью Z -овъ.

Дальнѣйшее интегрированіе приводится къ уравненію вида Рикатти

$$\frac{d\tau}{dt} = a\tau^2 + b\tau + c$$

Приводятся какъ частные случаи—вращеніе по инерціи, вращеніе тяжелаго тѣла около неподвижной точки въ случаѣ Гесса, движеніе волчка Гесса и пакоопець задача о движениіи шара съ гироскопомъ по плоскости. Въ предположеніи что шаръ снабженъ кольцомъ проф. Н. Е. Жуковскаго задача сводится къ показательнымъ и тригонометрическимъ функциямъ, при отсутствіи кольца (случай проф. Д. К. Бобылева) къ эллиптическимъ. (Болѣе подробно см. Сообщенія Харьковскаго Мат. Об. за 1898 г.).

Засѣданіе 18 марта 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Д. Ф. Селивановъ. «О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ».
- 2) Г. Миттагъ-Лефлеръ. «Объ однозначныхъ регулярныхъ функцияхъ».

Засѣданіе 22 апрѣля 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Ю. В. Сохоцкій «Объ эллиптическихъ функціяхъ».
- 2) Д. А. Граве. «Къ теоріи функцій двухъ вещественныхъ переменныхъ».

Засѣданіе 16 сентября 1898 года.

Предсѣдательствовалъ И. Л. Шташицкій.

По предложению Предсѣдателя избрали единогласно въ члены Общества Самуилъ Рафаиловичъ Дикштейнъ.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Д. А. Граве. «Объ особенныхъ линіяхъ, состоящихъ изъ прямолинейныхъ частей».
- 2) Д. Ф. Селивановъ. «Объ уравненіяхъ, корни которыхъ вещественны».

Засѣданіе 28 октября 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Д. А. Граве. «Объ особенной линіи, состоящей изъ прямолинейныхъ частей. Демонстрировалъ чертежъ».

- 2) И. И. Ивановъ. «О вычислениі предѣла одного отпоменія».
- 3) И. И. Ивановъ. «Объ одномъ слѣдствіи теоремы Ролля».
- 4) П. А. Шиффъ. «О теоріи совокупностей».

Засѣданіе 18 ноября 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

Доложено письмо Кіевскаго Математическаго Общества объ издаціи бібліографическаго указателя трудовъ русскихъ математиковъ въ теченіи настоящаго столѣтія,

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Д. А. Граве. «О работе Гульдберга о дифференціальномъ уравненіи: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ».
- 2) Н. Я. Сопинъ. «О нѣкоторыхъ параграфахъ курса интегрального исчислениія Іогдана».
- 3) П. А. Шиффъ. «О теоріи совокупностей».

Засѣданіе 16 декабря 1898 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ.

Были сдѣланы сообщенія:

- 1) Ю. В. Соходцкій. «Рѣшеніе уравненій 4-й степени съ приложеніями».
- 2) Д. А. Граве. «Объ одномъ вопросѣ Чебышева».

Засѣданіе 20 января 1899 года.

Предсѣдательствовалъ Д. К. Бобылевъ. Б. М. Коаловичъ сдѣлалъ сообщеніе «О методѣ Банки для нахожденія поверхностей съ постоянной кривизной».

Засѣданіе 17 февраля 1899 года.

Засѣданіе не состоялось по случаю беспорядковъ въ университѣтѣ.

Засѣданіе 17 марта 1899 года.

Предсѣдательствовалъ Д. Ф. Селивановъ. Предсѣдатель сообщилъ собранію обѣ утратѣ, которую понесло Общество въ лицѣ скончавшагося его члена С. К. Каминскаго.

Собрание почтило память усопшаго вставаніемъ.

Были сдѣланы слѣдующія сообщенія.

- 1) Д. А. Граве. а) «Объ одномъ свойствѣ катанія плоскости по шару» и б) «О неявныхъ функціяхъ».
- 1) Н. М. Гюнтеръ. «Объ интегрированіи уравненій 2-го порядка въ гипергеометрическихъ функціяхъ».